# 数学百科全书

第五卷

Sto — Z

索引

# 数学百科全书

## 第五卷

## Sto — Z

## 索引

科学出版社

2000

## 内 容 简 介

本书由三类条目组成。首先是介绍数学的各个主要方向的综述性条目（采用了一种很好的分科办法），对这类条目的基本要求是尽可能通俗全面地阐明有关领域发展的现状；这些条目一般可供大学数学系学生和数学邻近领域的研究生阅读，根据专业需要，还可供在工作中用到数学方法的其他科学领域的专家、工程师和数学教师阅读。其次，是一些中等篇幅的条目，专门介绍某些具体的数学问题和方法，这类条目内容较深，是为水平较高的读者而写的。最后，还有一类简短的条目，可供查阅定义时参考。本书附有主题索引，其中不仅包括所有条目的标题，还包括在前两类条目中给出定义的许多概念，以及在条目中提到的一些最重要的结果。多数条目附有参考文献。这部大型数学工具书的功能是很齐全的，读者范围是十分广泛的。

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР
И. М. ВИНОГРАДОВ
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭНЦИКЛОПЕДИЯ
ИЗДАТЕЛЬСТВО «СОВЕТСКАЯ ЭНЦИКЛОПЕДИЯ»


责任编辑　杜小杨　夏墨英　张鸿林
特邀编辑　葛显良　戴中器　沈海玉

# 数学百科全书
## 第五卷

《数学百科全书》编译委员会　编译
科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
中国科学院印刷厂 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2000年12月第一版　开本：787×1092 1/16
2000年12月第一次印刷　印张：61 1/4
印数：0 001—3 000　字数：2 093 000
ISBN 7-03-006427-5/O・985
定价：148.00元
（如有印装质量问题，我社负责调换〈科印〉）

# 數學百科全書

蘇步青題



# 《数学百科全书》

（第五卷）

## 编译委员会

# 序

在人类的思想史上，数学有一个基本和独特的地位。几千年来，从巴比伦的代数、希腊的几何、中国、印度、阿拉伯的数学，直到近代数学的伟大发展，虽然历史有时中断，但对象和方法则是一致的。数学的对象不外“数”与“形”，虽然近代的观念，已与原始的意义，相差甚远。数学的主要方法，是逻辑的推理。因之建立了一个坚固的思想结构。这些结果会对其他学科有用，是可以预料的。但应用远超过了想象。数学固然成了基本教育的一部分。其他科学也需要数学作理想的模型，从而发现相应科学的基本规律。

在这样蓬勃的发展中，数学的任务是艰巨的：它既需充实已有的基础，还需应付外来的冲击。一部完整的数学百科全书，便有迫切的需要。但兹事体大，许多合格的数学家，都望而却步。

我们有幸有这一套苏联的《数学百科全书》。它对数学的贡献，将无法估计。我们要了解，数学是一种“活”的学问：它的内容，不断在变化，在进展。我们现在大学研究院数学活动的内容，大部分在五十年前是不存在的，其他一部分则是昔贤伟大思想的精华，将历久而弥新。我建议《百科全书》每两年出一附录，包括新项目和旧项目的重写。如有佳构，不必拘泥编辑的方针。《百科全书》每隔若干年宜有新版。

面对着这座巨大的建筑，令人惶惑。百科全书原不为有涯之身所能控制的。数学工作者的使命在对某些选定的项目，增加了解和探索。本书将便利他们思考范围的推广。

我相信数学将有一个黄金时代，其中将有多数的中国数学家参加。希望本书能起相当的作用。

陳省身

# 出 版 说 明

数学的重要性是尽人皆知的。一个人从进小学开始到大学毕业为止，不论哪个专业，学习数学的时间至少都有 12 年至 14 年之久。一些自然科学领域，知天文学、力学、物理学、化学等，以及各工程技术学科，历来都是以数学为基础的。随着电子计算机的迅速发展和普及，生命科学、地学、军事科学和管理科学等方面也愈来愈多地用到数学，使速些学科从定性研究向定量研究发展。

由于数学所用的方法是逻辑推导，它有严格的定义和特定的符号，它的研究对象是抽象的数量关系和空间形式，没有相当的训练和基础知识的人是难子入门的，所以数学又使人望而生畏。另一方面，数学发展很快，文献数量呈指数增加，浩知烟海。一个人很难了解数学的许多方面，这就加重了数学发展和应用的困难。

苏联大百科全书出版社从 1977 年到 1986 年，历时 10 年，出版了苏联科学院院士、世界著名数学家 ИМ 维诺格拉多夫（Виноградов）主编、几百位数学家共同撰写的一部《数学百科全书》(Математическая энциклопедия)，约 900 万字。它的重要性是极为显著的。不久，荷兰的莱德尔出版公司出版了由 180 位面方数学家参加翻译的英文版 (Encyclopaedia of mathematics)。英文版增补了大量最新成果、重要的面方文献和编者注，因而其内容关加充实和完善。

苏联《数学百科全书》出版后，我国很多著名数学家和数学教师纷纷要术将这部书译成中文出版，使我国广大科学工作者（特别是数学工作者）、工程技术人员、教师和学生有一部内容极其丰富的工具书，可以从中查阅所需要的数学知识及作进一步了解的线索。这无疑是一件十分重要的事情。

中国数学会常务理事会经这认真讨论，完全支持我国广大数学家和科技人员的要术，决定领导这部《数学百科全书》的编译工作，并将它列为

中国数学会最重要的工作之一；随后，立即成立了编译委员会，负责具体的组织工作。由于我国广大数学家的热情支持和参加，所以编译工作进展比较顺利。必须指出，科学出版社始终将这项工作作为该社的一项重点任务来抓，编辑人员为此付出了长期的艰苦劳动。

本书中文版分五卷，包括了俄文版的全部内容和英文版增补的内容。为尽快出版，条目按英文字母顺序排列。在第五卷中，附有详尽的中文和外文索引。

本书除中文简体字版本以外，还有繁体字版，繁体字版由台湾九章出版社出版发行。这也是海峡两岸数学家和出版界人士的一次良好合作。

老一辈数学家苏步青教授为本书题写书名，陈省身教授作序，苏步青、陈省身、吴文俊、程民德教授应邀担任编译委员会顾问。对于他们的支持，谨致以衷心的感谢！

最后，对于书中欠妥和错误之处，还望读者不吝指教。

《数学百科全书》编译委员会

本书由河北省雄县电脑服务部排版，谨此致谢！

# 编 译 人 员 名 单

丁德成　卫念祖　马传渔　王　杰　王　驹　王仁宏　王公恕　王世强　王克仁
王志玺　王声望　王伯英　王斯雷　仇庆久　牛凤文　方嘉琳　邓邦明　石生明
叶其孝　叶彦谦　叶家琛　卢景波　史应光　史树中　白苏华　冯绪宁　冯德兴
成　斌　吕义忠　朱治强　朱学贤　朱建平　朱胜林　刘木兰　刘永平　刘光仿
刘秀芳　刘和平　刘振宏　刘椿年　刘德辅　齐民友　庄峰青　许以超　许永华
许依群　孙以丰　孙永生　孙和生　孙智伟　杜　宏　杜小杨　杜瑞芝　杨　路
杨东屏　杨吟林　杨劲根　杨恩辉　杨维奇　苏开乐　苏维宜　李　乔　李　廉
李国英　李贵松　李荫藩　李炳仁　李家楷　李维新　李慧陵　肖　杰　别荣芳
吴启光　吴绍平　吴炯圻　何　青　何育赞　佟文庭　余庆余　余建明　沈　青
沈一兵　沈世镒　沈永欢　沈纯理　沈信耀　沈复兴　沈祖和　沈海玉　宋方敏
张　平　张印火　张再跃　张英伯　张明尧　张宝琳　张爱和　张景中　张鸿林
张锦文　陆柱家　陆珊年　陈一元　陈公宁　陈世华　陈式刚　陈志华　陈志杰
陈希孺　陈怀惠　陈迪荣　陈培德　陈维桓　陈翰馥　林亚南　林向岩　林金坤
罗里波　罗嵩龄　周芝英　周民强　周伯埙　周蔚清　周根容　孟道骥　金保侠
郑应平　郑忠国　郑恒武　郑洪琛　郑维行　郑锡忠　胡师度　胡宣达　郝钢新
赵希顺　赵春朱　钟　集　钟同德　钟萃豪　侯纪欣　侯晓荣　段海豹　姜国英
骆　源　袁国兴　莫绍揆　夏小华　晏名文　钱宝峰　钱敏平　徐广善　徐定宥
徐森林　徐锡申　郭元春　郭聿琦　郭思旭　郭祥东　高为炳　高红铸　高琪仁
唐　云　唐梓洲　唐福林　唐锡荣　容尔谦　诸德超　陶　波　陶仁骥　陶懋颀
黄　琳　黄正中　黄且圆　黄华乐　曹成铉　龚明鹏　戚余录　戚鸣皋　眭跃飞
符方伟　章　璞　韩继业　韩耀新　彭联刚　葛显良　蒋正新　蒋志根　蒋滋梅
程　虎　程民德　鲁世杰　曹振柄　谢晖春　蓝以中　虞言林　鲍　丰　蔡大用
蔡传仁　蔡贤德　蔡金星　裴定一　潘一民　潘文杰　潘建中　潘承彪　潘养廉
薛春华　戴中器　戴执牛　檀结庆

**随机逼近** [stochastic appoximation; стохастическая аппроксимация]

一类统计估计 (statistical estimation) 问题的求解方法. 用这种方法求解, 估计量的新值是基于新观测值对已有估计值的修正. 第一个随机逼近的方法是 H. Robbins 和 S. Monro 于 1951 年提出的.

设函数 $R(x)(x\in\mathbf{R}^1)$ 在点 $X_n$ 的每一观测值 $Y_n(X_n)$, 都含均值为 0 的随机误差. Robbins-Monro 随机逼近方法 (Robbins-Monro procedure of stochastic appoximation) 以

$$X_{n+1}=X_n+a_n[Y_n(X_n)-\alpha] \qquad (1)$$

的形式求方程 $R(x)=\alpha$ 的根. 假如 $\sum a_n=\infty$, $\sum a_n^2<\infty$, $R(x)$ (例如) 是增函数, $|R(x)|$ 不比线性函数增长得快, 随机误差相互独立, 则 $X_n$ 以概率 1 和在均方意义下收敛于方程 $R(x)=\alpha$ 的根 $x_0$ (见 [1], [2]). 由 (1) 可见, 随机逼近法是递归的, 它不必记忆旧的测量结果 $Y_n$ 即可得到新的估计值. 在事先不知何时需要提取估计值的情形下, 随机逼近法便于根据当时的观测不间断地形成估计值. 这些特点, 使随机逼近法接近递归滤波, 并且决定随机逼近法在理论工作和实际工作中应用的广泛性. 方法 (1) 可以直接推广到多维情形.

另一种随机逼近法属于 J. Kiefer 和 J. Wolfowitz, 用于求回归函数 $R(x)$ 的极大值点. 设 $Y_n(x)$ 是在点 $x$ 处的观测值, 则 Kiefer-Wolfowitz 随机逼近方法 (Kiefer-Wolfowitz procedure of stochastic approximation) 取形式

$$X_{n+1}-X_n=\frac{Y_n(X_n+C_n)-Y_n(X_n-C_n)}{2C_n}. \qquad (2)$$

可以证明, $X_n$ 收敛于函数 $R(x)$ 的极大值点 $x_{\max}$, 假如满足如下条件: 当 $x\neq x_{\max}$ 时 $R'(x)(x-x_{\max})<0$; 当 $|x|\to\infty$ 时, 回归函数和随机误差的方差增长的不是太快; 并且

$$a_n>0,\ \sum C_n=\infty,\ C_n>0,$$

$$\sum a_nC_n<\infty,\ \sum\frac{a_n^2}{C_n^2}<\infty,\ C_n\to 0.$$

Kiefer-Wolfowitz 随机逼近法也容许多维推广, 这时式 (2) 右侧应为函数 $Y_n(x)$ 的梯度的近似值.

随机逼近法可以自然地推广到连续观测过程. 例如, 假如观测过程受 Gauss 白噪声的干扰, 则与方法 (1) 的类似取形式

$$dX(t)=a(t)dY(t),$$

其中

$$dY(t)=R(X(t))dt+\sigma(X(t),t)dw(t)$$

是被观测过程的微分, $w(t)$ 是 **Wiener 过程** (Wiener process). 连续方法的收敛条件, 与上面对离散时间引进的条件类似 (见 [2]). 证明随机逼近法收敛性的基本工具, 是关于非负上鞅的收敛定理 (见**鞅** (martingale)).

研究了当 $n\to\infty$ 时, 在差 $X_n-x_0$ 的相应范数下的极限性质. 在式 (1) 中设

$$a_n=an^{-1},\ Y_n(X_n)=R(X_n)+G(n,X_n,\omega),$$

且当 $n\to\infty$ 时几乎必然 $X_n\to x_0$. 在某些条件下, 其中主要是: 当 $n\to\infty$, $x\to x_0$ 时, 有

$$R'(x_0)<0,\ aR'(x_0)+\frac{1}{2}<0,$$

$$\mathrm{E}\,G^2(n,x,\omega)\to S_0,$$

可以证明, 随机变量 $Z_n=\sqrt{n}\ (X_n-x_0)$ 有渐近正态分布, 参数为 0 和 $a^2S/[-2aR'(x_0)-1]$. 当 $a_0=-[R'(x_0)]^{-1}$ 时极限分布的方差最小. 这样选择 $a$ 是不可能的, 因为函数 $R(x)$ 及其导数对于观测者是未知的. 不过, 在一些工作中建立了适应性方法, 使 $a=a(n)$ 依赖于观测且当 $n\to\infty$ 时趋向 $a_0$. 这些方法的相对渐近方差具有渐近最优性.

在多维情形下也有渐近正态性的结果. 设矩阵

$$A=a\frac{\partial R}{\partial x}(x_0)+\frac{1}{2}I$$

的全部根都有非负的实部 ($I$ 是单位矩阵), 当 $n\to\infty$, $x\to x_0$, $X_n\to x_0$ 时, 几乎必然有

$$\mathrm{E}\,G(n,x,\omega)G^*(n,x,\omega)=S(n,x)\to S_0;$$

此外, 假设满足其他一些不十分强的条件. 那么, 随机向量 $Z_n=\sqrt{n}\ (X_n-x_0)$ 有渐近正态分布, 均值为 0, 协方差矩阵为

$$S=a^2\int_0^\infty \exp(At)S_0\exp(A^*t)\,dt.$$

前面引进的 Robbins-Monro 渐近最优方法的有关结果亦可推广到多维情形. 已经证明, 在对数尺度下, 随机过程 $Z_n$ 收敛于 Gauss Марков 过程. 在某些条件下证明了, 随机变量 $X_n$ 的矩收敛于极限分布

的矩．在非参数情形下，随机逼近法是很方便的．因为在缺乏关于回归函数的先验信息时它仍然能应用．不过，这种方法也用于根据密度为 $f(x;\theta)$ 的独立观测值 $X_1,\cdots,X_n$ 来估计参数 $\theta$．在某些条件下，由递推公式

$$\theta_{n+1}-\theta_n=\frac{1}{n}I^{-1}(\theta_n)\mathrm{grad}_\theta\ln f(X_{n+1},\theta_n)$$

得到的估计量，是参数 $\theta$ 的相合及渐近有效递归估计量，其中 $I(\theta)$ 是密度 $f$ 的 Fisher **信息矩阵**（infomation matrix）．在连续时间的情形下，有类似的方法．

对回归函数有若干个零点（若干个极值点）的情形，以及对随机逼近法的各种变形和推广，研究了随机逼近法的性质．

**参考文献**


[1] Wasan, M. T., Stochastic approximation, Cambridge Univ. Press, 1969.

[2] Невельсон, М. Б., Хасьминский, Р. З., Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание, М., 1972（英译本：Nevel'son, M. B. and Khas'minskiI, R. Z., Stochastic approximation and recursive estimation, Amer. Math. Soc., 1976）.

[3] Цыпкин, Я. З., Адаптация и обучение в автоматических системах, М., 1968（英译本：Tsypkin, Ya. Z., Adaption and learning in automatic systems, Acad. Press, 1973）.

[4] Цыпкин, Я. З., Основы теории обучающих систем, М., 1968（英译本：Tsypkin, Ya. Z., Foundations of the theory of learning systems, Acad. Press, 1973）.


Р. З. Хасьминский 撰

【补注】 随机逼近的收敛性以及其他递推算法已成为许多研究的对象．方法之一是“常微分方程法”（[A1]，[A2]），基于将（1）和（2）的适当度量的变式，视为常微分方程或随机微分方程的解的 Euler 逼近．算法的渐近性质，与相应的常微分方程或随机微分方程解的稳定性有关．还引进了基于紧性和弱收敛性的一些方法．

**参考文献**


[A1] Kushner, H. J. and Clark, D. S., Stochastic approximation methods for constrained and unconstrained systems, Springer, 1978.

[A2] Ljung, L., Analysis of recursive stochastic algorithms, *IEEE Trans Autom. Control*, AC-22 (1977), 551–575.


周概容 王健 译

**随机基** [**stochastic basis; стохастический базис**]

一个完全概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathrm{P})$，具有子 $\sigma$ 代数 $\mathscr{F}_t\subseteq\mathscr{F}$ 的上升族 $\mathbf{F}=(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant0}$，这个族满足（所谓通常）条件：

1）它必须是右连续的：$\mathscr{F}_t=\mathscr{F}_{t+}\ (=\bigcap_{s>t}\mathscr{F}_s)$，$t\geqslant0$；

2）它必须是完全的，即 $\mathscr{F}_t$ 包含一切来自 $\mathscr{F}$ 的 P 测度为零的子集．

对随机基也常使用记号 $(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{F},\mathrm{P})$ 或 $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant0},\mathrm{P})$．

А. Н. Ширяев 撰

【补注】 通常称 $\sigma$ 代数的上升族为 $\sigma$ 域流（filtration）．

刘秀芳 译 陈培德 校

**随机有界性** [**stochastic boundedness; стохастическая ограниченность**]，依概率有界性（boundedness in probability）

由如下条件表达的**随机过程**（stochastic process）$X(t)\ (t\in T)$ 的性质：对任意 $\varepsilon>0$，存在 $C>0$，使对所有 $t\in T$，

$$\mathrm{P}\{|X(t)|>C\}<\varepsilon.$$

А. В. Прохоров 撰 潘一民 译

**随机连续性** [**stochastic continuity; стохастическая непрерывность**]

**随机过程**（stochastic process）的一种性质．在集合 $T\subseteq\mathbf{R}^1$ 上定义的随机过程 $X(t)$ 称为在 $T$ 上随机连续的（stochastically continuous），如果对任意 $\varepsilon>0$ 和一切 $t_0\in T$，

$$\lim_{t\to t_0}\mathrm{P}\{\rho[X(t),X(t_0)]>\varepsilon\}=0,$$

其中 $\rho$ 是 $X(t)$ 的值在相应空间中两点之间的距离．

**参考文献**


[1] Прохоров, Ю. В., Розанов, Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973（英译本：Prokhorov, Yu. V. and Rozanov, Yu. A., Probability theory, Springer, 1979）.


А. В. Прохоров 撰 刘秀芳 译 陈培德 校

**随机收敛** [**stochastic convergence; стохастическая сходимость**]

同依概率收敛（convergence in probability）．

**随机相依性** [**stochastic dependence; стохастическая зависимость**]，概率相依性（probabilistic dependence），统计相依性（statistical dependence）

随机变量之间的一种相依性．它用任意一个变量当其他变量变化时其条件分布的改变来表示．随机相依性有许多形式：如果随机变量不相互独立，则必定具有或大或小的随机相依性．最普通的随机相依性类型之一称为相关（见**相关（统计中的）**（correlation (in statistics)）；回归（regression））．随机相依性的具体形式，研究最多的是 Марков 相依性（见 **Марков 链**（Markov chain）；**Марков 过程**（Markov process）；

Марков 性质 (Markov property)).

亦见随机过程 (stochastic process); **平稳随机过程** (stationary stochastic process).

А. В. Прохоров 撰 刘秀芳 译 陈培德 校

**随机微分 [stochastic differential; стохастический дифференциал]**

一种关于随机基 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}, \mathrm{P})$ 的半鞅类 $S$ 中的每个过程 $X=(X_t, \mathscr{F}_t, \mathrm{P})$ 用公式

$$(dX)I = X_t - X_s, \ I=(s,t],$$

定义的随机区间函数 $dX$. 在随机微分族 $dS=\{dX: X\in S\}$ 中用下面公式引入过程的加法 (A), 过程的乘法 (M) 及乘积算子 (P):

(A) $dX + dY = d(X+Y)$;

(M) $(\Phi dX)(s\ t] = \int_s^t \Phi dX$ (**随机积分** (stochastic integral), $\Phi$ 是局部有界可料过程且适应于 $\sigma$ 域流 $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$));

(P) $dX \cdot dY = d(XY) - X_- dY - Y_- dX$, 其中 $X_-$ 和 $Y_-$ 是 $X$ 和 $Y$ 的左连续等价形.

由它得出

$$(dX\cdot dY)(s,t] = = \underset{|\Delta|\to 0}{\mathrm{l.i.p}} \sum_{i=1}^{n} (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})(Y_{t_i} - Y_{t_{i-1}}),$$

其中 $\Delta = (s=t_0<t_1<\cdots<t_n=t)$ 是区间 $(s, t]$ 的任意分割, l.i.p 是依概率极限, 而 $|\Delta| = \max_i |t_i - t_{i-1}|$.

在随机分析中, 随机函数的微分原理或**伊藤公式** (Itô formula) 是重要的. 如果 $X^1, \cdots, X^n \in S$ 且函数 $f(x_1, \cdots, x_n)\in C^2$, 则

$$Y = f(X^1, \cdots, X^n)\in S$$

且

$$df(X^1,\cdots,X^n) = = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f\cdot dX^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i\partial_j f\cdot dX^i dX^j, \quad (1)$$

其中 $\partial_i$ 是对第 $i$ 个坐标的偏导数. 特别是, 如果 $X\in S$, 则由 (1) 可得

$$f(X_t) = = f(X_0) + \int_0^t f'(X_{s-})dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d\langle X\rangle^c + + \sum_{0<s\leq t} [f(X_s) - f(X_{s-}) - f'(X_{s-})\Delta X_s], \quad (2)$$

其中 $X^c$ 是 $X$ 的连续鞅部分, $\Delta X_s = X_s - X_{s-}$.

公式 (2) 可用下述形式给出:

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_{s-})dX_s + + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d[X,X]_s + \sum_{0<s\leq t}[f(X_s) - - f(X_{s-}) - f'(X_{s-})\Delta X_s - \frac{1}{2}f''(X_s)(\Delta X_s)^2],$$

其中 $[X,X]$ 是 $X$ 的二次变差.

**参考文献**


[1] Itô, K. and Watanabe, S., Introduction to stochastic differential equations, in K. Itô (ed.): Proc. Int. Symp. Stochastic Differential Equations, Kyoto, 1976, Wiley, 1978, I – XXX.

[2] Гихман, И. И., Скороход, А. В., Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения, К., 1982.


【补注】 乘积 $dX\cdot dY$ 更常写作 $d[X,Y]$, 其中"方括号" $[X,Y]$ 是一个具有限变差的过程, 使得 $[X,Y]_t = X_0Y_0 + dX\cdot dY(0,t]$. 当 $X=Y$ 时, 得到二次变差 $[X,X]$, 它被用在本条末. 实际上, 它是概率二次变差: 当 $X$ 是标准 Brown 运动时, $d[X,X]$ 是 Lebesgue 测度, 而轨道真实的二次变差几乎必然是无穷的. 亦见**半鞅** (semi-martingale); **随机积分** (stochastic integral); **随机微分方程** (stochastic differential equation).

对非平坦流形连续轨道随机过程的研究, 伊藤随机微分是不方便的, 因为伊藤公式 (2) 与联系着不同坐标系的通常微分规则不相容. 使用 Стратонович 微分 (Stratonovich differential), 可以得到一个与坐标无关的描述方法. 见 [A1], [A2], 第 5 章, [A3], 以及 **Стратонович 积分** (Stratonovich integral).

**参考文献**


[A1] Elworthy, K. D., Stochastic differential equations on manifolds, Cambridge Univ. Press, 1982.

[A2] Ikeda, N. and Watanabe, S., Stochastic differential equations and diffusion processes, North-Holland, 1989, p. 97ff.

[A3] Meyer, P. A., Geometric stochastiques sans larmes, in J. Azéma and M. Yor (eds.): Sem. Probab. Strassbourg XV, Lecture Notes in Math., Vol. 850, Springer, 1881, 44 – 102.

[A4] Karatzas, I. and Shreve, S. E., Brownian motion and stochastic calculus, Springer, 1988.

[A5] Rogers, L. C. G. and Williams, D., Diffusion, Markov processes, and martingales, 2, Itô calculus, Wiley, 1987.

[A6] Albeverio, S., Fenstad, J. E., Høegh-Krohn, R. and Lindstrøm, T., Nonstandard methods in stochastic analysis and mathematical physics, Acad. Press, 1986


刘秀芳 译 陈培德 校

**随机微分方程** [**stochastic differential equation**; **стохастическое дифференциальное уравнение**], 对一个过程 $X = X(t)_{t\geq 0}$ 关于 Wiener 过程 $W = (W_t)_{t\geq 0}$ 的形如

$$dX_t = a(t,X)dt + b(t,X)dW_t,\ X_0 = \xi \quad (1)$$

的一个方程, 其中 $a(t,X)$ 和 $b(t,X)$ 是非预料的泛函, 而随机变量 $\xi$ 起着初始值的作用. 对随机微分方程的解有两种不同的概念 —— 强的和弱的.

设 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 是具有上升 $\sigma$ 代数族 $\mathbf{F} = (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ 的概率空间, $W = (W_t, \mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ 是一个 Wiener 过程. 称连续随机过程 $X = (X_t, \mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ 是随机微分方程 (1) 的具有漂移系数 $a(t,X)$, 扩散系数 $b(t,X)$ 和初始值 $\xi$ 的强解 (strong solution), 如果对一切 $t>0$、以概率 1 有

$$X_t = \xi + \int_0^t a(s,X)ds + \int_0^t b(s,X)dW_s, \quad (2)$$

其中假定 (2) 中的积分有定义.

关于形如

$$dX_t = a(t,X_t)dt + b(t,X_t)dW_t \quad (3)$$

的随机微分方程的强解的存在和唯一性的第一个一般结果由伊藤得到. 他证明了如果对一切 $t>0$, 函数 $a(t,x)$ 和 $b(t,x)$ 关于 $x$ 满足 Lipschitz 条件且增长不比线性更快, 则方程 (3) 的连续解 $X = (X_t, \mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ 存在且在下述意义上是唯一的: 如果 $Y = (Y_t, \mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ 是另一个连续解, 则

$$\mathsf{P}\{\sup_{s\leq t}|X_s - Y_s| > 0\} = 0,\ t\geq 0.$$

如果 $b(t,x) =$ 常数, 漂移系数 (向量) $a(t,x)$ 的可测性和有界性保证了 (3) 的强解的存在和唯一性. 方程 $dX_t = a(t,X)dt + dW_t$, 一般地说, 对任意有界的非预料泛函 $a(t,X)$ 都没有强解.

当研究随机微分方程 (1) 的弱解概念时, 概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 及其 $\sigma$ 代数族 $\mathbf{F} = (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$, Wiener 过程 $W = (W_t, \mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ 以及随机变量 $\xi$ 都不必预先固定, 而对连续函数 $X = (X_t)_{t\geq 0}$ 定义的非预料泛函 $a(t,X)$, $b(t,X)$ 以及分布函数 $F(x)$ (可谓初始值) 是给定的. 那么对给定的 $a(t,X)$, $b(t,X)$ 及 $F(x)$, 方程 (1) 的弱解 (weak solution) 理解为下述对象的集合:

$$\widetilde{\mathscr{S}} = (\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathscr{F}}, (\widetilde{\mathscr{F}}_t)_{t\geq 0}, \widetilde{W} = (\widetilde{W}_t)_{t\geq 0},$$
$$\widetilde{X} = (\widetilde{X}_t)_{t\geq 0}, \widetilde{\mathsf{P}}),$$

其中 $\widetilde{W} = (\widetilde{W}_t)_{t\geq 0}$ 是关于 $((\widetilde{\mathscr{F}}_t)_{t\geq 0}, \widetilde{\mathsf{P}})$ 的 Wiener 过程, 而 $\widetilde{W}$ 和 $\widetilde{X}$ 用

$$\widetilde{X}_t = \widetilde{X}_0 + \int_0^t a(s, \widetilde{X})ds + \int_0^t b(s, \widetilde{X})d\widetilde{W}_s$$

相联系, 且 $\widetilde{\mathsf{P}}(\widetilde{X}_0 \leq x) = F(x)$. 有时 "弱解" 这一术语只应用于出现在集合 $\widetilde{\mathscr{S}}$ 中的过程 $\widetilde{X}$. 方程 (3) 的弱解在较弱的条件下存在. 例如, 只要 $b^2(t,x)\geq c>0$, $b^2(t,x)$ 是关于 $(t,x)$ 连续的, $a(t,x)$ 关于 $(t,x)$ 可测以及 $|a|+|b|\leq$ 常数, 就足够了.

**半鞅** (semi-martingale) 和随机测度的**随机积分** (stochastic integral) 理论的发展导致对更一般的随机微分方程的研究. 其中半鞅和随机测度用作生成元 (与 Wiener 过程一起). 下述结果是典型的: 设 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 是一概率空间, $\mathbf{F} = (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ 是一上升 $\sigma$ 代数族, $Z = (Z_t, \mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ 是 $m$ 维半鞅, 并设 $G(t,X) = \|g^{ij}(t,X)\|_{ij}$ 是由非预料泛函 $g^{ij}(t,X)$ 组成的矩阵, 使得

$$|g^{ij}(t,X) - g^{ij}(t,Y)| \leq L_t^{ij}\sup_{s\leq t}|X_s - Y_s|,$$

其中 $L_t^{ij}$ 关于 $t$ 增长得不太快, 则随机微分方程 $dX_t = G(t,X)dZ_t$, $X_0 = 0$ 有唯一的强解.

如果函数 $a(t,x)$ 和 $b(t,x)$ $(t\geq 0,\ x\in\mathbf{R})$ 满足 Lipschitz 条件 (关于 $x$) 且增加得不比线性快, 则方程 (3) 的解 (在**随机等价** (stochastic equivalence) 的意义上唯一) $X = (X_t)_{t\geq 0}$ 是一个 Марков 过程. 并且, 如果 $a(t,x)$ 和 $b(t,x)$ 对所有变量是连续的, 则这一解是扩散过程. 使用随机微分方程, 仅从 Wiener 过程出发即可构造 Марков 过程和扩散过程.

给定关于函数 $a(t,x)$ 和 $b(t,x)$ 的某些额外的光滑性条件, 方程 (3) 具有初始条件 $X_0^x = x$ 的解 $(X_t^x)_{t\geq 0}$, 是使得函数 $u(s,x) = \mathsf{E}f(X_s^x)$ (给定充分光滑的函数 $f(x)$) 满足以下向后 Колмогоров 方程的过程:

$$\frac{\partial u(s,x)}{\partial s} + a(s,x)\frac{\partial u(s,x)}{\partial x} +$$
$$+ \frac{b^2(s,x)}{2}\frac{\partial^2 u(s,x)}{\partial x^2} = 0,$$

在区域 $s\in(0,t)$, $x\in\mathbf{R}$, 具有边界条件

$$\lim_{s\downarrow 0} u(s,x) = f(x).$$

**参考文献**


[1] Гихман, И. И., Скороход, А. В., Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения, К., 1982 (英译本: Gikhman, I. I. and Skorohod, A. V., Stochastic differential equations and their applications, Springer, 1972)

[2] Липцер, Р. Ш., Ширяев, А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974 (英译本: Liptser, R. Sh. and Shiryaev, A. N., Statistic of random processes,

1 – 2, Springer, 1977 – 1978). A. H. Ширяев 撰

【补注】

[A1] Arnold, L., Stochastic differential equations, Wiley, 1974 (译自俄文).
[A2] Bunke, H., Gewöhnliche Differentialgleichungen mit zufällige Parametern, Akademie Verlag, 1972.
[A3] Freedman, A., Stochastic differential equations and applications, 1, Acad. Press, 1975 (中译本: A. 弗里德曼, 随机微分方程及其应用, 科学出版社, 1983 – 1986).
[A4] Hasminski, R. Z., Stochastic stability of differential equations, Sijthoff & Noordhoff, 1980 (译自俄文).
[A5] Ikeda, N. and Watanabe, S., Stochastic differential equations and diffusion processes, North-Holland, 1981.
[A6] Soong, T. T., Random differential equations in science and engineering, Acad. Press, 1973.
[A7] Srinivasan, S. K. and Vasudevan, R., Introduction to random differential equations and their applications, Amer. Elsevier, 1971.
[A8] Stratonovich, R. L., Topics in the theory of random noise, 1 – 2 Gordon & Breach, 1963 – 1967.
[A9] Stroock, D. W. and Varadhan, S. R. S., Multidimensional diffusion processes, Springer, 1979.
[A10] Gard, Th., Introduction to stochastic differential equations, M. Dekker, 1988.
[A11] Øksendahl, B., Stochastic differential equations, Springer, 1987.
[A12] Protter, P., Stochastic integration and differential equations, Springer, 1990.
[A13] Albeverio, S. and Röckner, M., Stochastic differential equations in infinite dimensions: solutions via Dirichlet forms, *Probab. Th. Rel. Fields*, 89 (1991), 347 – 386.
[A14] Elworthy, K. D., Stochastic differential equations on manifolds, Cambridge Univ. Press, 1982.
[A15] Emery, M., Stochastic calculus in manifolds, Springer, 1989 (P. A. Meyer: 附录).
[A16] Sobczyk, K., Stochastic differential equations. With applications to physics and engineering, Kluwer, 1991.

刘秀芳 译 陈培德 校

**随机等价 [stochastic equivalence; стохастическая эквивалентность]**

随机变量之间的等价关系，它们仅在零概率集上有差别．更严格地说，定义在同一概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ 上的两个随机变量 $X_1$ 和 $X_2$ 称为随机等价的 (stochastically equivalent)，如果 $\mathrm{P}\{X_1 = X_2\} = 1$．在绝大多数概率论问题中处理的都是等价的随机变量类而不是随机变量本身．

定义在同一概率空间上的两个随机过程 $X_1(t)$ 和 $X_2(t)$ $(t \in T)$ 称为是随机等价的 (stochastically equivalent)，如果对任意 $t \in T$，相应地随机变量之间的随机等价性成立．$\mathrm{P}\{X_1(t) = X_2(t)\} = 1$．关于随机过程，"随机等价"有时也用在具有相同有限维分布的随机过程 $X_1(t)$ 和 $X_2(t)$ 这种广泛的意义上．

A. B. Прохоров 撰

【补注】 随机变量或随机过程的随机等价类的成员有时被看作等价类中成员的一个等价型 (version)．随机变量或随机过程的一个等价型也称为一个修正 (modification)．

参考文献

[A1] Doob, J. L., Classical potential theory and its probabilistic counterpart, Springer, 1984, p. 390.
[A2] Gihman, I. I. and Skorohod, A. V., The theory of stochastic processes, 1, Springer, 1974, p. 43ff (译自俄文).
[A3] Dellacherie, C., Capacités et processus stochastiques, Springer, 1972, p. 46.
[A4] Skorohod, A. V., Random processes with independent increments, Kluwer, 1991, p. 9 (译自俄文).
[A5] Liptser, R. Sh. and Shiryayev, A. N., Theory of martingales, Kluwer, 1989, p. 4 (译自俄文).

刘秀芳 译 陈培德 校

**随机对策 [stochastic game; стохастическая игра]**

一种**动态对策** (dynamic games)，这时转移分布函数不依赖于对策的历史，即

$$F(x_k | x_1, s^{(x_1)}, \cdots, x_{k-1}, s^{(x_{k-1})}) =$$
$$= F(x_k | x_{k-1}, s^{(x_{k-1})}).$$

随机对策首先是由 L. S. Shapley ([1]) 定义的，他研究了带实性能指标的双人零和随机对策 (Shapley 对策 (Shapley games))．在 Shapley 对策中，对策状态集 $X$ 和局中人纯策略集都是有限的，并且在任何一步对于由局中人所作出的任何一种两择一选择，都存在一中断该对策的非零概率．由于这一条件，对策在有限多步后中断的概率为 1，并且每个局中人的性能指标的数学期望均为有限．任何这样的对策都有一个值，并且两个局中人都有平稳最优策略 (stationary optimal strategies)，即按这些策略，局中人在对策过程的每一阶段选择的初等策略，仅取决于目前的状态．Shapley 还发现了一种办法，据此有可能既找到对策的值，又找到最优策略．

对另一种随机对策也已进行了研究，与 Shapley 对策的区别在于可以是无穷的；这样的对策称为具有极限均值性能指标的随机对策 (stochastic games with limiting mean pay off)，即具有

$$h_1(P) = -h_2(P) = \lim_{n \to \infty} \sup \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} h_i(x_k, s^{(x_k)})$$

的双人零和随机对策．假定当任何平稳策略代入转移函数 $F(x_k | x_{k-1}, s^{(k-1)})$ 中时 Марков 链的遍历性成立，则已经证明了这样的对策和平稳最优策略的值存在．这些结果已经被推广到对状态和初等策略数目无限制的情形和别的性能指标形式的情形．

**参考文献**


[1] Shapley, L. S., Stochastic games, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 39 (1953), 1095 – 1100.

[2] Gillette, D., Stochastic games with zero stop probabilities, in Contributions to the Theory of Games, Vol. 3, Princeton Univ. Press, 1957, 179 – 187.

[3] Parthasarathy, T. and Stern, M., Markov games: A survey, in E. Roxin, P. Liers and R. Sternberg (eds.): Differential Games and Control Theory, M. Dekker, 1977, 1 – 46.

[4] Vrieze, K., Zero-sum stochastic games, in Surveys in Game Theory and Related Topics, Tracts, Vol. 39, CWI, 1987, 103 – 132.

[5] Domanskii, V. K., Kibernetik, 1 (1988), 26 – 49.


В. К. Доманский 撰

【补注】 在 1981 年，J. F. Mertens 和 A. Neyman 证明了具有极限均值性能指标的任意随机对策的值的存在性 [A2].

关于使用折扣性能指标的随机对策的渐近理论，已经有大量的研究，见 [A1] – [A3].

**参考文献**


[A1] Bewley, T. and Kohlberg, E., The asymptotic theory of stochastic games, *Math. Oper. Res.*, 1 (1976), 197 – 208.

[A2] Mertens, J. F. and Neyman, A., Stochastic games have a value, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 79 (1982), 2145 – 2146.

[A3] Raghavan, T. E. S., Ferguson, T. S., Parthasarathy, T. and Vrieze, O. J. (eds.): Stochastic games and related topics (in honor of L. S. Shapley), Kluwer, 1991.


冯德兴 译

**随机几何学** [**stochastic geometry**; **стохастическая геометрия**]

研究几何学与概率论之间的关系的数学学科．随机几何学发展自古典的**积分几何学** (integral geometry) 以及**几何概率** (geometric probability) 问题，而从随机过程理论，尤其是点过程理论引出思想与方法．

随机几何学的基本概念之一是"基本"空间 $X$ 中的几何元素过程（几何过程）的概念；几何过程定义为表示（基本）事件空间的流形上的点过程．例如，平面上的直线过程就定义为 Möbius 带（表示 $\mathbf{R}^2$ 上直线的空间）上的点过程．其他研究过的过程还有，$\mathbf{R}^n$ 中的 $d$ 维平面过程，$\mathbf{R}^n$ 中的凸图形过程，$\mathbf{R}^n$ 中的随机镶嵌（可看成是以概率 1 其内部不相交、而 $\mathbf{R}^n$ 等于其闭包之并的凸多面体过程）等等．

流形上的过程构成一个更一般的概念；这里随机几何学与随机集合论联系起来了（见 [1]）．

随机几何学另一个不同于随机集合论的特点是，随机几何学所关心的在于其分布对于作用在基本空间 $X$ 上的群是不变的几何过程．下面就是这个方向上的一个典型的结果（见 [2]），目的是研究 $\mathbf{R}^2$ 上的那些直线过程，它们具有有限强度，且对于平面上的 Euclid 运动群是不变的．一个过程称为非奇异的 (non-singular)，如果它的 Palm 分布和对于此过程的（无条件）分布是绝对连续的．所有非奇异的直线过程都是重随机 Poisson 过程（即受一随机测度控制的 Poisson 过程）．对于 $\mathbf{R}^n$ 中的点过程，这一事实并不成立．

对于群不变的其他几何过程的若干相当出人意料的性质，已经用组合积分几何的工具得以发现（见 [3]）．其中如下的结果就是在过程的实现空间上用平均组合分解的方法得到的（见 [3]）．在 $\mathbf{R}^2$ 上研究一个随机集 $U$，它是某个对于 Euclid 群不变的凸区域过程的区域之并．设 $U$ 为黑色集而它的补集为白色．由集 $U$ 在线 $0x$ 上所导出的黑白区间交替的过程称为黑色更新过程，如果：

a) 白色区间 $a_i$ 组成一独立的更新过程；

b) 三元组 $(b_i, \alpha_i, \beta_i)$ 对于不同的 $i$ 是独立的，其中 $b_i$ 是第 $i$ 个黑色区间的长度，而 $\alpha_i$, $\beta_i$ 是 $0x$ 与 $\partial U$ 在 $b_i$ 端点的交角．

在遍历性和某些矩的存在性这样的一般假定下，以及当 $\partial U$ 上没有直线截口时，可以得出，如果过程是黑色更新的，那么白色区间的长度必是指数分布的．

一个给定的几何过程的"典型"元的概念在随机几何学中是很重要的 ([7])．对描述几何过程中"典型" $k$ 子集满足不同条件的分布问题已经进行了研究（这类问题的一个例子，是寻找顶点在一点过程的实现上的"典型"三角形 Euclid 不变特征的分布，要求该三角形的内部包含实现的 $l$ 个点）．这类问题的解答对于 Poisson 过程已经得到．类似的问题，例如在天体物理学中，也提出来了．

所谓立体学的问题，如果它们被应用于几何图形过程，也就与随机几何发生了关系 ([7])．（在立体学中，一个多维象必须通过它与较小维数的直线或平面的交来描述．）关于第一与第二阶矩测度的立体学已获得若干结果．

上面仅仅陈述了最典型的问题，因为随机几何学的界限是难以精确定义的．下面这些领域都与随机几何学毗连：几何统计 ([4])，分数维（随机）集合论 ([5])，数学形态学与成象分析 ([6])，随机形状理论 ([7])．

参考文献

[1] Matheron, J., Random sets and integral geometry, Wiley, 1975.

[2] Harding, E. F., Kendall, D. G., Stochastic geometry, Wiley, 1974.

[3] Ambartzumian, R. V., Combinatorial integral geometry, Wiley, 1982.

[4] Ripley, B. D., Spatial statistics, Wiley, 1981.

[5] Mandelbrot, B. B., Fractals: form, Chance and dimension, Freeman, 1977.

[6] Serra, J., Image analysis and mathematical morphology, Acad. Press, 1988.

[7] Ambartzumian, R. V., Factorization calculus and geometric probability, Cambridge Univ. Press, 1989 (译自俄文).

P. B. Амбарцумян 撰

【补注】 随机几何学的近期发展及其各种应用，在[A3]中作了介绍．积分几何学的影响及其对于随机几何学某些部分的应用可见[A4]与[A2]．对几何概率某些问题的不同观点是[7]的主题．

参考文献

[A1] Ambartzumian, R. V. (ed.), Stochastic and integral geometry, Reidel, 1987.

[A2] Mecke, J., Schneider, R., Stoyan, D., Weil, W., Stochastische Geometrie, DMV Sem., 16, Birkhäuser, 1990.

[A3] Stoyan, D., Kendall, W. S., Mecke, J., Stochastic geometry and its applications, Wiley, 1987.

[A4] Santaló, L., Integral geometry and geometric probability, Addison-Wesley, 1976.

潘一民 译

**随机不可辨别性** [**stochastic indistinguishability**; **стохастическая неразличимость**]

两个随机过程 $X=(X_t(\omega))_{t\geqslant 0}$ 和 $Y=(Y_t(\omega))_{t\geqslant 0}$ 的一种性质，它规定随机集

$$\{X\neq Y\}=\{(\omega,t):X_t(\omega)\neq Y_t(\omega)\}$$

可以被忽略，即集合 $\{\omega:\exists t\geqslant 0:(\omega,t)\in\{X\neq Y\}\}$ 的概率等于零．如果 $X$ 和 $Y$ 是随机不可辨别的，则对一切 $t\geqslant 0$，$X_t=Y_t$，即 $X$ 和 $Y$ 是随机等价的（见**随机等价**（stochastic equivalence））．一般地说，反之不真，但对右（左）连续随机过程，随机不可辨别性可由随机等价性导出．

参考文献

[1] Dellacherie, C., Capacités et processus stochastiques, Springer, 1972.

А. Н. Ширяев 撰 刘秀芳 译 陈培德 校

**随机积分** [**stochastic integral**; **стохастический интеграл**]

在某一随机基 $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t)_t,\mathsf{P})$ 上对每个局部有界可料过程 $H=(H_t,\mathscr{F}_t)$ 定义的关于**半鞅**（semimartingale）$X$ 的积分"$\int H\,dX$"．下面是随机积分的一种可能的构造法：首先对形如

$$H_t=h(\omega)I_{(a,b]}(t),\ a<b$$

的简单可料过程定义随机积分，其中 $h$ 是 $\mathscr{F}_a$ 可测的．在这种情形，随机积分 $\int_0^t H_s dX_s$（或 $(H\cdot X)_t$，或 $\int_{(0,t]}H_s dX_s$）理解为变量

$$h(\omega)\ (X_{b\wedge t}-X_{a\wedge t}).$$

映射 $H\mapsto H\cdot X$，此处

$$H\cdot X=(H\cdot X)_t,\ t\geqslant 0,$$

可扩张（仍记作 $H\cdot X$）到一切有界可料函数的集合上，它具有下列性质:

a) 过程 $(H\cdot X)_t$，$t\geqslant 0$，是右连续的并具有左极限;

b) $H\mapsto(H\cdot X)$ 是线性的，即

$$(cH_1+H_2)\cdot X=c(H_1\cdot X)+(H_2\cdot X);$$

c) 如果 $\{H^n\}$ 是一致有界的可料函数序列，$H$ 是可料函数且

$$\sup_{s\leqslant t}|H_s^n-H_s|\xrightarrow{P}0,\ t>0,$$

则

$$(H^n\cdot X)_t\xrightarrow{P}(H\cdot X)_t,\ t>0.$$

因此扩张 $H\cdot X$ 在下述意义上是唯一的：如果 $H\mapsto\alpha(H)$ 是另一个具有性质 a)－c) 的映射，则 $H\cdot X$ 和 $\alpha(H)$ 是随机不可辨别的（见**随机不可辨别性**（stochastic indistinguishability））．

对函数 $H_t=h(\omega)I_{(a,b]}(t)$ 给出的定义

$$(H\cdot X)_t=h(\omega)(X_{b\wedge t}-X_{a\wedge t})$$

对任意过程 $X$ 成立，不仅对半鞅．而具有性质 a)－c) 在有界可料过程类上的扩张 $H\cdot X$ 只有对 $X$ 是半鞅的情形才有可能．在这种意义上，半鞅类是具有自然的性质 a)－c) 的定义随机积分的最大类．

如果 $X$ 是半鞅且 $T=T(\omega)$ 是 Марков 时（停时），则"停止"过程 $X^T=(X_{t\wedge T},\mathscr{F}_t)$ 也是半鞅，且对每一有界可料过程 $H$，

$$(H\cdot X)^T=H\cdot X^T=(HI_{[0,T]})\cdot X.$$

这一性质把随机积分的定义扩展到局部有界可料函数 $H$ 的情形．如果 $T_n$ 对 $H$ 是 Марков 时的一个局部化序列，则 $H^{T_n}$ 是有界的．因此 $HI_{[0,T_n]}$ 是有界的，且

$$[HI_{[0,T_{n+1}]}\cdot X]^{T_n}$$

与 $HI_{]]0,T_n]]}\cdot X$ 是随机不可辨别的．因而满足

$$(H\cdot X)^{T_n}=HI_{]]0,T_n]]}\cdot X,\ n\geqslant 0,$$

的过程 $H\cdot X$ 存在，仍称为随机积分．

所构造的随机积分 $H\cdot X$ 具有以下性质：$H\cdot X$ 是半鞅；映射 $H\mapsto H\cdot X$ 是线性的；如果 $X$ 是局部有界变差的，则积分 $H\cdot X$ 也是，并且 $H\cdot X$ 与 $H$ 关于 $dX$ 的 Stieltjes 积分相同；$\Delta(H\cdot X)=H\cdot\Delta X$；$K\cdot(H\cdot X)=(KH)\cdot X$．

依赖于对 $X$ 的额外的假定，随机积分 $H\cdot X$ 还可以对更广的一类函数 $H$ 定义．例如，如果 $X$ 是局部平方可积鞅，则具有性质 a) – c) 的随机积分 $H\cdot X$ 可以对任意具有下述性质的可料过程 $H$ 定义：过程

$$\left[\int_0^t H_s^2\,d<X>_s\right]_{t\geqslant 0}$$

是局部可积的（此处 $<X>$ 是 $X$ 的二次变差，即使得 $X^2-<X>$ 是局部鞅的可料增过程）．


**参考文献**

[1] Jacod, J., Calcul stochastique et problèmes de martingales, Lecture notes in math., 714, Springer, 1979.

[2] Dellacherie, C. and Meyer, P., Probabilities and potential, A-C, North-Holland, 1978 – 1988（译自法文）.

[3] Liptser, R. Sh. and Shiryaev, A. N., Theory of martingales, Kluwer, 1989（译自俄文）.


А. Н. Ширяев 撰

【补注】 上面所提到的半鞅构成最宽的可行的随机积分类的结果是 Bichteler-Dellacherie 定理（Bichteler-Dellacherie theorem）([A1] – [A3])，并可按如下所述形式化（[A4]，定理 Ⅲ.22）：称一个过程是初等可料的，如果它具有形式

$$H_t=H_0I_{\{0\}}(t)+\sum_{i=1}^{n}H_iI_{(T_i,T_{i+1}]}(t),$$

其中 $0=T_0\leqslant T_1\leqslant\cdots\leqslant T_{n+1}<\infty$ 是停时且 $H_i$ 是 $\mathcal{F}_{T_i}$ 可测的，具有 $|H_i|<\infty$ (a.s.)，$0\leqslant i\leqslant n$．设 $E$ 为初等可料过程的集合，关于 $(t,\omega)$ 具有一致收敛的拓扑．设 $L^0$ 是有限值随机变量的集合，具有依概率收敛的拓扑．固定随机过程 $X$，对每个停时 $T$，定义映射 $I_X^T:E\to L^0$:

$$I_X^T(H)=H_0X_0^T+\sum_{i=1}^{n}H_i(X_{T_{i+1}}^T-X_{T_i}^T),$$

其中 $X^t$ 表示过程 $X_t^T=X_{t\wedge T}$．如果 $I_X^T$ 对所有停时是连续的，则称"$X$ 具有性质（C）"．

Bichteler-Dellacherie 定理：$X$ 具有性质（C），当且仅当 $X$ 是半鞅．

因为 $E$ 上拓扑非常强而 $L^0$ 上非常弱，若将 $I_X^T$ 的定义扩展到 $E$ 以外，则性质（C）是最低要求．

可以用性质（C）作为半鞅的定义并用这种观点发展随机积分的理论（[A4]）．有许多优秀的教材从传统的观点阐述随机积分．例如，见 [A5] – [A8]．


**参考文献**

[A1] Bichteler, K., Stochastic integrators, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1(1979), 761 – 765.

[A2] Bichteler, K., Stochastic integrators and the *L* theory of semimartingales, *Ann. Probab.*, 9(1981), 49 – 89.

[A3] Dellacherie, C., Un survol de la théorie de l'intégrale stochastique, *Stoch. Proc. & Appl.*, **10**(1980), 115 – 144.

[A4] Protter, P., Stochastic integration and differential equations, Springer, 1990.

[A5] Chung, K. L.（钟开莱）and Williams, R. J., Introduction to stochastic integration, Birkhäuser, 1990.

[A6] Elliott, R. J., Stochastic calculus and applications, Springer, 1982.

[A7] Karatzas, I. and Shreve, S. E., Brownian motion and stochastic calculus, Springer, 1988.

[A8] Rogers, L. C. G. and Williams, D., Diffusions, Markov processes and martingales, Ⅱ. Ito calulus, Wiley, 1987.

[A9] McKean, H. P., jr., Stochastic integrals, Acad. Press, 1969.

[A10] Metivier, M. and Pellaumail, J., Stochastic integration, Acad. Press, 1980.

[A11] McShane, E. J., Stochastic calculus and stochastic models, Acad. Press, 1974.

[A12] Rao, M. M., Stochastic processes and integration, Sijthoff & Noordhoff, 1979.

[A13] Stroock, D. W. and Varadhan, S. R. S., Multidimensional diffusion processes, Springer, 1979.

[A14] Kopp, P. E., Martingales and stochastic integrals, Cambridge Univ. Press, 1984.

[A15] Fukushima, M., Dirichlet forms and Markov processes, North-Holland, 1980.

[A16] Albeverio, S., Fenstad, J. E., Høegh-Krohn, R. and Lindstrøm, T., Nonstandard methods in stochastic analysis and mathematical physics, Acad. Press, 1986.


**【译注】**


**参考文献**

[B1] 何声武，汪嘉冈，严加安，半鞅与随机分析，科学出版社，1995．


刘秀芳 译 陈培德 校

**随机区间［stochastic interval; стохастический интервал］**

下述区间之一：

$$[\![\sigma,\tau]\!] = \{(\omega,t): t\geqslant 0,\ \sigma(\omega)\leqslant t\leqslant \tau(\omega)\},$$

$$[\![\sigma,\tau[\![ = \{(\omega,t): t\geqslant 0,\ \sigma(\omega)\leqslant t< \tau(\omega)\},$$

$$]\!]\sigma,\tau]\!] = \{(\omega,t): t\geqslant 0,\ \sigma(\omega)< t\leqslant \tau(\omega)\},$$

$$]\!]\sigma,\tau[\![ = \{(\omega,t): t\geqslant 0,\ \sigma(\omega)< t< \tau(\omega)\},$$

其中 $\sigma=\sigma(\omega)$ 和 $\tau=\tau(\omega)$ 是定义在具有子 $\sigma$ 代数 $\mathcal{F}_t\subseteq\mathcal{F}$ 的上升族 $\mathrm{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 的可测空间 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的两个停时.

参考文献

[1] Dellacherie, C., Capacités et processus stochastiques, Springer, 1972.

А. Н. Ширяев 撰 刘秀芳 译 陈培德 校

**随机矩阵** [**stochastic matrix; стохастическая матрица**]

一个具有非负元素的方阵(可能是无限的) $P=\|p_{ij}\|$, 其中

$$\sum_j p_{ij}=1,\ 对一切\ i.$$

一切 $n$ 阶随机矩阵的集合是由 $n^n$ 个由零和1所构成的随机矩阵的集合的凸包. 任意一个随机矩阵 $P$ 可以看成一个离散 **Марков 链** (Markov chain) $\xi^P(t)$ 的**转移概率的矩阵** (matrix of transition probabilities).

随机矩阵的本征值的绝对值不超过 1; 1 是任意随机矩阵的一个本征值. 如果一个随机矩阵 $P$ 是不可分解的 (Марков 链 $\xi^P(t)$ 有一类正状态), 则 1 是 $P$ 的一个单本征值 (即它的重数是 1); 一般地说, 本征值 1 的重数与 Марков 链 $\xi^P(t)$ 的正状态类的个数一致. 如果一个随机矩阵 $P$ 不可分解, 且 Марков 链的正状态类有周期 $d$, 则 $P$ 的一切本征值的集合, 作为复平面的一个点集, 通过旋转角度为 $2\pi/d$ 的旋转映到自身上. 当 $d=1$ 时, 随机矩阵 $P$ 和 Марков 链 $\xi^P(t)$ 叫做非周期的 (aperiodic).

有限阶的 $P$ 的对应于本征值 1 的左本征向量 $\pi=\{\pi_j\}$:

$$\pi_j=\sum_i \pi_i p_{ij},\ 对一切\ j, \tag{1}$$

并且满足条件 $\pi_j\geqslant 0$, $\sum_j\pi_j=1$, 定义 Марков 链 $\xi^P(t)$ 的平稳分布; 在不可分解矩阵 $P$ 的情形, 平稳分布是唯一的.

如果 $P$ 是一个有限阶不可分解非周期随机矩阵, 则以下极限存在:

$$\lim_{n\to\infty} P^n=\Pi, \tag{2}$$

$\Pi$是这样一个矩阵, 它的所有行都与向量 $\pi$ 相同 (亦见**遍历 Марков 链** (Markov chain, ergodic)); 对于无限随机矩阵 $P$ 来说, 方程组 (1) 可能没有满足条件 $\sum_j\pi_j<\infty$ 的非零非负解; 在这一情形 $\Pi$ 是零矩阵). (2) 中的收敛速度可以用一个其绝对值大于 $P$ 的所有异于 1 的本征值的绝对值的任意指数 $\rho$ 的几何级数来估计.

如果 $P=\|p_{ij}\|$ 是一个 $n$ 阶随机矩阵, 那么它的任意一个本征值 $\lambda$ 都满足不等式 (见[3]):

$$|\lambda-\omega|\leqslant 1-\omega,\ 这里\ \omega=\min_{1\leqslant i\leqslant n} p_{ii}.$$

一切 $n$ 阶随机矩阵的本征值的集合的并集 $M_n$ 已被描述(见[4]).

一个满足附加条件

$$\sum_i p_{ij}=1,\ 对一切\ j$$

的随机矩阵 $P=\|p_{ij}\|$ 称为二重随机矩阵 (doubly-stochastic matrix). $n$ 阶二重随机矩阵的集合是 $n!$个 $n$ 阶置换矩阵 (即由 0 和 1 组成的双随机矩阵) 集合的凸包. 具有一个二重随机矩阵 $P$ 的有限 Марков 链 $\xi^P(t)$ 有一致平稳分布.

参考文献

[1] Гантмахер, Ф. Р., Теория матриц, 3 изд, М., 1967 (中译本: Ф. Р. 甘特马赫尔, 矩阵论, 高等教育出版社, 1955).

[2] Bellman, R., Introduction to matrix analysis, McGraw-Hill, 1960.

[3] Marcus, M. and Minc, H., A survey of matrix theory and matrix inequalities, Allyn & Bacon, 1964.

[4] Карпелевич, Ф. И., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, 15 (1951), 361 – 383.

А. М. Зубков 撰

【补注】 给定一个具有非负元素的实 $n\times n$ 矩阵 $A$, 提出这样的问题, 什么时候有可逆正对角矩阵 $D_1$ 和 $D_2$ 使得 $D_1AD_2$ 是一个二重随机矩阵, 并且 $D_1$ 和 $D_2$ 唯一确定到什么程度. 这样的定理称为 $DAD$ 定理 ($DAD$-theorems). 在电信和统计中对此感兴趣 ([A3] – [A5]).

一个矩阵 $A$ 是全不可分解的 (fully indecomposable), 如果不存在置换矩阵 $P$, $Q$, 使得

$$PAQ=\begin{pmatrix} A_1 & 0\\ B & A_2\end{pmatrix}.$$

一个 $1\times 1$ 矩阵是全不可分解的, 如果它不是零矩阵.

于是对于一个非负方阵 $A$ 来说, 存在正对角矩阵 $D_1$ 和 $D_2$ 使得 $D_1AD_2$ 是二重随机矩阵, 当且仅当存在置换矩阵 $P$ 和 $Q$ 使得 $PAQ$ 是全不可分解矩阵的直和 ([A1], [A2]).

参考文献

[A1] Sinkhorn, R. and Knopp, P., Concerning nonnegative matrices and doubly stochastic matrices, *Paci-*

fic J. Math., 21 (1967), 343 – 348.

[A2] Brualdi, R. A., Parter, S. V. and Schneider, H., The diagonal equivalence of a nonnegative matrix to a stochastic matrix, *J. Math. Anal. Appl.*, **16** (1966), 31 – 50.

[A3] Fienberg, S., An iterative procedure for estimation in contingency tables, *Ann. Math. Stat.*, **41** (1970), 907 – 917.

[A4] Krupp, R. S., Properties of Kruithof's projection method, *Bell Systems Techn. J.*, **58** (1979), 517 – 538.

[A5] Csiszár, I., I – divergence geometry of probability distributions and minimization problems, *Ann. Probab.*, 3 (1975), 146 – 158.

[A6] Nussbaum, R. D., Iterated nonlinear maps and Hilbert's projective method II, *Memoirs Amer. Math. Soc.*, **401** (1989).

[A7] Neuts, M. F., Structured stochastic matrices of M/G/1 type and their applications, M. Dekker, 1989.

[A8] Seneta, E., Non-negative matrices and Markov chains, Springer, 1981.

郝钢新 译

**随机数值算法** [**stochastic numerical algorithm**; **стохастический вычислительный алгоритм**]

含有用随机数运算的一种数值算法，因此计算结果也是随机的．随机算法包括对随机过程和随机现象数值研究中所用的**统计模拟**（statistical modelling）算法，和求解确定性问题（积分计算，求解积分方程和边值问题等）的**蒙特卡罗方法**（Monte-Carlo method）中的算法．

随机结点的插值公式和求积公式的随机化数值过程形成一类特殊的随机数值算法．这种随机化通常是用这样一种方法实现的，即计算结果的数学期望等于要求的值．最终的估计是将随机数值算法的各种计算结果平均而得到的（这些估计的误差和计算量见**蒙特卡罗方法**）．对大维数问题，随机化可以使计算机存贮时间有相当大的节省（见[1]－[4]）．具体地说，这点可以用求解第二类积分方程有限和的随机化方法的计算量的估计而得到证明（见[4]）．特别有效的是那些随机数值算法，即当计算系统是多处理机时，可以同时在多处理机上计算的算法．

为了实现随机搜索多变量函数的总体极值，已经构造了特殊的随机数值算法（见[5]）．如果函数值的确定带有随机误差，则这些算法是比较有效的．

**参考文献**

[1] Бахвалов, Н. С., Численные методы, 2 изд., т. 1, М., 1975 (英译本: Bakhvalov, N. S., Numerical methods: analysis, algebra, ordinary differential equations, Mir, 1977).

[2] Ермаков, С. М., Метод Монте-Карло и смежные вопросы, 2 изд., М., 1975.

[3] Соболь, И. М., Численные методы Монте-Карло, М., 1973.

[4] Михайлов, Г. А., Некоторые Вопросы теории методов Монте-Карло, Новосиб., 1974

[5] Растригин, Л. А., Статистические методы поиска, М., 1968.

Г. А. Михайлов 撰

【补注】 人们可以将问题分成天然随机问题和非天然随机问题．关于第一类问题的数值算法，例如可见[A1]、[A2] 和**随机逼近**（stochastic approximation）．随机搜索一个函数的总体极值已经引起许多注意；第二类问题可见[A3]－[A5]．

随机方法对经典的数学物理方程非常有效，部分的原因是因为位势论和随机过程之间有联系．见[A6]、[A7]．

**参考文献**

[A1] Ljung, L. and Söderström, T., Theory and practice of recursive identification, MIT, 1983.

[A2] Robbins, H. and Monro, S., A stochastic approximation method, *Ann. Math. Studies*, **22** (1951), 400 – 407.

[A3] Laarhoven, P. J. M. van, Theoretical and computational aspects of similated annealing, CWI, Tract, 51, CWI, Amsterdam, 1988.

[A4] Zhigljavsky, A. A. [A. A. Zhiglyavskii], Theory of global random search, Kluwer, 1991 (译自俄文).

[A5] Laarhoven, P. J. M. van and Aarts, E. H., Simulated annealing: theory and practice, Reidel, 1987.

[A6] Blumenthal, R. M. and Getoor, R. K., Markov processes and potential theory, Acad. Press, 1968.

[A7] Ermakov, S. M., Nekrutin, V. V. and Sipin, A. S., Random processes for the classical equations of mathematical physics, Kluwer, 1989 (译自俄文).

袁国兴 张宝琳 译

**随机点过程** [**stochastic point process**; **случайный точечный процесс**]，点过程（point process）

对应于实轴 $\mathbf{R}^1$ 上一列随机变量 $\{t_i\}$，$\cdots < t_{-1} < t_0 \leqslant 0 < t_1 < t_2 < \cdots$ 的**随机过程**（stochastic process）每个值 $t_i$ 对应于一个随机变量 $\Phi\{t_i\} = 1, 2, \cdots$，称为它的重数．在**排队论**（queueing theory）中，随机点过程是由接受服务的到达时刻生成的，而在生物学中则是由神经纤维中的脉冲时刻生成的，等等．

所有点 $t_i \in [0, t]$ 的数目 $C(t)$ 称为计数过程，$C(t) = M(t) + A(t)$，其中 $M(t)$ 为一**鞅**（martingale），而 $A(t)$ 是对于由随机点 $t_i \in [0, t]$ 所生成的 $\sigma$ 域 $\mathscr{F}_t$ 的补偿元．许多重要问题都可以依据补偿元 $A(t)$ 的性质来解决．

令 $X$ 为一完全可分的度量空间，$\mathfrak{B}_0$ 是有界 Borel

集 $B \subset X$ 的族，$N = \{\varphi\}$ 是所有取整值测度的集，$\varphi(B) = l < \infty$，而 $\mathfrak{N}$ 是由测度的子集 $\{\varphi: \varphi(B) = l\}$ $(B \in \mathfrak{B}_0, l = 0, 1, 2 \cdots)$ 所生成的最小 $\sigma$ 域．在可测空间 $(N, \mathfrak{N})$ 上规定一个概率测度 P，就确定了一个状态空间为 $X$ 的随机点过程 $\Phi$，它的实现是 $N$ 中的整值测度．使 $\Phi\{x\} > 0$ 的 $x \in X$ 称为 $\Phi$ 的**点**(points)．量 $\Phi(B)$ 等于位于 $B$ 中的 $\Phi$ 的点的重数之和．若对于所有 $x \in X$ 有 $\Phi\{x\} \leqslant 1$，则 $\Phi$ 称为**简单的**(simple)；若对于所有 $B \in \mathfrak{B}_0$ 和 $\varepsilon > 0$，存在 $B$ 的划分 $\zeta = (Z_1, \cdots, Z_n)$ 使

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}\{\Phi(Z_k) > 1\} < \varepsilon,$$

则 $\Phi$ 称为**普通的**(ordinary)．普通随机点过程必是简单的．**阶乘矩测度**

$$\Lambda_k(B) = \mathrm{E}_p \Phi(B)[\Phi(B)-1]\cdots[\Phi(B)-k+1]$$

及其扩张，扮演着重要的角色($\mathrm{E}_p$ 表数学期望，$\Lambda_1(B)$ 称为强度测度)．如果 $\Lambda_{2n}(B) < \infty$，那么

$$\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k!} \Lambda_k(B) \leqslant \mathrm{P}\{\Phi(B) = 0\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k!} \Lambda_k(B),$$

$$\Lambda_0(B) = 1.$$

在随机点过程理论中，Poisson 随机点过程 $\Phi$ 起着特殊的作用，它满足：a) $\Phi$ 在不交的 $B_i \in \mathfrak{B}_0$ 上的值是相互独立的随机变量(无后效性)；b)

$$\mathrm{P}\{\Phi(B_i) = l\} = \frac{[\Lambda_1(B)]^l}{l!} \exp\{-\Lambda_1(B)\}.$$

对于简单随机点过程，

$$\Lambda_1(B) = \inf \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}\{\Phi(Z_k) > 0\}, \qquad (*)$$

其中下确界是对 $B$ 的所有划分 $\zeta = (Z_1, \cdots, Z_n)$ 来取的．利用关系式(*)，对于由随机过程或随机场生成的许多随机点过程类，能找到其强度测度的明显表达式．

随机点过程的一个推广，是所谓的**标值随机点过程**(marked stochastic point processes)，其中从某个可测空间 $(K, \mathfrak{N})$ 所取的标值 $k(x)$，是对每个使 $\Phi(x) > 0$ 的点 $x$ 派定的．一个排队系统中的服务时间就可以作为标值．

在随机点过程理论中，以一种特殊方式联系不同事件的条件概率(Palm 概率)的关系起着重要的作用．已经获得了随机点过程序列的叠加(求和)、稀疏及其他运算的极限定理．Poisson 随机点过程的各种推广有着广泛的应用．

**参考文献**


[1] Хинчин, А. Я., Работы по математической теории массового обслуживания, М., 1963.

[2] Cox, D. R., Isham, V., Point processes, Chapman & Hall, 1980.

[3] Kerstan, J., Matthes, K., Mecke, J., Infinitely divisible point processes, Wiley, 1978(译自德文).

[4] Беляев, Ю. К., Элементы общей теории случайных процессов, в кн.: Крамер, Г., Лидбеттер, М., Стационарные случайные процессы, пер. с англ., М., 1969.

[5] Liptser, R. S., Shiryayev, A. N., Statistics of random processes II, Applications, Springer, 1978(译自俄文).

[6] Jacobson, M., Statistical analysis of counting processes, Lecture notes in statistics, 12, Springer, 1982.


Ю. К. Беляев 撰

【补注】 令 $X$, $\mathfrak{B}_0$ 如前设，令 $\mathfrak{X} \supset \mathfrak{B}_0$ 为 $X$ 的 Borel 域．令 $M$ 为 $(X, \mathfrak{X})$ 上所有 Borel 测度的集合．对于每个 $B \in \mathfrak{B}_0$，$\mu \mapsto \mu(B)$ 定义一映射 $M \to \mathbf{R}_{\geq 0}$，而 $\mathfrak{M}$ 为由这些映射生成的 $\sigma$ 域，即使所有这些映射为可测的最小 $\sigma$ 域．$M$ 的整值元形成子空间 $N$，而 $\mathfrak{N}$ 则是 $N \subset M$ 上的导出 $\sigma$ 域．

$X$ 上的一个随机测度就是 $(M, \mathfrak{M})$ 上的一个概率测度，或者等价地说，是某个抽象概率空间 $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ 到 $(M, \mathfrak{M})$ 的可测映射 $\zeta$．而点过程则是 $\zeta$ 在 $N$ 中取值这种特殊情形．

一个元素 $\nu \in N$ 称为简单的，如果对所有 $x \in X$，$\nu(x) = 0$ 或 1．一个简单点过程则是在由简单测度组成的 $N$ 的子空间中取值的点过程．

每个 $B \in \mathfrak{B}_0$ 定义一个函数 $M \to \mathbf{R}_{\geq 0}$，$\mu \mapsto \mu(B)$，因而给出随机测度 $\xi$，就定义一个随机变量，将用 $\xi B$ 记之．可以用两种方式来考虑一个随机测度：一是用概率空间 $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ 来参数化的($X$ 上)测度 $\xi(\omega)$ 的集合，一是用 $\mathfrak{B}_0$ 作指标集的($\Omega$ 上或 $M$ 上)随机变量 $\xi B$ 的集合，这依赖于所注视的是映射 $(\omega, B) \mapsto \xi(\omega)(B)$ 的哪一部分．

更一般地，对 $X$ 上的每个有界连续函数 $f$，由

$$\xi f(\mu) = \int_X f(x)\mu(dx)$$

可定义随机变量 $\xi f$．对每个随机测度 $\xi$，可定义 $\xi$ 的 **Palm 分布**(Palm distribution)．对简单点过程 $\xi$，Palm 分布 $Q_x$ 可以理解为给定 $\xi$ 在 $x \in X$ 有一个原子时，$\xi$ 的条件分布．Palm 分布在随机测度论中具有很大的重要性，同时对于排队论、分支过程、再生集、随机几何、统计力学，以及保险数学等，都有应用(最后一个要用到重随机 Poisson 过程，又称 Cox 过程，它们是强度随机变化的 Poisson 过程)．

一个随机测度的 Palm 分布是由分解它在 $X \times M$

上的 Campbell 测度（Campbell measure）而获得的，后者由下式给出：

$$C(B\times \mathscr{A})=\mathsf{E}[(\xi B)1_{\mathscr{A}}],$$

$B\in\mathfrak{B}_0$、$\mathscr{A}\in\mathfrak{M}$，其中 $1_{\mathscr{A}}$ 是 $\mathscr{A}\subset M$ 的指示函数，函数 $(\xi B)1_{\mathscr{A}}$ 是两个函数 $\xi B$ 与 $1_{\mathscr{A}}: M\to\mathbf{R}$ 的（逐点）乘积，而 $\mathsf{E}$ 表示期望．

一个测度的分解是与**条件分布**（conditional distribution）密切关联的．给定两个可测空间（$X$, $\mathfrak{X}$）与（$T$, $\mathcal{T}$），一个从 $X$ 到 $T$ 的核（kernel）（又称为 Марков 核（Markov kernel））是一个映射 $\rho: X\times\mathcal{T}\to\mathbf{R}_{\geqslant 0}$，使得对所有 $A\in\mathcal{T}$，$\rho(\cdot, A): x\mapsto\rho(x, A)$ 是在 $X$ 上可测的，且对所 $x\in X$，$\rho_x=\rho(x,\cdot)$：$A\mapsto\rho(x, A)$ 是（$T$, $\mathcal{T}$）上的 $\sigma$ 有限测度．

给定一个乘积空间 $X\times T$ 上的 $\sigma$ 有限测度 $\mu$，则 $\mu$ 的一个分解（disintegration）由 $X$ 上的 $\sigma$ 有限测度 $\nu$ 与从 $X$ 到 $T$ 的核 $\rho$ 组成，使得 $\nu$ 几乎处处有 $\rho_x(T)\neq 0$，且对所有（$B$, $A$）$\in\mathfrak{X}\times\mathcal{T}$ 有

$$\mu(B\times A)=\int_B\rho_x(A)\nu(dx).\qquad(*)$$

由此推出对每一可测函数 $f: X\times T\to\mathbf{R}_{\geqslant 0}$，

$$\iint f(x,t)\mu(dx\,dt)=$$

$$=\int\nu(dx)\int f(x,t)\rho_x(dt).\qquad(**)$$

其逆运算称为混合（mixing）．给定 $\nu$ 与 $\rho$，测度（$*$）称为 $\rho_x$ 对于 $\nu$ 的混合（mixture）（（$**$）可称为关于混合测度的 Fubini 公式）．

如果（$T$, $\mathcal{T}$）是 Polish Borel 空间，对 $\sigma$ 有限的 $\mu$，上述分解一定存在．这归结为条件分布的一个结果．测度 $\nu$ 在等价的意义下是唯一的，而 $\rho$ 则在相差一可测重正规化因子的意义下是 $\nu$ 几乎处处唯一的．更一般地，可以研究空间 $Y$ 上的测度 $\mu$ 关于任一映射 $\pi: Y\to X$（替代投影映射 $Y=X\times T\to X$）的分解（或片分解（decomposition into slices），见[A11]，[A12]）．

对每个有界连续函数 $f$，令 $\mathsf{E}(\xi f)$ 为随机变量 $\xi f$ 的期望，而令 $\mathsf{E}\xi$ 为 $X$ 上的测度 $\mathsf{E}\xi(B)=\mathsf{E}(\xi B)$．那么，利用（$**$），$X\times M$ 上的 Campbell 测度 $C$ 的分解将产生 $X$ 上的测度 $\mathsf{E}\xi$，而如果 $\mathsf{E}\xi$ 是 $\sigma$ 有限的，则 $\rho_x$ 可以 $\mathsf{E}\xi$ 几乎处处正规化为 $M$ 上的概率测度 $Q_x$，从而有

$$\mathsf{E}(\xi f1_{\mathscr{A}})=\int Q_x(\mathscr{A})f(x)\mathsf{E}\xi(dx).$$

$Q_x$ 就是 $\xi$ 的 **Palm 分布**（Palm 概率（Palm probabilities））．等价地，作为 $x$ 的函数，对于 $\mathscr{A}\in\mathfrak{M}$，$Q_x(\mathscr{A})$ 是 $X$ 上的测度 $\mathsf{E}(1_{\mathscr{A}}(\xi)\xi)$ 对 $\mathsf{E}\xi$ 的 Radon-Nikodým 导数（Radon-Nikodým derivative）（见 **Radon-Nikodým 定理**（Radon-Nikodým theorem））．这里，$1_{\mathscr{A}}(\xi)\xi$ 是随机测度 $\Omega\to M$．

$$(1_{\mathscr{A}}(\xi)\xi)(\omega)=\begin{cases}0, & \xi(\omega)\notin\mathscr{A},\\ 1, & \xi(\omega)\in\mathscr{A}.\end{cases}$$

即 $\xi$ 在 $\mathscr{A}$ 上的迹．

**参考文献**


[A1] Borovkov, A. A., Stochastic processes in queueing theory, Springer, 1976（译自俄文）.

[A2] Lewis, P. A. W. (ed.), Stochastic point processes statistical analysis theory and applications, Wiley-Interscience, 1972.

[A3] Murthy, V. K., The general point process, Addison-Wesley, 1974.

[A4] Snyder, D. C., Random point processes, Wiley, 1975（中译本：D. C. 斯奈德，随机点过程，人民教育出版社，1981）.

[A5] Daley, D. J., Vere-Jones, D., An introduction to the theory of point processes, Springer, 1978.

[A6] Baccelli, F., Brémaud, P., Palm-probabilities and stationary queues, Lecture notes in statistics, 41, Springer, 1987.

[A7] Brémaud, P., Point processes and queues, Springer, 1981.

[A8] Neveu, J., Processus ponctuels, in J. Hoffmann-Jørgensen, T. M. Liggett, J. Neveu (eds.): Ecole d'été de St. Flour VI, 1976, Lecture notes in math., vol. 598, Springer, 1977, 250－448.

[A9] Kallenberg, O., Random measures, Akademie Verlag & Acad. Press, 1986.

[A10] Grandell, J., Doubly stochastic Poisson processes, Springer, 1976.

[A11] Bauer, H., Probability theory and elements of measure theory, Holt, Rinehart & Winston, 1972（译自德文）.

[A12] Bourbaki, N., Intégration, Eléments de mathématique, Hermann, 1967, Chapt. 5: Intégration des measures, § 6.6.

[A13] Bourbaki, N., Intégration, Eléments de mathématique, Hermann, 1959, Chapt. 6. Intégration vectorielle, §3.


潘一民 译

**有限记忆随机点过程**[**stochastic point process with limited memory; случайный точечный процесс с ограниченным последействием**]

一个由一列随机变量 $\{t_i\}$，

$$\cdots<t_{-1}\leqslant t_0\leqslant 0<t_1<t_2<\cdots$$

定义的**随机点过程**（stochastic point process），其中

区间 $s_i = t_{i+1} - t_i$ 是相互独立的随机变量. 这种过程与更新过程（见**更新理论**（renewal theory））有密切关系，后者的 $s_i(i \neq 0)$ 是独立同分布的随机变量.

Ю. К. Беляев 撰 潘一民 译

**随机过程**[**stochastic process** 或 random process; **случайный процесс**]，概率过程（probability process），时间的随机函数（random function of time）

一个过程（即某个系统的状态随时间而变化），它的进程具偶然性且对某些进程的概率是给定的. 典型例子是 **Brown 运动**（Brownian motion）. 实践中另外一些重要的例子是：在存在热噪声的电路中电流的波动，在由气象或其他扰动引起的无线电信号的随机减弱（即衰减）情况下所接收的无线电信号强度的随机变化，以及液体或气体的湍流. 某些伴随有随机扰动的工业过程，还有在地球物理（例如地磁场的变化，不规则海浪和微震，即地球表面水平的高频不规则振动）、生物物理（例如，在脑电仪上记录的大脑的生物电位的变化）以及经济学中遇到的一些过程也可以加入这个行列.

随机过程的数学理论把所讨论的系统的瞬时状态看作某一相空间 $R$（状态空间）中的一个点，使得随机过程是时间 $t$ 的函数 $X(t)$，取值在 $R$ 中. 通常假定 $R$ 是向量空间，研究最多（对应用来说也是最重要）的较窄的情形是其中 $R$ 中点用一个或多个数值参数给定（广义坐标系统）. 在狭义情形随机过程可以简单地看作随机取值的时间的数值函数 $X(t)$（即容许有各种各样的实现 $X(t)$，一维随机过程（one-dimentional stochastic process））或类似地看作向量函数 $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), \cdots, X_k(t))$（多维或向量随机过程（multi-dimentional or vector stochastic process））. 多维随机过程的研究可通过由 $\mathbf{X}(t)$ 到辅助过程

$$X_a(t) = (\mathbf{X}(t), \mathbf{a}) = \sum_{j=1}^{k} a_j X_j(t)$$

归结为一维随机过程的情形，其中 $\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_k)$ 是任意 $k$ 维向量. 因此一维过程的研究在随机过程理论中占据着中心的位置. 参数 $t$ 通常取任意实数值或实直线 $\mathbf{R}^1$ 上一个区间中的值（当要强调这一点时，称过程为连续时间随机过程（stochastic process in continuous time））. 但也可以只取整数值，在这种情形称 $X(t)$ 为离散时间随机过程（stochastic process in discrete time）（或随机序列（random sequence），或时间序列（time series））.

$X(t)$ 的进程中所有变量的无穷维空间（即，实现 $X(t)$ 的空间）的概率分布的表示不在概率论古典方法的范围之内，它要求构造特殊的数学工具. 仅有的例外是一类特殊随机过程，它的概率特性完全由某一有限维随机向量 $\mathbf{Y} = (y_1, \cdots, y_n)$ 及关系 $X(t) = X(t; \mathbf{Y})$ 所决定，因为在这种情形，$X(t)$ 的进程的概率只依赖于 $\mathbf{Y}$ 的概率分布. 在实际中重要的这种类型的随机过程的例子是形如

$$X(t) = A\cos(\omega t + \Phi)$$

的随机谐波振荡，其中 $\omega$ 是固定数，$A$ 和 $\Phi$ 是独立随机变量. 这种过程常常用在无线电技术中的振幅-相位调制的研究中.

随机过程的很广的一类概率分布是由相应于 $t$ 的值的所有有限子集 $(t_1, \cdots, t_n)$ 的随机向量 $\{X(t_1), \cdots, X(t_n)\}$ 的相容的有限维概率分布的无限族来表征的（见**随机函数**（random function））. 可是所有这些分布的知识不足以决定依赖于 $t$ 的不可数多个值的集合的 $X(t)$ 的值的事件的概率，即它不能唯一决定随机过程.

例. 设 $X(t) = \cos(\omega t + \Phi)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$，是具有随机相位 $\Phi$ 的谐波振荡. 设随机变量 $Z$ 均匀分布在区间 $[0, 1]$ 上，设 $X_1(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$，是由方程 $X_1(t) = X(t)$，当 $t \neq Z$ 时；$X_1(t) = X(t) + 3$，当 $t = Z$ 时，给定的随机过程. 因为对任意固定的有限集 $(t_1, \cdots, t_n)$, $\mathrm{P}(Z = t_1$ 或 $Z = t_2$ 或 $\cdots$ 或 $Z = t_n) = 0$，因此 $X_1(t)$ 和 $X(t)$ 的一切有限维分布是相同的. 有时 $X_1(t)$ 和 $X(t)$ 是有区别的：特别，$X(t)$ 的一切实现是连续的而 $X_1(t)$ 的所有实现都有一不连续点，并且 $X(t)$ 的所有实现不超过 1 而 $X_1(t)$ 的实现不具有这种性质. 这就得出给定的有限维概率分布系统可对应于不同的随机过程的修正，并且不能纯粹从这一系统的知识计算随机过程的实现是连续的概率或它被某一固定常数所界的概率.

可是，从一切有限维概率分布的知识，常可断言是否存在一个随机过程 $X(t)$ 具有这些有限维分布并且使得它的实现是连续的（或可微的，或无处超过给定的常数 $B$）（以概率 1）. 保证给定的有限维分布存在以概率 1 连续的实现的随机过程 $X(t)$ 的一般条件的典型例子是 Колмогоров 条件（Kolmogorov condition）：如果定义在区间 $[a, b]$ 上的随机过程 $X(t)$ 的有限维概率分布，使得对某些 $\alpha > 0$, $\delta > 0$, $C < \infty$ 和一切充分小的 $h$ 下述不等式成立：

$$\mathrm{E}\,|X(t+h) - X(t)|^{\alpha} < C|h|^{1+\delta} \tag{1}$$

（显然这一限制仅仅加在 $X(t)$ 的二维分布上），则 $X(t)$ 具有以概率 1 连续的实现的修正（例如，见 [1] - [6]）. 在 Gauss 过程 $X(t)$ 的特殊情形，条件 (1) 可用下述较弱的条件来代替：

$$\mathrm{E}\,|X(t+h) - X(t)|^{\alpha_1} < C_1|h|^{\delta_1}, \tag{2}$$

对某些 $\alpha_1>0$, $\delta_1>0$, $C_1>0$ 成立．对 **Wiener 过程**（Wiener process）和 **Ornstein-Uhlenbeck 过程**（Ornstein-Uhlenbeck process），上式对 $\alpha_1=2$, $\delta_1=1$ 成立．在给定有限维概率分布存在 $X(t)$ 的修正以概率 1 其实现是连续的（或可微的，或被某一常数所界的）情况下，通过要求 $X(t)$ 满足某些非常一般的正则性条件，同一过程的其他修正通常都能被排除，这些正则性条件在几乎所有的应用中都成立（见**可分过程**（separable process））．

代替给出随机过程 $X(t)$ 的有限维概率分布的无限系统，$X(t)$ 的分布也可以通过相应的**特征泛函**（characteristic functional）

$$\psi[l]=\mathrm{E}\exp\{il\{X\}\} \tag{3}$$

的值来定义，其中 $l$ 在很宽的一类依赖于 $X$ 的线性泛函类上变化．如果 $X$ 在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上是依概率连续的（即对任意 $\varepsilon>0$，当 $h\to 0$ 时有 $\mathrm{P}\{|X(t+h)-X(t)|>\varepsilon\}\to 0$），并且 $g$ 是 $[a,b]$ 上有界变差函数，则

$$\int_a^b X(t)dg(t)=l^{(g)}[X]$$

是随机变量．在 (3) 中可以取 $l[X]=l^{(g)}[X]$，为方便起见用 $\psi[g]$ 表示 $\psi[l^{(g)}]$．在许多情形下只需考虑形如

$$\int_a^b X(t)\varphi(t)dt=l_\varphi(X)$$

的线性泛函，其中 $\varphi$ 是关于 $t$ 的具有紧支撑的无限次可微函数（$[a,b]$ 可取有限区间）．在相当一般的正则性条件下，$\psi[l_\varphi]=\psi(\varphi)$ 的值唯一决定了 $X(t)$ 的一切有限维概率分布．因为当

$$\varphi(t)\to\theta_1\delta(t-t_1)+\cdots+\theta_n\delta(t-t_n)$$

时（此处 $\delta(t)$ 是 Dirac $\delta$ 函数，收敛理解为广义函数收敛），

$$\psi[\varphi]\to\psi_{t_1,\cdots,t_n}(\theta_1,\cdots,\theta_n),$$

其中 $\psi_{t_1,\cdots,t_n}(\theta_1,\cdots,\theta_n)$ 是随机向量 $\{X(t_1),\cdots,X(t_n)\}$ 的特征函数．如果 $\psi[\varphi]$ 不趋向于有限的极限，则 $X$ 在任意点没有有限值．而仅仅光滑值 $l_\varphi[X]$ 有意义，即特征泛函 $\psi[\varphi]$ 并不给出通常的（"古典的"）随机过程 $X(t)$，而是**广义随机过程**（stochastic process, generalized）$X=X(\varphi)$．

当一切有限维分布被少数低维分布唯一决定时，描述 $X(t)$ 的一切有限维分布的问题就被简化了．所有多维分布被 $X(t)$ 的一维分布决定的最重要的随机过程类是独立随机变量序列（它是特殊的离散时间随机过程），这类过程可以在古典概率论的框架中研究，并且某些重要的随机过程类可有效地确定为独立随机变量序列 $Y(t)$, $t=0,\pm1,\pm2,\cdots$, 的函数，这是很重要的．例如，下述随机过程是有重要意义的：

$$X(t)=\sum_{j=0}^{\infty}b_jY(t-j)$$

或

$$X(t)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}b_jY(t-j),\ t=0,\pm1,\cdots$$

（见**滑动平均过程**（moving-average process）），以及

$$X(t)=\sum_{j=1}^{\infty}Y(j)h_j(t),\ a\leqslant t\leqslant b,$$

其中 $h_j$, $j=1,2,\cdots$, 是在区间 $[a,b]$ 上指定的函数系统（见**随机函数的谱分解**（spectral decomposition of a random function））．

以下描述三个重要的随机过程类，其所有的有限维分布由 $X(t)$ 的一维分布以及 $\{X(t_1),X(t_2)\}$ 的二维分布决定．

1) 具有独立增量的随机过程类（见**独立增量随机过程**（stochastic process with independent increments））$X(t)$．对它来说 $X(t_2)-X(t_1)$ 与 $X(t_4)-X(t_3)$ 是独立随机变量（$t_1<t_2\leqslant t_3<t_4$）．为表示区间 $[a,b]$ 上过程 $X(t)$ 的分布，使用分布函数 $F_a(X)$ 和 $\Phi_{t_1,t_2}(z)$ 是方便的．此处 $a\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant b$, $F_a$ 为 $X(a)$ 的分布函数，$\Phi_{t_1,t_2}$ 为 $X(t_2)-X(t_1)$ 的分布函数，在这种情形，$\Phi_{t_1,t_2}(z)$ 必定满足函数方程

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_{t_1,t_2}(z-u)d\Phi_{t_2,t_3}(u)=\Phi_{t_1,t_3}(z), \tag{4}$$
$$a\leqslant t_1<t_2<t_3\leqslant b.$$

使用 (4) 可以证明：如果 $X(t)$ 是依概率连续的，则其特征泛函 $\psi[g]$ 可写成如下形式：

$$\psi[g]=\exp\left\{i\int_a^b\gamma(t)dg(t)+\right.$$
$$-\frac{1}{2}\int_a^b\beta(t)[g(b)-g(t)]dg(t)+$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty}\int_a^b\left[e^{iy[g(b)-g(t)]}-1-\frac{iy[g(b)-g(t)]}{1+y^2}\right]\times$$
$$\left.\times\frac{1+y^2}{y^2}d_t\Pi_t(dy)\right\},$$

其中 $\gamma(t)$ 是连续函数，$\beta(t)$ 是使得 $\beta(a)=0$ 的非降连续函数而 $\Pi_t(dy)$ 是 $\mathbf{R}$ 上关于 $t$ 的上升连续测度．

2) Марков 过程类 $X(t)$，即当 $t_1<t_2$，给定所有 $X(t)$, $t\leqslant t_1$，的值时，$X(t_2)$ 的条件概率分布仅依赖于 $X(t_1)$．为表示 **Марков 过程**（Markov pro-

cess) $X(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, 使用 $X(a)$ 的分布函数 $F_a(x)$ 和转移函数 $\Phi_{t_1,t_2}(x,z)$ 是方便的, 它对 $t_1 < t_2$ 定义为给定 $X(t_1)=x$, $X(t_2)<z$ 的条件概率. 函数 $\Phi_{t_1,t_2}(x,z)$ 必定满足 **Колмогоров-Chapman 方程** (Kolmogorov-Chapman equation), 类似于 (4), 并且在某些条件下可以得到对这一函数的比较简单的向前和向后 **Колмогоров 方程** (Kolmogorov equation) (亦即 Fokker-Planck 方程).

3) Gauss 过程类 $X(t)$, 这种过程所有 $\{X(t_1), \cdots, X(t_n)\}$ 的多维概率分布都是 Gauss (正态) 分布. 因为正态分布由它的一阶和二阶矩唯一决定, **Gauss 过程** (Gaussian process) $X(t)$ 由函数

$$\mathrm{E}X(t)=m(t)$$

和

$$\mathrm{E}X(t)X(s)=B(t,s)$$

的值决定, 其中 $B(t,s)$ 是一非负定核, 使得

$$b(t,s)=B(t,s)-m(t)m(s)$$

是非负定核. Gauss 过程 $X(t)(a\leqslant t\leqslant b)$ 的特征泛函为

$$\psi[g]=\exp\left\{ i\int_a^b m(t)dg(t) + -\frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b b(t,s)dg(t)dg(s)\right\}.$$

4) 另一类重要的随机过程类是平稳随机过程 $X(t)$, 它的统计特性不随时间的进程而改变, 即对任意固定的 $a$, 在变换 $X(t) \to X(t+a)$ 之下是不变的. 一般**平稳随机过程** (stationary stochastic process) $X(t)$ 的有限维概率分布不能用简单的方式来描述, 但对许多涉及这一过程的问题只要知道开始两个矩 $\mathrm{E}X(t)=m$ 和 $\mathrm{E}X(t)X(t+s)=B(s)$ 就够了 (于是此处只需假定广义平稳性, 即矩 $\mathrm{E}X(t)$ 和 $\mathrm{E}X(t)X(t+s)$ 与 $t$ 无关). 任一平稳过程 (至少广义上) 容许形如

$$X(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}dZ(\lambda) \tag{5}$$

的谱分解, 其中 $Z(\lambda)$ 是具不相关增量的随机过程, 这一点是本质的. 特别, 由它得出

$$B(s)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{is\lambda}dF(\lambda), \tag{6}$$

其中 $F(\lambda)$ 是 $X(t)$ 的单调非减谱函数 (见**平稳随机过程的谱函数** (spectral function of a stationary stochastic process)). 谱分解 (5) 和 (6) 在平稳随机过程的最佳 (在最小均方误差意义下) 线性外推、内插和滤波问题的解中处于核心的位置.

随机过程的数学理论也包含大量的与上述随机过程类有关的一系列子类或扩展类的结果 (见 **Марков 链** (Markov chain); **扩散过程** (diffusion process); **分支过程** (branching process); **鞅** (martingale); **平稳增量随机过程** (stochastic process with stationary increments) 等等).

А. М. Яглом 撰

**参考文献**


[1] Слуцкий, Е. Е., 《Избр. труды》, М., 1960, 269 – 280.

[2] Doob, J., Stochastic processes, Wiley, 1953.

[3] Гихман, И. И., Скороход, А. В., Введение в теорию случайных процессов, 2 изд., М., 1977 (英译本: Gikhman, I. I. and Skorohod, A. V., Introduction to the theory of stochastic processes, Saunders, 1967).

[4] Гихман, И. И., Скороход, А. В., Теория Случайных процессов, 1 – 3, М., 1971 – 1975 (中译本: И. И. 基赫曼等, 随机过程论, 科学出版社, 1986).

[5] Cramér, H. and Leadbetter, M. R., Stationary and related stochastic processes, Wiley, 1967.

[6] Вентцель, А. Д., Курс теории случайных процессов, М., 1975 (英译本: Wentzell, A. D., A course in the theory of stochastic processes, McGraw-Hill, 1981).

[7] Розанов, Ю. А., Случайные процессы, 2 изд., М., 1979.

[8] Ито, К., Вероятностные процессы, 1 – 2, М., 1960 – 1963 (译自日文).

[9] Скороход, А. В., Случайные процессы с независимыми приращениями, М., 1964 (英译本: Skorohod, A. V., Random processes with independent increments, Kluwer, 1991).

[10] Дынкин, Е. Б., Марковские процессы, М., 1963 (英译本: Dynkin, E. B., Markov processes, 1 – 2, Springer, 1965).

[11] Ибрагимов, И. А., Розанов, Ю. А., Гауссовские случайные процессы, М., 1970 (英译本: Ibragimov, I. A. and Rozanov, Yu. A., Gaussian stochastic processes, Springer, 1978).

[12] Розанов, Ю. А., Стационарные случайные процессы, М., 1963 (英译本: Rozanov, Yu. A., Stationary stochastic processes, Holden-Day, 1967).


А. М. Яглом 撰

【补注】 随机过程 $X$ 的状态空间 $E$ 可以是一个没有代数结构的 (好的) 拓扑空间, 如在 Марков 过程论的情形; 在这种情形常考虑形如 $f\circ X$ 的实过程, 其中 $f$ 是 $E$ 上的实函数; 也可以是微分流形, 像在现代扩散过程论中, 等等. 关于轨道的正则性, 常常不可能证明所考虑的正则轨道的集合具有概率 1, 因为

这个集合是不可测的，但通常可以通过证明它的外概率为 1 来避开这一困难．

**参考文献**


[A1] Bailey, N. T. J., The elements of stochastic processes, Wiley, 1964.

[A2] Chung, K. L., Lectures from Markov processes to Borwnian motion, Springer, 1982.

[A3] Cox, D. R. and Miller, H. D., The theory of stochastic processes, Methuen, 1965.

[A4] Iranpour, R. and Chacon, P., Basic stochastic processes, The Mark Kac lectures, MacMillan, 1988.

[A5] Kampen, N. G. van, Stochastic processes in physics and chemistry, North-Holland, 1981.

[A6] Lévy, P., Processus stochastiques et mouvement Brownien, Gauthier-Villars, 1965.

[A7] Parzen, E., Stochastic processes, Holden-Day, 1967 (中译本：伊·帕尔逊著，随机过程，高等教育出版社，1987).

[A8] Rosenblatt, M., Random processes, Sprigner, 1974.

[A9] Wax, N. (ed.), Selected papers on noise and Stochastic processes, Dover, reprint, 1954.

[A10] Wong, E., Stochastic processes in information and dynamical systems, McGraw-Hill, 1971.

[A11] Ethier, K., Markov processes, Wiley, 1986.

[A12] Durrett, R., Brownian motion and martingales in analysis, Wadsworth, 1984.


【译注】

**参考文献**


[B1] 王梓坤，随机过程通论，上、下卷，北京师范大学出版社，1996.


刘秀芳 译 陈培德 校

**相容随机过程** [**stochastic process, compatible; случайный процесс согласованный**]，适应随机过程 (adapted stochastic process)

一族定义在具有递增子 $\sigma$ 域 $(\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F})$ 族 $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ 的可测空间 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的随机变量 $X = (X_t(\omega))_{t \geq 0}$，使得对每一 $t \geq 0$，$X_t$ 是 $\mathcal{F}_t$ 可测的．为强调这类过程的这一性质常使用记号

$$X = (X_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$$

或

$$X = (X_t, \mathcal{F}_t),$$

并且说 $X$ 是 $\mathbf{F}$ 适应的 ($\mathbf{F}$-adapted)，或者适应于族 $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$，或 $X$ 是一适应过程．相应的定义也可用在离散时间的情形，这时"适应过程"有时也称为"适应序列"．

**参考文献**


[1] Dellacherie, C., Capacités et processus stochastiques, Springer, 1972.


А. Н. Ширяев 撰

【补注】 其他参考文献见随机过程 (stochastic process)．

刘秀芳 译 陈培德 校

**可微随机过程** [**stochastic process, differentiable; случайный процесс дифференцируемый**]

使极限

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{X(t+\Delta t) - X(t)}{\Delta t} = X'(t)$$

存在的随机过程 (stochastic process) $X(t)$；$X'(t)$ 称为随机过程 $X(t)$ 的导数 (derivative of the stochastic process)．按照极限解释的不同，可区分为以概率 1 微分 (differentiation with probability one) 与均方微分 (mean-square differentiation)．均方可微性的条件可以自然地用相关函数

$$B(t_1, t_2) = \mathrm{E}X(t_1)X(t_2)$$

来表示，即 $X'(t)$ 存在，当且仅当极限

$$B''(t_1, t_2) =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta t_1 \to 0 \\ \Delta t_2 \to 0}} \{[B(t_1+\Delta t_1, t_2+\Delta t_2) - B(t_1+\Delta t_1, t_2) -$$

$$- B(t_1, t_2+\Delta t_2) + B(t_1 t_2)] / \Delta t_1 \Delta t_2\}$$

存在．一个有均方导数的随机过程是绝对连续的．更精确地说，对每个 $t$，下式以概率 1 成立：

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^{t} X'(s)\,ds, \quad t \geq t_0.$$

一个过程等价于一有连续可微轨道过程的充分条件是其均方导数 $X'(t)$ 为连续的且以 $B''(t_1, t_2)$ 为其相关函数．对于 Gauss 过程，这个条件也是必要的．

**参考文献**


[1] Гихман, И. И., Скороход, А. В., Введение в теорию случайных процессов, 2 изд., М., 1977 (英译本：Gikhman, I. I., Skorokhod, A. V., Introduction to the theory of stochastic processes, Saunders, 1967).


Ю. А. Розанов 撰

【补注】 其他参考文献见随机过程 (stochastic process)．

潘一民 译

**广义随机过程** [**stochastic process, generalized; случайный процесс обобщенный**]

一种连续（时间）参数 $t$ 的随机过程 (stochastic process) $X$，一般地说，在固定时刻它的值不存在，而过程只具有"光滑值"，它是用一切可能的具有充分光滑的权函数（或脉冲转移函数）$\varphi(t)$ 的线性测量装置测量的结果值 $X(\varphi)$ 来描述的．一个广义随机过程 $X(\varphi)$ 是由具紧支撑的无穷次可微的函数 $\varphi$ 的空

间 $D$(或在广义函数论中使用的任一其他检验函数空间)到定义在某一概率空间上的随机变量空间 $L_0$ 的映射．它的实现 $x(\varphi)$ 是通常的自变量为 $t$ 的广义函数．通常的随机过程 $X(t)$ 也可以看作广义随机过程，对于它

$$X(\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)X(t)dt.$$

与下述事实相结合，这一点特别有用：广义随机过程总具有用

$$X^{(n)}(\varphi)=(-1)^n X(\varphi^{(n)})$$

定义的任意 $n$ 阶导数(例如，见**平稳增量随机过程**(stochastic process with stationary increments))．非古典类型的广义随机过程的最重要的例子是**白噪声**(white noise)．广义随机过程概念的推广是广义随机场．

参考文献见**广义随机场**(random field, generalized)． А. М. Яглом 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Gel'fand, I. M. and Vilenkin, N. Ya., Generalized functions, Applications of harmonic analysis, 4, Acad. Press, 1964(中译本：И. М. 盖勒范德，广义函数，科学出版社，1964)． 刘秀芳 译 陈培德 校


**可更新随机过程** [**stochastic process, renewable; случайный процесс обновляющий**]，新息随机过程(innovation stochastic process)

由一个输入过程所构造且包含该过程全部必要信息的、结构相当简单的**随机过程**(stochastic process)．新息随机过程已用于平稳时间序列的线性预测问题，随机过程统计的非线性问题，以及其他问题(见[1]－[3])．

在线性和非线性随机过程理论中可以以不同方式引入新息随机过程的概念．在线性理论中(见[4])，一个向量随机过程 $x_t$ 称为满足 $\mathsf{E}|\xi_t|^2<\infty$ 的随机过程 $\xi_t$ 的新息过程(innovation process)，如果 $x_t$ 有不相关增量的不相关分量，且对所有 $t$，

$$H_t(\xi)=H_t(x),$$

其中 $H_t(\xi)$ 和 $H_t(x)$ 分别是所有值 $\xi_s(s\leq t)$ 和 $x_s(s\leq t)$ 的均方闭线性包(在概率空间 $\Omega$ 上的适当函数空间内)．$x_t$ 的分量的数目 $N(N\leq\infty)$ 称为新息过程的重数(multiplicity of the innovation process)，它是由 $\xi_t$ 唯一确定的．在一维 $\xi_t$ 的情形下，对于离散时间，$N=1$，而对于连续时间，则只是在关于 $\xi_t$ 的相关函数的某些特殊假定下才有 $N<\infty$(见[4]，[5])．应用中，能从 $\xi_t$ 可表示为值 $x_s(s\leq t)$ 的线性泛函这个事实获得便利．

在非线性理论中(见[5]，[6])，新息随机过程(innovation stochastic process)这一术语通常用来称呼使得

$$\mathcal{F}_t^{\xi}=\mathcal{F}_t^{x}$$

成立的 **Wiener 过程**(Wiener process) $x_t$，其中 $\mathcal{F}_t^{\xi}$，$\mathcal{F}_t^{x}$ 分别为由 $\xi_s$，$x_s$，$s\leq t$，生成的事件 $\sigma$ 域．例如，在 $\xi_t(0\leq t\leq T)$ 为有随机微分

$$d\xi_t=a(t)dt+dw_t$$

的**伊藤过程**(Itô process)的情形，如果

$$\mathsf{E}\int_0^T a^2(s)ds<\infty$$

且过程 $a$ 与 $w$ 构成一 Gauss 系统，则由

$$\overline{w}_t=\xi_t-\int_0^t \mathsf{E}\{a(s)|\mathcal{F}_s^{\xi}\}ds$$

定义的 Wiener 过程 $\overline{w}_t$ 就是 $\xi_t$ 的新息过程(见[6])．

**参考文献**


[1] Колмогоров, А. Н., 《Изв. АН СССР Сер. матем.》, 5 (1941), 1, 3－14.

[2] Ширяев, А. Н., 《Пробл. передачи информации》, 2 (1966), 3, 3－22.

[3] Kailath, T., A view of three decades of linear filtering theory, *IEEE Trans. Inform. Theory*, 20 (1974), 2, 146－181.

[4] Розанов, Ю. А., Теория обновляющих процессов, М., 1974 (英译本：Rozanov, Yu. A., Innovation processes, Wiley, 1977).

[5] Ширяев, А. Н., в кн.: Тр. Школы-семинара по теории случайных процессов (Друскининкай, 1974), ч. 2, Вильнюс, 1975, 235－267.

[6] Липцер, Р. Ш., Ширяев, А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974 (中译本：Р. Ш. 里普切尔，А. Н. 史里亚耶夫，随机过程统计，宇航出版社，1987). А. А. Новиков 撰


【补注】

**参考文献**


[A1] Rozanov, Yu. A., Innovation processes, Winston, 1977 (译自俄文).


【译注】

**参考文献**


[B1] 潘一民，随机过程线性统计的理论与方法，上海科学技术出版社，1993． 潘一民 译


**独立增量随机过程** [**stochastic process with independent increments; случайный процесс с независимыми приращениями**]

一种随机过程(stochastic process) $X(t)$，对任意自然数 $n$ 和所有实数 $0\leq\alpha_1<\beta_1\leq\alpha_2<\beta_2\leq\cdots\leq\alpha_n<\beta_n$，增量

$$X(\beta_1)-X(\alpha_1),\ \cdots,\ X(\beta_n)-X(\alpha_n)$$

是相互独立随机变量．独立增量随机过程称为齐次的(homogeneous)，如果 $X(\alpha+h)-X(\alpha)$, $0\leqslant\alpha$, $0<h$，的概率分布只依赖于 $h$ 不依赖于 $\alpha$. 因为加任一非随机函数 $A(t)$ 到 $X(t)$ 上仍然是独立增量随机过程，所以这种过程的实现可以是很不规则的．可是，通过把过程适当地"中心化"(例如从 $X(t)$ 减去由关系式 $\mathrm{E}\arctan(X(t)-f(t))=0$ 定义的函数 $f(t)$) 能够对这个"中心化"的过程做出更确切的判断．存在至多可数多个(非随机)点 $t_j$，使得 $X(t)$ 在这些点上具有随机的跳跃

$$X_j=X(t_j+0)-X(t_j-0),$$

而差

$$Y(t)=X(t)-\sum_{t_j<t}X_j$$

是一随机连续的独立增量随机过程：对任意 $\varepsilon>0$，当 $t'\to t$ 时

$$\mathrm{P}\{|Y(t')-Y(t)|>\varepsilon\}\to 0.$$

**Wiener 过程**(Wiener process)和 **Poisson 过程**(Poisson process)是随机连续的独立增量随机过程的例子(前者的实现以概率 1 连续，后者的实现是跳跃值等于 1 的阶梯函数)．独立增量随机过程的一个重要例子是稳定过程(见**稳定分布**(stable distribution))．随机连续的独立增量随机过程(以概率 1)只有第一类间断点．这种过程的值的分布对任意 $t$ 是无穷可分的(见**无穷可分分布**(infinitely-divisible distribution))可以用**特征函数**(characteristic function)方法研究独立增量随机过程．关于过程穿越边界的概率以及第一次穿越时间的概率分布等问题，可用所谓**因子分解恒等式**(factorization identities)来解决．

**参考文献**

[1] Гихман, И. И., Скороход, А. В., Теория случайных процессов, 2, М., 1973 (中译本: И. И. 基赫曼等，随机过程论，科学出版社，1986).

[2] Скороход, А. В., Случайные процессы с независимыми приращениями, М., 1964 (英译本: Random processes with independent increments, Kluwer, 1991).

Ю. В. Прохоров 撰

【补注】 其他参考文献见**随机过程**(stochastic process).

刘秀芳 译　陈培德 校

**平稳增量随机过程[stochastic process with stationary increments; случайный процесс со стационарными приращениями]**

其某固定阶增量的统计特性不随时间而变化(即对时间推移 $t\mapsto t+a$ 不变)的离散或连续时间 $t$ 的**随机过程**(stochastic process) $X(t)$. 如同**平稳随机过程**(stationary stochastic process)的情形，将这种过程区分为两种类型，即严格意义下的平稳增量随机过程(stochastic processes with stationary increments in the strict sense)，其某一给定阶数的 $X(t)$ 的增量的所有有限维概率分布，在点 $t_1,\cdots,t_n$ 与 $t_1+a,\cdots,t_n+a$ 处，对于任意 $a$ 都彼此相同；广泛意义下的平稳增量随机过程(stochastic processes with stationary increments in the wide sense)，其在 $t$ 处增量的均值及在 $t$ 与 $t+s$ 处增量的二阶矩都不依赖于 $t$.

在离散时间 $t=0,\pm1,\cdots$ 的随机过程 $X(t)$ 的情形，总可以不去考虑 $X(t)$ 而考虑新的随机过程

$$\Delta^{(n)}X(t)=$$

$$=X(t)-\binom{n}{1}X(t-1)+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}X(t-n),$$

其中 $\binom{n}{k}$ 为二项系数．如果 $X(t)$ 是一 $n$ 阶平稳增量随机过程，那么过程 $\Delta^{(n)}X(t)$ 就是在通常意义下平稳的．因此，在离散时间情形下，平稳增量随机过程的理论容易归结为较特殊的平稳随机过程的理论．但是从应用的观点看，采用离散时间平稳增量随机过程的概念往往是很方便的，因为对于很多实际中碰到的明显非平稳的时间序列 $x(t)$ $(t=1,2,\cdots)$，它的某 $n$ 阶增量序列 $\Delta^{(n)}x(t)$ 却可以当成一个平稳随机过程 $\Delta^{(n)}X(t)$ 的实现．特别地，G. Box 与 G. Jenkins 在[1]中指出，在解决许多实际问题的时候，观实的时间序列常可以当成一个所谓整和自回归滑动平均过程(auto-regressive integrated moving-average process)的实观，这表示一类特殊的离散时间平稳增量随机过程(又见[2]～[4]).

连续时间的一阶(严格意义下的)平稳增量随机过程的例子有 **Wiener 过程**(Wiener process)与 **Poisson 过程**(Poisson process)．这两者又都属于更狭窄些的一阶独立增量过程类．在连续 $t$ 的情形下，平稳增量随机过程的理论不能直接归结为较简单的平稳过程现论．一阶平稳增量随机过程的相关理论(即相应的宽过程理论)由 А. Н. Колмогоров ([5]) 作了研究(亦见[6])．类似的 $n$ 阶平稳增量随机过程理论，其中 $n$ 为任一正整数，在[7]～[9]中作了考虑．平稳增量随机过程相关理论的核心问题是导出这类过程及其二阶矩的谱分解．**广义随机过程**(stochastic process, generalized)的概念可用来简化平稳增量随机过程的理论．因为在广义随机过程理论中任何随机过程 $X(t)$ 都有任意阶导数(也是广义随机过程)，所以一个 $n$ 阶平稳增量随机过程可以定义为一随

机过程 $X(t)$，其 $n$ 阶导数 $X^{(n)}$ 为一平稳随机过程（一般而言，是广义的）（见[9]）.

**参考文献**


[1] Box, G., Jenkins, G., Time series analysis, forecasting and control, Holden-Day, 1970.

[2] Nelson, C. R., Applied time series analysis for managerial forecasting, Holden-Day, 1973.

[3] Anderson, O. D., Time series analysis and forecasting. The Box-Jenkins approach, Butterworths, 1976.

[4] Robinson, E. A., Silva, M. T., Digital foundations of time series analysis: The Box-Jenkins approach, Holden-Day, 1979.

[5] Колмогоров, А. Н., 《Докл. АН СССР》, **26** (1940), 1, 6–9.

[6] Doob, J. L., Stochastic processes, Wiley, 1953.

[7] Яглом, А. М., 《Матем. сб.》, **37** (1955), 1, 141–196.

[8] Пинскер, М. С., 《Изв. АН СССР Сер. матем.》, **19** (1955), 319–345.

[9] Itô, K., Stationary random distributions, *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto* (*A*), **28** (1954), 209–223.


А. М. Яглом 撰

【补注】 其他参考文献，见**随机过程**（stochastic process）.

潘一民 译

**随机过程的滤波** [**stochastic processes, filtering of** 或 filtration of stochastic processes; **случайных процессов фильтрация**]

给定与一**随机过程**（stochastic process）$Z(t)$ 有关的另一随机过程的过去值，估计 $Z(t)$ 在当前 $t$ 时的值的问题. 例如，给定与一平稳过程 $Z(t)$ 平稳关联的平稳过程的值 $X(s)$ $(s \leq t)$ 来估计 $Z(t)$（例如，见[1]）. 通常考虑极小化均方误差 $\mathsf{E}|\hat{Z}(t)-Z(t)|^2$ 的估计量 $\hat{Z}(t)$. "滤波"一词的采用，源于从一个信号与随机噪声的"混合体"中分离出信号的问题. 它的一个重要情形是如下的最优滤波问题：这时 $Z(t)$ 与 $X(t)$ 之间的联系由**随机微分方程**（stochastic differential equation）

$$dX(t)=Z(t)dt+dY(t),\ t>t_0$$

所描述，其中假定噪声与 $Z(t)$ 独立，且由标准 **Wiener 过程**（Wiener process）$Y(t)$ 给出.

一个广泛使用的滤波方法是 Kalman-Bucy 法（Kalman-Bucy method），它适用于由线性随机微分方程所描述的过程 $Z(t)$. 例如，如果在上述情形中，

$$dZ(t)=a(t)Z(t)dt+dY_1(t),$$

其中标准 Wiener 过程 $Y_1(t)$ 与 $Y(t)$ 是独立的，且有零初始条件，则有

$$\hat{Z}(t)=\int_{t_0}^{t}c(t,s)dX(s),$$

其中权函数 $c(t,s)$ 从如下方程组获得：

$$\frac{d}{dt}c(t,s)=[a(t)-b(t)]c(t,s),\ t>s$$

$$c(s,s)=b(s),$$

$$\frac{d}{dt}b(t)=2a(t)b(t)-[b(t)]^2+1,$$

$$t>t_0,\ b(t_0)=0.$$

此方法对非线性方程的推广称为一般随机滤波问题或非线性滤波问题（见[2]）.

在

$$Z(t)=\sum_{k=1}^{n}c_kZ_k(t)$$

依赖于未知参数 $c_1,\cdots,c_n$ 的情形下，可以由给定 $X(s)$ $(s\leq t)$ 来估计这些参数而求得其内插估计 $\hat{Z}(t)$，最小二乘估计及其推广可用于此（例如，见[3]）.

**参考文献**


[1] Розанов, Ю. А., Стационарные случайные процессы, М., 1963（英译本：Rozanov, Yu. A., Stationary random process, Holden-Day, 1967）.

[2] Липцер, Р. Ш., Ширяев, А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974（英译本：Liptser, R. S. and Shiryaev, A. N., Statistics of stochastic processes, 1–2, Springer, 1977–1978）.

[3] Ибрагимов, И. А., Розанов, Ю. А., Гауссовские случайные процессы, М., 1970（英译本：Ibragimov, I. A., Rozanov, Yu. A., Gaussian stochastic processes, Springer, 1978）.


Ю. А. Розанов 撰

【补注】 在随机过程的滤波中要区分两类问题. 线性滤波问题（linear filtering problem）是给出一个实平稳过程的过去值的线性函数来估计另一平稳随机过程，使其均方误差极小化. 随机滤波问题（stochastic filtering problem）或非线性滤波问题（non-linear filtering problem）则是确定一过程在给定另一关联过程的过去值之下的条件概率分布.

线性滤波问题首先由 N. Wiener（[A18]）及 A. H. Колмогоров（[A20]）加以严格表述与解决. R. E. Kalman 又对状态空间形式下的随机系统重新表述了线性滤波问题. 该问题的解答，对于离散时间过程，称为 Kalman 滤波器（Kalman filter）（[A7]），而对于连续时间过程，则称为 Kalman-Bucy 滤波器（Kalman-Bucy filter）（[A8]）. 其问题表述中的新内容在于强调递推滤波器与状态空间的有限维性.

在 Wiener-Колмогоров 滤波（Wiener-Kolmogorov filtering）中（见[A12]，[A20]），是给定一对联合平稳零均值正态分布随机过程 $\{y(t),\ z(t):\ t\in\mathbf{R}\}$，想要

从观测 $y$ 的过去：$\{y(t'): t'<t\}$，求得 $z(t)$ 的最优最小二乘估计. 最优估计量 $\hat{z}(t)$ 将由下述卷积式给出：

$$\hat{z}(t)=\int_{-\infty}^{t} G(t-t')y(t')\,dt'.$$

卷积核由如下积分方程确定：

$$\int_0^{\infty} G(t')R_{yy}(t-t')dt'=R_{zy}(t),\ t>0,$$

其中 $R_{yy}(t)=\mathsf{E}\{y(t)y^T(0)\}$, $R_{zy}(t)=\mathsf{E}\{z(t)\cdot y^T(0)\}$.

这个积分方程就是所谓的 **Wiener-Hopf 方程** (Wiener-Hopf equation), $G$ 是由 $R_{yy}$ 与 $R_{zy}$ 确定的函数. 解它的最有效的方法是**随机函数的谱分解** (spectral decomposition of a random function) 方法.

在 Kalman-Bucy 滤波 (Kalman-Bucy filtering) 中 (见 [A7], [A8])，模型由如下的线性随机微分方程给出：

$$dx=A(t)x\,dt+B(t)dw(t),$$
$$dy=C(t)x\,dt+D(t)dw(t),$$

其中 $w$ 是一个 **Wiener 过程** (Wiener process)，它通过状态向量过程 $x$ 生成被观测向量过程 $y$. 假定矩阵 $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$ 是已知的且有适当维数，$D(t)D^T(t)$ 是严格正定的. 初始状态 $x(t_0)$ 具有已知均值 $m_0$ 与协方差 $\Pi_0$ 的正态分布，并假定与 $w$ 独立. 此外，$y(t_0)$ 取为 0.

问题是要从观测值 $Y(t')$ $(t_0\leqslant t'<t)$ 来估计 $x(t)$. 产生这一估计量的 Kalman 滤波器由下式给出：

$$d\hat{x}=A(t)\hat{x}dt+L(t)(dy-C(t)\hat{x}dt),\ t\geqslant t_0.$$

初始条件为 $\hat{x}(t_0)=m_0$ 而 Kalman 增益 (Kalman gain) $L$ 由下式定义：

$$L(t)=(\Sigma(t)C^T(t)+$$
$$+B(t)D^T(t))\,(D(t)D^T(t))^{-1},$$

其中 $\Sigma$ 是 **Riccati 方程** (Riccati equation) 的解：

$$\dot{\Sigma}=A(t)\Sigma+\Sigma A^T(t)+$$
$$-(\Sigma C^T(t)+B(t)D^T(t))\,(D(t)D^T(t))^{-1}\times$$
$$\times\,(C(t)\Sigma+D(t)B^T(t))+B(t)B^T(t),$$

而 $\Sigma(t_0)=\Pi_0$. 这个 $n\times n$ 对称阵 $\Sigma$ 的微分方程可以证明有唯一的对称非负定解. 它的解实际上等于估计误差：

$$\Sigma(t)=\mathsf{E}\{(x(t)-\hat{x}(t))\,(x(t)-\hat{x}(t))^T\}.$$

在时不变 Kalman 滤波器中，可以假定观测的初始时刻是趋于负无穷的：$t_0\to-\infty$. 如果假设 $A$, $B$, $C$, $D$ 是不随 $t$ 变化的，且满足一定的可观测性与可控制性条件，那么无穷 Kalman 滤波器 (infinite Kalman filter) 就变成

$$d\hat{x}=A\hat{x}dt+L(dy-C\hat{x}dt),$$

其中 $L$ 由下式定义：

$$L=(\Sigma^+C^T+BD^T)\,(DD^T)^{-1},$$

而 $\Sigma^+$ 是如下代数 Riccati 方程的(唯一)对称非负定解：

$$0=A\Sigma+\Sigma A^T+$$
$$-(\Sigma C^T+BD^T)\,(DD^T)^{-1}\,(C\Sigma+DB^T)+BB^T.$$

Kalman 滤波器，尤其是它的时不变型，是控制理论与信号处理的最基本结果之一，而且在过程控制、航天工程、经济学等诸方面有着广泛的应用，很多这类应用涉及非线性系统，这时 Kalman 滤波器以逐步线性化的办法这种不严格的方式加以应用. 这种算法称为推广的 Kalman 滤波器 (extended Kalman filter)，而且已被证明是有重大实际效果的 ([A11]). 关于线性滤波理论的概论，见 [A21], [A22].

随机滤波问题或非线性滤波的研究，始于 P. Л. Стратонович ([A16]) 与 H. J. Kushner ([A9]). 它的推广及采用鞅论的证明，则应归于藤崎、G. Kallianpur 与国田 ([A4]). 亦见 [A26] 与 [2]. 一项导致对非正规化条件密度的动力学方程的研究，由 Kallianpur, C. Striebel ([A6]), R. E. Mortensen ([A12]), M. Zakai ([A19]) 及 E. Pardoux ([A13]) 加以发展. 亦见 [A25]. 这些滤波公式没有一个是可以直接实现的，因为它们全都是"无穷维的"，即是以测度值或随机偏微分方程的形式来描述条件分布或密度函数随时间的发展. 1980 年 V. E. Beneš ([A1]) 发现了一类非线性系统，其条件密度允许有限维参数化，由此导致对于刻画这类系统及探讨非线性滤波与某些微分算子 Lie 代数之间的联系的广泛研究，这类研究由 R. W. Brockett, J. M. C. Clark ([A3]) 开端；亦见 [A25], [A18]. 其他的工作，例如 [A23], [A24]，则致力于用 Malliavin 演算的方法，建立光滑条件密度函数的存在性.

对计数过程观测的随机滤波问题，首先由 D. L. Snyder 加以考虑，见 [A15]. 其推广可在 [A2], [A14], [A17] 中找到.

**参考文献**

[A1] Beneš, V. E., Exact finite-dimensional filters for

certain diffusion with nonlinear drift, Stochastics, 5 (1981), 65 – 92.

[A2] Brémaud, P., Point processes and queues-Martingale dynamics, Springer, 1981.

[A3] Brockett, R. W., Clark, J. M. C., The geometry of the conditional density equation, in O. L. R. Jacobs, M. H. A. Davis, M. A. H. Dempster, C. J. Harris, P. C. Parks (eds.): Analysis and Optimization of Stochastic Systems, Acad. Press, 1980, 299 – 309

[A4] Fujisaki, M., Kallianpur, G., Kunita, H., Stochastic differential equations for the nonlinear filtering problem, *Osaka J. Math.*, **9** (1972), 19 – 40.

[A5] Jazwinski, A. H., Stochastic processes and filtering theory, Acad. Press, 1970.

[A6] Kallianpur, G., Striebel, C., Estimation of stochastic systems: Arbitrary system processes with additive white noise observation errors, *Ann. Math. Statist.*, **39** (1968), 785 – 801.

[A7] Kalman, R. E., A new approach to linear filtering and prediction problems, *J. Basic Eng., Trans. ASME., Series D*, **82** (1960), 1, 35 – 45.

[A8] Kalman, R. E., Bucy, R. S., New results in linear filtering and prediction theory, *J. Basic Eng., Trans. ASME, Series D*, **83** (1961), 95 – 108.

[A9] Kushner, H. J., Dynamical equations for optimal nonlinear filtering, *J. Diff. Equations*, 3 (1967), 179 – 190.

[A10] Marcus, S. I., Algebraic and geometric methods in nonlinear filtering, *SIAM J. Control Optim.*, **22** (1984), 814 – 844.

[A11] Maybeck, P. S., Stochastic models, estimation and control, 1 – 3, Acad. Press, 1979 – 1982.

[A12] Mortensen, R. E., Optimal control of continuous time stochastic systems, Doctoral Diss. Dept. Elect. Engin. Univ. California, 1966.

[A13] Pardoux, E., Stochastic partial differential equations and filtering of diffusion processes, *Stochastics*, **3** (1979), 127 – 167.

[A14] Segall, A., Davis, M. H. A., Kailath, T., Nonlinear filtering with counting observations, *IEEE Trans. Inform. Theory*, **21** (1975), 143 – 149.

[A15] Snyder, D. L., Random point processes, Wiley, 1975.

[A16] Stratonovitch, R. L., Conditional Markov processes, *Theor. Probab. Appl.*, **5** (1960), 156 – 178.

[A17] Schuppen, J. H. van, Filtering prediction and smoothing for counting process observations, a martingale approach, *SIAM J. Appl. Math.*, **32** (1977), 552 – 570.

[A18] Wiener, N., Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series: with engineering applications, M. I. T., 1949.

[A19] Zakai, M., On the optimal filtering of diffusion processes, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, **11** (1969), 230 – 243

[A20] Kolmogorov, A. N., Interpolation and extrapolation of stationary random sequences, *Byull. Akad. Nauk, SSSR Ser. Mat.*, 5 (1941), 3 – 14 (俄文).

[A21] Kailath, T., Lectures on Wiener and Kalman filtering, Springer, 1981.

[A22] Willems, J. C., Recursive filtering, *Statistica Neerlandica*, **32** (1978), 1, 1 – 39.

[A23] Bismut, J. M., Michel, D., Diffusions conditionelles I, *Funct. Anal.*, **44** (1981), 174 – 211.

[A24] Bismut, J. M., Michel, D., Diffusions conditionelles II, *Funct. Anal.*, **45** (1982), 274 – 292.

[A25] Hazewinkel, M., Willems, J. C., Stochastic systems: the mathematical theory of filtering and identification and applications, Reidel, 1981.

[A26] Kallianpur, G., Stochastic filtering theory, Springer, 1978.

【译注】

**参考文献**

[B1] 中国科学院数学研究所概率组，离散时间系统滤波的数学方法，国防工业出版社，1975.

[B2] 潘一民，随机过程的线性统计理论与方法，上海科学技术出版社，1993.

潘一民 译

**随机过程的内插 [stochastic processes, interpolation of; случайных процессов интерполяция]**

用一个随机过程 (stochastic process) $X(t)$ 在某区间 $a<t<b$ 外的观察值估计它在此区间内的值的问题．通常认为内插估计 $\hat{X}(t)$ 是使内插的均方误差比较所有其他估计量达到最小：

$$\mathsf{E}|\hat{X}(t)-X(t)|^2=\min;$$

如果限于考虑线性估计量，则内插称为线性的 (linear)．最初提出和解决的问题是平稳序列的值 $X(0)$ 的线性内插．此问题相当于如下的问题：在区间 $-\pi<\lambda\leqslant\pi$ 上的平方可积函数空间 $L_2$ 中寻求 $\varphi(\lambda)\in L_2$ 在由函数 $e^{i\lambda k}$ $(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 生成的子空间上的投影．这个问题在平稳随机过程理论中已有了很大的推广 (见**平稳随机过程** (stationary stochastic process)；[1]，[2])．一个应用是从系统

$$LX(t)=Y(t),\ t>t_0$$

产生的随机过程的内插问题，其中 $L$ 是 $l$ 阶线性微分算子，而 $Y(t)$ $(t>t_0)$ 是**白噪声** (white noise) 过程．对于独立于此白噪声的给定初值 $X^{(k)}(t_0)$ $(k=0,\cdots,l-1)$，最优内插估计量 $\hat{X}(t)$ $(a<t<b)$ 是对应的边值问题

$$L^{*}L\hat{X}(t)=0,\ a<t<b$$

的解，其中 $L^{*}$ 表示形式伴随算子，且在边界点 $s=a,b$ 处满足边界条件

$$\hat{X}^{(k)}(s)=X^{(k)}(s),\ k=0,\cdots,l.$$

对于随机微分方程系统，某些分量在给定其他被观测分量的值时的内插问题也归结为类似的内插方程（见[3]）.

参考文献


[1] Колмогоров, А. Н., «Бюлл. МГУ», 2 (1941), 6, 1－40.

[2] Розанов, Ю. А., Стационарные случайные процессы, М., 1963 (英译本: Rozanov, Yu. A., Stationary stochastic processes, Holden-Day, 1967).

[3] Липцер, Р. Ш., Ширяев, А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974 (英译本: Liptser, R. S. and Shiryaev, A. N., Statistics of stochastic processes, 1－2, Springer, 1977－1978).


Ю. А. Розанов 撰

【补注】 内插问题通常定义为一个在某时间区间上未被观测的随机过程当给定一在此时间区间外被观测的关联过程时的估计．要区别两种特殊情形：1）线性最小二乘内插，此时估计量限定是线性的，且极小化一最小二乘判据，见[A1]，[A3]；2）内插由给定观测时估计量的条件分布来确定，见[A2].

关于内插问题的西方文献，见[A5]，§5.3 及[A1]，§4.13．已经翻译了的其他俄文文献还有[A6]；[A7]，§37．应用随机实现理论的近代发展，见[A3]，[A4]．内插问题的结果也可从光滑问题的结果推出（[A2]）.

参考文献


[A1] Dym, H., Mckean, H. P., Gaussian processes, function theory, and the inverse spectral problem, Acad. Press, 1976.

[A2] Pardoux, E., Equations du filtrage nonlinéaire, de la prédiction et du lissage, *Stochastics*, 6 (1982), 193－231.

[A3] Pavon, M., New results on the interpolation problem for continuous-time stationary increment processes, *SIAM J. Control Optim.*, 22 (1984), 133－142.

[A4] Pavon, M., Optimal interpolation for linear stochastic systems, *SIAM J. Control Optim.*, 22 (1984), 618－629.

[A5] Wiener, N., Extrapolation, interpolation, and smoothing of stationary time series: with engineering applications, M. I. T., 1949.

[A6] Yaglom, A. M., Extrapolation, interpolation and filtration of stationary random processes with rational spectral density, *Amer. Math. Soc. Sel. Transl. Math. Statist.*, 4 (1963), 345－387 (*Tr. Moskov. Mat. obshch.*, 4 (1955), 333－374).

[A7] Yaglom, A. M., An introduction to the theory of stationary random functions, Prentice-Hall, 1962 (译自俄文).


潘一民 译

**随机过程的预测** [**stochastic processes, prediction of; случайных процессов прогнозирование**]，随机过程的外推（extrapolation of stochastic processes）

由**随机过程**（stochastic process）$X(t)$ 直到现在时刻 $s$ 的观察值对将来 $t>s$ 的值进行估计的问题．通常想要的外推估计 $\hat{X}(t)$ $(t>s)$ 是使得均方误差 $E|\hat{X}(t)-X(t)|^2$ 在基于过程直到时刻 $s$ 的过去值的所有估计中最小的那个（如果限于考虑线性估计，所得到的预测称为是线性的）.

已经提出并得到解决的问题之一是关于平稳序列的线性预测．这一问题类似于下述问题：在区间 $-\pi\leqslant\lambda\leqslant\pi$ 上平方可积的函数空间 $L_2$ 中，必须在由函数 $e^{i\lambda k}$, $k=0,-1,-2,\cdots$，生成的子空间上找到函数 $\varphi(\lambda)\in L_2$ 的投影．在**平稳随机过程**（stationary stochastic process）的理论中这个问题已经被大大地推广了．一个应用是由下述系统

$$LX(t)=Y(t),\ t>t_0,$$

引起的随机过程的预测问题，其中 $L$ 是 $l$ 阶线性微分算子，而 $Y(t)$, $t>t_0$，是一**白噪声**（white noise）过程．给定 $X(t)$ 在时间间隔 $t_0\leqslant t\leqslant s$ 的值和初始值 $X^{(k)}(t_0)$, $k=0,\cdots,l-1$，与白噪声独立，最佳预测 $\hat{X}(t)$, $t>s$，由解相应的方程

$$L\hat{X}(t)=0,\ t>s,$$

带初始条件

$$\hat{X}^{(k)}(s)=X^{(k)}(s),\ k=0,\cdots,l-1,$$

得到．对随机微分方程系统，给定其他已观测到的分量值预测某些分量的问题，归结为相应的随机方程的外推.

参考文献见**随机过程的内插**（stochastic processes, interpolation of）.

Ю. А. Розанов 撰

【补注】 线性预测问题的研究，在俄国始于 А. Н. Колмогоров（[A7]，[A8]），在西方始于 N. Wiener（[A6]），他还同 P. Masani 处理了多变量情形（[A11]，[A12]）．他们考虑的预测是基于整个的过去；基于过去的有限时段的预测更困难，见[A9]，[A10]．对非平稳过程的线性预测在[A13]中讨论．线性理论也可在[A2]中找到．R. E. Kalman 的方法（[A3]，[A4]）基于 Kalman 滤波和过程在状态空间上的实现，引入了在实践中很有用的预测算法．在[A5]中介绍了将预测问题推广到扩散过程的情形．在应用科

学中对预测算法的应用见[A1].

**参考文献**


[A1] Box, G. E. P. and Jenkins, G. M. Time series analysis. forecasting and control, Holden-Day, 1976.

[A2] Hannan, E. J.. Multiple time series, Wiley, 1970

[A3] Kalman, R. E.. A new approach to linear filtering and prediction problems, *J Basic Eng. Trans. ASME. Series D*, **82** (March 1960), 1, 35 – 45.

[A4] Kalman, R. E. and Bucy, R. S., New results in linear filtering and prediction theory. *J. Basic Eng. Trans. ASME. Series D*, **83** (1961), 95 – 108.

[A5] Pardoux, E., Equations du filterage nonlinéaire. de la prédiction et du lissage, *Stochastics*, **6** (1982), 193 – 231.

[A6] Wiener, N., Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series: with engineering applications, M. I. T., 1949.

[A7] Kolmogorov, A. N., Stationary sequences in Hilbert space, *Byull Moskov. Gos. Univ.*, Sect. A, 2(1941), 6, 1 – 40 (俄文).

[A8] Kolmogorov, A. N., Interpolation und Extrapolation von Stationären zufälligen Folgen, *Izv. Akad. Nauk. SSSR*, 5(1941), 3 – 14.

[A9] Krein, M. G., On a fundamental approximation problem in the theory of extrapolation and filtration of stationary random processes, *Amer. Math. Soc. Sel. Transl. Math. Statist.*, **4** (1964), 127 – 131 (*Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, **94**(1954), 13 – 16).

[A10] Dym, H. and McKean, H. P., Gaussian processes, function theory and the inverse spectral problem, Acad. Press, 1976.

[A11] Wiener, N. and Masani, P., The prediction theory of multivariate stochastic processes, I, *Acta math.*, **98**(1957), 111 – 150.

[A12] Wiener, N. and Masani, P., The prediction theory of multivariate stochastic processes II, *Acta Math.*, **99**(1958), 93 – 137.

[A13] Rissanen, J. and Barbosa, L., A factorization problem and the problem of predicting non-stationary vector-valued random processes, *Z. Wahrscheinlichkeitstheoirie verw. Geb.*, **12**(1969), 255 – 266.


刘秀芳 译 陈培德 校

**随机规划 [stochastic programming; стохастическое программирование]**

**数学规划**(mathematical programming)的一个分支，它研究对问题的目标和限制给出不完全信息的条件极值问题的求解理论和方法．随机规划框架中包括控制、计划和设计的许多实际问题．随机规划方法也能用于其运作介质的状态中有随机变化的适应系统和算法．随机最优化模型通常对于解的选择比极值问题的确定性陈述更符合现实条件．

为了构造控制系统的合理随机模型，不仅必须对条件的随机参数的统计特征有处理，并且也对在信息入口储存和运用的次序上，所容许的解的顺序上以及对于解的质量要求上有处理．随机问题分为单阶段、二阶段和多阶段问题．

在随机规划的单阶段问题(single-stage problem)中，初始信息进入的动态特性不起作用，解被一次性接受，不被校正．单阶段问题根据目标泛函的类型、限制的特征和解的形式来分类．最经常运用的目标泛函是落入一定的、一般是随机的区域的概率($P$ 模型($P$-model))和解的某个函数的数学期望或方差(分别是 $M$ 模型($M$-model)和 $V$ 模型($V$-model))．随机规划问题的单阶段问题的可行解区域由刚性的、概率的或统计的限制来确定．对于所有(或几乎所有)实现都必须满足的问题的限制称为刚性的(rigid)．随机问题的限制称为概率的(probabilistic)，如果在问题的条件中容许以不高于给定值的概率来接受的离差．限制称为统计的(statistical)，如果根据问题的适当内容只要求它们平均满足．

单阶段问题也根据解在初始数据的实现的观察前还是后来接受而有所区别．在第一种情形下，解以确定性向量的形式来定义，而在第二种情形下，则以"决策原理"的形式来定义，后者是问题条件的随机参数的函数．

关于随机规划的单阶段问题的解法(solution method for single-stage problems)的研究分为直接法和间接法．直接法是迭代过程，使得人们由观察条件的逐次实现来逼近问题的解．直接法在内容丰富的术语中被解释为适应方法．这些方法是所谓**随机逼近**(stochastic approximation)模式的推广．间接法归结为构造随机问题的确定性等价物，且利用确定性数学规划的已知方法．无论是直接法还是间接法，在其确定性等价物是**凸规划**(convex programming)问题的情形下，都是有效的．

随机规划的二阶段问题(two-stage problem)是在不完全信息条件下的控制过程的最为流行的模型．二阶段模型被推广为包括不同信息结构的随机问题，其中信息结构反映收集信息以及解的选择和校正的可能的动态面貌．多阶段随机模型的理论特别是被包括在 Марков 规划(见，例如，[6])以及随机离散最优控制中．

随机规划的理论和方法已经被推广到一系列随机最优控制类中(见[5])．

**参考文献**


[1] Юдин, Д. Б., Математические методы управления в условиях неполной информации, М., 1974.

[2] Дынкин, Е. Б., Юшкевич, А. А., Управляемые

марковские процессы и их приложения, М., 1975 (英译本: Dynkin, E. B. and Yushkevich, A. A., Controlled Markov processes, Springer, 1979).

[3] Ермольев, Ю. М., Методы стохастического программирования, М. 1976.

[4] Аркин, В. И., Евстигнеев, И. В., Вероятностные модели управления и экономической динамики, М., 1979 (英译本: Arkin, V. I. and Evstigneev, I. V., Stochastic models of control and economic dynamics, Acad. Press, 1987).

[5] Юдин, Д. Б., Задачи и методы стохастического программирования, М., 1979.

[6] Юдин, Д. Б., Юдин, А. Д., Экстремальные модели в экономике, М., 1979. Д. Б. Юдин 撰

【补注】

**参考文献**

[A1] Wets, R. J.-B., Stochastic programming: solution techniques and approximation schemes, in A. Bachem and B. Korte (eds.), *Mathematical Programming - The State of the Art*, Springer, 1983, 566 – 603.

[A2] Vajda, S., Probabilistic programming, Acad. Press, 1972.

史树中 译

**随机序列 [stochastic sequence; стохастическая последовательность]**

定义在一可测空间 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上的随机变量的序列 $X=(X_n)_{n\geq 1}$, 具有使其为适应的递增 $\sigma$ 域族 $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 1}$, $\mathscr{F}_n\subseteq\mathscr{F}$: 即对每一 $n\geq 1$, $X_n$ 是 $\mathscr{F}_n$ 可测的. 在表示这种序列时, 为了强调 $X_n$ 关于 $\mathscr{F}_n$ 的可测性, 常用记号 $X=(X_n, \mathscr{F}_n)_{n\geq 1}$. 定义在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ 上的随机序列的典型例子有 Марков 序列, 鞅, 半鞅及其他 (见 **Марков 链** (Markov-chain); **鞅** (martingale); **半鞅** (semi-martingale)). 在连续时间情形 (其中用 $t\geq 0$ 替代离散时间 $n\geq 1$), 相应的对象集 $X=(X_t, \mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ 称为**随机过程** (stochastic process).

А. Н. Ширяев 撰

【补注】 "随机序列" 这一术语在西方很少使用; 如果必要的话, 通常是说 "随机过程" 再加上 "离散时间". 严格说来, 它无非就是随机变量的序列. 但如果给定了 $\sigma$ 域流 $\mathrm{F}=(\mathscr{F}_n)_{n\geq 1}$, 则如正文所说常假定过程是适应的. 又见**相容随机过程** (stochastic process, compatible).

潘一民 译

**Stokes 公式 [Stokes formula; Стокса формула]**

1) 表达向量场通过某二维定向流形的流量与沿该流形的相应定向边界的环流之间关系的一个公式. 设 $S$ 为定向的逐片光滑曲面, $\nu=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 为 $S$ 的单位法向量 (当然指在它存在的点上), 它确定了 $S$ 的定向, 又设 $S$ 的边界由有限个段逐段光滑曲线所组成, $S$ 的边界记为 $\partial S$, 其定向由单位切向量 $\tau$ 来确定, 使得后者的定向与 $S$ 的定向 $\nu$ 相容.

假设 $\mathbf{a}=(P, Q, R)$ 是在 $S$ 的一邻域内的连续可微**向量场** (vector field), 则有

$$\iint_S (\operatorname{rot}\mathbf{a}, \nu)\, dS=\int_{\partial S}(\mathbf{a}, \tau)\, ds, \qquad (*)$$

($dS$ 为 $S$ 的面积元, $ds$ 为 $S$ 的边界 $\partial S$ 的弧长的微分), 或用坐标形式表达, 则为

$$\iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS=\int_{\partial S} P\,dx+Q\,dy+R\,dz.$$

此公式为 G. Stokes (1854) 建立.

2) Stokes 公式也指公式 $(*)$ 的一个推广, 它表示在定向紧流形 $M$ 上的**微分形式** (differential form) $\omega$ 的外微分的积分, 等于形式 $\omega$ 自身沿 $M$ 边界 $\partial M$ 的积分 (取 $\partial M$ 的定向与 $M$ 的定向相容):

$$\int_M d\omega=\int_{\partial M}\omega.$$

此公式的另一些特殊情形是 **Newton - Leibniz 公式** (Newton - Leibniz formula), **Green 公式** (Green formulas) 以及 **Остроградский 公式** (Ostrogradski formula).

Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】

**参考文献**

[A1] Arnol'd, V. I., Mathematical methods of classical mechanics, Springer, 1978 (译自俄文) (中译本: В. И. 阿诺尔德, 经典力学的数学方法, 高等教育出版社, 1992).

[A2] Spivak, M., Calculus on manifolds, Benjamin, 1965 (中译本: M. 斯皮瓦克, 流形上的微积分, 科学出版社, 1985).

[A3] Choquet - Bruhat, Y., de Witt - Morette, C. and Dillard - Bleick, M., Analysis, manifolds, physics, North - Holland, 1977, p. 205 (译自法文).

[A4] Triebel, H., Analysis and mathematical physics, Reidel, 1986, p. 375.

王斯雷 译

**Stokes 现象 [Stokes phenomenon; Стокса явление]**

函数 $f(z)$ 当 $|z|\to\infty$ 时在复 $z$ 平面的不同区域中有不同渐近表示的现象. G. Stokes 证明了 ([1]), 所谓 **Airy 方程** (Airy equation)

$$w''-zw=0$$

的、当实的 $z=x\to+\infty$ 时下降的解 $w_0(z)$, 在 $|z|\to\infty$ 时有以下的渐近展开式:

$$w_0(z)\sim Cz^{-1/4}\exp\left[-\frac{2}{3}z^{3/2}\right],$$

$$|\arg z| \leqslant \pi - \varepsilon < \pi;$$

$$w_0(z) \sim Ce^{i\pi/4} z^{-1/4} \cos\left[\frac{2}{3} z^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right],$$

$$|\arg z - \pi| \leqslant \varepsilon < \pi,$$

这里常数 $C \neq 0$. 函数 $w_0(z)$ 是一个整函数，但其渐近展开式则是不连续函数.

在 Laplace 积分，常微分方程的解等等中，也出现 Stokes 现象（见[2]，[3]）.

**参考文献**


[1] Stokes, G. G., *Trans. Cambridge Philos, Soc.*, **10** (1864), 106 – 128.

[2] Heading, J., An introduction to phase-integral meth-ods, Methuen, 1962.

[3] Bruijn, N. G. de, Asymptotic methods in analysis, Dover, reprint, 1981.


М. В. Федорюк 撰

【补注】 对渐近分析中的 Stokes 现象现在又有了兴趣，这是由 M. V. Berry 在[A1]中开始的. 他在对此现象新的解释中，引入了一个误差函数来描述渐近展开式余项在越过 Stokes 线时性态的急速变化. [A2]中对 Berry 的看法给出了一个严格的处理.

**参考文献**


[A1] Berry, M. V., Uniform asymptotic smoothing of Stokes discontinuites, *Proc. R. Soc. London A*, **422** (1989), 7 – 21.

[A2] Wong, R. (ed.), On Stokes's phenomenon and con-verging factors, in Proc. Int. Symp. Asymptotic and Computational Anal. (Winnipeg, Manitoba), M. Dekker, 1990.


齐民友 译

## Stokes 定理[Stokes theorem; Стокса теорема]

建立向量场通过某定向曲面的流量与沿曲面边界环流之间关系的一个定理（见 **Stokes 公式**(Stokes formula)）.

Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Apostol, T., Calculus, 1 – 2, Blaisdell, 1964 (中译本: T. M. 阿波斯托，微积分学，高等教育出版社，1987).


王斯雷 译

## Stone-Čech 紧化[Stone-Čech compactification; Стоуна-Чеха бикомпактное расширение]

完全正则空间 (completely-regular space) $X$ 的最大紧化 (compactification) $\beta X$. 由 E. Čech ([1]) 和 M. H. Stone ([2]) 作出.

设 $\{f_\alpha: X \to [0,1]\}_{\alpha \in A}$ 是 $X \to [0,1]$ 的所有连续函数的集合. 映射 $\varphi: X \to \mathbf{R}^A$, $\varphi(X)_\alpha = f_\alpha(X)$, 同胚于它自身的象. 据定义，则有 $\beta X = [\varphi(X)]$ (这里[·]是闭包运算). 对任一紧化 $bX$，存在一个在 $X$ 上为恒等的连续映射 $\beta X \to bX$，用"最大"来表示此事实.

**拟正规空间** (quasi-normal space) 的 Stone-Čech 紧化与它的 **Wallman 紧化** (Wallman compactification) 一致.

**参考文献**


[1] Čech, E., On bicompact spaces, *Ann. of Math.*, **38** (1937), 823 – 844.

[2] Stone, M. H., Applications of the theory of Boolean rings to general topology, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **41** (1937), 375 – 481.

[3] Engelking, R., Outline of general topology, North-Holland, 1968 (译自波兰文).

[4] Александров, П. С., 《Успехи матем. наук》, **15** (1960), 2, 25 – 95.


И. Г. Кошевникова 撰

【补注】 在文献中可以发现，和 Stone-Čech 紧化同样频繁地又称 Čech-Stone 紧化 (Čech-Stone compactification).

**参考文献**


[A1] Engelking, R., General topology, Heldermann, 1989.

[A2] Gillman, L. and Jerison, M., Ring of continuous functions, Springer, 1976.

[A3] Porter, J. and Woods, R. G., Extensions and absol-utes of Hausdorff spaces, Springer, 1988.

[A4] Walker, R. C., The Stone-Čech compactification, Springer, 1974.


白苏华、胡师度 译

## Stone 格[Stone lattice; Стоуна решетка]

满足下列条件的伪补分配格 (distributive lattice) $L$（见**有补格** (lattice with complements)）：对所有 $a \in L$, $a^* + a^{**} = 1$. 伪补分配格 $L$ 是 Stone 格，当且仅当它的任意两个极小素理想的并是整个 $L$ (Grätzer-Schmidt 定理 (Grätzer-Schmidt theorem)) ([3]).

Stone 格看作一个具有基本运算 $\langle \vee, \wedge, *, 0, 1 \rangle$ 的**泛代数** (universal algebra)，称为 Stone 代数 (Stone algebra). 每一个 Stone 代数是两个元素和三个元素的链的**次直积** (subdirect product). 在伪补格中，一个元素 $x$ 称为稠密的 (dense)，如果 $x^* = 0$. Stone 格 $L$ 的中心 $C(L)$（见**偏序集的中心** (centre of a partially ordered set)）是一个 **Boole 代数** (Boolean algebra)，而它的所有稠密元的集合 $D(L)$ 是一个具有单位元的分配格，而且存在 $C(L)$ 到 ($D(L)$ 的滤子的格) $F(D(L))$ 中的同态 $\varphi^L$:

$$a\varphi^L = \{x: x \in D(L),\ x \geqslant a^*\},$$

此同态保持 0 和 1 不变.

三元组 (triplet) $\langle C(L), D(L), \varphi^L \rangle$ 称作是与 Stone 代数 $L$ 相伴的. 三元组的同态和同构用自然的方式定义. 任一三元组 $\langle C, D, \varphi \rangle$ (其中 $C$ 是 Boole

代数、$D$ 是具有 1 的分配格，$\varphi: C \to F(D)$ 是保持 0 和 1 的同态）同构于与某一个 Stone 代数相伴的三元组. 两个 Stone 代数同构，当且仅当与它们相伴的三元组同构（Chen-Grätzor 定理（Chen-Grätzer theorem），[2]）.

参考文献


[1] Birkhoff, G., Lattice theory, Colloq. Publ., 25, Amer. Math. Soc., 1973.

[2] Chen, C. C. and Grätzer, G., Stone lattice I — II, *Canad. J. Math.*, **21** (1969), 4, 884 – 903.

[3] Grätzer, G. and Schmidt, E. T., On a problem of M. H. Stone, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **8** (1957), 3 – 4, 455 – 460.

[4] Фофанова, Т. С., в кн.: Упорядоченные множества и решетки, в. 3, Саратов, 1975, 22 – 40.


Т. С. Фофанова 撰

【补注】 特别值得一提的是，Stone 格作为**极不连通空间**（extremally-disconnected space）的开集格出现，因纪念 M. H. Stone 关于这种空间的研究（[A1]）而命名. 如果 $L$ 是紧极不连通空间 $X$ 的所有开集的格，那么 $C(L)$ 是一个完全 Boole 代数，并且 $X$ 是它的 **Stone 空间**（Stone space）. 于是，在这种情况下，$L$ 完全由 $C(L)$ 决定.

参考文献


[A1] Stone, M. H., Algebraic characterization of special Boolean rings, *Fund. Math.*, **29** (1937), 223 – 303.

[A2] Grätzer, G., General lattice theory, Birkhäuser, 1978.


卢景波 译 王世强 校

**Stone 空间** [**Stone space; Стоуна пространство**], Boole 代数 $\mathscr{A}$ 的

其全体开-闭子集组成的集域同构于 $\mathscr{A}$ 的全不连通紧空间 $(X, \tau)$. 这个空间可以由 $\mathscr{A}$ 用下述方法典型地定义：$X$ 是 $\mathscr{A}$ 的全体**超滤子**（ultrafilter）组成的集合，而其拓扑 $\tau$ 是由形如 $\{\xi \in X; A \in \xi\}$ 的子集族生成的，其中 $A$ 是 $\mathscr{A}$ 的一个任意元素. 也可用 $\mathscr{A}$ 的极大理想集或二值同态集或 $\mathscr{A}$ 上二值测度集（各赋以适当的拓扑）来代替超滤子集. 同构的 Boole 代数有同胚的 Stone 空间. 每一个全不连通的紧空间都是它的开-闭集 Boole 代数的 Stone 空间.

Stone 空间概念和它的基本性质由 M. H. Stone（1934 – 1937，见[1]）发现并研究.

一个 Boole 代数的 Stone 空间是可度量化的，当且仅当此 Boole 代数是可数的. 一个 Boole 代数是完全的，当且仅当它的 Stone 空间是极不连通的（即空间中任意一个开集的闭包是开集）. 完满 **Cantor** 集（Cantor set）是可数无原子 Boole 代数的 Stone 空间（它们都同构）. 广义 Cantor 间断集 $D^m$ 是具有 $m$ 个生成元的自由 Boole 代数的 Stone 空间.

参考文献


[1] Sikorski, R., Boolean algebras, Springer, 1969.


В. И. Малыхин 撰

【补注】 一个 Boole 代数上的超滤子（ultrafilter on a Boolean algebra）是基础序集上的一个极大**滤子**（filter）.

Boole 代数一种较新的好参考书是[A2].

术语 "Stone 空间" 时常作为 "全不连通紧空间" 的同义语，虽然对这个概念也有人使用 "Boole 空间（Boolean space）" 一词. Boole 代数和它们的 Stone 空间之间的对应关系是一个范畴对偶（见**对偶范畴**（dual category））；于是，如果 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{A}_1$ 分别是具有 Stone 空间 $X$ 和 $X_1$ 的 Boole 代数，则 Boole 同态 $\mathscr{A} \to \mathscr{A}_1$ ——对应于连续函数 $X_1 \to X$. 用这个对应，可以把关于 Boole 代数的代数定理转化为关于 Stone 空间的拓扑定理，或者反之，例如，完全 Boole 代数在全体 Boole 代数组成的范畴中是内射的这一 Sikorski 定理（Sikorski theorem）（见**内射对象**（injective object）），对应于极不连通空间在 Stone 空间的范畴中是射影的这一 Gleason 定理（Gleason theorem））. 详见[A1].

参考文献


[A1] Johnstone, P. T., Stone spaces, Cambridge Univ Press, 1982.

[A2] Koppelberg, S., General theory of Boolean algebras, in J. D. Monk and R. Bonnet (eds): Handbook of Boolean Algebras, Vol 3, North-Holland, 1989.

[A3] Monk, J. D. and Bonnet, R. (eds), Handbook of Boolean algebras, 1 – 3, North-Holland, 1989.


卢景波 译 王世强 校

**Stone-Weierstrass 定理** [**Stone-Weierstrass theorem; Вейерштрасса-Стоуна теорема**]

M. H. Stone 于 1937 年对函数逼近论中经典的 **Weierstrass 定理**（Weierstrass theorem）所作的一个深层次推广. 设 $C(X)$ 为紧统 $X$ 上的连续函数的环，具有一致收敛拓扑，即由范数

$$\|f\| = \max_{x \in X} |f(x)|, \ f \in C(X)$$

产生的拓扑. 令 $C_0 \subseteq C(X)$ 是包含所有常数且分离 $X$ 中的点的子环，即对任意两个不同的点 $x_1, x_2 \in X$，存在一个函数 $f \in C_0$ 使得 $f(x_1) \neq f(x_2)$. 于是，$[C_0] = C(X)$ 亦即，$X$ 上的每一个连续函数都是 $C_0$ 中某个一致收敛的函数序列的极限.

В. И. Пономарев 撰

【补注】 解释性的文章[A4]，值得特别推荐.

参考文献


[A1] Cheney, E. W., Introduction to approximation theo-

ry. Chelsea, reprint, 1982.

[A2] Schönhage, A., Approximations theorie, De Gruyter, 1971

[A3] Stone, M. H., The generalized Weierstrass approximation theorem, *Math. Mag.*, 21 (1948), 167－183, 237－254.

[A4] Stone, M. H., A generalized Weierstrass approximation theorem, in R. C. Buck (ed.): Studies in Modern Analysis, Vol. I, Math. Assoc. Amer., 1962, 30－87.

[A5] Stone, M. H., Applications of the theory of Boolean rings to general topology, *Trans. Amer. Math. Soc.* 41 (1937), 375－481.

王仁宏、程结庆 译

**停时 [stopping time; остановки время]**

【补注】 设 $\mathcal{F}_t$, $t\in T$, 是可测空间 (measurable space) $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的非减子 $\sigma$ 代数族，此处 $T$ 是 $[0,\infty]$ 中的一区间或 $\{0,1,\cdots\}\cup\{\infty\}$ 的一子集．则停时 (与这一子代数族相关的) 是一个映射 (**随机变量** (random variable)) $\tau:\Omega\to T\cup\{\infty\}$，使得

$$\{\tau(\omega)\leqslant t\}\in\mathcal{F}_t,$$

对一切 $t\in T$ 成立．这一随机变量也称为**可选随机变量** (optional random variable)．这一条件解释为时间值随机变量 $\tau$ 不具有未来的知识，因为 $\sigma$ 代数 $\mathcal{F}_t$ 概括了"直到时刻 $t$ 的随机事件"．许多停时由"在该时刻给定的事件被首次观察到"产生．例如，随机过程 $X(t)$ 首次进入 (first time of entry) 集合 $A$ (**击中时** (hitting time))．在俄文文献中术语 **Марков 时** (Markov moment, Markov time) 常用来表示停时．有时也见到术语**非预料时** (non-anticipating time)．停时在**最优停止问题** (optimal stopping problem) 中自然会出现．例如，见 [A4]．

**参考文献**

[A1] Baver, H., Probability theory and elements of measure theory, Holt, Rinehart & Winston, 1972, p. 332.

[A2] Lamperti, J., Stochastic processes, Springer, 1977, 210－213.

[A3] Chung, K. L., Elementary probability theory with stochastic processes, Springer, 1974, p. 269.

[A4] Gihman, I. I. and Skorohod, A. V., Controlled stochastic processes, Springer, 1979 (译自俄文).

[A5] Rao, M. M., Stochastic processes and integration, Sijthoff & Noordhoff, 1979.

刘秀芳 译　陈培德 校

**Störmer 法 [Störmer method; Штёрмера метод 或 метод Стёрмера]**

一个求解不含未知函数一阶导数的二阶常微分方程组 **Cauchy 问题** (Cauchy problem)

$$y''=f(x,y),\ y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0'$$

的有限差分方法．在等步长网格 $x_n=x_0+nh$ $(n=1,2,\cdots)$ 上积分给出下面的计算公式：

a) 外插

$$y_{n+1}-2y_n+y_{n-1}=h^2\sum_{\lambda=0}^{k}u_{-\lambda}f_{n-\lambda},\ f_n=f(x_n,y_n),$$

$$n=0,1,\cdots,$$

或者 (差分形式)

$$y_{n+1}-2y_n+y_{n-1}=h^2\sum_{p=0}^{k}\beta_p\nabla^p f_n,$$

其中

$$\nabla^p f_n=\nabla(\nabla^{p-1}f_n)=\nabla^{p-1}f_n-\nabla^{p-1}f_{n-1},$$

$$\beta_p=\frac{1}{p!}\left[\int_0^1(1-t)t(t+1)\cdots(t+(p-1))dt+\right.$$

$$\left.+\int_0^{-1}(-1-t)t\cdots(t+(p-1))dt\right],\ p=0,\cdots,k,$$

$$u_{-\lambda}=\sum_{p=\lambda}^{k}\begin{bmatrix}p\\ \lambda\end{bmatrix}\beta_p,\ \lambda=0,\cdots,k;$$

b) 内插

$$y_{n+1}-2y_n+y_{n-1}=h^2\sum_{\lambda=-1}^{k}v_{-\lambda}f_{n-\lambda},$$

或者 (差分形式)

$$y_{n+1}-2y_n+y_{n-1}=h^2\sum_{p=0}^{k}\gamma_p\nabla^p f_{n+1},$$

其中

$$\gamma_p=\frac{1}{p!}\left[\int_0^1(1-t)(t-1)t\cdots(t+(p-2))dt+\right.$$

$$\left.+\int_0^{-1}(-1-t)(t-1)t\cdots(t+(p-2))dt\right],$$

$$v_{-\lambda}=\sum_{p=\lambda}^{k+1}\begin{bmatrix}p\\ \lambda\end{bmatrix}\gamma_p,\ \lambda=-1,0,\cdots,k.$$

系数 $\beta_p$ 和 $\gamma_p$ 的前面几个值为：

$$\beta_0=1,\ \beta_1=0,\ \beta_2=\beta_3=\frac{1}{12},\ \beta_4=\frac{19}{240},$$

$$\beta_5=\frac{3}{40},\ \beta_6=\frac{863}{12096};$$

$$\gamma_0=-\gamma_1=1,\ \gamma_2=\frac{1}{12},\ \gamma_3=0,\ \gamma_4=\gamma_5=$$

$$=-\frac{1}{240},\ \gamma_6=-\frac{221}{60480}.$$

对同一个 $k$，公式 b) 更精确，可是为了得到值 $y_{n+1}$，要求解一个非线性方程组．实际应用时，开始时可用公式 a) 得到解 $y_{n+1}$ 的一个近似，然后运用公式

$$y_{n+1}^{(i+1)} - 2y_n + y_{n-1} = h^2\left[v_1 f_{n+1}^{(i)} + \sum_{j=0}^{k} v_{-j} f_{n-j}\right],$$

$$i = 0, 1, 2,$$

$$f_{n+1}^{(i)} = f[x_{n+1}, y_{n+1}^{(i)}],\ y_{n+1} = y_{n+1}^{(3)},$$

将 $y_{n+1}$ 算得更精确 .

应用 Störmer 法是基于这样的假定，即在前 $k$ 个网格点上解的近似值 $y_0, \cdots, y_k$（支撑值）已经知道. 这些值或是用 **Runge-Kutta 法**（Runge-Kutta method）计算或是应用解的 Taylor 展开式计算 . 由于必须用特别的公式来计算这个过程开始时的那些值，也由于需要改变在网格上进行积分时的网格步长，这都会导致计算机程序更加复杂 .

右端有 $k$ 项的 Störmer 公式的误差的阶是 $O(h^{k+1})$. 其误差估计与 **Adams 法**（Adams method）相应的估计类似 . 可以证明，对任意的 $k$ 存在其误差阶为 $O(h^{k+1})$ 的稳定的公式 .

实际上，人们通常应用 $k=4,5,6$ 时的公式 . 一个称为 Numerov 法（Numerov method）的 Störmer 插值法得到了广泛的应用:

$$y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = \frac{h^2}{12}\,(f_{n+2} + 10f_{n+1} + f_n).$$

这个方法是由 C. Störmer 在 1920 年提出的 .

**参考文献**


[1] Бахвалов, Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975（英译本: Bakhvalov, N. S., Numerical methods: analysis, algebra, ordinary differential equations, Mir, 1977）.

[2] Lambert, J. D., Computational methods in ordinary differential equations, Wiley, 1973.

[3] Михлин, С. Г., Смолицкий, Х. Л., приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений, М., 1965（英译本: Mikhlin, S. G. and Smolitskiĭ, Kh. L., Approximate methods for solution of differential and integral equations, Amer. Elsevier, 1967）.


С. С. Гайсарян 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Hildebrand, F. B., Introduction to numerical analysis, Dover, reprint, 1987, P. 275 ff.

[A2] Störmer, C., méthod d'intégration numérique des équations différentielles ordinaires, in C. R. Congress internat. Strassbourg 1920, 1921, 243－257.


袁国兴 张宝琳 译

**直线 [straight line; прямая]**

基本几何概念之一. 直线通常由几何学公理系统隐含地定义; 例如，Euclid 直线由关联公理、顺序公理、全等公理和连续性公理定义. 基于一直线所嵌入的平面为射影平面、仿射平面、双曲平面等等，此直线相应地称为射影的、仿射的、双曲的等等. 直线可通过它的由所在平面的直射变换所诱导的变换来研究. 例如，实射影直线的代数自同构群同构于 Лобачевский 平面的位移群. 拓扑地看，一平面上的所有直线都等价. 这样，椭圆直线和实射影直线拓扑地等价于 Euclid 平面上的圆周，而复射影直线拓扑地等价于 Euclid 空间中的 2 维球面. 一条直线称为连续的、离散的或有限的，如果它分别关联于具有连续统基数的点集、可数集或有限集.

在任意代数域上的平面中，直线是一阶代数曲线. 在 Euclid 平面 $\mathbf{R}^2$ 的直角坐标系 $(x, y)$ 中，直线由方程

$$Ax + By + C = 0$$

给定. 系数 $A, B$ 确定该直线的法向量的坐标.

域 $k$ 上仿射空间中的直线 $(A, B)$ 是（按 Weil 的定义）满足 $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$（其中 $t \in k$）的点 $M$ 的集合.

В. В. Афанасьев, Л. А. Сидоров 撰

【补注】 亦见 **Hilbert 公理系统**（Hilbert system of axioms）.

**参考文献**


[A1] Jacobs, H. R., Geometry, Freeman, 1974.


沈永欢 译

**奇怪吸引子 [strange attractor; странный аттрактор]**，亦称奇异吸引子

具有复杂构造的吸引子（即一动力系统（dynamical system）之吸引集）. 吸引子（attractor）即是相空间中渐近稳定的紧不变子集，即它是 Ляпунов 稳定的（见 **Ляпунов 稳定性**（Lyapunov stability）），而发自它的一个邻域的所有轨道当 $t \to \infty$ 时都趋向它.（吸引子定义中并未含有 Ляпунов 稳定性的概念，然而许多重要的吸引子都有此性质.）"复杂构造"一语也很不确定，其实"奇怪吸引子"一语也如此. 对于光滑动力系统，在理论上研究过两种在小扰动下保持不变的奇怪吸引子 —— 即同时为**双曲集**（hyperbolic set）的吸引子和 **Lorenz 吸引子**（Lorenz attractor），"奇怪吸引子"一词原来就讲的是它. 后来在一个与 Lorenz 本人研究过的系统不同的系统中也找到一个 Lorenz 类型的吸引子（[9]，[10]）; 这些论文中都用了一个来自 [8] 的严格的充分条件. 在这两个例子中，奇怪吸引子都有**拓扑传递性**（topological transitivity）; 这个性质，或相关的性质都可以包含在吸引子的概念中. 以数值试验为基础，可以假设有许多其他类型的奇怪吸引子存在，而且看来都能"承受"小扰动，虽然与此相关的情况都没有充分地解释过. 在第一批试验中就有一个，出现了一个 Hénon 吸引子（Hénon attractor）（见 [2]），但

是在它附近就有不稳定的周期轨道存在，而且不能排除大部分轨道趋向它，而且有时确实如此（[4]－[6]）．对此例子稍作修正就给出了一个 Lozi 吸引子（Lozi attractor）（见[3]），其存在性可以严格证明，但在此例中动力系统的光滑性在一点被破坏．关于更多的信息可见[7]．

**参考文献**


[1] Marsden, J. and McCracken, M., The Hopf bifurcation and its applications, Springer, 1976.

[2] Hénon, M., A two-dimensional mapping with a strange attractor, *Comm. Math. Phys.*, **50** (1976), 69 － 77.

[3] Lozi, R., Un attracteur étrange du type attracteur de Hénon, *J. de physique Ser. C*, **39** (1978), 5, 9 － 10.

[4] Benedicks, M. and Carleson, Z., On iterations of $1 - ax^2$ on $(-1, 1)$, *Ann. of Math.*, **122** (1985), 1 － 25.

[5] Benedicks, M. and Carleson, Z., The dynamics of the Hénon map, *Preprint* (1989).

[6] Mora, L. and Viana, M, Abundance of strange attractors, *Preprints IMPA Rio de Janeiro* (1990).

[7] Arnol'd, V. I., et al., Theory of bifurcations, Encycl. Math. Sc., 5. Dynamical systems, Springer, 1992 (译自俄文).

[8] Шильников, З. П., 《Успехи матем. наук》, **36** (1981), 4, 240 － 241.

[9] Shilnikov, A. Z., Bifurcation and chaos in the Marioka-Shimizu system, in Methods of the qualitative Theory of Differential Eqs. Gorkii State Univ., 1986. 180 － 193. (俄文).

[10] Shilnikov, A. Z., Bifurcation and chaos in the Marioka-Shimizu system, II, in Methods of the Qualitative Theory and Theory of Bifurcations, Gorkii State Univ., 1989, 130 － 138 (俄文).


Д. В. Аносов 撰

【补注】 吸引子的直观概念有好几个其他定义（精确化）（与上述的相空间的渐近稳定的紧子集不同）．最吸引人的一个如下（[A1]）．

令 $f$ 是一光滑流形 $M$（可能有边）到其自身的可微映射（differentiable mapping）．对每一点 $x \in M$，令 $w(x)$ 是轨道 $x, f(x), f(f(x)), \cdots$ 的 $\omega$ 极限集（$\omega$-limit set of the orbit），即这样的 $y$ 点的集合，使 $y$ 的每个开邻域 $U$ 都含有此轨道的无穷多个点（亦见**轨道的极限集**（limit set of a trajectory））．

令 $\mu$ 是 $M$ 上一个测度而在坐标小块中等价于通常的 Lebesgue 测度．对 $M$ 的每个闭子集 $A$，定义其吸引区域（domain of attraction）为 $\alpha(A) = \{x \in M : w(x) \subset A\}$．于是闭子集 $A$ 称为吸引子（attractor），如果：i）它的吸引区域 $\alpha(A)$ 有严格正测度；ii）再没有一个闭集 $A' \subset A$，$A' \neq A$ 使得除相差一个零测度集以外，$\alpha(A') = \alpha(A)$．这样一个吸引子不一定有（渐近）稳定性质．

关于奇怪吸引子的出现，亦见**混沌**（chaos）和**通向混沌的道路**（routes to chaos）．例如，奇怪吸引子可以产生于 $k$ 维环面（$k \geqslant 3$）上的拟周期流的任意小扰动，而被扰动的流可以既是混沌的又是结构稳定的，见[A2]－[A4]．

**参考文献**


[A1] Milnor, J. W., On the concept of attractor, *Comm. Math. Phys.*, **99** (1985), 177 － 195.

[A2] Ruelle, D. and Takens, F., On the nature of turbulence, *Comm. Math. Phys.*, **20** (1971), 169 － 192.

[A3] Newhouse, S., Ruelle, D. and Takens, F., Occurrence of strange axiom A attractors near quasiperiodic flows on $T^m$, $m \geqslant 3$. *Comm. Math Phys*, **64** (1978), 35 － 40.

[A4] Ruelle, D., Elements of differentiable dynamics and bifurcation theory, Acad. Press, 1989.

[A5] Ruelle, D., Strange attractors, *Math. Intelligencer*, **2** (1980), 126 － 140.


齐民友 译

**策略（对策论中的）[strategy (in game theory); стратегия в теории игр]**

在一个策略对策（见**对策论**（games, theory of））的规则下局中人或联盟的可能的行动方法．在正规形式（normal form）对策（见**非合作对策**（non-cooperative game））中，策略集的直接描述是对策"规则"的一部分．在**位置对策**（positional game）（也见**动态对策**（dynamic game））中，策略不是直接由对策规则来定义的，而是在它的基础上间接定义的．如果在一个非合作对策中，策略的选择是固定的（例如，运用最优性原理（optimality principle）），那么对策就变成非策略的（见**合作对策**（cooperative game））．

【补注】

**参考文献**


[A1] Szép, J. and Forgo, F., Introduction to the theory of games, Reidel, 1985.

[A2] Neumann, J. von and Morgenstern, O., Theory of games and economic behavior, Princeton Univ. Press, 1947（中译本：约翰·冯·诺依曼，奥斯卡·摩根斯特恩，竞赛论与经济行为，科学出版社，1963）．


史树中 译

**分层 [stratification; стратификация]**，亦称层化

一个（可能无限维）流形到严格缩减维数的连通子流形的分解．

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 通常，一个空间的"分层"仅只意味着到具有缩减维数的连通片中的某个分解．

设（$P$, <）是一个偏序集．拓扑空间 $X$ 的一个 $P$ 分解（$P$-decomposition）是以 $P$ 的元素为标号的 $X$ 的子空间 $S_i$ 的局部有限集，使得

1）当 $i \neq j$ 时，$S_i \cap S_j = \varnothing$；

2）对所有的 $i \in P$，$S_i$ 是局部闭的；

3）$X = \bigcup_{i \in P} S_i$；

4）如果 $S_i \cap \overline{S}_j \neq \varnothing$，则 $S_i \subset \overline{S}_j$（且在 $P$ 中，这等价于 $i \leqslant j$）.

作为一个例子，考虑 $\mathbf{R}^2$ 中由不等式 $x^3 - y^2 \geqslant 0$ 给出的子集分成四片 $\{(x, y): x^3 - y^2 > 0\}$，$\{(x,y): x^3 = y^2, y > 0\}$，$\{(x,y): x^3 = y^2, y < 0\}$，$\{0,0\}$.

现在，设 $X$ 是一个光滑流形 $M$ 的子集，$X$ 的分层是某个偏序集 $P$ 的 $P$ 分解 $(S_i)_{i \in P}$，使得每片是 $M$ 的一个光滑子流形.

分层 $(S_i)$ 称为 Whitney 分层（Whitney stratification）如果对每对具有 $S_i \subset \overline{S}_j$ 的层 $S_i$，$S_j$，下面的 Whitney 的条件 A 和 B（Whitney's conditions A and B）成立．假设点列 $y_k \in S_i$ 收敛于 $y \in S_i$，点列 $x_k \in S_j$ 也收敛于 $y \in S_i$．进一步，假设切平面 $T_{x_k} S_j$ 收敛于某个极限平面 $T$ 和割线 $\overline{x_k y_k}$ 收敛于某条线 $l$（关于环绕流形 $M$ 中 $y$ 的某个局部坐标系），则

A）$T_y S_i \subset T$；

B）$l \subset T$.

条件 B）事实上蕴涵着条件 A）.

涉及 Whitney 分层的几个事实和定理如下．一个解析流形的任何闭次解析子集允许一个 Whitney 分层（[A5]）．特别地，$\mathbf{R}^n$ 中的代数集，即由有限多个多项式为零给出的集合（也见**半代数集**（semi-algebraic set））可以 Whitney 分层，Whitney 分层空间可被三角剖分（[A4]）.

**参考文献**

[A1] Mather, J., Notes on topological stability, Harvard Univ. Press, 1970. Mimeographed notes.

[A2] Gibson, C. G., Wirthmüller, K., Plessis, A. A. du and Looijenga, E. J. N., Topological stability of smooth mappings, Springer, 1976.

[A3] Goresky, M. and MacPherson, R., Stratified Morse theory, Springer, 1988.

[A4] Johnson, F., On the triangulation of stratified sets and singular varieties, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 275 (1983), 333 - 343.

[A5] Hironaka, H., Subanalytic sets, in Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra, Kinokuniya, 1973, 453 - 493.

[A6] Whitney, H., Tangents to an analytic variety, *Ann. of Math.*, 81 (1965), 496 - 549.

[A7] Whitney, H., Local properties of analytic varieties, in S. Cairns (ed.): Differentiable and Combinatorial Topology, Princeton Univ. Press, 1965, 205 - 244.

[A8] Thom, R., Propriétés différentielles locales des ensembles analytiques, Sem. Bourbaki. Exp. 281, 1964/5.

徐森林 译

**分层样本 [stratified sample; расслоенная выборка]**

根据某种特别标志（特征），划分成若干较小容量样本的**样本**（sample）．假设某容量为 $N(N \geqslant 2)$ 的样本中每一个元素，具有且仅有 $k(k \geqslant 2)$ 个可能标志之一．那么，原样本可以分解为容量分别为 $n_1, \cdots, n_k (n_1 + \cdots + n_k = N)$ 的 $k$ 个样本：

$$X_{11}, \cdots, X_{1n_1},$$
$$X_{21}, \cdots, X_{2n_2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$X_{k1}, \cdots, X_{kn_k},$$

其中第 $i$ 个样本 $X_{i1}, \cdots, X_{in_i}$ 仅由原样本中具有标志 $i$ 的那些样本元素组成．由于这样的分解，使原样本好像被分为 $k$ 层 $X_{i1}, \cdots, X_{in_i} (i = 1, \cdots, k)$，其第 $i$ 层（stratum）含关于第 $i$ 个标志的信息．例如，对于二维随机变量 $(X, Y)$，若第二个分量 $Y$ 有离散型分布，则对分量 $X$ 实现的观测导致分层样本的概念.

**参考文献**

[1] Wilks, S. S., Mathematical statistics, Wiley, 1962.

М. С. Никулин 撰

【补注】

**参考文献**

[A1] Cochran, W. G., Sampling techniques, Wiley, 1977（中译本：W. G. 科克伦，抽样技术，中国统计出版社，1985）.

周概容、王健 译

**Стратонович 积分 [Stratonovich integral; Стратоновича интеграл]**

【补注】设 $(X, Y) = (X(t), Y(t))_{t \geqslant 0}$ 是定义在具有 $\sigma$ 域流的**概率空间**（probability space）$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathrm{P})$ 上的**连续半鞅**（semi-martingale）．$Y$ 对 $X$ 在区间 $[0, t]$ 上的 Стратонович 积分定义为

$$\int_0^t Y(s) \circ dX(s) =$$

$$= \int_0^t Y(s) dX(s) + \frac{1}{2} < X, Y >_t, \qquad (A1)$$

其中右边的积分是伊藤随机积分而 $< X, Y >_t$ 表示 $X$ 和 $Y$ 的二次互变差过程．对这种积分没有一个普遍一致的记号，但上述记号是最常用的（例如，见 [A1]，[A2]）．这种积分也称为 Fisk 积分（Fisk integral），Fisk-Стратонович 积分（Fisk-Stratonovich integral）或对称化随机积分（symmetrized stochastic integral）．后者是从下列性质考虑的：

$$\int_0^t Y(s) \circ dX(s) =$$

$$= \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{Y(t_i) + Y(t_{i-1})}{2} (X(t_i) - X(t_{i-1})), \quad (A2)$$

其中 Δ 表示一个划分 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$，$|\Delta| = \max_i (t_i - t_{i-1})$，lim 是依概率极限．事实上，这个性质是通常的积分定义（[A3]，[A4]）．作为（A2）的一个直接应用，注意 $\int_{[0,t]} X \circ dX = 1/2 X^2(t)$，它指出了 Стратонович 积分的主要特点，即用 Стратонович 积分表达的伊藤公式与"通常的"（即 Newton-Leibniz 的）公式相合．设 $X^1(t), \cdots, X^d(t)$ 是连续半鞅．定义 $X(t) = (X^1(t), \cdots, X^d(t))$，令 $f$ 是 $\mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ 的 $C^2$ 函数，伊藤公式是

$$f(X(t)) - f(X(0)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{d} \int_0^t D_i f(X(s))\, dX^i(s) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \int_0^t D_i D_j f(X(s))\, d < X^i, X^j >_s, \quad (A3)$$

其中 $D_i = \partial / \partial X^i$，如果写 $Y(t) = D_i f(X(t))$，则对 $f \in C^3$，容易验证

$$< Y, X^i >_t = \sum_{j=1}^{d} \int_0^t D_i D_j f(X(s))\, d < X^i, X^j >_s, \quad (A4)$$

因此（A3）简化成为下述的"通常微积分"公式：

$$f(X(t)) - f(X(0)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{d} \int_0^t D_i f(X(s)) \circ dX^i(s). \quad (A5)$$

乍一看，Стратонович 积分的出现是为了得到（A5）的简单的记号上的技巧．可是，在随机分析的几个方面它起着重要的作用，包括：

a）随机微分方程的逼近（[A1]，§V1.7）．设 $W^1(t), \cdots, W^p(t)$ 是独立 **Brown 运动**（Brownian motion），考虑**随机微分方程**（stochastic differential equation）

$$dX(t) = b(X(t))dt + \sigma(X(t))dW(t), \quad (A6)$$

其中 $b: \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$，$\sigma: \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^{d \times p}$ 是使得 $b_i \in C^1(\mathbf{R}^d)$，$\sigma_{ij} \in C^2(\mathbf{R}^d)$ 的有界函数．用 Стратонович 积分就成为

$$dX(t) = \widetilde{b}(X(t))dt + \sigma(X(t)) \circ dW(t), \quad (A7)$$

其中 $\widetilde{b}(x) = b(x) - \hat{b}(x)$，而

$$\hat{b}_i(x) = \frac{1}{2} \sum_{k,j} \sigma_{jk}(x) D_k \sigma_{ij}(x).$$

现在，设 $W^{(n)}(s)$ 是对 Brown 轨道的逐段线性逼近，即

$$W^{(n)}(s) = \frac{(t_i - s)W(t_{i-1}) + (s - t_{i-1})W(t_i)}{t_i - t_{i-1}},$$

$s \in [t_{i-1}, t_i]$，对 $[0, t]$ 如上的划分 $\{t_i\}$，考虑随机常微分方程的逼近序列

$$\dot{X}^{(n)}(s) = \widetilde{b}(X^{(n)}(s)) + \sigma(X^{(n)}(s))\dot{W}^{(n)}(s), \quad (A8)$$

其中点表示 $d/ds$，则

$$\lim_{|\Delta| \to 0} \mathsf{E}[\sup_{0 \leqslant s \leqslant t} |X(s) - X^{(n)}(s)|^2] = 0.$$

于是逼近模式（A8）很自然地从 Стратонович 积分（A7）导出而不是从伊藤方程（A6）导出．一般，所得到的极限依赖于对 Brown 轨道所选择的特殊逼近，除非作为**向量场**（vector field）考虑的 $\sigma$ 的 $p$ 列是可换的，即 $\sum_{m,k} (\sigma_{mi} D_m \sigma_{kj} - \sigma_{mj} D_m \sigma_{ki}) = 0$，$i, j = 1, \cdots, p$．在这种情形极限（A6）或（A7）可以由任意对 Brown 轨道的"合理的"逼近得到；特别当 $p = 1$ 时这是真的．这种问题首先由 E. Wong 和 M. Zakai 在 [A5] 中研究，而 $\hat{b}(x)$ 有时称为 Wong-Zakai 相关项（Wong-Zakai correction term）．

b）扩散过程的支集（[A1]，§V1.8，[A6]）．考虑（A6）或（A7）从固定点 $x \in \mathbf{R}^d$ 开始的解．它定义了样本空间 $\mathscr{W}^d = C([0, \infty]; \mathbf{R}^d)$ 上的测度 $\mathscr{P}$．设 $\mathscr{S}$ 是这个测度的支集，即在 $\mathscr{W}^d$ 中具有 $\mathscr{P}$ 测度 1 的最小闭集．设 Φ 是在 $\mathscr{W}^d$ 中的 $C^\infty$ 函数集，且对 $\varphi \in \Phi$，令 $\zeta^\varphi \in \mathscr{W}^d$ 是常微分方程

$$\frac{d}{dt} \zeta_\varphi(t) = \widetilde{b}(\zeta_\varphi(t)) + \sigma(\zeta_\varphi(t))\varphi(t), \; \zeta_\varphi(0) = x$$

的解，则 $\mathscr{S} = \mathrm{cl}\{\zeta_\varphi : \varphi \in \Phi\}$．于是 $\mathscr{S}$ 恰是方程（A7）当"输入"$W$ 用光滑函数 $\varphi$ 代替时"输出"$X(\cdot)$ 的集合的闭包．如同在 a）中一样，Стратонович 公式用来保持"光滑"和"Brown"输入系统之间的相容性．

c）流形上的扩散过程．设 $M$ 是一 $C^\infty$ 流形（见**流形**（manifold）），设 $A_0, \cdots, A_p$ 是 $M$ 上的光滑向量场（见**流形上的向量场**（vector field on a manifold）），固定 $x_0 \in M$，则存在唯一的 $M$ 值过程 $X(t)$ 使得 $X(0) = x_0$ 且对 $f \in C^\infty(M)$，

$$df(X(t)) =$$

$$= A_0 f(X(t))dt + \sum_{j=1}^{p} A_j f(X(t)) \circ dW^j(t). \quad (A9)$$

在这里使用 Стратонович 积分是本质的，用伊藤积分写的同样的方程不能提供不依赖于坐标选择的表达式，因为伊藤微积分的规则与关于不同的坐标系统中微积分的通常规则有矛盾．由（A9）即得 $d < A_j f(X(\cdot)), W^j >_t = A_j^2 f(X(t))$，因此（A9）的伊藤形式是

$$df(X(t)) =$$
$$= \left[ A_0 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{p} A_j^2 \right] f(X(t)) dt +$$
$$+ \sum_{j=1}^{p} A_j f(X(t)) dW^j(t).$$

容易得出 $X(t)$ 是具有微分生成元

$$\mathscr{A} = A_0 + \frac{1}{2} \sum_{1}^{p} A_j^2$$

的扩散过程(diffusion process). 关于 Стратонович 积分及其性质的详细讨论包含在 [A2] 第 V.5 节中，还包括对可能不连续的半鞅的积分定义的推广.

**参考文献**


[A1] Ikeda, N. and Watanabe, S., Stochastic differential equations and diffusion processes, North-Holland, 1989.

[A2] Protter, P., Stochastic integrals and differential equations, Springer, 1990.

[A3] Stratonovich, R. L., A new representation for stochastic integrals and equations, *SIAM J. Control*, 4 (1966), 362 - 371.

[A4] Fisk, D. L., Quasi-martingales and stochastic integrals, Techn. Report Dept. Math. Michigan State Univ., 1, 1963.

[A5] Wong, E. and Zakai, M., On the relation between ordinary and stochastic differential equations, *Int. J. Engin. Sci.*, 3 (1965), 213 - 229.

[A6] Stroock, D. W. and Varadhan, S. R. S., On the support of diffusion processes with applications to the strong maximum principle, in Proc. VI Berkeley Symp. Math. Statist. Probab., Vol. Ⅲ, Univ. California Press, 1972, 333 - 359.


M. H. A. Davis 撰 刘秀芳 译 陈培德 校

**应力张量** [**stress tensor**; **напряжений тензор**]

定义一变形物体的内应力分布的一个张量. 应力张量是对称的二阶张量 $\sigma_{ij}$. 其分量 $\sigma_{ik}$ 为作用在垂直于 $x_k$ 轴的单位面积上的力的 $i$ 方向的分量. 这样，作用在垂直于 $x$ 轴的单位面积上有正应力(normal stress) $\sigma_{xx}$ (即沿 $x$ 轴方向的力)，和剪应力(shearing stresses) $\sigma_{yx}$ 和 $\sigma_{zx}$ (即分别沿 $y$ 轴和 $z$ 轴方向的力). 由应力张量的分量定义的应力状态可以分解为两个应力状态. 第一个应力状态由各向同性应力张量(isotropic stress tensor)

$$\sigma'_{ij} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{ll} = p \delta_{ij}$$

所表征，其中 $p$ 为静水压力.

第二个是应力状态由偏应力张量(deviatoric stress tensor)的分量

$$\sigma''_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{ll} = \sigma_{ij} - p \delta_{ij}$$

所表征.

**参考文献**


[1] Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М., Теория упругости, 3 изд., М., 1965. (英译本: Landau, L. D. and Lifshitz, E. M., Elasticity theory, Pergamon, 1959).


А. Б. Иванов 撰

【补注】 在一般的连续统理论中，应力张量不一定是对称的. 如有对偶应力存在的话(对于有极材料)，应力张量就失去对称性.

**参考文献**


[A1] Truesdell, C. and Noll, W., The non-linear field theories of mechanics, in S. Flügge (ed.), Handbuch der Physik, Vol. Ⅲ/3, Springer, 1965, 1 - 602.

[A2] Truesdell, C. and Toupin, R., The classical field theories, in S. Flügge (ed.), Handbuch der Physik, Vol. Ⅲ/1, Springer, 1960, 226 - 793.

[A3] Sokolnikoff, I. S., Mathematical theory of elasticity, McGraw-Hill, 1956.


王克仁 译 诸德超 校

**严格蕴涵演算** [**strict implication calculus**; **строгой импликации исчисление**]

基于严格蕴涵(strict implication)的一种逻辑演算(logical calculus)，即与"如果……那么……"相联系的逻辑运算上的一种演算. 对于严格蕴涵来说，所谓的"(实质)蕴涵悖论"可完全地或部分地避免：一个假命题蕴涵任一命题，而任一命题蕴涵一个真命题.

严格蕴涵演算的目的是为了反映条件命题的前提与结论之间意义上的联系. 存在一个完整的严格蕴涵演算系列(Lewis 演算，Ackermann 演算，及其他演算)，它们彼此之间的区分是由一些公式在某些演算中可以推出，而在另一些演算中不能推出的事实来确定(例如，在 Lewis 演算中"蕴涵悖论"仅仅部分地可避免，然而在 Ackermann 演算中却可完全避免). 严格蕴涵演算同模态语句("它是可能的"，"它是不可能的"，"它是必要的"等等)的形式体系化有密切联系；在某些演算中，严格蕴涵通过模态(modality)来表示，而在另一些演算中，模态是通过严格蕴涵来表示.

**参考文献**


[1] Feys, R., Modal logics, Gauthier-Villars, 1965.

[2] Lewis, C. I. and Langford, C. H., Symbolic logic, Dover, reprint, 1959.

[3] Ackermann, W., Begründung einer strengen Implikation, *J. Symbolic Logic*, 21 (1956), 2, 113 - 128.


В. В. Донченко 撰

【补注】 其他试图避免"蕴涵悖论"的方法(例如选言三段论(disjunctive syllogism) $A \wedge (\neg A \vee B) \Rightarrow$

$B$)，行以相关逻辑（relevant logic）的名称出现的（[A1]）.[1]中的 Lewis 演算的 S1－S5 也被视为 Lewis 测仓系统（Lewis survey system)（[A3]）.

**参考文献**


[A1] Norman, J. and Sylvan, R. (eds), Directions in relevant logic, Kluwer, 1989.

[A2] Hughes, G. E. and Cresswell, M. J., An invitation to modal logic, Methuen, 1972.

[A3] Wójcicki, R., Theory of logical calculi, Kluwer, 1988, 154 ff.


卢景波 译 罗里波 校

## 带 [strip; полоса]

平面内位于该平面的两条平行直线之间的那些点所组成的集合．带中点的坐标 $x, y$ 满足不等式 $C_1 < Ax + By < C_2$，其中 $A, B, C_1, C_2$ 是某些常数且 $A$ 与 $B$ 不同时为 0．函数 $w = e^z$ 把复平面（$z = x + iy$）中的带 $0 < y < \pi$ 共形映射为复数 $w$ 平面的上半平面．

БСЭ-3

【补注】

**参考文献**


[A1] Churchill, R. V., Brown, J. W. and Verhey, R. F., Complex variables and applications, McGraw-Hill, 1974.


杨维奇 译

## 带（广义的）[strip (generalized); полоса]

在狭义上是指曲面带（surface strip），即曲面的单参数切平面族．在一般意义下，带（strip）是指一条曲线 $l$ 以及与曲线的切向量处处正交的向量场 $\mathbf{m}$ 的总体．假定在 $\mathbf{R}^3$ 中 $l$ 由方程 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ 给出，其中 $s$ 是曲线的自然参数，$\mathbf{r}(s)$ 是曲线上点的位置向量．沿 $l$ 有向量函数 $\mathbf{m} = \mathbf{m}(s)$，其中 $\mathbf{m}(s)$ 是与曲线在对应点的切向量 $\mathbf{t} = d\mathbf{r}/ds$ 正交的单位向量．把法向量为 $\mathbf{m}(s)$ 的曲面带 $\Phi = \{l, \mathbf{m}\}$ 说成是沿曲线 $l$ 定义的．向量 $\tau = [\mathbf{m}, \mathbf{t}]$ 称为 $\Phi$ 的测地法向量（geodesic normal vector）；向量 $\tau$ 和 $\mathbf{t}, \mathbf{m}$ 一起组成带的 Frénet 标架．给定带的活动 Frénet 标架，有 Frénet 求导公式：

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = k_g \tau + k_n \mathbf{m}; \quad \frac{d\tau}{ds} = -k_g \mathbf{t} + \kappa_g \mathbf{m};$$

$$\frac{d\mathbf{m}}{ds} = -k_n \mathbf{t} - \kappa_g \tau,$$

其中 $k_g$ 是带的测地曲率，$k_n(s)$ 是其法曲率，$\kappa_g(s)$ 是其测地挠率，它们是 $s$ 的数量函数．

若 $\mathbf{m}$ 与 $l$ 在每一点处的**主法线**（principal normal）共线，则 $k_g = 0$，称该带形为测地带（geodesic strip）．若 $\mathbf{m}$ 与曲面在每一点处的**副法向量**（binormal）共线，则 $k_n = 0$，称该带为渐近带（asymptotic strip）．

**参考文献**


[1] Blaschke, W., Einführung in die Differentialgeometrie, Springer, 1950.


Л. А. Сидоров 撰 陈维桓 译

## 带形法（解析函数）[strip method (analytic functions); полос метод]

复变函数论中的一种方法，其基础是联系某个特殊曲线族曲线的长度与由该族曲线填充而成的区域的面积的一些不等式．该方法基于 Grötzsch 的一些引理（[1]）．其中之一叙述如下．

考虑边长为 $A$ 和 $B$ 的一个矩形，它包含有限个不相重叠的单连通区域 $S_k, k = 1, \cdots, n$，每个区域都具有 Jordan 边界与长度为 $A$ 的两条边均交成线段而不退缩为点（区域 $S_k$ 形成从长度为 $A$ 的一边到另一边的带状域）．若 $S_k$ 被共形映射成边长为 $a_k$ 与 $b_k$ 的矩形使上述的线段变成长度为 $a_k$ 的边，则

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_k} \leqslant \frac{A}{B},$$

等号仅当 $S_k, k = 1, \cdots, n$，是边长为 $a_k'$ 和 $B$ 的矩形且满足 $\sum_{k=1}^{n} a_k' = A$ 时才成立．

另一个引理是 **Grötzsch 原理**（Grötzsch principle）．这两个 Grötzsch 引理对无限多个子区域的情形也成立．

带形法首先被 H. Grötzsch（[1]）用作单叶共形映射与拟共形映射理论中的一种方法，他应用该方法系统研究并解决了定义在有限连通与无限连通区域中的单叶函数的大量极值问题（见[3]；关于别的应用可见[2]）．

这一方法也成为极值度量法的基础（见**极值度量法**（extremal metric, method of the））．

**参考文献**


[1A] Grötzsch, H., Über einige Extremalprobleme der konformen Abbildung I, *Ber. Verh. Sächsisch. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-Phys. Kl.*, **80** (1928), 6, 367－376.

[1B] Grötzsch, H., Über die Verzerrung bei schlichten nichtkonformen Abbildungen und über eine damit zusammenhängende Erweiterung des Picardschen Satzes, *Ber. Verh. Sächsisch. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-Phys., Kl.*, **80** (1929), 7, 503－507.

[1C] Grötzsch, H., Über die Verzerrung bei schlichten konformer Abbildung mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche, *Ber. Verh. Sächsisch. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-Phys. Kl.*, **81** (1929), 1, 38－48.

[1D] Grötzsch, H., Über konforme Abbildung unendlich-vielfach zusammenhängender schlichter Bereciche mit endlichvielen Häufungsrandkomponenten, *Ber. Verh.*

*Sächsisch. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-Phys.*, *Kl.*, **81** (1929), 2, 51 – 87.

[2] Голузин, Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966 (英译本: Goluzin, G. M., Geometric theory of functions of a complex variable, Amer. Math. Soc., 1969).

[3] Jenkins, J. A., Univalent functions and conformal mapping, Springer, 1958.

Е. Г. Голузина 撰 杨维奇 译

**带形法(积分方程)[strip method (integral equations); полос метод]**

一种近似求解第二类一维 Fredholm 积分方程的方法(也见 **Fredholm 方程**(Fredholm equation); **Fredholm 方程, 数值方法**(Fredholm equation, numerical methods)), 它是用一个退化核去代替特殊形式的核, 计算退化方程的预解式, 然后通过应用快速收敛迭代算法改进近似解.

假定原积分方程为

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds=f(x), \qquad (1)$$

为了构造退化核, 把正方形

$$\{a\leqslant x\leqslant b,\ a\leqslant s\leqslant b\}$$

分成 $N$ 条带

$$\left\{\frac{b-a}{N}i\leqslant x\leqslant\frac{b-a}{N}(i+1),\ a\leqslant s\leqslant b\right\},$$
$$i=0,\cdots,N-1,$$

在每条带, 譬如第 $i$ 条带, 用函数

$$K_i(x,s)=c_i(x)+P_i(x)Q_i(s)$$

均方逼近或一致逼近函数 $K(x,s)$. 在最简单的情况,

$$K_i(x,s)=K(\xi_i,s),$$
$$\xi_i\in\left[\frac{b-a}{N}i,\ \frac{b-a}{N}(i+1)\right].$$

现在可以用函数 $K_i(x,s)$ 来构造一个退化核(degenerate kernel):

$$K_N(x,s)=\sum_{i=0}^{N-1}[\hat{c}_i(x)+\hat{P}_i(x)Q_i(s)], \qquad (2)$$

$$\hat{P}_i(x)=\begin{cases}P_i(x), & x\in\left[\frac{b-a}{N}i,\ \frac{b-a}{N}(i+1)\right],\\ 0, & x\notin\left[\frac{b-a}{N}i,\ \frac{b-a}{N}(i+1)\right],\end{cases}$$

$$\hat{C}_i(x)=\begin{cases}C_i(x), & x\in\left[\frac{b-a}{N}i,\ \frac{b-a}{N}(i+1)\right],\\ 0, & x\notin\left[\frac{b-a}{N}i,\ \frac{b-a}{N}(i+1)\right].\end{cases}$$

带有退化核的方程(2)的解逼近方程(1)的解, 一般地, 带数 $N$ 越大, 而且在每条带中对 $K(x,s)$ 的逼近越好, 则解越好. 可以用迭代算法

$$\varphi_k(x)-\lambda\int_a^b K_N(x,s)\varphi_k(s)ds= \qquad (3)$$

$$=f(x)+\lambda\int_a^b[K(x,s)-K_N(x,s)]\varphi_{k-1}(s)ds$$

进一步改进近似解 $\varphi_0(x)$. 当核 $K_N(x,s)$ 逼近 $K(x,s)$ 时, 迭代(3)均方收敛, 或一致收敛于方程(1)的解.

**参考文献**

[1] Положий, Г. Н., Чаленко, П. И., 《Доповiдi АН УРСР》, **4**(1962), 427 – 431 (乌克兰文).

А. Б. Бакушинский 撰

【补注】 可以在[A1]和[A2]里找到对第二类 Fredholm 方程数值解的很好的评论; 那里没有叙述带形法, 但是讨论了其他退化核方法, 亦见**退化核法**(degenerate kernels, method of).

**参考文献**

[A1] Atkinson, K., A survey of numerical methods for the solution of Fredholm integral equations of the second kind, SIAM, 1976.

[A2] Baker, C. T. H., The numerical treatment of integral equations, Clarendon Press, 1977.

袁国兴 张宝琳 译

**强导数[strong derivative; сильная производная]**

同 **Fréchet 导数**(Fréchet derivative).

**不定积分的强微分法[strong differentiation of an indefinite integral; сильное дифференцирование]**

求不定积分

$$F(I)=\int_I f(x)dx$$

的**强导数**(strong derivative), 其中 $f$ 是 $n$ 维 Euclid 空间的开集 $G$ 上的实值可和函数, 而 $F(I)$ 看作是区间 $I\subset G$ 的函数. 如果

$$|f|(\ln(1+|f|))^{n-1}$$

在 $G$ 上可和(特别是, 如果 $f\in L_p(G)$, $p>1$), 那么 $f$ 的积分 $F$ 在 $G$ 上几乎处处强可微. 对任一正值非减的 $\varphi(u)$, $u\geqslant 0$, 且

$$\varphi(u)=o(u\ln^{n-1}u),\ u\to\infty,$$

存在一个 $G$ 上可和函数 $f\geqslant 0$，使得 $\varphi\circ f$ 是可和的．但比值 $F(I)/|I|$ 在每个 $x\in G$ 上当 $I$ 趋于 $x$ 时是无界的．这就是说，$F$ 不是强可微的．

参考文献


[1] Jessen, B., Marcinkiewicz, J. and Zygmund, A., Note on the differentiability of multiple integrals, *Fund. Math.*, **25** (1935), 217 – 234.

[2] Saks, S., On the strong derivatives of functions of intervals, *Fund. Math.*, **25** (1935), 235 – 252.

[3] Saks, S., Theory of the integral, Hafner, 1952 (译自波兰文).

[4] Zygmund, A., Trigonometric series, 2, Cambridge Univ. Press, 1988.


Т. П Лукашенко 撰

【补注】

参考文献


[A1] Zygmund, A., On the differentiability of multiple integrals, *Fund. Math.*, **23** (1934), 143 – 149.


周民强 译

**强遍历性** [**strong ergodicity; строгая эргодичность**]，狭义拓扑动力系统（流或瀑布）的

**遍历理论**（ergodic theory）中考察的一个性质．它包含下述各点：1）此系统有唯一的，不变的，正规化的，正则的 Borel 测度 $\mu$；2）对任一非空开集 $U$，$\mu(U)>0$；3）任一有界连续函数 $f$，沿任一轨道的时间平均都趋于 $\int f d\mu$．

虽然这个定义中对相空间 $W$ 没有任何限制，但实际上是用于当 $W$ 为完全的可分度量空间（通常甚至是度量紧集）时．这时，强遍历性意味着 $W$ 为一遍历集（ergodic set）．强遍历性蕴涵着 $W$ 为一极小集（minimal set）（但反之不然）．**Lebesgue 空间**（Lebesgue space）上的任一遍历流或遍历瀑布均度量同构于一具有强遍历性的拓扑流或瀑布．

强遍历性有时只意味着性质 1）；在这个意义下也使用唯一遍历性（unique ergodicity）这个词．

Д. В. Аносов 撰

【补注】 在西方文献中常用的名词是严格遍历性（strict ergodicity）．当相空间为紧时，上述条件 1）与 3）等价，于是这时 3）就刻画了唯一遍历性．如果这些条件被满足，则唯一不变正规测度的支集就是 $W$ 的唯一极小子集．于是具有紧的相空间的拓扑动力系统为严格遍历的，当且仅当它是唯一遍历与极小的．

上述 Lebesgue 空间的任意遍历流与瀑布可以表为严格遍历流或瀑布这个结果，应这样理解，即不要求原系统是拓扑的（只要求变换是可测的）．对于具有有限熵的遍历瀑布，表示它的系统可以取为一个平移系统（或拓扑 Bernoulli 自同构，见**符号动力学**（symbolic dynamics））的闭，不变，严格遍历子集．这个结果称为 Jewett - Krieger 定理（Jewett - Krieger theorem）．

参考文献


[A1] Petersen, K., Ergodic theory, Cambridge Univ. Press, 1983.


【译注】 俄文 строгая эргодичность 就应译为严格遍历性而不应译为强遍历性（strong ergodicity）．

齐民友 译

**强极值** [**strong extremum; сильный экстремум**]

被一个泛函 $J(y)$ 在曲线 $\tilde{y}(x)$ $(x_1\leqslant x\leqslant x_2)$ 所取的一个极小或极大值 $J(\tilde{y})$，对此不等式

$$J(\tilde{y})\leqslant J(y)\ \text{或}\ J(\tilde{y})\geqslant J(y)$$

之一对 $\tilde{y}(x)$ 的 $\varepsilon$ 邻域中的所有比较曲线 $y(x)$ 成立．曲线 $\tilde{y}(x)$ 和 $y(x)$ 必须满足给定的边界条件．

由于 $J(y)$ 的极大化等价于 $-J(y)$ 的极小化，代替强极大常常可以只讨论强极小．术语"强"着重指出加在比较曲线 $y(x)$ 上 $\varepsilon$ 近于 $\tilde{y}(x)$ 的条件只是在整个区间 $[x_1, x_2]$ 上，

$$|y(x)-\tilde{y}(x)|\leqslant\varepsilon,$$

而曲线 $y(x)$ 和 $\tilde{y}(x)$ 的导数可以在任意"强"的程度上不同．

然而强极值定义本身是相对意义下而不是绝对意义下的，它不是在使得 $J(y)$ 有意义的容许比较曲线的整个类上，而是只相对于属于 $\tilde{y}(x)$ 的 $\varepsilon$ 邻域的所有容许比较曲线的子集给出极值．然而为简单起见，"相对的"这个词常常省略，而说到强极值就是指强相对极值（亦见**强相对极小值**（strong relative minimum））．

参考文献


[1] Лаврентьев, М. А., Люстерник, Л. А., Курс вариационного исчисления, 2 изд., М.-Л., 1950（中译本：М. А. 拉弗林契叶夫、Л. А. 留斯切尔涅克，变分学教程，高等教育出版社，1955）．

[2] Смирнов, В. И., Курс высшей математики, 3 изд., т. 4, М., 1957（中译本：В. И. 斯米尔诺夫，高等数学教程，第四卷第一、二分册，人民教育出版社，1958）．


И. В. Вапнярский 撰

【补注】

参考文献


[A1] Cesari, L., Optimization - theory and applications. Problems with ordinary differential equations, Springer, 1983.


葛显良 译 吴绍平 校

**强同调** [**strong homology; сильная гомология**]

见弱同调(weak homology).

**强积分[strong integral, сильный интеграл]**

取值在线性拓扑空间的函数关于标量测度的或标量函数关于取值在向量空间的测度的 Lebesgue 型积分. 这里定义积分的极限过程是在强拓扑意义下取的. 强积分的例子是:

1) 向量值函数的 **Bochner 积分**(Bochner integral);

2) **Daniell 积分**(Daniell integral), 如果被积函数的值属于一个 $\sigma$ 完全向量格;

3) 积分 $\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dF_\lambda$, 给出作用在 Hilbert 空间上的自伴算子的谱分解(见**线性算子的谱分解**(spectral decomposition of a linear operator)).

对标量函数关于向量测度的强积分, 该测度的值在很多情形下假定属于一个半序向量空间(见**半序空间**(semi-ordered space)).

**参考文献**


[1A] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear operators. General theory, 1, Interscience, 1958.

[1B] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear operators. Spectral theory, 2, Interscience, 1963.

[2] Hilderbrandt, T. H., Integration in abstract spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 59 (1953), 111 – 139.


В. И. Соболев 撰

【补注】 亦见**向量测度**(vector measure); **强拓扑**(strong topology).

**参考文献**


[A1] Diestel, J. and Uhl, J. J. jr., Vector measures, Amer. Math. Soc., 1977.


葛显良 译 鲁世杰 校

**强大数律[strong law of large numbers; больших чисел усиленный закон]**

一种类型的**大数律**(law of large numbers)(在其一般形式下), 它叙述: 在某些条件下随机变量序列的算术平均以概率 1 趋向于某些常数值. 更确切地说, 若

$$X_1, X_2, \cdots \qquad (1)$$

是一随机变量序列, 设 $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, 如果存在常数序列 $A_n$ 使得关系式

$$\frac{S_n}{n} - A_n \to 0, n \to \infty, \qquad (2)$$

成立的概率是 1, 则称序列 (1) 满足强大数律. 另一种等价形式是: 如果对任意 $\varepsilon > 0$, 所有不等式

$$\left|\frac{S_n}{n} - A_n\right| \leqslant \varepsilon, \left|\frac{S_{n+1}}{n+1} - A_{n+1}\right| \leqslant \varepsilon, \cdots, \qquad (3)$$

成立的概率当 $n \to \infty$ 时趋于 1, 则序列 (1) 满足强大数律. 这样, 是把和的序列作为一个整体来考虑它的性态的, 而在通常的大数律中只考虑单个的和. 如果序列 (1) 满足强大数律, 则对同一序列 $A_n$ 它也满足通常的大数律, 即对任意 $\varepsilon > 0$, 当 $n \to \infty$ 时

$$\mathrm{P}\left\{\left|\frac{S_n}{n} - A_n\right| \leqslant \varepsilon\right\} \to 1 \qquad (4)$$

反之不一定成立. 例如: 若随机变量 (1) 是独立的, 且当 $n \geqslant 16$ 时各以概率 1/2 取 $\pm\sqrt{n/\ln\ln\ln n}$ 两个值, 对 $A_n = 0$ 它们满足大数律 (4), 而对任意 $A_n$ 强大数律 (2) 不满足. 这类例子的存在性乍一看来一点也不明显. 其理由是: 虽然一般地依概率收敛比以概率 1 收敛弱, 但对独立随机变量序列二者是等价的.

强大数律首先由 E. Borel ([1]) 用数论方法对 Bernoulli 概型给予阐述并证明: 见 **Borel 强大数律**(Borel strong law of large numbers). Bernoulli 概型的特殊情形出现在(按均匀分布)随机地在 (0, 1) 区间取实数 $\omega$ 将其按任意基展开成一个无限小数中(见 **Bernoulli 试验**(Bernoulli trials)). 于是在二进位展开式

$$\omega = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n(\omega)}{n}$$

中, 相继出现的 $X_n(\omega)$ 各以 1/2 的概率取两个值 0 和 1, 且为独立随机变量. 其和 $S_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n} X_k(\omega)$ 等于二进位展开式前 $n$ 个符号中"1"的个数, 而 $S_n(\omega)/n$ 是它的比例. 同时还可以把 $S_n$ 看作具有成功(出现"1")概率为 1/2 的 Bernoulli 概型中成功的次数. Borel 证明了对 (0, 1) 中几乎所有的 $\omega$, "1"的比例 $S_n(\omega)/n$ 趋向于 1/2. 用类似的方式, 在 $\omega$ 的以 10 为基的展开式中, 可以把 0, 1, …, 9 中任一数字(例如数字 3)的出现视为成功, 则得到成功概率为 1/10 的 Bernoulli 试验, 且在十进位展式前 $n$ 个符号中所选数字出现的频率对 (0, 1) 中几乎所有的 $\omega$ 趋向于 1/10. Borel 还注意到: 对几乎所有的 $\omega$, 任一给定的长为 $r$ 的数字组出现的频率趋向于 $1/10^r$(见**正规数**(normal number)).

F. Cantelli ([2]) 叙述了用被加项的二阶和四阶中心矩表征的独立随机变量 $X_n$ 的强大数律成立的充分条件(Bernoulli 概型满足这些条件). 令

$$B_{n,k} = \sum_{j=1}^{n}\mathrm{E}|X_j - \mathrm{E}X_j|^k.$$

Cantelli 条件(Cantelli condition)可写成下述形式:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{n,4} + B_{n,2}^2}{n^3} < \infty.$$

Cantelli 和 Borel 的证明基于下述理由: 设对某一正数序列 $\varepsilon_n \to 0$(当 $n \to \infty$ 时),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}\left\{\left|\frac{S_n}{n} - A_n\right| > \varepsilon_n\right\} < \infty, \qquad (5)$$

则根据 **Borel-Cantelli 引理** (Borel-Cantelli lemma), 以概率 1 在 (5) 中概率符号中的事件仅有有限个发生. 因此, 以概率 1, 对所有充分大的 $n$,

$$\left|\frac{S_n}{n} - A_n\right| \leqslant \varepsilon_n,$$

即 (3) 成立. Borel 用 de Moivre-Laplace 定理估计了级数 (5) 中的项, 而 Cantelli 基于他本人建立的关于四阶矩的 Чебышев 不等式作了同样的事.

А. Я. Хинчин 和 А. Н. Колмогоров 实现了对可应用强大数律条件的进一步扩展. Хинчин 引入了"强大数律"这一真正的名字并且证明了一个关于 $A_n = \mathsf{E}(S_n/n)$ 的充分条件 (也适用于相依变量). 用 $r_{i,k}$ 表示 $X_i$ 与 $X_k$ 的相关系数并令

$$c_n = \sup_{|i-k|=n} |r_{i,k}|, \quad C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k,$$

Хинчин 条件 (Khinchin condition) 可叙述为: 对某一 $\delta > 0$, $\dot{B}_n^2 C_n = O(n^{2-\delta})$. 事实上, Хинчин 证明中的叙述更强.

在独立被加项的情形, 强大数律成立的已知的最好的条件是由 Колмогоров 建立的: 对具有限方差的充分条件 (1930) 和对数学期望存在的同分布的变量的必要和充分条件 (1933). 对具有限方差的随机变量列 (1) 的 **Колмогоров 定理** (Kolmogorov theorem) 指出条件

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathsf{D}X_n}{n^2} < \infty \qquad (6)$$

蕴含序列 (1) 关于 $A_n = \mathsf{E}(S_n/n)$ 的强大数律成立. 借助于方差, 在下述意义上条件 (6) 是最好的: 对任何使得级数 $\sum b_n/n^2$ 发散的正数序列 $b_n$, 都可以构造一个具有方差 $\mathsf{D}X_n = b_n$ 的独立随机变量列 $X_n$, 它不满足强大数律. 条件 (6) (还有独立变量的强大数律的其他条件) 的适用范围可以如下扩展: 设 $m_n$ 是 $X_n$ 的中位数, 在强大数律中级数

$$\sum \mathsf{P}\{|X_n - m_n| > n\}$$

的收敛性是必要的. 根据 Borel-Cantelli 引理, 由它可以得出以概率 1 从某一 $n$ 开始 $|X_n - m_n| < n$. 这样, 在研究强大数律成立的条件时, 立即可以限制随机变量列满足上述最后指出的条件.

在 Хинчин 和 Колмогоров 给出的证明中级数 (5) 的收敛性可以用级数

$$\sum_k \mathsf{P}\left\{\max_{n_k < n \leqslant n_{k+1}} \left|\frac{S_n}{n} - A_n\right| > \varepsilon_n\right\}$$

的收敛性来代替, 其中 $n_k = 2^k$. 在这一证明中, Хинчин 实际上使用了来自于正交函数级数理论的许多想法, 而 Колмогоров 则使用了他的对随机变量和的最大值的不等式.

可以叙述独立随机变量列强大数律成立的一个必要和充分条件: 令

$$Z_k = 2^{-k} \sum_{(k)} X_n,$$

其中和 $\sum_{(k)}$ 应用于满足 $2^k < n \leqslant 2^{k+1}$ 的 $n$ 的值. 则条件是对任意 $\varepsilon > 0$,

$$\sum_k \mathsf{P}\{|Z_k - mZ_k| > \varepsilon\} < \infty, \qquad (7)$$

其中 $mZ_k$ 是 $Z_k$ 的中位数 ([6]). 如果加上一些附加的限制, (7) 将产生一些用 (1) 的个别项的特征表示的条件. 例如, 如果 $X_n = O(n/\ln\ln n)$ 或者如果所有的 $X_n$ 都是正态分布的, 则条件 (7) 等价于如下条件: 对任何 $\varepsilon > 0$,

$$\sum_k e^{-\varepsilon/\mathsf{D}Z_k} < \infty. \qquad (8)$$

此处, 由于 $X_1, X_2, \cdots$, 是独立的, 所以

$$\mathsf{D}Z_k = 2^{-2k} \sum_{(k)} \mathsf{D}X_n.$$

[7] 叙述了对 Марков 链、Марков 过程和平稳过程强大数律成立的条件. 这样, 适用于具有相关函数 $R(n)$ 的广义平稳序列 $X_n$ 的 Хинчин 方法引出下面的定理: 如果级数 $\sum(\ln^2 n)|R(n)|/n$ 是收敛的, 则以概率 1, $(X_0 + X_1 + \cdots + X_n)/(n+1) \to \mathsf{E}X_0$. 适用于狭义平稳序列名为"强大数律"的叙述有时用如下方式给出: 极限

$$Y = \lim_{n\to\infty} \frac{X_0 + X_1 + \cdots + X_n}{n+1}$$

以概率 1 存在. 随机变量 $Y$ 等于 $X_0$ 关于平移不变集组成的 $\sigma$ 代数的条件数学期望. 仅仅对于度量可递过程变量 $Y$ 以概率 1 是常数且等于 $\mathsf{E}X_0$. 这种形式的强大数律等同于 **Birkhoff 遍历定理** (Birkhoff ergodic theorem).

在赋范线性空间上, 存在随机向量的强大数律的变种 ([9]). 按时间顺序这种变种的最早例子是关于经验分布函数收敛到理论分布的 Гливенко-Cantelli 定理.

$S_n/n$ 与 $A_n$ 的偏差用**重对数律** (law of the iterated logarithm) 描述.

**参考文献**


[1] Borel, E., Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétique, *Rend. Circ. Palermo* (2), 27 (1909), 247 – 271.

[2] Cantelli, F. P., Sulla probabilità come limite della frequenza, *Atti Accad. Naz. Lincei*, 26 (1917), 1, 39 – 45.

[3] Хинчин, А. Я., Основные законы теории вероя-

гностей, М., 1927.
[4] Khintchine, A. Ya., Sur la loi forte des grands nombres, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. 1 Math.*, **186** (1928), 285 – 287.
[5] Kolmogorov, A. N., Sur la loi forte des grands nombres, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. 1 Math.*, **191** (1930), 910 – 912.
[6] Прохоров, Ю. В., 《Изв. АН СССР Сер. матем.》, 14 (1950), 523 – 536.
[7] Doob, J. L., Stochastic processes, Chapman and Hall, 1953.
[8] Петров, В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972 (英译本: Petrov, V. V., Sums of independent random variables, Springer, 1975).
[9] Grenander, U., Probabilities on algebraic structures, Wiley, 1963.

Ю. В. Прохоров 撰 刘秀芳 译 陈培德 校

**强相对极小值**[**strong relative minimum**; **сильный относительный минимум**]

由泛函 $J(y)$ 在曲线 $\tilde{y}(x)$, $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ 上取到的一个极小值 $J(\tilde{y})$, 使得对满足零阶 $\varepsilon$ 近的条件, 即在整个区间 $[x_1, x_2]$ 上

$$|y(x) - \tilde{y}(x)| \leqslant \varepsilon \tag{1}$$

的所有比较曲线 $y(x)$,

$$J(\tilde{y}) \leqslant J(y). \tag{2}$$

假定 $\tilde{y}(x)$, $y(x)$ 满足给定的边界条件.

如果除了要求纵坐标的 $\varepsilon$ 近性条件 (1) 之外, 加上在整个区间 $[x_1, x_2]$ 上导数的 $\varepsilon$ 近性条件:

$$|y'(x) - \tilde{y}'(x)| \leqslant \varepsilon, \tag{3}$$

则称为一阶 $\varepsilon$ 近性.

由泛函 $J(y)$ 在曲线 $\tilde{y}(x)$ 取到的这样一个值, 使得对所有为一阶 $\varepsilon$ 近性的比较曲线 $y(x)$ 满足 (2), 则称为弱相对极小值 (weak relative minimum).

由于零阶 $\varepsilon$ 近性条件比一阶 $\varepsilon$ 近性条件划分出一个更广的曲线类, 每一个强极值同时是弱极值 (亦见**弱相对极小值** (weak relative minimum); 但是并不是每一个弱极值是强极值. 与此相关, 对强和弱相对极小值的最优性的必要以及充分条件有不同形式.

除强相对极小值概念外, 可以引入绝对极小值的概念. 绝对极小值是 $J(y)$ 在其上有意义的曲线的全体集合上所取的极小值. 一个绝对极小值是总体的, 而强与弱相对极小值是局部的.

一个绝对极小值也是强相对极小值, 但并不是每一个强相对极小值是绝对极小值.

有多于一个强相对极小值的变分问题称为**多极值问题** (multi-extremum problem). 对于解实际的变分问题, 强相对极值可以用**变分学的数值方法** (variational calculus, numerical methods of) 近似地求得.

对于强相对极小值是唯一的那些问题, 对强相对极小值的最优性必要条件同时是对绝对极小值的充分条件. 例如, 在时间最优控制的线性问题的最优控制理论中 (见**时间最优控制问题** (time-optimal control problem)), 以及在变分法的某些其他类问题中, 这种情形成立.

**参考文献**

[1] Лаврентьев, М. А., Люстерник, Л. А., Курс вариационного исчисления, 2 изд., М.-Л., 1950 (中译本: M. A. 拉弗林契叶夫, Л. А. 留斯切尔涅克, 变分学教程, 高等教育出版社, 1955).
[2] Смирнов, В. И., Курс высшей математики, 3 изд., т. 4, М., 1957 (中译本: В. И. 斯米尔诺夫, 高等数学教程, 第四卷第一、二分册, 人民教育出版社, 1958).

И. Б. Вапнярский 撰

【补注】

**参考文献**

[A1] Elsgolc, L. E., Calculus of variations, Pergamon, 1961 (译自俄文) (中译本: Л. Е. 艾利斯哥尔兹, 变分法, 高等教育出版社, 1960).
[A2] Cesari, L., Optimization-theory and applications. Problems with ordinary differential equations, Springer, 1983.

葛显良 译 吴绍平 校

**强解**[**strong solution**; **сильное решение**]

微分方程

$$Lu \equiv \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x) D^\alpha u = f \tag{*}$$

在区域 $D$ 中的强解是一局部可积函数 $u$, 它具有所有 $\leqslant m$ 阶的局部可积的**广义导数** (generalized derivative), 且在 $D$ 中几乎处处满足方程 (*).

"强解"的概念亦可以如下引入. 函数 $u$ 称作是方程 (*) 的强解, 如果存在光滑 (例如, $C^\infty$) 函数序列 $\{u_n\}$, $\{f_n\}$ 使得 $u_n \to u$, $f_n \to f$ 且 $Lu_n = f_n$ 对每个 $n$, 这里收敛性是在 $L_1(K)$ 中对任一紧集 $K \subseteq D$ 取的. 在这些定义中 $L_1$ 可以换成 $L_p$ 函数类, 即函数的 $p$ 次方是局部可积的. 经常用的函数类是 $L_2$.

在 (*) 是椭圆型方程情形下, 强解的上述两个概念是一致的.

А. П. Солдатов 撰

【补注】

**参考文献**

[A1] Chazarain, J. and Piriou, A., Introduction à la théorie des équations aux derivées partielles linéaires, Gauthier-Villars, 1981, p. 223.

孙和生 译 陆柱家 校

**强拓扑** [strong topology; сильная топология]

【补注】 域 $k$ 上一个向量空间的对偶对 (dual pair of vector spaces) $(L, M)$ 是一对向量空间 $L$, $M$ 连同一个 $k$ 上非退化双线性型,

$$\varphi: L \times M \to k.$$

即

$\varphi(a_1 l_1 + a_2 l_2, m) = a_1 \varphi(l_1, m) + a_2 \varphi(l_2, m)$,
$\varphi(l, b_1 m_1 + b_2 m_2) = b_1 \varphi(l, m_1) + b_2 \varphi(l, m_2)$;
对所有 $m \in M$, $\varphi(l, m) = 0$ 蕴涵 $l = 0$; 对所有 $l \in L$, $\varphi(l, m) = 0$ 蕴涵 $m = 0$.

由对偶对 $(L, M)$ ($k$ 上给定了一个拓扑) 定义的 $L$ 上弱拓扑 (weak topology) 是使得所有泛函 $\psi_m$: $L \to k$, $\psi_m(l) = \varphi(l, m)$ 连续的最弱拓扑. 更精确地说, 如果 $k = \mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$ 带有通常的拓扑, 这定义了 $L$(和 $M$) 上的弱拓扑. 如果 $k$ 是一个带有离散拓扑的任意域, 这定义了所谓的线性弱拓扑 (linear weak topology).

设 $\mathfrak{M}$ 是 $L$ 的有界子集 (按弱拓扑, 即每一个 $A \in \mathfrak{M}$ 是弱有界的 (weakly bounded), 意指 0 的每一个按 $L$ 上弱拓扑的开邻域 $U$, 存在 $\rho > 0$ 使得 $\rho A \subset U$) 的一个集类. $M$ 上的拓扑 $\tau_{\mathfrak{M}}$ 是由半范数系 $\{p_A\}$, $A \in \mathfrak{M}$ 定义的, 其中 $p_A(x) = \sup_{m \in A} |\varphi(m, x)|$ (见半范数 (semi-norm)). 这个拓扑是局部凸的, 当且仅当 $\bigcup \mathfrak{M}$ 是一个全集 (total set), 即它生成 (在作为向量空间的 $L$ 中) $L$ 的所有元素. 拓扑 $\tau_{\mathfrak{M}}$ 称为 $\mathfrak{M}$ 的集合上的一致收敛拓扑 (topology of uniform convergence).

$M$ 上可用对偶对 $(L, M)$ 定义的最细拓扑是 $L$ 的弱有界子集上的一致收敛拓扑. 这是拓扑 $\tau_{\mathfrak{M}}$, 其中 $\mathfrak{M}$ 是 $L$ 中所有弱有界子集的集类, 且它简称为 $M$ 上的强拓扑 (strong topology).

**参考文献**

[A1] Köthe, G., Topological vector spaces, 1, Springer, 1969.

葛显良 译 鲁世杰 校

**强连续半群** [strongly-continuous semi-group; сильно непрерывная полугруппа]

Banach 空间 $X$ 上具有以下性质的一族有界线性算子 $T(t)$, $t > 0$:

1) $T(t+\tau)x = T(t)T(\tau)x$, $t, \tau > 0$, $x \in X$;

2) 函数 $t \mapsto T(t)x$ 对任何 $x \in X$ 在 $(0, \infty)$ 上连续.

当 1) 成立时, 所有函数 $t \mapsto T(t)x$ $(x \in X)$ 的可测性, 且特别地它们的单边 (右或左) 弱连续性, 蕴涵 $T(t)$ 的强连续性. 对一个强连续半群, 有限数

$$\omega = \inf_{t>0} t^{-1} \ln \| T(t) \| = \lim_{t \to \infty} t^{-1} \ln \| T(t) \|$$

称为该半群的型 (type of the semi-group). 这样, 函数 $t \mapsto T(t)x$ 的范数在 $\infty$ 的增长不快于指数 $e^{\omega t}$. 强连续半群的分类是基于当 $t \to 0$ 时它们的性态. 如果有一个有界算子 $J$ 使得当 $t \to 0$ 时 $\| T(t) - J \| \to 0$, 则 $J$ 是一个投影算子且 $T(t) = Je^{tA}$, 其中 $A$ 是与 $J$ 交换的一个有界线性算子. 在这情形 $T(t)$ 关于算子范数是连续的. 如果 $J = I$, 则 $T(t) = e^{tA}$, $-\infty < t < \infty$, 是算子的一致连续群.

如果对每个 $x \in X$, $T(t)x \to Jx$, 则 $J$ 也是一个投影算子, 把 $X$ 投影到子空间 $X_0$ 上, 其中 $X_0$ 是所有 $T(t)x$, $t > 0$, $x \in X$ 的并的闭包.

为了 $J$ 存在且等于 $I$, 其必要充分条件为 $\| T(t) \|$ 在 $(0, 1)$ 上有界且 $X_0 = X$. 在这情形下半群 $T(t)$ 可以用等式 $T(0) = I$ 扩张且对 $t \geq 0$ 强连续 (它满足 $C_0$ 条件 ($C_0$-condition)). 对更宽的半群类极限关系 $T(t) \to I$ 在广义下满足:

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_0^t T(\tau) x \, d\tau = x, \quad x \in X$$

(Cesáro 可和性, $C_1$ 条件 ($C_1$-condition)), 或

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda \tau} T(\tau) x \, d\tau = x, \quad x \in X$$

(Abel 可和性, $A$ 条件 ($A$-condition)). 这里假设函数 $\| T(t)x \|$, $x \in X$, 在 $[0, 1]$ 可积 (且因而在任何有限区间上可积).

强连续半群当 $t \to 0$ 时的性态可以完全非正则的. 例如, 函数 $t \to \| T(t)x \| = 0$ 可以有幂奇性.

对 $x$ 在 $X_0$ 中的一个稠密集函数 $t \mapsto T(t)x$ 在 $[0, \infty)$ 上可微. 使得函数 $t \mapsto T(t)x$ 对所有 $x$ 对 $t > 0$ 是可微的强连续半群起着重要的作用. 在这情形下算子 $T'(t)$ 对每个 $t$ 有界且 $t \to 0$ 时它的性态为半群分类给出了新的机会. 使得 $T(t)$ 在包含半轴 $(0, \infty)$ 的复平面的扇形内有一个全纯扩张的强连续半群的类已经被刻画出.

见**算子的半群** (semi-group of operator); **半群的生成算子** (generating operator of a semi-group).

**参考文献**

[1] Hille, E. and Phillips, R., Functional analysis and semi-groups, Amer. Math. Soc., 1957 (中译本: E. 希尔, R. S. 菲列浦斯, 泛函分析与半群, 上海科学技术出版社, 1964).

С. Г. Крейн 撰

【补注】

**参考文献**

[A1] Pazy, A., Semigroup of linear operators and applications to partial differential equations, Springer, 1983.

[A2] Arendt, W., Grabosch, A., Greiner, G., Groh, U., Lotz, H. P., Moustakas, U., Nagel, R., Neubrander, F. and Schlotterbeck, U., One para-

meter semigroups of positive operators, Lecture notes in math., 1184, Springer, 1986.
[A3] Daleckii, Yu. I. and Krein, M. G, Stability of solutions of differential equations in Banach space, Amer. Math. Soc., 1974(译自俄文).

葛显良 译 吴绍平 校

**环索线 [strophoid; строфоида]**

平面三次代数曲线，用 Descartes 坐标表示其方程为

$$y^2 = x^2 \frac{d+x}{d-x},$$

用极坐标表示则为

$$\rho = -d \frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi}.$$

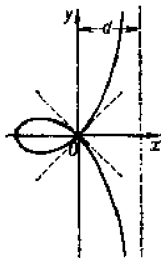
坐标原点是结点，切线为 $y = \pm x$（参看图示）. 直线 $x = d$ 是渐近线. 环圈的面积是

$$S = 2d^2 - \frac{1}{2\pi d^2}.$$

在曲线和渐近线之间的面积是

$$S_2 = 2d^2 + \frac{1}{2\pi d^2}$$

环索线与所谓的尖点（cusp）有关.




**参考文献**

[1] Савелов, А. А., Плоские кривые, М., 1960.
[2] Смогоржевский, А. С., Столова, Е. С., Справочник по теории кривых третьего порядка, М., 1961.

Д. Д. Соколов 撰

【补注】

**参考文献**

[A1] Gomes Teixeira, F., Traité des courbes, I－3, Chelsea, reprint, 1971.
[A2] Lawrence, J. D. H., A catalog of special planar curves, Dover, reprint, 1972.

陈维桓 译

**Strouhal 数 [Strouhal number; Струхаля число]**

液体或气体的非定常运动相似性的判据. Strouhal 数表征在时间进程中过程流动的同一性:

$$\mathrm{Sh} = \frac{l}{vt} = \frac{\omega l}{v},$$

其中 $v$ 是流动的特征速度，$l$ 是特征线尺度，$t$ 是非定常运动的特征时间周期，$\omega$ 是特征频率（有时也用 Sh 表示倒数 $vt/l$）.

在力学的、热的和电磁的过程中类似的判据 $H_0 = vt/l$ 称为均匀性检测标准（homochromity test）.

Strouhal 数是以 V. Strouhal 的名字命名的.

根据 БСЭ-3 中同名条目的材料

【补注】

**参考文献**

[A1] Седов, Л. И., Метод подобия и размерности в механике, Изд. Наука, изд. 8, 1977（中译本: Л. И. 谢道夫，力学中的相似方法与量纲理论，科学出版社，1982）.

李维新 译

**结构同构 [structural isomorphism; структурный изоморфизм]**

格同构（lattice isomorphism）的一个废弃不用的名称（见子代数格（subalgebra lattice））.

对于群来说，什么时候两个群的同构可以由它们的格同构得出，即由它们的子群格是同构的事实得出，这个问题已被研究（见 [1]）.

**参考文献**

[1] Курош, А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967（中译本: 库洛什，群论，高等教育出版社，上册，1987；下册，1982）.

О. А. Иванова 撰

【补注】"结构同构"这个词是由格的结构这一废弃不用的术语而来（见[1]）. 有些关于在什么时候格同构的群会是同构的结果在 [1] 中被列出.

郝钢新 译

**结构语言学 [structural linguistics; структурная лингвистика]**

语言学的一个分支，主要研究语言机制的结构，并力图精确描述这种结构. 结构语言学的发展导致广研究语言结构的数学方法的产生和**数理语言学**（mathematical linguistics）的出现. F. de Saussure 在 1916 年首先表述了结构语言学的一般原理（见 [1]）.

结构语言学将语言（language）与言语（speech）加以区别，并以语言的研究作为结构语言学的基本任务. 语言是一个确定的符号系统（system of signs）；每个语言符号是所指（signifié）——意义——和能指（signifiant）——声学形态——的组合. 例如，英语词"table"的所指是桌子的概念，而这个词的能指是说英语的人在听到相应的一连串声音时在脑中所出现的声学形态. 除了很少数情况外，能指的选择不取决于所指的任何性质，在这种意义上说语言符号是任意的. 对于语言，一般说来，符号的"材料"不是本质的，而符号之间的关系才是本质的. 在这方面，语言像数学中所研究的抽象系统，因此，它能用数学的方

法来研究.

因为语言是经常变化的，所以可以在两个层次上来研究：共时的(synchronic)（在某个给定的时刻的语言的研究）和历时的(diachronic)（语言的变化过程的研究）. 结构语言学在共时的语言研究领域已经有了巨大的进展.

研究已经深入到音位(phoneme)——可区别的最小语言单位，音位由一定的特殊符号的集合所刻画（见[2]，[3]）. 例如，在英语中"m"，"a"和"nn"所表示的声音是不一样的，因为对于它们每一个存在一个包含它们的有意义的语言单位（词），如果把其中一种声音换成另一种将会改变词的意思：如在词"man"中将声音"m"换成"c"，就得到"can"，如将词"ball"中的"a"换成"i"，就得到"bill"，或者将词"many"中的"ma"换成"ti"，就得到"tiny". 因此"ma"不是最小的，因为它能分成两个不同的单位"m"和"a"，而"m"和"a"不能再分，所以它们是最小的. 在所有能够表征语言声音的符号中仅仅有一些是不同的单位，并且不同的符号的总数是随语言的不同而不同的. 因此，例如元音的长度在俄语中没有变化，而在拉丁语和其他一些语言中却有变化（例如 pile——一滴，pīle——鸭子）. 虽然还没有十分完整的音位(phonemes)的形式理论，但是已经开始尝试用最简单的数学方法给出音位的形式解释（例如，见[4]，[5]）. 结构语言学还从不同的符号的观点研究最小的有意义的语言单位——词素(morphemes). 例如，英语中的词"ashtrays"由词素"ash"和"tray"组成，而"s"是词的变化词素（有时"s"不叫词素，仅称为词的变化成分）.

结构语言学已经看到了所谓的语言研究描述程序（见[6]，[7]）的发展，这种程序是基于对语料供应人提出诸如"这个表达法正确吗"和"这两个表达法意思相同还是不同"这样的问题的作业上. 数理语言学中的许多系统实质上是这些程序的形式化（见**语言的解析模型**(analytic model of a language)）. 描述命题结构的严格的形式的，基本上是数学的方法已经有详细的研究（见**语法结构**(syntactic structure)），并且它可以用来研究语法理论中一系列重要问题. 结构语义学(structural semantics)——关于语言的表达式的意义和它们的形式之间以及不同表达式的意义之间的关系的结构的研究——正在发展（例如，见[10]，[11]）.

结构语言学思想的发展已经导致了一种新的观念，把语言视作一种产生言语表达式或将所指（意义）转化为能指（话语）以及能指转化为所指的机制（见[8]－[10]）. 这种观念已经成为形式语法理论的基础（参见**形式文法**(grammar, formal)）.

**参考文献**


[1] Saussure, F. de, Cours de linguistique générale. Payot. 1916.

[2] Trubetzkoy, N. S., Grundzüge der Phonologie, Vandenhoeck & Ruprecht, reprint, 1958.

[3] Якобсон, Р., Фант, Г. М., Халле, М., в. кн.: Новое в лингвистике, М., 2 (1962), 173－230.

[4] Успенский, В. А., 《Вопросы языкознания》, 6 (1964), 39－53.

[5] Ревзин, И. И., Структура языка как моделирующей системы, М., 1978.

[6] Bloomfield, L., Language, Holt. 1933.

[7] Harris, Z. S., Methods in structural linguistics. Univ. Chicago Press, 1951.

[8] Chomsky, N., Syntactic structures. Mouton, 1957.

[9] Chomsky, N., Aspects of the theory of syntax, MIT, 1965.

[10] Мельчук, П. А., Опыт теорий лингвистических моделей 《Смысл ⟷ текст》, М., 1974

[11] Апресян, Ю. Д., Лексическая семантика, М., 1974.

[12] Апресян, Ю. Д., Идеи и методы современной структурной лингвистики, М., 1966.


А. В. Гладкий 撰

【补注】对于结构语言学的奠基性的贡献是由 L. Bloomfield 和他在美国的学派（参见[6]）以及欧洲的被称为"布拉格学派"的学派（参见[2]，[3]，[A2]，[A3]）作出的.

**参考文献**


[A1] Partee, B. H., Meulen, A. ter and Wall, R. E., Mathematical methods in linguistics, Kluwer, 1990.

[A2] Vachek, J. (ed.), A prague school reader in linguistics, Indiana Univ. Press, 1964.

[A3] Vachek, J., The linguistic school of Prague, Indiana Univ. Press, 1966.

[A4] Sapir, E., Language: an introduction to the study of speech, Harcourt & Brace, 1921.


丁德成 译

**结构[structure; структура]**

1) 也称数学结构(mathematical structure)，为统一一些概念而起的一般名称，这些概念的普遍特征是能应用于其元素具有不确定性质的集合. 为定义一个结构，要给定一些关系，其中出现所涉及集合的元素（结构的类型特征(type characteristic of a structure)），然后设定这些关系满足的某些条件（结构公理(axioms of the structure)）.

**参考文献**


[1] Bourbaki, N., Eléments d'histoire des mathématiques, Hermann, 1960.

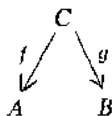
[2] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Theory of

sets, Addison-Wesley, 1968(译自法文).

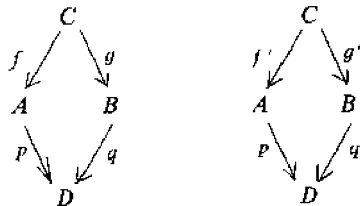
М. И. Войцеховский 撰

【补注】 赋予一个给定结构的一些集合连同这些集合之间保持此结构的一些映射构成一个范畴．这样的范畴称为具体的(亦见范畴(category); **集合的范畴**(sets, category of))．更精确地说，一个具体范畴(concrete category)是由一个范畴 $\mathscr{C}$ 和一个忠实函子 $U: \mathscr{C} \to$ 集合构成的偶 $(\mathscr{C}, U)$．由于 $U$ 是忠实的，因而 $f$ 可等同于 $Uf$，而具体范畴的对象 $C$ 是具有附加结构的集合 $U(C)$，同时态射 $f$ 是集合的保持附加结构的实在映射．态射的复合由集合映射的通常复合来实现．态射的集合 $\mathscr{C}(C, D)$ 常由所有保持结构的集合映射组成，但不必非如此不可．

一个范畴是具体的，当且仅当它满足 Isbell 条件(Freyd 具体性定理(Freyd concreteness theorem))．这里 Isbell 条件有如下述．一个范畴张成(span in a category)是形如




的图表．两个$(A, B)$生成$(f, g)$与$(f', g')$称为等价的，如果对所有态射偶$(p: A \to D, q: B \to D)$，两个图表




或者都是交换的，或者都不是交换的．一个范畴满足 Isbell 条件(Isbell condition)，如果对所有对象$(A, B)$，存在$(A, B)$生成的一个集合 $M_{A,B}$，使得每个$(A, B)$生成恰等价于 $M_{A,B}$ 的一个元素．

**参考文献**

[A1] Adamek, J., Theory of mathematical structures, Reidel, 1983, Chapt. 6.

[A2] MacLane, S., Categories for the working mathematician, Springer, 1971, p. 26.

2) 结构也是**格**(lattice)这一概念曾经用过的名称．

【补注】

**参考文献**

[A1] Курош, А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967 (中译本：А. Г. 库洛什，群论，高等教育出版社，上册，1987，下册，1982).

3) 流形上的结构(structure on a manifold)，或几何量(geometric quantity)，或几何对象(geometric object)，或几何对象场(field of geometric objects)，是伴有流形 $M$ 上余标架主丛的一个从的截面．直观地说，一个几何量可看作这样的量，其值不仅依赖于流形 $M$ 的点 $x$，而且依赖于余标架——点 $x$ 处的无穷小坐标系(见坐标卡(chart))的选取．

更精确地说，设 $\mathrm{GL}^k(n)$ 是 $k$ 阶一般微分群(空间 $\mathbf{R}^n$ 的保持原点的变换在 0 处的 $k$ 节的群)，$M_k$ 是 $n$ 维流形 $M$ 的 $k$ 阶余标架的流形(即局部卡 $u: M \supset U \to \mathbf{R}^n$ 的原点在点 $x = u^{-1}(0)$ 处的 $k$ 节 $j_x^k(u)$ 的流形)．群 $\mathrm{GL}^k(n)$ 由

$$j_0^k(\varphi) j_0^k(u) = j_x^k(\varphi \circ u),$$

$$j_0^k(\varphi) \in \mathrm{GL}^k(n), \ j_x^k(u) \in M_k$$

左作用于 $M_k$ 上，从而此作用在 $M_k$ 上定义主 $\mathrm{GL}^k(n)$ 丛 $\pi_k: M_k \to M$ 的结构，称为 $k$ 阶余标架丛(bundle of coframes of order $k$)．设 $W$ 是任一 $\mathrm{GL}^k(n)$ 流形即带有群 $\mathrm{GL}^k(n)$ 的左作用的流形，再设 $W(M)$ 是 $\mathrm{GL}^k(n)$ 在 $M_k \times W$ 上左作用的轨道空间，而 $\pi_W$ 是 $W(M)$ 到 $M$ 上的自然射影．丛 $\pi_W: W(M) \to M$(与 $M_k$ 和 $W$ 相伴)称为 $W$ 型的阶 $\leqslant k$ 的几何结构丛(bundle of geometric structures)，而其截面称为 $W$ 型结构(structure of type $W$)．$W$ 型结构同 $\mathrm{GL}^k(n)$ 等变映射 $s: M_k \to W$ 之间有自然的一一对应．这样，$W$ 型结构可看作 $k$ 标架流形 $M_k$ 上满足下述等变条件的 $W$ 值函数 $S$:

$$S(gu^k) = gS(u^k), \ g \in \mathrm{GL}^k(n), \ u^k \in M_k.$$

几何对象丛 $\pi_W$ 在下述意义下是一个自然丛：$M$ 的微分同胚群作用为 $\pi_W$ 的自同构群．

如果 $W$ 是带有 $\mathrm{GL}^k(n)$ 的线性(或仿射)作用的向量空间，则 $W$ 型结构称为线性的(linear)(或仿射的(affine))．

一阶线性结构的基本例子是张量结构(tensor structure)或张量场(tensor field)．设 $V = \mathbf{R}^n$, $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbf{R})$, $V_q^p = ((\otimes^p V)) \otimes ((\otimes^q V^*))$ 是带有 $\mathrm{GL}^1(n) = \mathrm{GL}(n)$ 的自然张量表示的 $(p, q)$ 型张量的空间，则 $V_q^p$ 型结构称为$(p, q)$型张量场(tensor field of type $(p, q)$)．它可看作余标架流形 $M_1$ 上的向量函数，使得余标架 $\theta = j_x^1(u) = (du^1, \cdots, du^n)$ 对应到张量 $S(\theta) \in V_q^p$ 关于 $V_q^p$ 的标准基

$$\{ e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes e^{*j_1} \otimes \cdots \otimes e^{*j_q} \}$$

的坐标 $S(\theta)_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_p}$ 的集合．给定余标架的线性变换 $\theta \to g\theta = (g_a^i du^a)$，坐标 $S_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_p}$ 按张量表示变换：

$$S_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_p}(g\theta) =$$

$$= g^{a_1}_{i_1} \cdots g^{a_p}_{i_p} (g^{-1})^{b_1}_{j_1} \cdots (g^{-1})^{b_q}_{j_q} S(\theta)^{i_1 \cdots i_p}_{b_1 \cdots b_q}.$$

张量结构最重要的例子是**向量场**(vector field)，**Riemann 度量**(Riemannian metric)，**微分形式**(differential form)，**辛结构**(symplectic structure)，**复结构**(complex structure)以及最通用的**仿射量**(affinor)．所有线性结构(不论阶数如何)为 Рашевский 超张量(见[4])所穷尽．二阶仿射结构的一个例子是**无挠仿射联络**(affine connection)，它可看作 $V^1_{(2)}$ 型结构，其中 $V^1_{(2)} \approx V \otimes S^2 V^*$ 是自然同态 $GL^2(n) \to GL^1(n)$ 的核，并看作带有 $GL^2(n) = GL(n) V^1_{(2)}$ 的自然作用的向量空间．一大类重要结构是无穷小齐性结构(infinitesimally-homogeneous structure)或 $G$ 结构($G$-structure)类，这种结构是 $W$ 型结构，其中 $W = GL^k(n)/G$ 是群 $GL^k(n)$ 的齐性空间．

上述结构的定义还不是足够一般的，未能包括一些重要的几何结构，诸如**旋量结构**(spinor structure)、子旋量结构等．一种自然的推广是研究广义 $G$ 结构，它是带有到一个 $G$ 结构上的固定同态的主丛，以及研究相伴丛的截面．

**参考文献**


[1] Рашевский, П. К., 《Тр. сем. по вект. и тенз. анализу …》, 1 (1933), 126 – 142.

[2] Вагнер, В., 《Докл. АН СССР》, **46** (1945), 9. 383 – 386.

[3] Veblen, O., Whitehead, J. H. C., The foundations of differential geometry, Cambridge Univ. Press, 1932.

[4] Рашевский, П. К., 《Тр. Моск. матем. об-ва》, 6 (1957), 337 – 370.

[5] Sternberg, S., Lectures on differential geometry, Prentice-Hall, 1964.

[6] Ehresmann, Ch., Introduction à la théorie des structures infinitésimals et des pseudo-groupes de Lie, in Géométrie Diff. Coll. Internat. C. N. R. S., 1953, 97 – 110.


Д. В. Алексеевский 撰

【补注】 E. Cartan 是历史上最早引进结构概念的数学家．

**参考文献**


[A1] Cartan, E., La théorie des groupes et les récherches récentes de géometrie différentielle, *Enseign. Math.*, **24** (1925), 5 – 18.


沈永欢 译

**结构常数** [**structure constant; структурная константа**]，代数 $A$ 的

在一个域或一个交换结合环 $P$ 上的代数 $A$ 的结构常数是由等式

$$e_\alpha e_\beta = \sum_\gamma c^\gamma_{\alpha\beta} e_\gamma$$

所定义的元素 $c^\gamma_{\alpha\beta} \in P$，$\alpha, \beta, \gamma \in I$，这里 $\{e_\alpha : \alpha \in I\}$ 是 $A$ 的一个固定的基．结构常数唯一确定了此代数．如果 $d^\zeta_{\xi\eta}$ 是代数 $A$ 在另一个基 $\{f_\xi : \xi \in J\}$ 内的结构常数，这里 $f_\xi = \sum t^\alpha_\xi e_\alpha$，则

$$\sum_\zeta d^\zeta_{\xi\eta} t^\gamma_\zeta = \sum_{\alpha, \beta} t^\alpha_\xi t^\beta_\eta c^\gamma_{\alpha\beta}.$$

$A$ 中的任何恒等式都可表达为结构常数间的关系式．例如

$$c^\gamma_{\alpha\beta} = c^\gamma_{\beta\alpha}$$

(交换律)；

$$\sum_\xi c^\xi_{\alpha\beta} c^\lambda_{\xi\gamma} = \sum_\sigma c^\lambda_{\alpha\sigma} c^\sigma_{\beta\gamma}$$

(结合律)；

$$\sum_\xi (c^\xi_{\alpha\beta} c^\lambda_{\xi\gamma} + c^\xi_{\beta\gamma} c^\lambda_{\xi\alpha} + c^\xi_{\gamma\alpha} c^\lambda_{\xi\beta}) = 0.$$

(Jacobi 等式)． Л. А. Скорняков 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Cohn, P. M., Algebra 2, Wiley, 1989, 167ff.


陈志杰 译

**结构空间** [**structure space; структурное пространство**]，环的

环的所有准素理想的集合 $\mathfrak{P}$，带有下述拓扑：子集 $C \subseteq \mathfrak{P}$ 是闭的是指 $C$ 包含所有下述的理想，这些理想包含 $C$ 中所有理想的交(见 **Zariski 拓扑**(Zariski topology))．环 $R$ 的结构空间同构于商环 $R/J$ 的结构空间，这里 $J$ 是 Jacobson 根基．结构空间是 $T_0$ 空间．如果环的所有准素理想是极大的，则结构空间是 $T_1$ 空间．带有单位元的环的结构空间是紧的．双正则环(见**正则环(von Neumann 意义下的)**(regular ring (in the sense of von Neumann)))的结构空间是局部紧且完全不连通的．它被用来把双正则环表示成具有紧支撑集的连续函数环的形式．

**参考文献**


[1] Jacobson, N., Structure of rings, Amer. Math. Soc, 1956.


Л. А. Скорняков 撰

【补注】 这是交换环的极大理想的谱空间概念的推广(见**环的谱**(spectrum of a ring))．

**参考文献**


[A1] Goodearl, K. R., Von Neumann regular rings, Pitman, 1979.


陈志杰 译

**Struve 函数** [**Struve function; Струве функция**]

函数

$$\mathbf{H}_\nu(z) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu + 1/2)} \int_0^{\pi/2} \sin(z \cos t) \sin^{2\nu} t \, dt,$$

$$\operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2},$$

它满足非齐次 **Bessel 方程**(Bessel equation):

$$z^2 y'' + z y' + (z^2 - \nu^2) y = \frac{4(z/2)^{\nu+1}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu + 1/2)}.$$

幂级数展开式是

$$\mathbf{H}_\nu(z) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{(z/2)^{\nu+1}}{\Gamma(\nu + 3/2)} \left[ 1 - \frac{z^2}{3 \cdot (2\nu + 3)} + \right.$$

$$\left. + \frac{z^4}{3 \cdot 5 \cdot (2\nu + 3)(2\nu + 5)} - \cdots \right].$$

阶为整数 $n$ 的 Struve 函数与 **Weber 函数**(Weber function)之间存在下列关系式:

$$\mathbf{H}_0(z) = -E_0(z),\ \mathbf{H}_1(z) = \frac{2}{\pi} - E_1(z),$$

$$\mathbf{H}_2(z) = \frac{2z}{3\pi} - E_2(z) \cdots.$$

阶为 $n + 1/2$ ($n$ 为整数)的 Struve 函数是初等函数,例如

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \mathbf{H}_{1/2}(z) = \frac{1 - \cos z}{\sqrt{z}}.$$

当 $|z| \gg 1$, $|z| \gg |\nu|$ 时,渐近展开式

$$\mathbf{H}_\nu(z) - N_\nu(z) \approx$$

$$\approx \frac{(z/2)^{\nu-1}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu + 1/2)} \left[ 1 + \frac{1 \cdot (2\nu - 1)}{z^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1 \cdot 3 \cdot (2\nu - 1)(2\nu - 3)}{z^4} \cdots \right]$$

成立,其中 $N_\nu(z)$ 是 **Neumann 函数**(Neumann function).

变形 Struve 函数(modified function)是函数

$$\mathbf{L}_\nu(z) = -i e^{i\nu\pi/2} \mathbf{H}_\nu(iz).$$

它的级数展开是

$$\mathbf{L}_\nu(z) =$$

$$= \left[ \frac{z}{2} \right]^{\nu+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k}}{\Gamma(k + 3/2)\Gamma(k + \nu + 3/2)}.$$

对于大的 $|z|$,渐近展开式

$$\mathbf{L}_\nu(z) - I_{-\nu}(z) \approx \frac{-(z/2)^{\nu-1}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu + 1/2)}$$

成立,其中 $I_{-\nu}$ 是变形 Bessel 函数(见 **Bessel 函数**(Bessel functions)).

Struve 函数有时记为 $S_\nu(z)$. 它是 H. Struve 引入的([1]).

**参考文献**


[1] Struve, H., Ann. Physik Chemie, 17 (1882), 1008–1016.

[2] Jahnke, E., Emde, F. and Lösch, F., Tafeln höheren Funktionen, Teubner, 1966.

[3] Abramowitz, M. and Stegun, A., Handbook of mathematical functions, Dover, reprint, 1970.


А. Б. Иванов 撰

【补注】 Struve 函数可以通过类型为 ${}_1F_2$ 的**超几何函数**(hypergeometric function)来表示,见[A1],公式(7.5)(55).

**参考文献**


[A1] Bateman, H. and Erdélyi, A., Higher transcendental functions, 2, McGraw-Hill, 1953 (中译本: A. 爱尔台里等编,高级超越函数,上海科学技术出版社,1957,1958).

[A2] Watson, G. N., A treatise on the theory of Bessel functions, Cambridge Univ. Press, 1952.


杜小杨 译

**Student 分布** [**Student distribution**; **Стьюдента распределение**], 自由度为 $f$ 的,*t* 分布($t$-distribution)

随机变量

$$t_f = \frac{U}{\sqrt{\chi_f^2 / f}}$$

的概率分布,其中 $U$ 是服从标准正态律 $N(0,1)$ 的随机变量,而 $\chi_f^2$ 是与 $U$ 独立且服从自由度为 $f$ 的 **$\chi^2$ 分布**('chi-squared' distribution)的随机变量. 随机变量 $t_f$ 的分布函数为

$$\mathsf{P}\{t_f \leq x\} = S_f(x) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi f}} \frac{\Gamma((f+1)/2)}{\Gamma(f/2)} \int_{-\infty}^{x} \left( 1 + \frac{u^2}{f} \right)^{-(f+1)/2} du,$$

$$|x| < \infty.$$

特别地,若 $f = 1$,则

$$S_1(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x$$

是 **Cauchy 分布**(Cauchy distribution)的分布函数. Student 分布的概率密度关于 0 对称,因此

$$S_f(t) + S_f(-t) = 1, \quad 对于一切\ t \in \mathbf{R}^1.$$

对于 $r < f$, Student 分布的矩 $\mu_r = \mathsf{E}\, t_f^r$ 存在,且奇数阶矩等于 0,特别地,$\mathsf{E}\, t_f = 0$. Student 分布的偶数阶矩表示为

$$\mu_{2r} = f^r \frac{\Gamma((r + 1/2)\Gamma(f/2 - r)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(f/2)}, \quad 2 \leq 2r < f;$$

特别地,$\mu_2 = \mathsf{D}\{t_f\} = f/(f-2)$. 随机变量 $t_f$ 的分

布函数 $S_f(x)$ 可以通过 B 分布 (beta-distribution) 函数表示为

$$S_f(x) = 1 - \frac{1}{2} I_{f/(f+x^2)}\left( \frac{f}{2}, \frac{1}{2} \right),$$

其中 $I_z(a,b)(0 \leqslant z \leqslant 1)$ 是不完全 B 函数. 当 $f \to \infty$ 时, Student 分布收敛于标准正态分布律, 即

$$\lim_{f \to \infty} S_f(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt.$$

例. 设 $X_1, \cdots, X_n$ 是独立同正态分布 $N(a, \sigma^2)$ 的随机变量, 其中参数 $a$ 和 $\sigma^2$ 未知. 这时, 统计量

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \quad 和 \quad s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

是 $a$ 和 $\sigma^2$ 的最优无偏估计量, 而且 $\bar{X}$ 与 $s^2$ 统计独立. 因为随机变量 $\sqrt{n}(\bar{X} - a)/\sigma$ 服从标准正态分布律, 而

$$\frac{n-1}{\sigma^2} s^2 = \chi^2_{n-1}$$

服从自由度 $f = n - 1$ 的 $\chi^2$ 分布律, 且由于二者相互独立, 所以函数

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - a)/\sigma}{\sqrt{\chi^2_{n-1}/(n-1)}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - a)}{s}$$

服从自由度为 $f = n - 1$ 的 Student 分布. 设 $t_f(P)$ 和 $t_f(1-P) = -t_f(P)$ 分别是如下方程的解:

$$S_{n-1}\left[ \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - a)}{s} \right] = \begin{cases} P, \\ 1 - P, \end{cases}$$

其中 $0.5 < P < 1$, $f = n - 1$. 那么, 统计量 $\bar{X} - st_f(P)/\sqrt{n}$ 和 $\bar{X} + st_f(P)/\sqrt{n}$ 是正态律 $N(a, \sigma^2)$ 未知数学期望 $a$ 的置信集的下限和上限, 该置信集的置信系数等于 $2P - 1$, 即

$$\mathrm{P}\left\{ \bar{X} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_f(P) < a < \bar{X} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_f(P) \right\} = 2P - 1.$$

Student 分布为 W. S. Gosset (笔名 Student) 最先使用.

**参考文献**


[1] Cramér, H., Mathematical methods of statistics, Princeton Univ. Press, 1946 (中译本: H. 克拉美, 统计学数学方法, 上海科学技术出版社, 1966).

[2] Большев, Л. Н., Смирнов, Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983.

[3] 'Student' (W. S. Gosset), The probable error of a mean, *Biometrika*, 6 (1908), 1 – 25.


М. С. Никулин 撰 周概容, 王健 译

**Student 检验** [**Student test**; **Стьюдента критерий**], $t$ 检验 ($t$-test)

**正态分布** (normal distribution) 的均值的**显著性检验** (significance test).

**单样本 Student 检验**. 设独立随机变量 $X_1, \cdots, X_n$ 服从正态分布 $N_1(a, \sigma^2)$, 其中参数 $a$ 和 $\sigma^2$ 未知; 要检验**简单假设** (simple hypothesis) $H_0: a = a_0$ 对复合备选假设 $H_1: a \neq a_0$. 为解此问题, 使用 Student 检验, 检验基于统计量

$$t_{n-1} = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - a_0}{s},$$

其中

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \ 和 \ s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

是参数 $a$ 和 $\sigma^2$ 的估计量, 基于样本 $X_1, \cdots, X_n$. 当 $H_0$ 成立时, 统计量 $t_{n-1}$ 服从自由度为 $f = n - 1$ 的 **Student 分布** (Student distribution), 即

$$\mathrm{P}\{|t_{n-1}| < t | H_0\} = 2S_{n-1}(t) - 1, \ t > 0,$$

其中 $S_f(t)$ 是自由度为 $f$ 的 Student 分布函数. 根据显著性水平为 $\alpha(0 < \alpha < 0.5)$ 的单样本 Student 检验应接受假设 $H_0$, 如果

$$\left| \sqrt{n} \frac{\bar{X} - a_0}{s} \right| < t_{n-1}\left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right),$$

其中 $t_{n-1}(1 - \alpha/2)$ 是自由度为 $f = n - 1$ 的 Student 分布水平 $1 - \alpha/2$ 的**分位数** (quantile), 即 $t_{n-1}(1 - \alpha/2)$ 是方程 $S_{n-1}(t) = 1 - \alpha/2$ 的解. 相反, 如果

$$\left| \sqrt{n} \frac{\bar{X} - a_0}{s} \right| \geqslant t_{n-1}\left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right),$$

则根据水平 $\alpha$ 的 Student 检验, 应否定所检验假设 $H_0: a = a_0$, 并接受备选假设 $H_1: a \neq a_0$.

**双样本 Student 检验**. 设 $X_1, \cdots, X_n$ 和 $Y_1, \cdots, Y_m$ 是相互独立正态分布的随机变量, 具有相同的但未知的方差 $\sigma^2$; 又设

$$\mathrm{E} X_1 = \cdots = \mathrm{E} X_n = a_1,$$

$$\mathrm{E} Y_1 = \cdots = \mathrm{E} Y_m = a_2,$$

其中参数 $a_1$ 和 $a_2$ 未知 (常称有两个独立正态样本). 其次, 假定要检验假设 $H_0: a_1 = a_2$ 对备选假设 $H_1: a_1 \neq a_2$. 在此情形下, 两个假设都是复合的. 由观测值 $X_1, \cdots, X_n$ 和 $Y_1, \cdots, Y_m$ 可以计算未知数学期望 $a_1$ 和 $a_2$ 的估计量

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \ 和 \ \bar{Y} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} Y_j,$$

以及未知方差 $\sigma^2$ 的估计量

$$s_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,$$

$$s_2^2=\frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}(Y_j-\overline{Y})^2.$$

记

$$s^2=\frac{1}{n+m-2}[(n-1)s_1^2+(m-1)s_2^2].$$

那么，当 $H_0$ 成立时，统计量

$$t_{n+m-2}=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{s\sqrt{1/n+1/m}}$$

服从自由度为 $f=n+m-2$ 的 Student 分布．这一事实是双样本 Student 检验检定 $H_0$ 对 $H_1$ 的基础．按水平 $\alpha(0<\alpha<0.5)$ 的双样本 Student 检验，接受假设 $H_0$，如果

$$|t_{n+m-2}|<t_{n+m-2}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right),$$

其中 $t_{n+m-2}(1-\alpha/2)$ 是自由度为 $f=n+m-2$ 的 Student 分布水平 $1-\alpha/2$ 的分位数．如果

$$|t_{n+m-2}|\geqslant t_{n+m-2}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right),$$

则按水平 $\alpha$ 的 Student 检验否定假设 $H_0$ 接受 $H_1$．

**参考文献**

[1] Cramér, H., Mathematical methods of statistics, Princeton Univ. Press, 1946（中译本：H．克拉美，统计学数学方法，上海科学技术出版社，1966）．

[2] Wilks, S. S., Mathematical statistics, Wiley, 1962.

[3] Смирнов, Н. В., Дунин-Борковский, И. В., Краткий курс матматической статистики для технических приложений, М., 1959.

[4] Большев, Л. Н., Смирнов, Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983.

[5] Линник, Ю. В., Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений, М., 1958.

М. С. Никулин 撰　周概容、王健 译

## Student 化极差 [Studentized range; Стьюдентизированный размах]，亦称 $t$ 化极差

Student 化统计量类中的统计量．所谓 Student 化统计量，是基于正态样本的顺序统计量无线性组合的特别规范化．

设 $X_1,\cdots,X_n$ 是独立同正态分布 $N(a,\sigma^2)$ 的随机变量，而 $X^{(n)}=(X_{(n1)},\cdots,X_{(nn)})$ 是由观测值 $X_1,\cdots,X_n$ 构造的顺序统计量向量．其次，设统计量 $\sum_{i=1}^{n}a_iX_{(ni)}$ 是顺序统计量 $X_{(n1)},\cdots,X_{(nn)}$ 的线性组合，随机变量 $V/\sigma^2$ 服从自由度为 $f$ 的 $\chi^2$ 分布，且二者相互独立．设 $s_f^2=V/f$ 是 $\sigma^2$ 的某个无偏估计量．这时，称

$$\frac{1}{s_f^2}\sum_{i=1}^{n}a_iX_{(ni)}$$

为 Student 化统计量（Studentized statistic）．

当 $\sum_{i=1}^{n}a_iX_{(ni)}$ 是样本 $X_1,\cdots,X_n$ 的极差时，即当

$$\sum_{i=1}^{n}a_iX_{(ni)}=X_{(nn)}-X_{(n1)}$$

时，Student 化统计量就是 Student 化极差．于是，Student 化极差为

$$\frac{X_{(nn)}-X_{(n1)}}{s_f^2}.$$

**参考文献**

[1] David, H., Order statistics, Wiley, 1977.

[2] Wilks, S. S., Mathematical statistics, Wiley, 1962.

М. С. Никулин 撰

【补注】 这里，

$$s_f^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

用于检验正态性和异常观测值的情形，见[1]第8章．关于 Student 化极差的分位数表参见[A2]．

**参考文献**

[A1] Mood, A. M. and Graybill, F. A., Introduction to the theory of statistics, McGraw-Hill, 1963, 243（中译本：A．M．穆德，F．A．格雷比尔，统计学导论，科学出版社，1978）．

[A2] Müller, P. H., Neumann, P. and Storm, R., Tafeln der mathemaschen statistik, C. Hauser Verlag, 1977, 166－169.

【译注】 设 $R_n=X_{(nn)}-X_{(n1)}$ 是极差，$s_f^2$ 是补注中定义的修正样本方差．这时 $R_n$ 与 $s_f^2$ 不独立，因此统计量 $R_n/s_f$ 不是文中定义的 Student 化极差．但是，$R_n/s_f$ 有编制好的分位数表，可用于正态性检验和剔除异常值的检验（见[B1]，[B2]）．

**参考文献**

[B1] David, H. A., Hartley, H. O. and Pearson, E. S., The distribution of the ratio, in a single normal sample, of range to standard deviation, *Biometrika*, **41** (1954), 482－439.

[B2] 周概容主编，应用统计方法辞典，中国统计出版社，1993，482－484.

周概容 译

## Sturm 曲线 [Sturm curves; Штурма кривые]

在平面上与一个椭圆、双曲线或抛物线相联系的点当该曲线沿一条直线滚动时描出的超越曲线．Sturm 曲线的一个例子是抛物线的焦点当抛物线沿 x 轴滚动时的轨迹，即悬链线（catenary）．

这些曲线由 J. Ch. Sturm 所研究．

参考文献

[1] Савелов, А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов 撰

【补注】 用"沿一条固定的曲线滚动"代替"沿一条直线滚动"，则该点将描出一条**一般旋轮线**(roulette).

参考文献

[A1] Lawrence, J. D. H., A catalog of special plane curves, Dover, reprint, 1972.

[A2] Gomes Teixeira, F., Traité des courbes, 1-3, Chelsea, reprint, 1971.

陈维桓 译

**Sturm-Liouville 方程** [**Sturm-Liouville equation**; **Штурма-Лиувилля уравнение**]

二阶常微分方程

$$-\frac{d}{dx}\left\{p(x)\frac{dy}{dx}\right\}+l(x)y=\lambda r(x)y,$$

这里 $x$ 在一给定的有限或无穷区间 $(a, b)$ 中变动，$p(x)$，$l(x)$，$r(x)$ 是给定的系数，$\lambda$ 是复参数，而 $y$ 是待求的解. 如果 $p(x)$，$r(x)$ 是正的，$p(x)$ 具有一阶导数，$p(x)r(x)$ 具有二阶导数，则此方程可通过 Liouville 代换（见[1]）化简为标准形式

$$-y''+q(x)y=\lambda y,\ a<x<b. \tag{1}$$

假定复函数 $q$ 在 $(a, b)$ 上可测并在 $(a, b)$ 的每一个子区间中可和. 同时还考虑非齐次方程

$$-y''+q(x)y=\lambda y+f(x),\ a<x<b, \tag{2}$$

其中 $f$ 是给定的函数.

如果 $f$ 在 $(a, b)$ 上可测并在 $(a, b)$ 的每个子区间中可和，则对所有复数 $c_0, c_1$ 和任一内点 $x_0$，方程(2)在 $(a, b)$ 上有且仅有一个满足条件 $y(x_0, \lambda)=c_0$，$y'(x_0, \lambda)=c_1$ 的解 $y(x, \lambda)$. 对任一 $x\in(a, b)$，函数 $y(x, \lambda)$ 是 $\lambda$ 的整解析函数. $x_0$ 也可取 $(a, b)$ 的端点之一（如果此端点是正则的，见 **Sturm-Liouville 算子**(Sturm-Liouville operator)).

设 $y_1(x, \lambda)$，$y_2(x, \lambda)$ 是(1)的任意两个解，于是 $y_1$，$y_2$ 的 **Wronski 行列式**(Wronskian)

$$W(y_1, y_2)=$$

$$=y_1(x, \lambda)y_2'(x, \lambda)-y_1'(x, \lambda)y_2(x, \lambda)$$

不依赖于 $x$，它当且仅当 $y_1$，$y_2$ 线性相关时才等于零. (2)的通解具有下面的形式:

$$y(x, \lambda)=a_1y_1(x, \lambda)+a_2y_2(x, \lambda)+$$

$$+\int_{x_0}^{x}R(x, \xi, \lambda)f(\xi)d\xi,$$

其中

$$R(x, \xi, \lambda)=$$

$$=\frac{1}{W(y_1, y_2)}\{y_1(x, \lambda)y_2(\xi, \lambda)+$$

$$-y_1(\xi, \lambda)y_2(x, \lambda)\},$$

$a_1$，$a_2$ 是任意常数，$y_1(x, \lambda)$，$y_2(x, \lambda)$ 是(1)的线性无关的解.

下述 Sturm 基本定理(fundamental theorem of Sturm)成立: 给定两个方程

$$u''+q_1(x)u=0, \tag{3}$$

$$v''+q_2(x)v=0, \tag{4}$$

如果 $q_1(x)$，$q_2(x)$ 是实的，且在整个区间 $(a, b)$ 上有 $q_1(x)<q_2(x)$，则在第一个方程的任一非零解的任何两个零点之间，至少有第二个方程的任一解的一个零点.

下述定理称为比较定理(comparison theorem)（见[1]): 设 $(a, b)$ 的左端点是有限的，$u(x)$ 是(3)的满足条件 $u(a)=\sin\alpha$，$u'(a)=\cos\alpha$ 的解，$v(x)$ 是(4)的满足同样条件的解，并且还假定在整个区间 $(a, b)$ 上有 $q_1(x)<q_2(x)$，于是如果 $u(x)$ 在 $(a, b)$ 上有 $m$ 个零点，则 $v(x)$ 在 $(a, b)$ 上至少有 $m$ 个零点，且 $v(x)$ 的第 $k$ 个零点小于 $u(x)$ 的第 $k$ 个零点.

(1)的重要性质之一是具有简单结构的所谓算子变换的存在性. 算子变换来自与广义位移算子（基的变换）有关的一般代数考虑.

对于方程(1)有下述类型的算子变换. 设 $y(x, \lambda)$ 是

$$-y''+q(x)y=\lambda^2y,\ -a<x<a,\ a\leqslant\infty \tag{5}$$

的满足条件

$$y(0, \lambda)=1,\ y'(0, \lambda)=i\lambda \tag{6}$$

的解. 可以验证此解具有下述表示:

$$y(x, \lambda)=e^{i\lambda x}+\int_{-x}^{x}K(x, t)e^{i\lambda t}dt,$$

其中 $K(x, t)$ 是不依赖于 $\lambda$ 的连续函数，且有

$$K(x, x)=\frac{1}{2}\int_0^x q(t)dt,\ K(x, -x)=0.$$

由

$$(I+K)f=f(x)+\int_{-x}^{x}K(x, t)f(t)dt$$

定义的积分算子 $I+K$ 称为算子变换(operator trans-

form）（或变形算子（transmutation operator）），它在点 $x=0$ 处保持所给的条件不变．它把函数 $e^{i\lambda x}$（最简单的方程 $y''=\lambda^2 y$ 满足条件（6）的解）变换为方程（5）的在点 $x=0$ 处满足同一条件的解．设 $\varphi_h(x,\lambda)$ 和 $\varphi_\infty(x,\lambda)$ 是（5）的满足

$$\varphi_h(0,\lambda)=1,\ \varphi_h'(0,\lambda)=h,$$

$$\varphi_\infty(0,\lambda)=0,\ \varphi_\infty'(0,\lambda)=1$$

的解，则这些解具有表示式

$$\varphi_h(x,\lambda)=\cos\lambda x+\int_0^x K_h(x,t)\cos\lambda t\,dt,$$

$$\varphi_\infty(x,\lambda)=\frac{\sin\lambda x}{\lambda}+\int_0^x K_\infty(x,t)\frac{\sin\lambda t}{\lambda}\,dt,$$

其中 $K_h(x,t)$ 和 $K_\infty(x,t)$ 是连续函数．

已引进算子变换的一种新的类型（见[8]），它保持解在无穷远处的渐近性态不变；就是说，可证明对上半平面 $\mathrm{Im}\,\lambda\geq 0$ 中所有的 $\lambda$，在半直线 $0\leq x<\infty$ 上考虑满足条件 $\int_0^\infty x|q(x)|dx<\infty$ 的方程（5），则它具有能表示为下面形式的解 $y(x,\lambda)$:

$$y(x,\lambda)=e^{i\lambda x}+\int_x^\infty K(x,t)e^{i\lambda t}dt,$$

其中 $K(x,t)$ 是连续函数，满足不等式

$$|K(x,\tau)|\leq \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right)\exp\left\{\sigma_1(x)-\sigma_1\left(\frac{x+t}{2}\right)\right\},$$

这里

$$\sigma(x)=\int_x^\infty|q(t)|dt,\ \sigma_1(x)=\int_x^\infty\sigma(t)dt.$$

此外还有

$$K(x,x)=\frac{1}{2}\int_x^\infty q(t)dt.$$

**参考文献**


[1] Левитан, Б. М., Саргсян, И. С., Введение в спектральную теорию, М., 1970（英译本：Levitan, B. M. and Sargsyan, I. S., Introduction to spectral theory, Amer. Math. Soc., 1975）.

[2] Наймарк, М. А., Линейные дифференциальные операторы, 2 изд., М., 1969（中译本：M. A. 纳依玛克，线性微分算子，科学出版社，1964）.

[3] Левитан, Б. М., Теория операторов обобщенного сдвига, М., 1973（英译本：Levitan, B. M., Generalized translation operators and some of their applications, Israel Progr. Sci. Transl., 1964）.

[4] Марченко, В. А., Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения, К., 1977（英译本：Marchenko, V. A., Sturm-Liouville operators and applications, Birkhäuser, 1986）.

[5] Delsarte, J., Sur certaines transformations fonctionnelles rélatives aux équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **206**（1938）, 1780－1782.

[6] Повзнер, А. Я.,《Матем. сб.》, **23**（1948）, 1, 3－52.

[7] Левитан, Б. М.,《Успехи матем. наук》, 4（1949）, в. 1, 3－112.

[8] Левин, Б. Я.,《Докл. АН СССР》, **106**（1956）, 2, 187－190.

[9] Levitan, B. M.（Левитан, Б. М.）, Inverse Sturm-Liouville problems, VNU, 1987（译自俄文）.


Г. Ш. Гусейнов, Б. М. Левитан 撰

**【补注】**

**参考文献**


[A1] Carroll, R., Transformation theory and application, North-Holland, 1985.

[A2] Levitan, B. M.（Левитан, Б. М.）and Sargsyan, I. S.（Саргсян, И. С.）, Sturm-Liouville and Dirac operators, Kluwer, 1991（译自俄文）.


沈永欢 译

**Sturm-Liouville 算子**［**Sturm-Liouville operator; Штурма-Лиувилля оператор**］

由微分表达式

$$l[f]=-(p(x)f')'+q(x)f,\ x\in(a,b)$$

以及适当的边值条件在 Hilbert 空间 $L_2(a,b)$ 中生成的**自伴算子**（self-adjoint operator），这里 $(a,b)$ 是有限或无限区间，$p'$, $p$, $q$ 是连续实值函数且对一切 $x\in(a,b)$, $p(x)>0$（有时由类似于 $l$ 的准微分表达式所生成的算子也这样称呼）．自 1830 年以来，J. Ch. Sturm 和 J. Liouville 关于有限区间上的 **Sturm-Liouville 问题**（Sturm-Liouville problem）发表了一系列基本的研究．

一点 $a$ 若为有限，$p(a)\neq 0$ 且 $p'$, $p$, $q\in C(a,b)$，就称为正则端点（regular end-point），否则此点就称为奇异端点（singular end-point）．表达式 $l$ 称为正则的（regular）或奇异的（singular），视 $(a,b)$ 的两个端点是否均为正则而定．

令 $D_1$ 为适合 $f\in L_2(a,b)$, $f'$ 为绝对连续，且 $l[f]\in L_2(a,b)$ 的函数 $f$ 之集合，$D_0$ 为 $D_1$ 中具有紧支集的函数之集合．此外，令 $L_1:f\to l[f]$, $f\in D_1$，而 $L_0$ 为算子 $L_0':f\to l[f](f\in D_0)$ 之闭包；$L_0$ 是一对称算子，且 $L_0^*=L_1$．一个 Sturm-Liouville 算子就

是算子 $L_0(L_1)$ 的扩张（限制）.

1）令 $l$ 为正则的，令向量 $(\alpha_i, \alpha_i', \beta_i, \beta_i')$ $(i = 1, 2)$ 是线性无关的，而且

$$p(b)(\overline{\beta_i'}\beta_j - \overline{\beta_i}\beta_j') - p(a)(\overline{\alpha_i'}\alpha_j - \overline{\alpha_i}\alpha_j') = 0, \quad i, j = 1, 2, \tag{1}$$

于是，满足条件

$$p(b)(\beta_i' f'(b) - \beta_i f(b)) - p(a)(\alpha_i' f'(a) - \alpha_i f(a)) = 0 \tag{2}$$

$(i = 1, 2)$ 的所有的函数 $f \in D_1$ 之集合是某个 Sturm-Liouville 算子的定义域．反过来，每个 Sturm-Liouville 算子的定义域都可以这样来确定.

在边值条件中，分离边值条件（separated boundary conditions）（或称 Sturm 型边值条件（boundary conditions of Sturm type））:

$$f(a)\cos\varphi - f'(a)\sin\varphi = 0, \ \varphi \in [0, \pi], \tag{3}$$

$$f(b)\cos\theta - f'(b)\sin\theta = 0, \ \theta \in [0, \pi], \tag{4}$$

以及混合边值条件（mixed boundary condition）

$$f(a) = \nu f(b), \ f'(a) = \delta f'(b), \tag{5}$$

其中 $\nu\bar{\delta} = p(b)/p(a)$，占有重要的地位．特别是，若 $p(a) = p(b)$，则当 $\nu = \delta = 1$ 时条件（5）称为周期的（periodic），$\nu = \delta = -1$ 时称为反周期的（anti-periodic）（或半周期的（semi-periodic））.

2）令 $l$ 为奇异的．两个端点都为奇异的情况可以用分裂的方法化为仅有一个端点为奇异的情况.

$2_1$）令 $a$ 为正则而 $b$ 为奇异的，并令方程 $l[f] = if$ 的线性无关的 $L_2(a, b)$ 解个数为 1．这时就说表达式 $l$ 在 $b$ 点属于 Weyl 极限点（Weyl limit point）的情况．Sturm-Liouville 算子的定义域是由边值条件（3）决定的.

$2_2$）若 $l[f] = if$ 的属于 $L_2(a, b)$ 的线性无关解的个数为 2，就说表达式 $l$ 在 $b$ 点属于 Weyl 极限圆（Weyl limit circle）的情况．这时算子 $L_0$ 的亏指数是 $(2, 2)$．Sturm-Liouville 算子的定义域可以类似于 1）那样来描述，而对（2）作如下的替代：$p(b)$ 代之以 $p(a)$，$f(b)$ 和 $f'(b)$ 则分别代之以 $(Sf)_1(b)$ 和 $(Sf)_2(b)$，而

$$(Sf)_1(b) = \lim_{x \to b} p(x)[fu_2](x),$$

$$(Sf)_2(b) = \lim_{x \to b} p(x)[u_1 f](x);$$

这里 $[\varphi\psi](x)$ 是函数 $\varphi$ 和 $\psi$ 在 $x$ 点的 **Wronski** 行列式（Wronskian），$u_i(i = 1, 2)$ 则是方程 $l[f] = 0$ 在初始条件 $u_i^{(j-1)}(0) = \delta_{ij}(i, j = 1, 2)$ 下的解，$\delta_{ij}$ 是 Kronecker 符号.

一个 Sturm-Liouville 算子的预解核是一 **Carleman** 核（Carleman kernel）；此外，在情况 1）和 $2_2$）下，预解式是一个 **Hilbert-Schmidt 积分算子**（Hilbert-Schmidt integral operator），而在情况 $2_1$）下则不一定是.

Sturm-Liouville 算子的谱分解在离散谱的情况下（例如，在 1）和 $2_2$）），类似于按 Sturm-Liouville 问题的本征函数的 Fourier 展开式，在其他情况下，它有不在 $L_2(a, b)$ 中的本征函数.

系数 $p$ 与 $q$ 要满足什么样的条件，Sturm-Liouville 算子有离散谱，或者其谱填满整个直线，在什么条件下 $l$ 是极限点型或极限圆型，这些都是有很大意义的问题．$p$ 和 $q$ 的完全一般的保证 $l$ 属于极限圆或极限点型（$b = +\infty$）的必要充分条件，迄至 1984 年仍是未知的.

**参考文献**


[1] Наймарк, М. А., Линейные дифференциальные операторы, 2 изд., М., 1969.

[2] Ахиезер, Н. И., Глазман, И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 3 изд., т. 2, Харьков, 1978（英译本：Akhiezer, N. I., Glazman, I. M. Theory of linear operators in Hilbert space, 2, Pitman, 1980）.

[3] Левитан, Б. М., Саргсян, И. С., Введение в спектральную теорию, М., 1970（英译本：Levitan, B. M., Sargsyan, I. S., Introduction to spectral theory, Amer. Math. Soc., 1975）.

[4] Марченко, В. А., Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения, К., 1977（英译本：Marchenko, V. A., Sturm-Liouville operators and applications, Birkhäuser, 1986）.

[5] Coddington, E. A., Levinson, N., Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill, 1955.

[6] Глазман, И. М., Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов, М., 1963.

[7] Hutson, V., Pym, J., Applications of functional analysis and operator theory, Acad. Press, 1980.

[8] Titchmarsh, E. C., Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations, 1, Clarendon Press, 1946（中译本：E. 梯其马希，与二阶微分方程相联系的本征函数展开，1，上海科学技术出版社，1964）.

[9] Мирзоев, Г. А., 《Матем. заметки》, **29** (1981), 2, 225-233.

[10] Молчанов, А. М., 《Тр. Моск. матем. об-ва》, **2** (1953), 169-199.

[11] Levinson, N., Creteria for the limit-point case for second order linear differential operators, *Časopis Pěst Mat Fys.*, **74** (1949), 17-20.

[12] Исмагилов, Р. С., «Докл. АН СССР», **142** (1962), 6, 1239 − 1242.

[13] Повзнер, А. Я., «Матем. сб.», **23** (1948), 1, 3 − 52.

[14] Everitt, W., On the deficiency index problem for ordinary differential equations 1910 − 1976, in G. Berg, et al. (eds.), Differential Equations (Proc. Internat Conf. Uppsala), Almqvist & Weksell, 1977, 62 − 81.

Б. М. Левитан, К. А. Мирзоев 撰

【补注】

**参考文献**

[A1] Березанский, Ю. М., Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, К., 1965 (英译本: Berezanskii, Yu. M., Expansion in eigenfunctions of selfadjoint operators, Amer. Math. Soc., 1968).

[A2] Dunford, N., Schwartz, J. T., Linear operators, Spectral theory, 2, Interscience, 1963.

[A3] Levitan, B. M., Sargsyan, I. S., Sturm-Liouville and Dirac operators, Kluwer, 1991 (译自俄文).

齐民友 译

**Sturm-Liouville 问题[Sturm-Liouville problem; Штурма-Лиувилля задача]**

由方程(其中 $x$ 在已给的有限或无限区间 $(a, b)$ 上变化)

$$-\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]+l(x)y=\lambda r(x)y \quad (1)$$

和某些边值条件构成的问题,这里 $p(x)$ 和 $r(x)$ 为正的,$l(x)$ 为实的,而 $\lambda$ 是一个复参数. 这个问题的认真的研究始于 J. Ch. Sturm 和 J. Liouville. 在研究 Sturm-Liouville 问题时产生的方法和概念对数学和物理学许多方向的发展起了重要的作用. 它过去是,现在仍是算子谱理论(spectral theory)和分析中相关问题中新思想和新问题经常的来源. 近年来,由于它和数学物理中某些非线性发展方程的关系被发现,它甚至有了更大的意义.

若 $p(x)$ 可微而 $p(x)r(x)$ 二次可微,则作代换后,方程(1)可以化为(见[1])

$$-y''+q(x)y=\lambda y. \quad (2)$$

通常要区别正则的与奇异的 Sturm-Liouville 问题. 方程(2)的一个 Sturm-Liouville 问题,若 $x$ 在其中变化的区间 $(a, b)$ 为有限而 $q(x)$ 在整个区间 $(a, b)$ 上可和,就称为正则的(regular). 若区间 $(a, b)$ 为无限或 $q(x)$ 不可和(或二者兼有),这问题就称为奇异的(singular).

下面要比较详细地考虑三种可能情况:1) 区间 $(a, b)$ 为有限(这时不失一般性可设 $a=0$, $b=\pi$); 2) $a=0$, $b=\infty$; 3) $a=-\infty$, $b=\infty$.

1. 考虑由给定于区间 $[0, \pi]$ 上的方程(2)以及分离的边值条件

$$y'(0)-hy(0)=0,\ y'(\pi)+Hy(\pi)=0 \quad (3)$$

所成的问题,$q(x)$ 是 $[0, \pi]$ 上的可和实值函数,$h$ 和 $H$ 是任意的有限或无限固定实数而 $\lambda$ 是一复参数. 若 $h=\infty$ $(H=\infty)$ 则将(3)中第一个(第二个)条件改成 $y(0)=0$ $(y(\pi)=0)$. 为确定起见,进一步设边值条件中出现的数都是有限的.

若当 $\lambda=\lambda_0$ 时方程(2)有一个满足(3)的非平凡解 $y_0(x)\neq 0$, $\lambda_0$ 就称为问题(2),(3)的本征值(eigenvalue); 函数 $y_0(x)$ 则称为相应于本征值 $\lambda_0$ 的本征函数(eigenfunction).

边值问题(2),(3)的本征值均为实的; 对应于不同本征值,有线性无关的本征函数(因为 $q(x)$ 和数 $h$, $H$ 均为实,问题(2),(3)的本征函数也可取为实的); 相应于同一本征值的本征函数最多只相差一个常数因子; 相应于不同本征值的本征函数 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 正交,即 $\int_0^\pi y_1(x)y_2(x)dx=0$.

边值问题(2),(3)有无限增加的本征值序列 $\lambda_0$, $\lambda_1$, $\cdots$; 此外,相应于本征值 $\lambda_n$ 的本征函数 $y_n(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 中恰有 $n$ 个零点.

令 $W_2^m[0, \pi]$ 是 Соболев 空间,其元素是区间 $[0, \pi]$ 上的这样的复值函数,它们有 $m-1$ 阶绝对连续导数而且 $m$ 阶导数在 $[0, \pi]$ 上平方可积. 若 $q\in W_2^m[0, \pi]$,则边值问题(2),(3)的本征值 $\lambda_n$ 对于大的 $n$ 满足以下的渐近展开式(见[4]):

$$\sqrt{\lambda_n}=n+\sum_{1\leqslant 2j+1\leqslant m+2}\frac{c_{2j+1}}{n^{2j+1}}+$$

$$+\frac{(-1)^{m-1}}{2^{m+2}}\left[S_m(n)+\frac{\widetilde{S}_m(n)}{n}\right]\frac{1}{n^{m+1}}+$$

$$+\frac{\delta_n}{n^{m+2}}+\frac{\varepsilon_n(h, H)}{n^{m+2}},$$

其中数 $c_{2j+1}$ 与 $n$ 无关,

$$c_1=\frac{1}{\pi}\left[h+H+\frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)dt\right],$$

$$S_m(n)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi q^{(m)}(t)\sin\left\{2nt-\frac{\pi}{2}(m+1)\right\}dt,$$

$$\widetilde{S}_m(n)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi q^{(m)}(t)(2h-c_1t)\sin\left\{2nt+\right.$$

$$\left.-\frac{\pi}{2}(m+2)\right\}dt,$$

$\delta_n$ 不依赖于 $h$, $H$ 而

$$\sum_{n=0}^\infty|\delta_n|^2<\infty,\quad \sum_{n=0}^\infty|\varepsilon_n(h, H)|^2<\infty.$$

特别地,由上述可知,若 $q\in W_2^1[0, \pi]$,则

$$\lambda_n = n^2 + c + \frac{\gamma_n}{n}.$$

其中

$$c = \frac{2}{\pi}\left[h + H + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} q(t)\,dt\right], \quad \sum_{n=0}^{\infty}|\gamma_n|^2 < \infty.$$

所以级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda_n - n^2 - c)$ 收敛，其和称为问题（2），（3）的正则化迹（regularized trace）（见[13]）：

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda_n - n^2 - c) = \frac{q(0)+q(\pi)}{4} + \\ - \frac{(h+H)^2}{2} + hH - \frac{c}{2}.$$

令 $v_0(x)$，$v_1(x)$，⋯ 为问题（2），（3）的相应于本征值 $\lambda_0$，$\lambda_1$，⋯ 的规范正交本征函数系．对任意函数 $f \in L_2[0, \pi]$，下面所谓的 Parseval 等式（Parseval equality）成立：

$$\int_0^{\pi}|f(x)|^2\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2,$$

其中

$$a_n = \int_0^{\pi} f(x)v_n(x)\,dx,$$

而且以下的本征函数展开式也成立：

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n v_n(x), \tag{4}$$

此级数在 $L_2[0, \pi]$ 的度量下收敛．正则 Sturm-Liouville 问题的完全性和展开定理是 В．А．Стеклов 首先证明的（[14]）．

若函数 $f$ 有连续二阶导数且满足边值条件（3），则以下结论成立（见[15]）：

a）级数（4）在 $[0, \pi]$ 上绝对且一致收敛于 $f(x)$；

b）级数（4）逐项求导一次后在 $[0, \pi]$ 上绝对且一致收敛于 $f'(x)$．

c）在 $f''(x)$ 满足有关 Fourier 级数展开的局部条件（例如，有有界变差）的任何点处，级数（4）逐项求导二次后收敛于 $f''(x)$．

对任一函数 $f \in L_1[0, \pi]$，级数（4）与 $f$ 的 Fourier 余弦级数一致等度收敛，即有

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{0\le x\le\pi}|V_{N,f}(x) - c_{N,f}(x)| = 0,$$

这里

$$V_{N,f}(x) = \int_0^{\pi} f(t)\sum_{n=0}^{N} v_n(x)v_n(t)\,dt,$$

$$c_{N,f}(x) = \int_0^{\pi} f(t)\left\{\frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx\cos nt\right\}dt.$$

这就表示，$f$ 对于边值问题（2），（3）的本征函数的展开式与 $f$ 的 Fourier 余弦级数展开式在同样的条件下收敛（见[1]，[4]）．

2．在半直线 $0 \le x < \infty$ 上考虑微分方程（2）而只在零点给一个边值条件

$$y'(0) - hy(0) = 0. \tag{5}$$

函数 $q(x)$ 设为实的且在 $[0, \infty)$ 的任一有限子区间上可和，$h$ 设为实数．

令 $\varphi(x, \lambda)$ 是（2）的附有初始条件 $y(0) = 1$，$y'(0) = h$ 的解（所以 $\varphi(x, \lambda)$ 也满足边值条件（5））．令 $f$ 是 $L_2(0, \infty)$ 中任一函数，并令 $\Phi_{f,b}(x) = \int_0^b f(x)\varphi(x, \lambda)\,dx$，$b$ 是任意的有限正数．对于任意的函数 $q$ 和数 $h$，至少有一个递减的且与 $f$ 无关的函数 $\rho(\lambda)$（$-\infty < \lambda < \infty$），具有以下性质：

a）$\Phi_{f,b}(\lambda)$ 当 $b \to \infty$ 时在 $L_{2,\rho}(-\infty, \infty)$（即满足 $\|\psi\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty}|\psi(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) < \infty$ 的 $\rho$ 可测函数的空间）的度量下有极限 $\Phi_f(\lambda)$，亦即

$$\lim_{b\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi_f(\lambda) - \Phi_{f,b}(\lambda)|^2\,d\rho(\lambda) = 0;$$

b）Parseval 等式成立：

$$\int_0^{\infty}|f(x)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}|\Phi_f(\lambda)|^2\,d\rho(\lambda).$$

函数 $\rho(\lambda)$ 称为边值问题（2），（5）的谱函数（spectral function）（或谱密度（spectral density））（见[9]－[11]）．

对于问题（2），（5）的谱函数 $\rho(\lambda)$ 有以下渐近公式成立（见[16]）（[17]，其中有更精确的公式）：

$$\lim_{\lambda\to-\infty} e^{\sqrt{\lambda}x}(\rho(\lambda) - \rho(-\infty)) = 0, \quad 0 \le x < \infty,$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left[\rho(\lambda) - \rho(-\infty) - \frac{2}{\pi}\sqrt{\lambda} + h\right] = 0.$$

下面的等度收敛定理也成立（[17]）：对任意函数 $f \in L_2(0, \infty)$，令

$$\Phi_f(\lambda) = \int_0^{\infty} f(x)\varphi(x, \lambda)\,dx,$$

$$C_f(\lambda) = \int_0^{\infty} f(x)\cos\sqrt{\lambda}\ x\,dx,$$

（这两个积分分别在 $L_{2,\rho}(-\infty, \infty)$ 和 $L_{2,\sqrt{\lambda}}(0, \infty)$ 中收敛）；于是对任一固定的 $b < \infty$，积分

$$\int_{-\infty}^{b}\Phi_f(\lambda)\varphi(x, \lambda)\,d\rho(\lambda)$$

对于 $x \in [0, b]$ 绝对且一致收敛，而且

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{0\le x\le b}\left|\int_{-\infty}^{N}\Phi_f(\lambda)\varphi(x, \lambda)\,d\rho(\lambda) + \\ - \frac{2}{\pi}\int_0^{N} C_f(\lambda)\cos\sqrt{\lambda}\,x\,d\sqrt{\lambda}\right| = 0.$$

设问题（2），（5）有离散谱，即其谱由可数多个本征值 $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$（它们以无穷远点为唯一的极限点）构成．在对函数 $q$ 的某些限制下，对于函数 $N(\lambda)$

$=\sum_{\lambda_n<\lambda}1$，即小于 $\lambda$ 的本征值个数，以下的渐近公式成立：

$$N(\lambda)\sim\frac{1}{2\pi}\int_{q(x)<\lambda}[\lambda-q(x)]^{\frac{1}{2}}dx.$$

与 $\varphi(x,\lambda)$ 同时，还引入了方程（2）的第二个解 $\theta(x,\lambda)$，它满足条件 $\theta(0,\lambda)=0$，$\theta'(0,\lambda)=1$，于是 $\varphi(x,\lambda)$ 和 $\theta(x,\lambda)$ 构成（2）的**基本解组**（fundamental system of solutions）．对于固定的 $\lambda(\operatorname{Im}\lambda\neq0)$ 和 $b>0$，考虑以下的线性分式函数

$$w_{\lambda,b}=w_{\lambda,b}(t)=\frac{-\theta'(b,\lambda)-t\theta(b,\lambda)}{\varphi'(b,\lambda)+t\varphi(b,\lambda)}.$$

当自变量 $t$ 在实数直线上变化时，点 $w_{\lambda,b}$ 围着一个圆盘 $K_{\lambda,b}$ 描出一个圆．它总是和 $\lambda$ 在同一个半平面（上或下半平面）内．当 $b$ 增加时，$K_{\lambda,b}$ 缩小，即对 $b<b'$，圆盘 $K_{\lambda,b'}$ 全在 $K_{\lambda,b}$ 内．当 $b\to\infty$ 时，存在一个极限圆盘或极限点 $K_{\lambda,\infty}$；若

$$\int_0^\infty|\varphi(x,\lambda)|^2dx<\infty, \qquad (6)$$

$K_{\lambda,\infty}$ 是一圆盘，否则是一个点（见[10]）．若条件（6）对某个非实的 $\lambda$ 值成立，则它对一切 $\lambda$ 均成立．在极限圆盘情况下，对 $\lambda$ 的任意值，（2）的所有解都属于 $L_2(0,\infty)$，而在极限点情况，对 $\lambda$ 的任一非实值，此方程有一解 $\theta(x,\lambda)+m(\lambda)\varphi(x,\lambda)$ 属于 $L_2(0,\infty)$，这里 $m(\lambda)$ 就是极限点（$m(\lambda)=K_{\lambda,\infty}$）．

若 $q(x)\geq-cx^2$，$c$ 是一个正常数，则极限点情况成立（见[19]）；更一般的结果可见[20]，[21]．

3. 现在在整个直线 $-\infty<x<\infty$ 上考虑方程（2），而假设 $q(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 的每一个有限子区间上均为实的可和函数．令 $\varphi_1(x,\lambda)$，$\varphi_2(x,\lambda)$ 为（2）的满足条件 $\varphi_1(0,\lambda)=\varphi_2'(0,\lambda)=1$，$\varphi_1'(0,\lambda)=\varphi_2(0,\lambda)=0$ 的解．

至少存在一个实对称非减矩阵函数

$$r(\lambda)=\begin{Vmatrix}\rho_{11}(\lambda) & \rho_{12}(\lambda)\\ \rho_{21}(\lambda) & \rho_{22}(\lambda)\end{Vmatrix},\quad -\infty<\lambda<\infty,$$

具有以下性质：

a）对任意函数 $f\in L_2(-\infty,\infty)$，存在函数 $\Phi_{j,f}(\lambda)(j=1,2)$，其定义如下：

$$\Phi_{j,f}(\lambda)=\underset{b\to\infty}{\operatorname{l.i.m}}\int_{-b}^{b}f(x)\varphi_j(x,\lambda)dx,\ j=1,2,$$

这里的极限是在 $L_{2,\rho}(-\infty,\infty)$ 的度量下取的；

b）Parseval 等式成立：

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx=\sum_{j,k=1}^{2}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_{j,f}(\lambda)\overline{\Phi_{k,f}(\lambda)}\,d\rho_{jk}(\lambda).$$

**参考文献**


[1] Левитан, Б. М., Саргсян, И. С., Введение в спектральную теорию, М., 1970（英译本：Levitan, B. M. and Sargsyan, I. S., An introduction to spectral theory, Amer. Math. Soc., 1975）.

[2] Левитан, Б. М., Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка, М.-Л., 1950.

[3] Левитан, Б. М., Теория операторов обобщенного сдвига, М., 1973（英译本：Levitan, B. M., Generalized translation operators and some of their applications, Israel Progr. Sci. Transl., 1964）.

[4] Марченко, В. А., Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения, К., 1977（英译本：Marchenko, V. A., Sturm-Liouville operators and applications, Birkhäuser, 1986）.

[5] Titchmarsh, E., Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations, Clarendon Press, 1962（中译本：E.梯其马希，与二阶微分方程相联系的本征函数展开，I，上海科学技术出版社，1964）.

[6] Coddington, E. A. and Levinson, N., Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill, 1955.

[7] Наймарк, М. А., Линейные дифференциальные операторы, 2 изд., М., 1969.

[8] Костюченко, А. Г., Саргсян, И. С., Распределение собственных значений, М., 1979.

[9] Weyl, H., Über gewöhnliche lineare Differentialgleichungen mit singulären Stellen und ihre Eigenfunktionen, *Gött. Nachr.*, (1909), 37－64.

[10] Weyl, H., Über gewöhnliche lineare Differentialgleichungen mit Singularitäten und die Zugehörigen Entwicklungen willküriger Funktionen, *Math. Ann.*, **68** (1910), 220－269.

[11] Weyl, H., Über gewöhnliche lineare Differentialgleichungen mit singulären Stellen und ihre Eigenfunktionen (2), *Gött. Nachr.*, (1910), 442－467.

[12] Крейн, М. Г.,《Изв. АН СССР, Сер. матем.》, **16** (1952), 4, 293－324.

[13] Гельфанд, И. М., Левитан, Б. М.,《Докл. АН СССР》, **88** (1953), 4, 593－596.

[14] Стеклов, В. А.,《Сообщ. Харьк. Матем. об-ва》, **5** (1896).

[15] Левитан, Б. М., Саргсян, И. С.,《Успехи матем. наук》, **15** (1960), 1, 3－98.

[16] Марченко, В. А.,《Докл. АН СССР》, **72** (1950), 3, 457－460.

[17] Левитан, Б. М.,《Изв. АН СССР, Сер. матем.》, **17** (1953), 4, 331－364; **19** (1955), 1, 33－58.

[18] Wet, J. S. de and Mandi, F., On the asymptotic distribution of eigenvalues, *Proc. Roy. Soc. Ser. A*, **200** (1950), 572－580.

[19] Titchmarsh, E., On the uniqueness of the Green's function associated with a second-order differential

equation, *Canad. J. Math.*, 1 (1949), 191 – 198.

[20] Levinson, N., Criteria for the limit-point case for second order linear differential operators, *Časopis Pěst Mat. Fys.*, 74 (1949), 17 – 20

[21] Sears, D. and Titchmarsh, E., Some eigenfunction formulae, *Quart. J. Math* (*Oxford Ser.*), 1 (1950), 165 – 175.

Г. Ш. Гусейнов, Б. М. Левитан 撰

【补注】 (2)型的本征值问题和相应的反问题(见 **Sturm-Liouville 反问题**(Sturm-Liouville problem, inverse))在用所谓"反散射法"(见 **Korteweg-de Vries 方程**(Korteweg-de Vries equation))求解孤子(soliton)方程上起了主要作用. 关于这个方法的叙述, 例如见[A1] – [A5]. 在西方通常考虑 $K_{\lambda,h}$ 的边界说的是极限点与极限圆情况.

**参考文献**

[A1] Lax P. D., Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves, *Comm. Pure Appl. Math.*, 21 (1968), 467 – 490.

[A2] Zakharov, V. E. and Shabat. A. B., Soviet Phys. JETP, (1972), 62 – 69.

[A3] Miura, R. M., The Korteweg-de Vries equation: a survey of results, *SIAM Review*, **18** (1976), 412 – 459.

[A4] Eckhaus, W. and Harten, A. van, The inverse scattering transformation and the theory of solitons, North-Holland, 1983.

[A5] Schuur, P. C., Asymptotic analysis of soliton problems, Springer, 1986.

[A6] Березанский, Ю. М., Разложение по собственных функциам самосопряженных операторов, К., 1965 (英译本: Berezanskiĭ, Yu. M., Expansions in eigenfunctions of selfadjoint operators, Amer. Math. Soc., 1968).

[A7] Reid, W. T., Sturmian theory for ordinary differential equations, Springer, 1980.

齐民友 译

**Sturm-Liouville 反问题[Sturm-Liouville problem, inverse; Штурма-Лиувилля обратная задача]**

这样一个问题, 其中要求由算子 $A$ 的某些谱特征重新作出一个函数(即位势) $q$, 使得 $A$ 是由 Hilbert 空间 $L_2(a, b)$ 中的微分式 $l[y] = -y'' + q(x)y$ 以及某些边值条件生成的, $x$ 在有限或无限区间 $(a, b)$ 中变化. 此外, 也要重新作出相应于算子 $A$ 的边值条件.

在研究反问题时, 下面的问题自然会产生: 1) 找出是哪些谱特征唯一地决定算子 $A$; 2) 给出由这些谱特征重新作出算子 $A$ 的方法; 3) 找出所考虑的谱特征的特殊性质. 由于选取不同的谱特征, 反问题可以有不同的提法(在应用中时常出现).

关于反问题的第一个结果(见[10]), 亦即整个理论的起点, 是: 令 $\lambda_0, \lambda_1, \cdots$ 为以下问题的本征值:

$$\left.\begin{aligned} -y'' + q(x)y = \lambda y,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ y'(0) = y'(\pi) = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

而 $q$ 是区间 $[0, \pi]$ 上的实值连续函数. 若 $\lambda_n = n^2$ $(n = 0, 1, \cdots)$, 则 $q(x) \equiv 0$.

反问题的深刻的研究起于 40 年代(见[11], [12]). 令 $\lambda_0, \lambda_1, \cdots$ 是方程(1)在边值条件

$$y'(0) - hy(0) = 0,\quad y'(\pi) + Hy(\pi) = 0 \quad (2)$$

下的本征值($h, H$ 是实数), 而 $\mu_0, \mu_1, \cdots$ 是方程(1)在另一边值条件

$$y'(0) - h_1 y(0) = 0,\ y'(\pi) + Hy(\pi) = 0,\ h_1 \neq h$$

下的本征值. 这时序列 $\{\lambda_n\}$, $\{\mu_n\}$ $(n = 0, 1, \cdots)$ 唯一地决定函数 $q$ 以及数 $h, h_1$ 与 $H$. 进一步, 如果这些问题中只要有(至少)一个本征值没有决定, 则其余全体本征值仍不能唯一决定方程(1). 特别要注意, 一般说来, 仅是谱是不能唯一决定方程的(上述结果只是一般规则的例外).

若在半直线 $(0, \infty)$ 上研究方程(1), 且位势函数 $q$ 满足以下要求:

$$\int_0^\infty x|q(x)|dx < \infty,$$

则问题 $-y'' + q(x)y = \lambda^2 y$, $y(0) = 0$ 的解 $\varphi(x, \lambda)$ 当 $x \to \infty$ 时有以下的渐近表示:

$$\varphi(x, \lambda) = M(\lambda)\sin[\lambda x + \delta(\lambda)] + o(1),$$

函数 $\delta(\lambda)$ 称为散射相位(scattering phase). 主要结果是: 若在空间 $L_2(0, \infty)$ 中考虑的一问题没有离散的本征值, 则散射相位唯一决定位势函数 $q$.

反问题理论进一步发展的一个决定性的步骤是应用了所谓算子变换技术(见 **Sturm-Liouville 方程**(Sturm-Liouville equation)), 它是在广义平移算子理论的框架下自然地发展起来的(见[4]).

应用算子变换于反问题就可以推广上述定理(见[13]). 具体说来, 可以看到, 最一般的反问题就是由谱函数重新构造方程(1)(见 **Sturm-Liouville 问题**(Sturm-Liouville problem)), 证明了谱函数可以唯一决定这个方程. 此外, 所考虑的区间是有限或无限并不重要.

原则上说, 所有反问题都可以化为由谱函数重建算子这个反问题. 然而这并不总是最简单的途径; 此外, 按这一思路考虑, 时常需要去求用以重构算子的谱特征的必要和充分条件, 而这往往是困难的.

在发现了有可能应用反问题来解决某些数学物理中的非线性发展方程(non-linear evolution equation of mathematical physics)以后，它的意义就更大了. 特别是找到了某些谱中含有有限多个空隙的 Sturm-Liouville 算子的反问题与 Abel 积分的 **Jacobi 反演问题**(Jacobi inversion problem)的关系(见[25]). 这个思想最近的发展使得可以找到一些显式的公式，来用 Riemann $\theta$ 函数表出有限空隙位势(见[1],[5]).

下面要考虑反问题的两种陈述与解法的.

1. 已知谱函数 $\rho(\lambda)$，求一下列形状的微分方程

$$l[y]=-y''+q(x)y,$$

其中 $q(x)(0\leqslant x<\infty)$ 是实值局部可和位势，再求一个出现在边值条件

$$y'(0)-hy(0)=0 \tag{3}$$

中的数 $h$，使 $\rho(\lambda)$ 是这个 Sturm-Liouville 问题的谱函数. 为解决这个问题，令

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos\sqrt{\lambda}\ x}{\lambda}\,d\rho(\lambda),\ 0<x<\infty, \tag{4}$$

$$f(x,y)=\frac{1}{2}\{\Phi''(x+y)+\Phi''(|x-y|)\}.$$

可证积分方程

$$f(x,y)+K(x,y)+\int_0^x K(x,t)f(t,y)dt=0,$$
$$0\leqslant y\leqslant x \tag{5}$$

对每个固定的 $x$ 有唯一解 $K(x,y)$. 位势 $q$ 由公式

$$q(x)=2\frac{dK(x,x)}{dx}$$

给出，而(3)中的数 $h$ 则由公式 $h=K(0,0)$ 给出(见[14]). 方程 $l[y]=\lambda y$ 的满足边界条件 $\varphi(0,\lambda)=1$, $\varphi'(0,\lambda)=h$ 的解 $\varphi(x,y)$ 可以用以下公式给出

$$\varphi(x,\lambda)=\cos\sqrt{\lambda}\ x+\int_0^x K(x,t)\cos\sqrt{\lambda}\ t\,dt.$$

此外，一个非减函数 $\rho(\lambda)(-\infty<\lambda<\infty)$ 是问题 $-y''+q(x)y=\lambda y(0\leqslant x<\infty)$, $y'(0)-hy(0)=0$ 的谱函数(这里 $q(x)$ 是一个实值函数而且有 $m$ 阶局部可和的导数，$h$ 则为一实数)的必要充分条件是，由 $\rho(\lambda)$ 用公式(4)作出的 $\Phi(x)$ 具有 $m+3$ 阶局部可和导数，而且 $\Phi''(+0)=-h$ (见[14],[17],[9]). 在许多特殊情况下，可以由函数 $\rho(\lambda)$ 有效地求出 $q$ 和 $h$. 例如，令

$$\rho(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{\lambda}+\alpha\chi(\lambda-\lambda_0), & \lambda>0,\\ \alpha\chi(\lambda-\lambda_0), & \lambda<0.\end{cases}$$

这里 $\chi(\lambda)=0$ 于 $\lambda<0$ 时而 $\chi(\lambda)=1$ 于 $\lambda>0$ 时，$\alpha$ 则为一正数. 这时，积分方程(5)具有退化核 $f(x,y)=\alpha\cos\sqrt{\lambda_0}\ x\cos\sqrt{\lambda_0}\ y$，而其解则为

$$K(x,y)=-\frac{\alpha\cos\sqrt{\lambda_0}\ x\cos\sqrt{\lambda_0}\ y}{1+\alpha\int_0^x\cos^2\sqrt{\lambda_0}\ t\,dt}.$$

这时 $q$ 和 $h$ 由以下公式给出:

$$q(x)=2\frac{dK(x,x)}{dx}=$$
$$=-2\frac{d}{dx}\left[\frac{\alpha\cos^2\sqrt{\lambda_0}\ x}{1+\alpha\int_0^x\cos^2\sqrt{\lambda_0}\ t\,dt}\right],$$
$$h=K(0,0)=-\alpha.$$

2. 设实值函数 $q$ 满足不等式

$$\int_0^\infty x|q(x)|dx<\infty. \tag{6}$$

于是边值问题

$$-y''+q(x)y=\lambda^2y,\quad 0<x<\infty, \tag{7}$$
$$y(0)=0, \tag{7'}$$

当 $\lambda^2>0$ 和 $\lambda=i\lambda_k(\lambda_k>0,k=1,\cdots,n)$ 时有有界解. 此外，这些解当 $x\to\infty$ 时满足渐近公式

$$y(x,\lambda)=e^{-i\lambda x}-S(\lambda)e^{i\lambda x}+o(1),\ 0<\lambda^2<\infty,$$
$$y(x,i\lambda_k)=m_ke^{-\lambda_kx}[1+o(1)],\ m_k>0,$$
$$k=1,\cdots,n.$$

$m_k$ 是一个规范化因子，即保证 $\int_0^\infty|y(x,i\lambda_k)|^2dx=1$. 值的集合 $\{S(\lambda):-\infty<\lambda<\infty;\lambda_k,m_k:k=1,\cdots,n\}$ 称为边值问题(7),(7')的散射数据(scattering data). 要求从散射数据中作出位势 $q$ 来.

为解决这个问题，按下式构造函数 $F$:

$$F(x)=\sum_{k=1}^n m_k^2e^{-\lambda_kx}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[1-S(\lambda)]e^{i\lambda x}d\lambda,$$

然后考虑以下方程

$$F(x+y)+K(x,y)+\int_x^\infty K(x,t)F(t+y)dt=0. \tag{8}$$

它对任意 $x\geqslant0$ 有唯一解 $K(x,y)$. 解出这个方程后，位势 $q$ 即可由下式决定:

$$q(x)=-2\frac{dK(x,x)}{dx}.$$

为使集合 $\{S(\lambda):-\infty<\lambda<\infty;\lambda_k,m_k:\lambda_k>0,m_k>0,k=1,\cdots,n\}$ 成为某个形如(7),(7')的边值问题(其中实的位势 $q$ 满足条件(6))的散射数

据．其必要充分条件是以下条件得以满足（见[1]）:

a）函数 $S(\lambda)$ 在整个实数直线上连续，$\overline{S(\lambda)}=S(-\lambda)=[S(\lambda)]^{-1}$，$1-S(\lambda)$ 当 $|\lambda|\to\infty$ 时趋于 0．而且是函数

$$F_S(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[1-S(\lambda)]e^{i\lambda x}d\lambda$$

的 Fourier 变换．$F_S(x)$ 可以写为两个函数之和，其一属于 $L_1(-\infty,\infty)$，其二为有界且属于 $L_2(-\infty,\infty)$．$F_S(x)$ 在半直线 $0<x<\infty$ 上有导数 $F_S'(x)$，满足条件 $\int_0^\infty x|F_S'(x)|dx<\infty$;

b）函数 $S(\lambda)$ 幅角的增量与边值问题（7），（7′）的负本征值（即 $-\lambda_1^2,\cdots,-\lambda_n^2$）的个数 $n$ 有关，可用下式来表示:

$$n=\frac{\ln S(+0)-\ln S(+\infty)}{2\pi i}-\frac{1-S(0)}{4}.$$

若 $S(\lambda)$ 是一个有理函数，则 $K(x,y)$ 的积分方程（8）有显示解．这时，方程（7）之解和位势 $q$ 可以表为三角函数和双曲函数的有理函数．例如，若

$$S(\lambda)=\frac{(\lambda+i)(\lambda+2i)}{(\lambda-i)(\lambda-2i)},\ \lambda_1=1,\ m_1=\sqrt{6},$$

则相应的位势是

$$q(x)=-\frac{24}{(2\cosh 2x-\sinh 2x)^2}.$$

**参考文献**


[1] Марченко, В. А., Операторы Штурма - Лиувилля и их приложения, К., 1977（英译本: Marchenko, V. A., Sturm - Liouville operators and applications, Birkhäuser, 1986）.

[2] Агранович, З. С., Марченко, В. А., Обратная задача теории рассеяния, Харьков, 1960.

[3] Shadan, C. and Sabatier, P., Inverse problems in quantum scattering theory, Springer, 1989.

[4] Левитан, Б. М., Теория операторов обобщенного сдвига, М., 1973（英译本: Levitan, B. M., Generalized translation operators and some of their applications, Israel Progr. Sci. Transl., 1964）.

[5] Теория солитонов: метод обратной задачи, М., 1980.

[6] Березанский, Ю. М., Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, К., 1965（英译本: Berezanskiĭ, Yu. M., Expansion in eigenfunctions of selfadjoint operators, Amer. Math. Soc., 1968）.

[7] Фаддеев, Л. Д., 《Успехи матем. наук》, **14** (1959), 4, 57 – 119.

[8] Фаддеев, Л. Д., в кн., Итоги науки и техники. Совр. проблемы математики, М., **3** (1974), 93 – 180.

[9] Левитан, Б. М., Гасымов, М. Г., 《Успехи матем. наук》, **19** (1964), 2, 3 – 63.

[10] Ambarzumian, V., *Z. Phys.*, **53** (1929), 690 – 695.

[11] Borg, G., Eine Umkehrung der Sturm - Liouvilleschen Eigenwertaufgabe, Bestimmung der Differential gleichungen durch die Eigenwerte, *Acta Math.*, **78** (1946), 1 – 96.

[12] Levinson, N., On the uniqueness of the potential in a Schrödinger equation for a given asymptotic phase, *Danske Vid. Selsk. Mat. - Fys. Medd.*, **25** (1949), 9, 1 – 29.

[13] Марченко, В. А., 《Докл. АН СССР》, **72** (1950), 3, 457 – 460.

[14] Гельфанд, И. М., Левитан, Б. М., 《Изв. АН СССР, сер. матем.》, **15** (1951), 4, 309 – 360.

[15] Крейн, М. Г., 《Докл. АН СССР》, **76** (1951), 1, 21 – 24; **82** (1952), 5, 669 – 672; **88** (1953), 3, 405 – 408.

[16] Марченко, В. А., 《Докл. АН СССР》, **104** (1955), 5, 695 – 698.

[17] Левин, Б. Я., 《Докл. АН СССР》, **106** (1956), 2, 187 – 190.

[18] Newton, R. and Jost, R., The construction of potentials from the S - matrix for systems of differential equations, *Nuovo Cimento*, **1** (1955), 4, 590 – 622.

[19] Гасымов, М. Г., Левитан, Б. М., 《Докл. АН СССР》, **167** (1966), 6, 1219 – 1222.

[20] Гасымов, М. Г., 《Тр. Моск. матем. об - ва》, **19** (1968), 41 – 112.

[21] Рофе - Бекетов, Ф. С., 《Теория Функций, Функц. Анализ и их Прилож.》, Харьков, 1967, 4, 189 – 197.

[22] Левитан, Б. М., в кн.: Задачи механики и математической физики (Посвящ памяти И. Г. Петровского), М., 1976, 166 – 207.

[23] Ахиезер, Н. И., 《Докл. АН СССР》, **141** (1961), 2, 263 – 266.

[24] Гусейнов Г. Ш., 《Докл. АН СССР》, **231** (1976), 5, 1045 – 1048.

[25] Levitan, B. M., Inverse Sturm - Liouville problems, VNU, 1987（译自俄文）.


Г. Ш. Гусейнов, Б. М. Левитан 撰

【补注】 Schrödinger 算子 $-(d^2/dx^2)+q(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ 的反问题在 [A1] 中研究过（亦见 **Schrödinger 方程**（Schrödinger equation））．为了得出散射数据对应于方程 $-y''+q(x)y=\lambda^2y$ $(-\infty<x<\infty)$ 的必要充分条件，在 [A1] 中假设了 $q$ 满足 $\int_{-\infty}^{\infty}|q(x)|(1+x^2)dx<\infty$（见[6]）．对于 Fourier 变换 $F_i$ 所加的条件，类似于上面定义的 $F_S$，但也有改变: $\int_a^\infty|F_1'(x)|dx$, $\int_{-\infty}^a|F_2'(x)|(1+x^2)dx<\infty$ 对一切 $-\infty<a<+\infty$ 成立．

**参考文献**


[A1] Deift, P. and Trubowitz, E., Inverse scattering on the line, *Comm. Pure Appl. Math.*, **32** (1979),

121 - 251.

[A2] Poschel, J. and Trubowitz, E., Inverse spectral theory, Acad. Press, 1987.

[A3] Ramm, A. G., Inverse scattering on half-line, *J. Math. Anal. Appl*, **133** (1988), 543 - 572.

[A4] Ramm, A. G. and Taylor, B. A., Example of a potential in one-dimensional scattering problem for which there are infinitely many purely imaginary resonances, *Phys. Lett.*, **124** A (1987), 313 - 319.

[A5] Andersson, L. E., Inverse eigenvalue problems with discontinuous coefficients, *Inverse Probl.*, **4** (1988), **353 - 397**.

[A6] Ramm, A. G., Recovery of the potential from I-function, *Math. Reports Canad. Acad. Sci.*, **9** (1987), 177 - 182.

[A7A] Ramm, A. G., Necessary and sufficient conditions on the scattering data for the potential to be in $L^2$ for the Schrödinger operator on the half-line, *Inverse Probl.*, 3 (1987), L71 - 76.

[A7B] Ramm, A. G., An inverse problem for the Helmholtz equation in a semi-infinite medium, *Inverse Probl.*, **3** (1987), L 19 - 22.

[A8] Isaacson, E. L. and Trubowitz, E., The inverse Sturm-Liouville problem I, *Comm. Pure Appl. Math.*, **36** (1983), 767 - 784.

[A9] Isaacson, E. L., McKean, H. P. and Trubowitz, E., The inverse Sturm-Liouville problem Ⅱ, *Comm. Pure Appl. Math.*, **37** (1984), 1 - 12.

[A10] Dahlberg, B. E. J. and Trubowitz, E., The inverse Sturm-Liouville problem Ⅲ, *Comm. Pure Appl. Math.*, **37** (1984), 255 - 267. 齐民友 译

## Sturm 定理 [Sturm theorem; Штурма теорема]

如果

$$f_0(x), \cdots, f_s(x) \qquad (*)$$

是区间 $[a,b](a<b)$ 上的一个 Sturm 级数，$w(x)$ 是在一个点 $x\in[a,b]$ 上级数 (*) 中改变符号的数目（变成零的项不考虑），则函数 $f_0$ 在区间 $[a,b]$ 上不等根的数目等于差 $w(a)-w(b)$.

Sturm 级数 (Sturm series) (或者 Sturm 序列 (Sturm sequence)) 是 $[a,b]$ 上的一个实值连续函数序列 (*)，这些函数在这个区间上有有限个根，而且使得

1) $f_0(a)f_0(b)\neq 0$;

2) 在 $[a,b]$ 上 $f_s(x)\neq 0$;

3) 若对某个 $k(0<k<s)$ 和在 $[a,b]$ 中给定的 $c$，函数 $f_k(c)=0$，则可得 $f_{k-1}(c)f_{k+1}(c)<0$;

4) 若对某个给定的 $c(a<c<b)$，函数 $f_0(c)=0$，则对充分小的 $\varepsilon>0$ 有

$$f_0(x)f_1(c)<0 \quad (c-\varepsilon<x<c);$$
$$f_0(x)f_1(c)>0 \quad (c<x<c+\varepsilon).$$

J. Ch. Sturm ([1]) 证明了这个定理，对具有实系数和没有重根的多项式 $f(x)$，他也提出了下列构造 Sturm 级数的方法：$f_0(x)=f(x)$，$f_1(x)=f'(x)$，而且如果已经构造了多项式 $f_0(x),\cdots,f_k(x)$，则对 $f_{k+1}^{(x)}$，应取用 $f_k(x)$ 除 $f_{k-1}(x)$ 所得余项的负值，其中 $f_s(x)$ 应该是一个非零常数.

**参考文献**

[1] Sturm, J. Ch., *Bull. de Férussac*, **11** (1829).

[2] Курош, А. Г., Курс высшей алгебры, 11 изд., М., 1975 (中译本：А. Г. 库洛什，高等代数教程，高等教育出版社，1953).

И. В. Проскуряков 撰

【补注】 Sturm 级数中多项式的系数必须属于一个实闭域. 确定一个多项式 $f_0(x)$ 的 Sturm 级数的算法可以叙述如下：

$$f_0(x)=f(x),\ f_1(x)=f'(x),$$
$$f_0(x)=q_1(x)f_1(x)-f_2(x),\ \deg f_2(x)<\deg f_1(x),$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$f_{k-1}(x)=q_k(x)f_k(x)-f_{k+1}(x),$$
$$\deg f_{k+1}(x)<\deg f_k(x),$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$f_{s-1}(x)=q_s(x)f_s(x).$$

因此 $f_s(x)$ 是一个非零常数.

**参考文献**

[A1] Jacobson, N., Basic algebra, I, Freeman, 1974 (中译本：N. 雅各布森，基础代数，高等教育出版社，1987, 1988).

[A2] Dickson, L. E. J., New first course in the theory of equations, Wiley, 1939. 袁国兴 张宝琳 译

## 子代数格 [subalgebra lattice; решетка подалгебр]，泛代数 $A$ 的

$A$ 的一切子代数所成的（关于包含的）偏序集 Sub $A$. 对于任意 $X, Y\in$ Sub $A$，它们的上确界是 $X$ 与 $Y$ 所生成的子代数，它们的下确界就是交 $X\cap Y$. 子代数的交可能是空集，所以对于某些类型的代数来说（例如半群和格），在子代数中包括空集. 对于任意代数 $A$ 来说，子代数格 Sub $A$ 是代数的，反过来，对于任意代数格 (algebraic lattice) $L$，存在一个代数 $A$ 使得 $L\cong$ Sub $A$ (Birkhoff-Frink 定理 (Birkhoff-Frink theorem)). 任意格都可以嵌入关于某个群 $A$ 的格 Sub $A$ 内.

子代数格 Sub $A$ 是关于一个代数 $A$ 的基本导出结构之一（连同这样的结构一起，如自同构群，自同态半群，合同格等等）. 研究代数与它们的子代数格

之间的联系所包含的问题分为以下几个方面：格同构、各种代数类的格特征，以及研究在子代数格上带有不同限制的代数．两个代数 $A$ 与 $B$ 称为格同构的（lattice isomorphic），如果 $\mathrm{Sub}\,A \cong \mathrm{Sub}\,B$；$\mathrm{Sub}\,A$ 与 $\mathrm{Sub}\,B$ 之间的一个同构称为 $A$ 到 $B$ 上的格同构（lattice isomorphism）（或射影（projectivity））．同构的代数是格同构的．然而反之远非如此．一个代数 $A$ 称为格可定义的（lattice definable）（在一个给定的类 $\mathscr{K}$ 内），如果对于任意（$\mathscr{K}$ 内的）具有同型的代数 $B$ 来说，$\mathrm{Sub}\,B \cong \mathrm{Sub}\,A$ 蕴含 $B \cong A$．在某些情形（例如半群的情形）下，格可定义的概念被推广为在蕴含的结论中再加上"或 $B$ 反同构于 $A$"，因为反同构的半群也是格同构的．格可定义性的典型例子是由射影几何的第一基本定理给出的（见[1]），在这里，体上的向量空间被看作 $A$．下列也是格可定义的：每个含有两个独立的无限阶元素的 Abel 群，每个自由群（自由半群），每个非平凡地分解成自由积的群（半群），每个无挠幂零群，每个满足消去律且没有幂等元素的交换半群，每个幂等元素的自由半群，以及有多于两个自由生成元的自由半格．在这种情形下，常常是一个代数的每个射影都是由它的一个同构（或反同构）所诱导的．一个具有同一型的代数类 $\mathscr{K}$ 可以含有一些不是格可定义的代数，但是仍具有如下的性质：$A \in \mathscr{K}$ 且 $\mathrm{Sub}\,B \cong \mathrm{Sub}\,A$ 蕴含 $B \in \mathscr{K}$；在这一情形下 $\mathscr{K}$ 称为格可定义的（lattice definable）（或格闭的（lattice closed））；如果这里的代数 $B$ 只是从一个类 $\mathscr{M}$ 中取的，则要求在相应的术语中加上"在类 $\mathscr{M}$ 内"．格闭类包括一切可解群的类．

很多附加在代数上的限制是用子代数格的语言陈述的．典型的例子就是关于子代数的极小和极大条件．$\mathrm{Sub}\,A$ 满足极大条件，当且仅当 $A$ 中所有子代数都是有限生成的（亦见**具有有限性条件的群**（group with a finiteness condition）；**具有有限性条件的半群**（semigroup with a finiteness condition））．附加在子代数格上其他的限制包括像分配性，模性，各种形式的半模性，Jordan-Dedekind 条件，有补性，相对有补性等等这样的格论性质．例如，对于一个群 $A$ 来说，子代数格是分配的，当且仅当 $A$ 是局部循环的（Ore 定理（Ore theorem））；分配性条件也在半群，结合环，模，Lie 代数等等中被研究．

除了子代数格的同构外，对偶性（duality）（即反同构）和同态也被研究．当 $A$ 是一个拓扑代数时，更自然的是考虑 $A$ 的一切闭子代数格；相应问题的研究很活跃．

**参考文献**

[1] Baer, R., Linear algebra and projective geometry, Acad. Press, 1952.

[2] Suzuki, M., Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups, Springer, 1967.

[3] Скорняков, Л. А., Дедекиндовы структуры с дополнениями и регулярные кольца, М., 1961（英译本：Skornyakov, L. A., Complemented modular lattices and regular rings, Olivcs & Boyd, 1964）.

[4] Cohn, P. M., Universal algebra, Reidel, 1981.

[5] Садовский, Л. Е., 《Успехи матем. наук》, **23** (1968), 3, 123－157.

[6] Аршинов, М. Н., Садовский, Л. Е., 《Успехи матем наук》, **27** (1972), 6, 139－180.

[7] Шеврин, Л. Н., 《Сибирск. матем. ж.》, **3** (1962), 3, 446－470.

[8] Итоги науки. Алгебра. 1964, М., 1966, 237－274.

[9] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1968. М., 1970, 101－154.

[10] Упорядоченные множества и решетки, 3, Саратов, 1975, 50－74.

Л. Н. Шеврин 撰

【补注】对于一个给定的子代数代数格 $S$，一个给定的合同关系的代数格 $C$ 和一个给定的自同构群 $G$ 的同时表示，在[A1]中被讨论．

**参考文献**

[A1] Lampe, W. A., The independence of certain related structures of universal algebra Ⅰ－Ⅳ, *Algebra Univ.*, **2** (1972), 99－112; 270－283; 286－295; 296－302.

郝钢新 译

## 子范畴［subcategory；подкатегория］

数学结构的子结构概念的一种特殊情况．范畴（category）$\mathfrak{L}$ 叫作范畴 $\mathfrak{K}$ 的子范畴（subcategory），是指 $\mathrm{Ob}\,\mathfrak{L} \subseteq \mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$，任取 $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{L}$，

$$H_{\mathfrak{L}}(A,B) = H_{\mathfrak{K}}(A,B) \cap \mathrm{Mor}\,\mathfrak{L},$$

且两个态射在 $\mathfrak{L}$ 中的合成与它们在 $\mathfrak{K}$ 中的合成一致．

若 $\mathfrak{L}'$ 是 $\mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$ 的任意子类，则 $\mathfrak{K}$ 有一个最小子范畴 $\mathfrak{L}_1$ 和一个最大子范畴 $\mathfrak{L}_2$，其对象与 $\mathfrak{L}'$ 的对象一致；子范畴 $\mathfrak{L}_1$ 仅含 $\mathfrak{L}'$ 中的对象的恒等态射，叫作由 $\mathfrak{L}'$ 生成的离散子范畴（discrete subcategory）；子范畴 $\mathfrak{L}_2$ 包含定义域和值域都在 $\mathfrak{L}'$ 中的 $\mathfrak{K}$ 的全体态射，叫作由 $\mathfrak{L}'$ 生成的满子范畴（full subcategory）．$\mathfrak{K}$ 的任意子范畴 $\mathfrak{L}$，若对任意 $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{L}$，$H_{\mathfrak{L}}(A, B) = H_{\mathfrak{K}}(A, B)$，则叫作 $\mathfrak{K}$ 的满子范畴．下述均为满子范畴：集范畴中的非空集子范畴，群范畴中的 Abel 群子范畴，等等．对于一个**小范畴**（small category）$\mathfrak{D}$，从 $\mathfrak{D}$ 到集范畴的反变函子范畴的由 hom 函子（态射函子，$A \mapsto H_{\mathfrak{D}}(A, B)$）生成的满子范畴同构于 $\mathfrak{D}$（亦见**函子**（functor））．这一结果使得可以构造任意小范畴关于极限或上极限的完全

化．

范畴 $\mathfrak{K}$ 的任意子范畴不一定继承该范畴的任意性质．但存在重要的子范畴类，继承了原范畴的许多性质．例如**自反子范畴**（reflective subcategory）和余自反子范畴．参考文献见**范畴**（category）；**函子**（functor）．

M．Ш．Цаленко 撰 张英伯 译

**次微分［subdifferential；субдифференциал］**

定义在与空间 $Y$ 对偶的空间 $X$ 上的凸函数 $f$: $X \to \mathbf{R}$ 在点 $x_0$ 的次微分是 $Y$ 中由下式定义的点集：

$$\partial f(x_0) = \{y \in Y: f(x) - f(x_0) \geqslant \geqslant \langle y, x - x_0 \rangle, \text{ 对一切 } x \in X\}.$$

例如，在对偶空间为 $X^*$ 的赋范空间 $X$ 中，范数 $f(x) = \|x\|$ 的次微分取如下形式：

$$\partial f(x) = \begin{cases} \{x^* \in X^*: \langle x^*, x \rangle = \|x\|, \|x^*\| = 1\}, & \text{若 } x \neq 0, \\ \{x^*: \|x^*\| = 1\}, & \text{若 } x = 0. \end{cases}$$

凸函数 $f$ 在点 $x_0$ 的次微分是一个凸集．若 $f$ 在该点连续，则次微分非空且依拓扑 $\sigma(Y, X)$ 为紧的．

凸函数的次微分的作用类似于经典分析中导数的作用．与导数的一些定理类似，相应的次微分定理也成立．例如，若 $f_1$ 与 $f_2$ 均为凸函数，且在点 $\bar{x} \in (\mathrm{Dom} f_1) \cap (\mathrm{Dom} f_2)$ 至少有一个函数是连续的，那么对一切 $x$，

$$\partial f_1(x) + \partial f_2(x) = \partial(f_1 + f_2)(x)$$

（Moreau-Rockafellar 定理（Moreau-Rockafellar theorem））．

若 $X$ 中的凸集 $A$ 依拓扑 $\sigma(Y, X)$ 是紧的，则 $A$ 的支撑函数的次微分与 $A$ 相重合．这表示凸紧集与凸闭齐次函数之间的对偶性（亦见**支撑函数**（support function）；**超图**（supergraph）；**凸分析**（convex analysis））．

**参考文献**

［1］Rockafellar, R. T., Convex analysis, Princeton Univ. Press, 1970.

В．М．Тихомиров 撰

【补注】 $\sigma(X, Y)$ 拓扑是 $X$ 上的**弱拓扑**（weak topology），它由半范数族 $p_y(x) = |\langle x, y \rangle|$ $(y \in Y)$ 定义；这是使所有的泛函 $x \to \langle x, y \rangle$ 为连续的最弱拓扑．

元素 $x^* \in \partial f(x)$ 称为 $f$ 在 $x$ 的次梯度（subgradient）．

**参考文献**

［A1］Schneider, R., Boundary structure and curvature of convex bodies, in J. Tölke and J. M. Wills (eds): Contributions to Geometry, Birkhäuser, 1979, 13－59.
［A2］Barbu, V. and Precupanu, Th., Convexity and optimization in Banach spaces, Reidel, 1986, p. 101 ff.

王斯雷 译

**次直积［subdirect product；подпрямое произведение］，代数系统的**

系统的直积（Descartes 积）中子系统的一个特殊类型（见**直积**（direct product））．令 $A_i (i \in I)$ 是一族同一类型的代数系统，又令 $A = \prod_{i \in I} A_i$ 是这些系统的直积，带有射影 $\rho_i$: $A \to A_i (i \in I)$．具有同一类型的一个代数系统 $B$ 称为系统 $A_i$ 的一个次直积（subdirect product），如果存在一个嵌入 $m: B \to A$，使得同态 $\rho_i m (i \in I)$ 是满射．有时次直积指的是任意一个与这个直积的子系统同构的系统；于是满足上述条件的系统称为特殊次直积（special subdirect product）．在环论和模论中，次直积也称为次直和（subdirect sum）．次直积（次直和）记作 $\prod_{i \in I}^{s} A_i$（相应地记作 $\sum_{i \in I}^{s} A_i$）．

下列条件是等价的：a）系统 $B$ 是系统 $A_i (i \in I)$ 的一个次直积；b）存在满同态的一个分离族 $f_i$: $B \to A_i (i \in I)$；c）存在系统 $B$ 的一族合同 $\rho_i (i \in I)$，使得这些合同的交是恒等合同，并且对每个 $i \in I$，$B/\rho_i \cong A_i$．任意**泛代数**（universal algebra）是次直不可约代数的一个次直积．

依范畴论的观点，次直积的概念是包含零（一个元素）子系统的代数系统正则积概念的对偶概念．

М．Ш．Цаленко 撰

【补注】 一个代数 $B$ 称为次直不可约的（subdirectly irreducible），如果在 $B$ 被表示成次直积 $\prod_{i \in I}^{s} A_i$ 的表示内，同态 $B \to A_i$ 中有一个是同构（等价的说法是，如果 $B$ 上恒等同余不能表成严格大的同余的交）．关于每一个代数都可以表成次直不可约代数的一个次直积的定理属于 G．Birkhoff（［A1］）；它的用处在于这样的事实，在许多熟悉的簇中，次直不可约代数的数量很少，而且可以很容易被明显地描述出来．例如，唯一的次直不可约 **Boole 代数**（Boolean algebra）就是二元链．

**参考文献**

［A1］Birkhoff, G., Subdirect unions in universal algebra, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **50** (1944), 764－768.
［A2］Cohn, P. M., Universal algebra, Reidel, 1981.

郝钢新 译

**细分［subdivision；подразделение］**，亦称重分，几何单纯复形 $K$ 的

一个几何**单纯复形**（simplicial complex）$K_1$，它

的底空间 $|K_1|$ 与底空间 $|K|$ 一致，又 $K_1$ 的每个单形包含在 $K$ 的某个单形内．在实际操作时，细分是通过将 $K$ 的单形分解为更小的单形而得到的，不过，在分解每个单形时，要使它和面的分解匹配．特别，$K$ 的每个顶点是 $K_1$ 的顶点．通常，启用细分是为了证明多面体的那些用组合方式定义的特征（例如见**抽象多面体**（polyhedron, abstract），**Euler 特征**（Eular characteristic）或**同调群**（homology group））的不变性，也用于得到具有某些必要性质（如充分小）的三角剖分（triangulation）．复形 $K$ 的中心在点 $a\in|K|$ 的星形细分（stellar subdivision）是用下面的办法产生的．$K$ 的不包含 $a$ 的闭单形保持不变．包含 $a$ 的每个闭单形 $\sigma$，分裂为一些顶点在 $a$，底为 $\sigma$ 的、不包含 $a$ 的那些面上的锥形．对同一个多面体的任意两个三角剖分 $T_1$ 和 $T_2$，存在 $P$ 的一个三角剖分 $T_3$，它既可以从 $T_1$，也可以从 $T_2$ 用一序列的星形细分得到．星形细分概念也可用抽象单纯复形（单纯概形）的语言陈述．闭子复形的任一星形细分，均可扩充为整个复形的星形细分．复形 $K$ 的导出复形（derived complex）$K'$ 是对 $K$ 施行一串星形细分而得到的，不过这些星形细分的顶点均为 $K$ 的开单形的点，而且按维数减少的顺序进行．对复形 $L$ 的任一闭子复形 $K$，子复形 $K'\subset L'$ 在下述意义下完全：由单形 $\sigma\in L'$ 的所有顶点属于 $K'$ 这一事实，便可推出 $\sigma\in K'$．如果导出复形的中心均取为单形的重心，得到的便是重心重分（barycentric subdivision）．如果 $n$ 维复形 $K$ 的每个单形的直径均不超过 $d$，那么重心重分里的诸单形的直径不会超过 $nd/(n+1)$．在 $K$ 的 $m$ 重重心重分里，诸单形的直径不会超过 $(n/n+1)^m d$．因此取 $m$ 足够大，这些直径就可任意小．

**参考文献**


[1] Александров, П. С., Комбинаторная топология, М.-Л., 1947（英译本：Aleksandrov, P. S., Combinatorial topology, Graylock, 1956）．

[2] Hilton, P. J. and Wylie, S., Homology theory. An introduction to algebraic topology, Cambridge Univ. Press, 1965（中译本：P. J. 希尔顿，S. 瓦理，同调论，上海科学技术出版社，1963）．


С. В. Матвеев 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Maunder, C. R. F., Algebraic topology, Cambridge Univ. Press, 1980.

[A2] Spanier, E. H., Algebraic topology, McGraw-Hill, 1966（中译本：E. H. 斯潘尼尔，代数拓扑学，上海科学技术出版社，1987）．


沈信耀 译　潘建中 校

**子表述性质［subformulation property; подформульности свойство］，子公式性质（subformula property）**

某些逻辑演算和逻辑数学演算的一个性质（见**逻辑演算**（Logical calculus）；**逻辑数学演算**（Logico-mathematical calculus）），在这些演算中每一个法则的前提中的公式是由出现在该法则的结论中的公式的子公式构成的．子公式性质使得能够颠倒推演的搜寻（见 **Gentzen 形式系统**（Gentzen formal system））．为了改进在推演搜寻中的能行性，使用了各种子公式性质的特殊化和一般化．　　С. Ю. Маслов 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Schwichtenberg, H., Some applications of cut-elimination in J. Barwise (ed.), Handbook of Mathematical Logic, North-Holland, 1977, 867 – 896.

[A2] Beth, E. W., Formal methods, Reidel, 1962, Sects., 27 – 28

[A3] Kleene, S. C.: Introduction to metamathematics, North-Holland, 1950（中译本：S. C. 克林，元数学导论，科学出版社，上册 1984，下册 1985）


卢景波 译　罗里波 校

**子群［subgroup; подгруппа］**

群（group）$G$ 的非空子集 $H$，对于定义于 $G$ 的运算，它自身成为群．群 $G$ 的子集 $H$ 是 $G$ 的子群，当且仅当：1）$H$ 包含它的任两个元素的积；2）如 $H$ 包含任一元素 $h$，则同时含有它的逆 $h^{-1}$．在有限群及周期群的情形条件 2）是多余的．

群 $G$ 中仅由元素 1 作成的子集显然是子群：称为 $G$ 的单位子群（unit subgroup），通常用 $E$ 表示．又 $G$ 本身是子群．不同于 $G$ 的子群称为 $G$ 的真子群（proper subgroup），无限群的真子群可与 $G$ 本身同构．群 $G$ 本身和子群 $E$ 称为平凡子群（trivial subgroup），而所有其他子群是非平凡的（non-trivial）．

群 $G$ 的任两个子群（或任意子群的集合）的集论交集是 $G$ 的子群．$G$ 中包含某非空子集 $M$ 的全部元素的所有子群的交称为由集合 $M$ 生成的子群（subgroup generated by the set），由 $\{M\}$ 表示．若 $M$ 由一个元素 $a$ 组成，则 $\{a\}$ 称为元素 $a$ 的循环子群（cyclic subgroup）．同某个循环子群重合的群称为**循环群**（cyclic group）．

子群的集论并集一般地不是子群．子群 $H_i\ (i\in I)$ 的集合并生成的子群称为子群 $H_i\ (i\in I)$ 的联合（join of subgroups）．

群 $G$ 的两个子群 $S_1$ 及 $S_2$ 的乘积是所有可能的（不同的）乘积 $s_1s_2$，其中 $s_1\in S_1$，$s_2\in S_2$，组成的集合．两个子群 $H_1$，$H_2$ 的积是子群，当且仅当 $H_1H_2=H_2H_1$，这时积 $H_1H_2$ 与由 $H_1$ 和 $H_2$ 生成的子群（即 $H_1$ 和 $H_2$ 的联合）重合．

子群的同态象是子群. 若群 $G_1$ 同构于群 $G$ 的子群 $H$, 则称 $G_1$ 可嵌入到 $G$ 中 (作为群). 若给定两个群, 它们每一个都同构于另一个的真子群, 也不一定得出这两个群本身是同构的 (亦见**同态** (homomorphism); **同构** (isomorphism)).

О. А. Иванова 撰

【补注】


**参考文献**

[A1] Курош, А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967 (中译本: А. Г. 库洛什: 群论, 高等教育出版社, 上册, 1987; 下册, 1982).

[A2] Hall, M., The theory of groups, Macmillan, 1959 (中译本: M. 赫尔, 群论, 科学出版社, 1981).


石生明 译 王 杰 校

**子群的指数** [**subgroup, index of a; подгруппы индекс**], 在群 $G$ 中的

$G$ 对于子群 $H$ 的任何分解中**陪集** (coset) 的个数 (在无限群情形, 是这些陪集的集合的基数). 若陪集数为有限, $H$ 称为 $G$ 中有限指数的子群 (subgroup of finite index). 有限指数的有限个子群的交本身仍有有限指数 (Poincaré 定理 (Poincare theorem)). $G$ 中子群 $H$ 的指数常记成 $|G: H|$. 子群 $H$ 的阶与其指数 $|G: H|$ 相乘的积等于 $G$ 的阶 (Lagrange 定理 (Lagrange theorem)). 对于相应的基数, 这个关系可应用于有限群也可应用到无限群.


**参考文献**

[1] Каргаполов, М. И., Мерзляков, Ю. И., Основы теории групп, 3 изд., М., 1982 (英译本: Kargapolov, M. I. and Merzljakov, J. I., Fundamentals of the theory of groups, Springer, 1979).

[2] Курош, А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967 (中译本: А. Г. 库洛什, 群论, 高等教育出版社, 上册, 1987; 下册, 1982).


О. А. Иванова 撰 石生明 译 王 杰 校

**子群列** [**subgroup series; подгрупп ряд**]

**群** (group) $G$ 的逐个地包含的子群的有限链

$$E = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \cdots \subseteq G_n = G \qquad (*)$$

或

$$G = G_1 \supseteq G_2 \supseteq \cdots \supseteq G_{n+1} = E.$$

也可考虑嵌入子群的无限链 (上升或下降的), 它们可用数列来标号或甚至用某有序集的元素来标号. 通常称它们为**子群系统** (subgroup system).

次正规列, 正规列及中心列在群论中起重要作用. 子群列 (*) 称为次正规的 (subnormal), 若链中每个子群是下一项的正规子群. 若每个子群 $G_i$, $i = 0, \cdots, n$ 还在 $G$ 中正规, 则 (*) 称为 $G$ 的正规列 (normal series). 也有不同的术语, 将这里的次正规列给以名称正规列, 而这里定义的第二个概念用了术语 "不变列" (invarint series). 商群 $G_{i+1}/G_i$ 称为因子 (factor), 而数目 $n$ 是次正规列的长度 (length). 正规列 (*) 称为中心的 (central), 若它的因子是中心的, 即对所有 $i$, $G_{i+1}/G_i$ 是在群 $G/G_i$ 的中心内, 或等价地, $G_{i+1}$ 和 $G$ 的换位子, 对所有 $i$, 是位于 $G_i$ 中. 若对所有 $i$, $G_{i+1}/G_i$ 是群 $G/G_i$ 的中心 (分别地, 若 $G_{i+1}$ 与 $G$ 的换位子与 $G_i$ 重合), 则子群列 (*) 称为 $G$ 的上中心列 (upper central series) (分别地, 下中心列 (lower central series)). 设给定群 $G$ 的次正规 (分别地正规或中心) 列以及某子群 $H \subseteq G$. 令 $H_i = G_i \cap H$, $i = 0, \cdots, n$, 则链

$$E = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \cdots \subseteq H_n = H$$

是 $H$ 中的次正规 (分别地正规或中心) 列, 而该列中的因子同构于列 (*) 中相应因子的子群. 设 $G/N$ 是 $G$ 的商群, 则链

$$E = G_0 N/N \subseteq G_1 N/N \subseteq \cdots \subseteq G_n N/N = G/N$$

是 $G/N$ 中的次正规 (分别地正规或中心) 列, 且该列中的因子是列 (*) 中相应因子的同态象.

群中的两个次正规列 (特别地正规列) 称为同构的 (isomorphic), 若它们有相同的长度且在它们的因子间有一一对应使得对应的因子同构. 若其中一个列的每个子群与另一个列中的一个子群重合, 则第二个列称为第一个列的加细 (refinement). 一个正规列, 若它不能被加细就称为主列 (principle series 或 chief series); 而不能被加细的次正规列称为合成列 (composition series). 这些列中的因子分别叫做主因子 (chief factors) 和合成因子 (composition factors). 群的任何两个次正规 (分别地正规或中心) 列有同构的次正规 (分别地正规或中心) 的加细. 特别地, 任何两个主 (合成) 列是同构的 (见 **Jordan-Hölder 定理** (Jordan-Hölder theorem)).


**参考文献**

[1] Каргаполов, М. И., Мерзляков, Ю. И., Основы теории групп, 3 изд., М., 1982 (英译本: Kargapolov, M. I. and Merzljakov, J. I., Fundamentals of the theory of groups, Springer, 1979).

[2] Черников, С. Н., Группы с заданными свойствами системы подгрупп, М., 1980.


Н. С. Романовский 撰

【补注】


**参考文献**

[A1] Suzuki, M., Group theory, I, Springer, 1986.

[A2] Robinson, D. J. S., A course in the theory of

groups, Springer, 1980. 石生明 译 王 杰 校

## 子群系统 [subgroup system; подгрупп система]

群 (group) $G$ 的子群 (subgroup) 的集合 $\mathfrak{A}$，满足下列条件：1) $\mathfrak{A}$ 含单位元子群 1 及群 $G$ 本身；2) $\mathfrak{A}$ 按包含关系是全序的，即对 $\mathfrak{A}$ 中任何 $A$ 及 $B$ 或有 $A \subseteq B$ 或有 $B \subseteq A$. 称 $\mathfrak{A}$ 中两个子群 $A$ 及 $A'$ 构成一个跳跃 (jump)，若在 $\mathfrak{A}$ 中 $A'$ 紧跟着 $A$. 若子群系统对于并和交是封闭的，则称它是完全的 (complete)；若对于完全子群系统中任何跳跃 $A$ 及 $A'$，$A$ 是 $A'$ 的正规子群 (normal subgroup)，则称它为次正规的 (subnormal). 商群 $A'/A$ 称为子群系统 $\mathfrak{A}$ 的因子 (factor). 若子群系统 $\mathfrak{A}$ 中每个成员都是 $G$ 的正规子群，则称为正规的 (normal). 如果一个次正规系统 (在集论意义下) 包含另一个系统，则称第一个系统为第二个的加细 (refinament). 正规子群系统称为中心的 (central)，如果它的所有因子是中心的，即 $A'/A$ 包含在 $G/A$ 的中心中，对任何跳跃 $A$ 和 $A'$. 次正规子群系统称为可解的 (solvable)，如果它的所有因子是 Abel 群.

群中出现某种子群系统能使从所有群的类中区分出各种子类，这些子类中最常用的有 $RN$, $\overline{RN}^*$, $\overline{RN}$, $RI$, $RI^*$, $\overline{RI}$, $Z$, $ZA$, $ZD$, $\overline{Z}$, $\widetilde{N}$, $N$——它们是下面一些群的 Курош-Черников 类 (Kurosh-Chernikov classes)：

$RN$ 群：存在可解的次正规子群系统；

$\overline{RN}^*$ 群：存在良序的上升可解次正规子群系统；

$\overline{RN}$ 群：这种群中任何次正规子群系统可加细成可解的次正规子群系统；

$RI$ 群：存在可解的正规子群系统；

$RI^*$ 群：存在良序上升可解正规子群系统；

$\overline{RI}$ 群：这种群中的任何正规子群系统可被加细成可解正规子群系统；

$Z$ 群：存在中心子群系统；

$ZA$ 群：存在良序上升中心子群系统；

$ZD$ 群：存在良序下降中心子群系统；

$\overline{Z}$ 群：这种群的任何正规子群系统可加细成中心子群系统；

$\widetilde{N}$ 群：对该群的任何子群皆有子群系统通过它；

$N$ 群：对该群的任何子群皆有良序上升次正规子群系统通过它.

子群系统的特殊情形是**子群列** (subgroup series).

**参考文献**

[1] Курош, А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967 (中译本：А. Г. 库洛什，群论，高等教育出版社，上册，1987；下册，1982).

[2] Черников, С. Н., Группы с заданными свойствами системы подгрупп, М., 1980.

[3] Каргаполов, М. И., Мерзляков, Ю. И., Основы теории групп, 3 изд., М., 1982 (英译本：Kargapolov, M. I. and Merzljakov, J. I., Fundamentals of the theory of groups, Springer, 1979)

Н. С. Романовский 撰

【补注】

**参考文献**

[A1] Robinson, D. J. S., Finiteness conditions and generalized soluble groups, 1－2, Springer, 1972.

石生明 译 王 杰 校

## 下调和函数 [subharmonic function; субгармоническая функция]，亦称次调和函数

在 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n (n \geqslant 2)$ 的区域 $D \subset \mathbf{R}^n$ 中定义的、关于点 $x = (x_1, \cdots, x_n)$ 的函数 $u = u(x): D \to [-\infty, \infty)$，且有下面性质：1) $u(x)$ 在 $D$ 中上半连续；2) 在每一点 $x_0 \in D$ 对任意小的值 $r > 0$ 满足：

$$u(x_0) \leqslant I(u; x_0, r) = \frac{1}{s_n r^{n-1}} \int_{S(x_0, r)} u(x) d\sigma(x),$$

这里 $I(u; x_0, r)$ 是函数 $u(x)$ 在以 $x_0$ 为心、$r$ 为半径的球面 $S(x_0, r)$ 上的平均值，而 $s_n = 2\pi^{n/2}\Gamma(n/2)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中单位球面的面积；3) $u(x) \not\equiv -\infty$ (有时去掉这一条件). 在下调和函数的定义中，球面上的平均值 $I(u; x_0, r)$ 可以换成球体 $B(x_0, r)$ 上的平均值

$$J(u; x_0, r) = \frac{1}{v_n r^n} \int_{B(x_0, r)} u(x) dv(x),$$

其中 $v_n = s_n / n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中单位球体的体积.

下调和函数的下述等价定义解释了"下调和函数"命名的由来，它把上述条件 2) 换成 2')：如果 $\Delta$ 是 $D$ 的相对紧子区域，$v(x)$ 是 $\Delta$ 中的调和函数并在闭包 $\overline{\Delta}$ 上连续，且在边界 $\partial\Delta$ 上满足

$$u(x) \leqslant v(x), \qquad (1)$$

则不等式 (1) 在 $\Delta$ 中处处成立 ($v(x)$ 称为下调和函数 $u(x)$ 在 $D$ 里的调和强函数 (harmonic majorant)). 如果函数 $u(x)$ 属于 $C^2(D)$ 类，则它在 $D$ 中为下调和的必要与充分条件是，经 **Laplace 算子** (Laplace operator) 作用的结果 $\Delta u$ 在 $D$ 中非负.

下调和函数的概念实质上在 H. Poincaré 的**扫除法** (balayage method) 中已阐述. F. Hartogs ([1]) 关于多复变解析函数论的工作也涉及下调和函数；而对下调和函数的系统研究始于 F. Riesz ([2]). 下调和函数与单 (或多) 复变量 $z = (z_1, \cdots, z_n) (n \geqslant 1)$ 的解析函数 $f(z)$ 之间关系密切. 事实上，解析函数的模 $|f(z)|$ 与模的对数 $\ln|f(z)|$ 都是下调和函数，因此可利用下调和函数来研究解析函数. 另一方面，条件 2') 表明下调和函数可以看作单个实变量的凸函

数的类似物，见凸函数（实变量的）(convex function (of a real variable)).

下调和函数的简单性质．

1) 如果 $u_1, \cdots, u_m$ 是 $D$ 中的下调和函数，$\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ 为非负数，则线性组合 $\sum_{k=1}^{m}\lambda_k u_k$ 也是 $D$ 中的下调和函数．

2) 下调和函数有限族 $\{u_k\}_{k=1}^{m}$ 的上包络 $\sup\{u_k(x): 1\leqslant k\leqslant m\}$ 是下调和函数．如果下调和函数无限族的上包络是上半连续的，则它也是下调和函数．

3) 一致收敛的与单调减的下调和函数序列都收敛于下调和函数．

4) 如果 $u(x)$ 是 $D$ 中的下调和函数且 $\varphi(u)$ 是函数 $u$ 的值域 $E$ 上的、凸的不减函数，或者当 $u(x)$ 是 $D$ 中的调和函数而 $\varphi(u)$ 是 $E$ 上的凸函数时，则 $\varphi(u(x))$ 是 $D$ 中的下调和函数．特别地，若 $u(x)$ 是 $D$ 中的下调和函数，则 $e^{\lambda u(x)}$ $(\lambda>0)$ 及 $[u^+(x)]^k$ $(k\geqslant 1$，其中 $u^+(x)=\max\{u(x), 0\})$ 都是 $D$ 中的下调和函数；如果 $u(x)$ 是 $D$ 中的调和函数，则 $|u(x)|^k (k\geqslant 1)$ 是 $D$ 中的下调和函数．

5) 最大值原理 (maximum principle)：如果 $u(x)$ 是 $D$ 中的下调和函数，且对任意边界点 $\zeta\in\partial D$，任意 $\varepsilon>0$ 存在一个邻域 $V=V(\zeta)$ 使得在 $D\cap V$ 里 $u(x)<\varepsilon$，则在 $D$ 里要么 $u(x)<0$ 要么 $u(x)\equiv 0$．这个性质对于无界区域 $D$ 也成立，这时对于 $\zeta=\infty\in\partial D$，邻域 $V$ 取球的外部 $V=V(\infty)=\{x\in\mathbf{R}^n: |x|>R\}$.

6) 如果 $u(x)$ 是复平面 $\mathbf{C}$ 的区域 $D$ 中的下调和函数，$z=z(w)$ 是区域 $D'\subset\mathbf{C}^n$ 到 $D$ 内的全纯映射，则 $u(z(w))$ 是 $D'$ 中的下调和函数．

7) 区域 $D\subset\mathbf{R}^n$ 中的函数 $u(x)$ 是调和的，当且仅当 $u(x)$ 与 $-u(x)$ 都是 $D$ 中的下调和函数（见调和函数 (harmonic function)).

8) 如果 $u(x)$ 是整个平面 $\mathbf{R}^2$ 上的上有界的下调和函数，则 $u(x)=$ 常数（在 $\mathbf{R}^n (n\geqslant 3)$ 里这个性质不成立）．

求解调和函数的 **Dirichlet 问题** (Dirichlet problem) 的 **Perron 法** (Perron method) 是建立在性质 2), 5) 及 7) 的基础上的．

下述下调和函数平均值的凸性性质 (convexity properties of the mean values of subharmonic functions) 具有很重要的意义：如果 $u(x)$ 是圆环 $r_1\leqslant r=|x-x_0|\leqslant r_2 (0<r_1<r_2)$ 中的下调和函数，则平均值 $I(u; x_0, r)$、$J(u; x_0, r)$ 以及最大值

$$M(u; x_0, r)=\max\{u(x): |x-x_0|=r\},$$

在区间 $r_1\leqslant r\leqslant r_2$ 上，当 $n=2$ 时，是 $\ln r$ 的凸函数，而当 $n\geqslant 3$ 时，是 $r^{2-n}$ 的凸函数；如果 $u(x)$ 是圆盘（球体）$0\leqslant r=|x-x_0|\leqslant r_2$ 里的下调和函数，则 $I(u; x_0, r)$ 与 $J(u; x_0, r)$ 在区间 $0\leqslant r\leqslant r_2$ 上还是 $r$ 的连续的不减函数；而且

$$I(u; x_0, 0)=J(u; x_0, 0)=u(x_0);$$

在后面这种情况下还有

$$u(x_0)\leqslant J(u; x_0, r)\leqslant I(u; x_0, r)$$

在 $0\leqslant r\leqslant r_2$ 成立．对于取定的 $u$ 和 $r$，平均值 $I(u; x_0, r)$ 与 $J(u; x_0, r)$ 作为点 $x_0$ 的函数在对应的子区域 $D'\subset D$ 里是下调和函数，且 $J(u; x_0, r)$ 是连续的．通过建立足够高次的迭代

$$u_m^{(k)}(x)=J\left[u_m^{(k-1)}; x, \frac{1}{m}\right], \quad u_m^{(0)}(x)=u(x),$$

可以得到具有任意阶光滑性的单调减的下调和函数序列 $\{u_m^{(k)}(x)\}_{m=m_0}^{\infty}$，当 $m\to\infty$ 时，它收敛于给定的下调和函数 $u(x)$.

非负质量的 **Newton 位势** (Newton potential) 与**对数位势** (logarithmic potential) 若冠以负号，则为 $\mathbf{R}^n$ 中处处下调和的函数．另一方面，下调和函数论的基本定理之一是 Riesz 局部表示定理 (Riesz local representation theorem)：任意下调和函数可以表示成一个调和函数与带负号的位势之和（见 [2]）．更精确地说，若 $u(x)$ 是区域 $D\in\mathbf{R}^n$ 里的下调和函数，则存在 $D$ 上唯一的非负 Borel 测度 $\mu$（与 $u(x)$ 关联的测度，或称 Riesz 测度 (Riesz measure)），使得对任意紧集 $E\subset D$ 有表示式

$$u(x)=\int_E K(x-\zeta)d\mu(\zeta)+h(x) \qquad (2)$$

成立，这里，当 $n=2$ 时，$K(x-\zeta)=\ln|x-\zeta|$，当 $n\geqslant 3$ 时，$K(x-\zeta)=-|x-\zeta|^{2-n}$，而 $h(x)$ 是在 $E$ 的内部调和的函数．Riesz 定理建立了下调和函数论与**位势论** (potential theory) 之间的紧密联系．

如果 $E$ 是一个正则闭区域 $\bar{G}$，是有界的，比如是由一个 Ляпунов 曲面所界定的，且具有 **Green 函数** (Green function) $g(x, \zeta)$，则与 (2) 式一样，利用 Green 位势表示的公式

$$u(x)=-\int_{\bar{G}} g(x,\zeta)d\mu(\zeta)+w(x) \qquad (3)$$

也成立，其中 $w(x)$ 是下调和函数 $u(x)$ 在区域 $G$ 的最小调和强函数 (least harmonic majorant).

一般说来，形如 (3) 的表示式在 $u(x)$ 的整个定义域 $D$ 里是不成立的．在下调和函数论中，很重要的问题是区分出那些在整个区域 $D$ 有表达式 (3) 成立的下调和函数的类，即区分出在整个区域 $D$ 有调和强函数的下调和函数 $u(x)$ 的类 $A$ 的问题．例如，

如果 $D=B(0,R)$ 是一个球体（圆盘）且存在常数 $c=c(u)$ 使得

$$\int_{S(0,R)} u^+(r\xi)d\sigma(\xi) < C(u) < +\infty,\ 0<r<1, \quad (4)$$

则 $u(x)$ 在 $D$ 里有表达式 (3)，且最小调和强函数 $w(x)$ 可用 Poisson-Stieltjes 积分表示成：

$$w(x)=\int \frac{R^{n-2}(R^2-|x|^2)}{|x-\xi|^n}\, d\nu(\xi), \qquad (5)$$

其中 $\nu$ 是集中在边界球面（圆周）$\partial D=S(0,R)$ 上且由条件 $\int d\nu(\xi)=1$ 规范的任意的带号 Borel 测度（**边界测度**（boundary measure））.

对于 (5) 式，在实际应用中重要的是要了解，在什么条件下边界测度 $\nu$ 只有负的奇异分量，即在什么条件下典型分解 $\nu=\nu^+-\nu^-$ 的分量 $\nu^+$ 是绝对连续的．通过引入严格下调和类这个问题得到解答（见[11]－[13]，[15] 以及 [10]，其间也考虑了相应的推广）．设 $\psi(y)$ 是关于 $y$ 的增加的凹函数且 $\lim_{y\to+\infty} y/\psi(y)=+\infty$．称一个函数 $u(x)(x\in D)$ 为相对于 $\psi(y)$ 严格下调和的（strictly subharmonic），如果 $\psi(u(x))$ 是下调和函数．例如，**对数下调和函数**（logarithmically-subharmonic function）$u(x)\geqslant 0$（即 $\ln u(x)$ 是下调和函数）属于严格下调和函数类．如果球 $D$ 里的严格下调和函数 $u(x)$ 满足条件 (4)，则 $u(x)$ 在 $D$ 里可表示成形式 (3) 且边界测度 $\nu$ 可用分解式

$$d\nu(\xi)=u(\xi)d\sigma(\xi)-d\nu^-(\xi),\ \xi\in\partial D \qquad (a)$$

来刻画，其中 $u(\xi)$ 是函数 $u(x)$ 的径向边界值（它关于球面 $\partial D=S(0,R)$ 上的 Lebesgue 测度几乎处处存在），而 $\nu^-\geqslant 0$ 是测度 $\nu$ 的奇异分量．

球体 $D$ 里 $A$ 类的下调和函数在 $\partial D=S(0,R)$ 上几乎处处有径向边界值．但是，已经构造出在 $D$ 里有界、连续的下调和函数的这种例子，它在 $\partial D$ 上处处没有不相切的边界值．这种现象对调和函数来说是不会发生的．为了使不相切的边界值存在，除了 (4) 以外，需要对 $D$ 里的关联测度 $\mu$ 附加另外的条件（例如见[14]）.

下调和函数论及其应用的本质问题之一，是刻画 $A$ 类中不同子类的函数的边界性质．引进这些子类的一般方法在于，对那些相对于凹函数 $\psi(y)$ 的严格下调和函数 $u(x)$，考虑满足下面条件的任意的不减函数 $\varphi(y)$：它相对于 $\psi(y)$ 是凸的且 $\lim_{y\to+\infty}\varphi(y)/\psi(y)=+\infty$，从而引进 $A_\varphi$ 类．对于球，它由条件

$$\int_{S(0,R)} \varphi^+(u(r\xi))d\sigma(\xi) < C(u,\varphi) < +\infty,$$

$$0<r<1$$

来定义．关于下调和函数的边界性质，见[3]－[5]，[10]－[16].

对于可表示成两个下调和函数之差的函数，引进了 R. Nevanlinna 意义下特征函数的概念，且**有界特征函数**（function of bounded characteristic）的理论也已推广（见[3]，[7]）.

**整函数**（entire function）论的一个有特色的推广是整个空间 $\mathbf{R}^n$ 里的下调和函数论．这里，整函数的 Weierstrass 与 Hadamard 的经典表示定理连同增长性与值分布理论，渐近值与渐进路线理论等都已建立．

在多复变解析理论中，研究**多重下调和函数**（plurisubharmonic function）与**多重调和函数**（pluriharmonic function）子类是相当重要的（见[17]）．关于下调和函数在公理系统中的推广，见[9].

**参考文献**

[1] Hartogs, F., Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlichen, insbesondere über die Darstellung derselben durch Reiben welche nach Potenzen einer Veränderlichen fortschreiten, *Math. Ann.*, **62** (1906), 1－88.

[2A] Riesz, F., Sur les fonctions sousharmoniques et leur rapport à la théorie du potentiel I, *Acta Math.*, **48** (1926), 329－343.

[2B] Riesz, F., Sur les fonctions sousharmonique et leur rapport à la théorie du potentiel II, *Acta Math.*, **54** (1930), 321－360.

[3] Привалов, И. И., Субгармонические функции, М.-Л., 1937.

[4] Привалов, И. И., Граничные свойства однозначных аналитических функций, М., 1941.

[5] Привалов, И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.-Л., 1950（中译本：И. И. 普里瓦洛夫，解析函数的边界性质，科学出版社，1956）.

[6] Radó, T., Subharmonic functions, Springer, 1937.

[7A] Hayman, W. and Kennedy, P., Subharmonic functions, 1., Acad. Press, 1976.

[7B] Hayman, W., Subharmonic functions, 2., Acad. Press, 1989.

[8] Brelot, M., Etude des functions sousharmoniques au voisinage d'un point, Hermann, 1934.

[9] Brelot, M., Lectures on potential theory, Tata Inst., 1967.

[10] Heins, M., Hardy classes on Riemann surfaces, Springer, 1969.

[11] Соломенцев, Е. Д., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, 1938, 5－6, 571－582.

[12] Привалов, И. И., Кузнецов, П. И., 《Матем. сб.》. **6** (1939), 3, 345－376.

[13] Соломенцев, Е. Д., 《Вестн. МГУ》. **5** (1959),

73 – 91.

[14] Соломенцев, Е. Д., «Чехосл. матем. ж.», 8(1958), 4, 520 – 536.

[15] Gårding, L. and Hormander, L., Strongly subharmonic functions, *Math. Scand.*, 15(1964), 93 – 96.

[16] Соломенцев, Е. Д., в кн.: Итоги науки. Математический анализ. Теория вероятностей. Регулирование, 1962(1964) М., 83 – 100.

[17] Владимиров, В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964(英译本: Vladimirov, V. S., Methods of the theory of functions of several complex variables, M. I. T., 1966).

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 公理化位势论可建立在性质 1)、3) 的基础上且对由负的下调和函数组成的集合 $S$ 补充如下性质来加以完善: a) $S$ 的子集的上确界的上半连续正则化是下调和的; b) (Riesz 分解性质 (Riesz decomposition property)) 对任意 $u,v,w\in S$, 若 $u\geqslant v+w$, 则存在 $v',w'\in S$ 使得 $u=v'+w'$, $v'\geqslant v$, $w'\geqslant w$; 及 c) 存在一个由连续下调和函数构成的足够好的子锥使得每个 $u\in S$ 可表成子锥中某个单调减序列的极限. 见[A1].

参考文献

[A1] Bliedtner, J. and Hansen, W., Potential theory. An analytic and probabilistic approach to balayage, Springer, 1986(中译本: J. 波里特诺、W. 汉森, 位势理论—扫除之分析与概率方法, 厦门大学出版社, 1994).

[A2] Ronkin, L. I., Introduction to the theory of entire functions of several variables, Amer. Math. Soc., 1974(译自俄文).

[A3] Kellog, O. D., Foundations of potential theory, Dover, reprint, 1954, P. 315 ff.

高琪仁 吴炯圻 译

**子格 [sublattice; подрешетка]**

一个格 (lattice) 的对于其运算 + 和 · 封闭的子集 $A$. 也就是对 $A$ 的任意元素 $a$ 及 $b$, 总有 $a+b\in A$ 和 $a\cdot b\in A$. 因此, 当把格看作具有两个二元运算的泛代数时, 子格就是子代数. 子格 $A$ 称为凸的 (convex), 如果对任意 $a,b\in A$ 及 $a\leqslant c\leqslant b$, 总有 $c\in A$. 一个格的任一只含一个元素的子集是子格的例子. 其他子格的例子有: 理想、滤子和区间. 所有这些子格都是凸的. 链的任意一个子集是它的子格 (不必是凸的). 一个给定格的所有子格, 对于包含关系定义的序构成一个格.

参考文献

[1] Birkhoff, G., Lattice theory, Colloq. Publ., 25, Amer. Math. Soc., 1973.

[2] Скорняков, Л. А., Элементы теории структур, М., 1970(英译本: Skornyakov, L. A., Elements of lattice theory, A. Hilger & Hindushtan Publ. Comp., 1977).

[3] Житомирский, Г. И., в сб. Упорядоченные множества и решетки, в. 7, Саратов, 1981.

[4] Grätzer, G., General lattice theory, Birkhäuser, 1978.

Т. С. Фофанова 撰 卢景波 译

**子流形 [submanifold; подмногообразие]**

1) 狭义地说, $m$ 维拓扑流形 (manifold) $M$ 的 $n$ 维拓扑子流形是一个子集 $N\subset M$, 它在诱导拓扑下是一个 $n$ 维流形. 数 $m-n$ 是子流形 $N$ 的余维数 (codimension). 经常遇到的是局部平坦子流形, 即恒等嵌入 $i: N\to M$ 是**局部平坦嵌入** (locally flat imbedding). 子集 $N\subset M$ 是局部平坦子流形, 如果对每个点 $p\in N$ 存在这个点在 $M$ 内的一个邻域 $U$ 以及其中的局部坐标 $x_1,\cdots,x_m$, 使得 $N\cap U$ 可用这些坐标由方程 $x_{n+1}=\cdots=x_m=0$ 描述.

2) 广义地说, $m$ 维拓扑流形 $M$ 的 $n$ 维拓扑子流形是一个 $n$ 维流形 $N$, 作为点集, $N$ 是 $M$ 的子集 (即 $N$ 是 $M$ 的具有 $n$ 维流形结构的子集), 并且恒等嵌入 $i: N\to M$ 是一个浸入 (见**流形的浸入** (immersion of a manifold)). 狭义子流形必是广义子流形, 而后者也是狭义子流形, 当且仅当 $i$ 是拓扑意义下的嵌入 (即对每个点 $p\in N$ 存在 $N$ 内任意小的邻域, 它们是 $M$ 内某个邻域与 $N$ 的交).

3) 分段线性的、解析的或微分的 ($C^k$ ($l\leqslant k\leqslant\infty$) 类的) 流形 $M$ 的分段线性的 (piecewise-linear)、解析的 (analytic) 或可微的 (differentiable) ($C^l$ ($l\leqslant\infty$) 类的) 子流形 (submanifold), 广义地说 (或相应地, 狭义地说), 是具有分段线性的、解析的或微分的 ($C^l$ 类的) 流形结构的子集 $N\subset M$, 这里 $i$ 是分段线性的、解析的或微分的 ($C^l$ 类的) 浸入 (或相应地, 嵌入). $C^l$ 类微分子流形的定义当 $l=0$ 时也适用, 而且它与拓扑子流形的定义一致. 通常认为 $l\geqslant 1$.

在解析或微分的情形子流形总是局部平坦的. 所以在定义狭义解析 (微分) 子流形时, 一开始就把 1) 中利用局部坐标给出的局部平坦子流形的定义改造成解析 (微分) 形式, 即附加一个条件, 要求局部坐标 $x_1,\cdots,x_m$ 是解析 ($C^l$ 级可微) 的. 如果子集 $N$ 满足后一条件, 它就自然地具有解析 ($C^l$ 级微分) 流形的结构, 并且 $i$ 是相应结构意义下的嵌入.

狭义的分段线性子流形可被局部地表示成环绕空间内的子多面体, 并且分段线性地等价于一个单形 (见**单形 (抽象的)** (simplex (abstract))). 它不总是局部平坦的 (虽然当 $m-n>2$ 时正确); 又对于这样的流形, 拓扑意义下为局部平坦的性质与分段线性意义下局部平坦的性质并不一致 (至少不是直接地一致).

4) 对这些定义作简单修改后可给出下列定义：有边界的子流形；有边界流形的子流形（在拓扑的情形下，在环绕流形的边界处对子流形加以限制看来是合适的，见[1]）；不同分支有不同维数的子流形；无限维流形的子流形（[2]）；以及复解析流形的复解析子流形．

狭义子流形的概念是曲线和曲面概念的直接推广．广义的子流形被用于 Lie 群论（此概念是在这里被首次引入的（[3]））、微分几何（[4]）以及**叶状结构**（foliation）理论．

5) 在**代数几何学**（algebraic geometry）里，子流形（在这里通常称为子簇（subvariety））是代数簇在 Zariski 拓扑（Zariski topology）下的一个闭子集．因此闭子簇是由代数方程确定的．除了从 $\mathbf{R}$ 过渡到其他域之外，这种情形的子簇概念的另一个变化是允许有奇点的子簇．

**参考文献**


[1] Рохлин, В. А., Фукс, Д. Б., Начальный курс топология. Геометрические главы, М., 1977（英译本：Rokhlin, V. A., Fuks, D. B., Beginner's course in topology. Geometric chapters. Springer, 1984）.

[2] Lang, S., Introduction to differentiable manifolds, Interscience, 1967.

[3] Chevalley, C., Theory of Lie groups, 1, Princeton Univ. Press, 1946.

[4] Sternberg, S., Lectures on differential geometry, Prentice-Hall, 1964.


Д. В. Аносов 撰

【补注】 任何 $C^r$ 流形 $M^n$ 可被 $C^r$ 嵌入到 $\mathbf{R}^{2n}$ 内（Whitney 嵌入定理（Whitney imbedding theorem）），所以任何 $C^r$ 流形可被看作某个 $\mathbf{R}^m$ 的子流形．

**参考文献**


[A1] Hirsch, M. W., Differential topology, Springer, 1976.

[A2] Borisovich, Yu., Bliznyakov, N. and Izrailevich, Yu., Introduction to topology, Kluwer, 1993（译自俄文）.


陈志杰 译

**子矩阵**［submatrix；подматрица］，$m\times n$ 矩阵 $A$ 的一个 $k\times l$ 矩阵，这里 $1\leqslant k\leqslant m$，$1\leqslant l\leqslant n$，它由 $A$ 中确定的 $k$ 行与确定的 $l$ 列相交处的元素，按照原来的顺序所构成．矩阵 $A$ 的一个 $k$ 阶方子矩阵的行列式称为 $A$ 的 $k$ 阶子式（minor）．

Т. С. Пиголкина 撰　蒋滋梅 译

**浸没**［submersion；субмерсия］

从 $m$ 维流形 $M$ 到 $n$ 维流形 $N(n\leqslant m)$ 中的一个映射 $f: M\to N$，在该映射下，对任何点 $p\in M$，可能诱导出 $M$ 上点 $p$ 附近的一个局部坐标 $x_1,\cdots,x_m$ 和 $N$ 上点 $f(p)$ 附近的局部坐标 $y_1,\cdots,y_n$，使得 $f$ 依照这些坐标用

$$(x_1,\cdots,x_m)\to(x_1,\cdots,x_n)$$

局部地表示．如果 $M$ 和 $N$ 具有分片线性、分片解析或（$C^k$ 阶）分片可微流形的结构和局部坐标可选取分片线性、分片解析或（$C^l$ 阶，$l\leqslant k$）分片可微，则浸没称为分片线性的（piecewise-linear）、分片解析的（piecewise-analytic）或（$C^l$ 阶）分片可微的（piecewise-differentiable）．对于带边流形（在拓扑的问题中，当趋于边界时，给映射的性质强加一个额外的条件是可取的，见[1]）和无穷维的情形（见[2]），浸没也可定义．浸没的概念在非正式的意义下是浸入（immersion）（也见**流形的浸入**（immersion of a manifold））概念的一个对偶，且它们的理论是类似的．

**参考文献**


[1] Rokhlin, V. A. and Fuks, D. B., Beginner's course in topology, Geometrical chapters, 1984.

[2] Lang, S., Introduction to differentiable manifolds, Interscience, 1967.


Д. В. Аносов 撰

【补注】 当 $M$ 是一个开流形时，浸没是通过切从的诱导映射 $TM\to TN$ 而被分类的．见[A1]．

**参考文献**


[A1] Phillips, A., Submersions of open manifolds, *Topology*, 6(1966), 171－206.


薛春华 译

**子模**［submodule；подмодуль］

**模**（module）的子系，它是加法群的子群，并且在乘以基环的元素的乘法下封闭．特别地，环 $R$ 的左（右）理想是 $R$ 作为左（右）$R$ 模的子模．一子模不等于模自身也不为 0 时称之为真（proper）子模．给定模的所有子模集合，依包含关系为序，是一个完全 Dedekind 格（见**完全可约模**（completely-reducible module））．如 $\varphi$ 是从模 $A$ 到模 $B$ 中的同态，则集合

$$\operatorname{Ker}\varphi=\{x;\ x\in A,\ \varphi(x)=0\}$$

是 $A$ 的子模，称为同态 $\varphi$ 的核（kernel of the homomorphism）．每个子模都是某个同态的核．子模称为大的（large）（或本质的（essential）），如果它与任一非零子模之交都不为零．例如，整数构成了有理数群的本质子模．每个模是其内射包的一个本质子模（见**内射模**（injective module））．模 $B$ 的子模 $A$ 称为小的（small）（或非本质的（inessential）），如果对任一子模 $A'\subseteq B$，等式 $A+A'=B$，蕴含着 $A'=B$．**链模**（chain module）的任一真子模是非本质的．例如，局部环的非可逆元素形成一个非本质子模．所有非本

质子模的和与所有极大理想之交相重合．一个左理想 $I$ 属于 Jacobson 根，当且仅当对任一有限生成左模 $M$，$IM$ 是 $M$ 中的非本质子模．小子模的元素是非生成的（non-generating），即从模的任一生成元素中去掉任一此种元素后仍能生成模（自然这并不意味着立刻将它们全去掉）．模的自同态环的 Jacobson 根等于有非本质象的自同态的集合．

**参考文献**


[1] Kasch, F., modules and rings, Acad. Press, 1982（译自德文）.

[2] Faith, C., Algebra, 1－2, Springer, 1973－1976.


Л. А. Скорняков 撰　冯绪宁 译

**次正规列 [subnormal series; субнормальный ряд]**，群 $G$ 的

$G$ 的**子群列**（subgroup series）

$$E = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \cdots \subseteq G_n = G,$$

其中每个子群 $G_i$ 是 $G_{i+1}$ 的正规子群．这时商群 $G_{i+1}/G_i$ 称为因子（factor），数 $n$ 称为次正规列的长度（length）．无限的次正规列也已被研究（见**子群系统**（subgroup system））．不能进一步加细的次正规列称为合成列（composition series），它的因子称为合成因子（composition factors）．　О. А. Иванова 撰

【补注】 次正规列也称为次不变列（subinvariant series）.

**参考文献**


[A1] Hall, M., Theory of groups, Macmillan, 1959, Sect. 8.4（中译本：M. 赫尔，群论，科学出版社，1984）.


石生明 译　王　杰 校

**次正规子群 [subnormal subgroup; субнормальная подгруппа]**，可达子群（attainable subgroup）

群的**次正规列**（subnormal series）中的任一成员．用记号 $H \lhd \lhd G$ 表示群 $G$ 的子群 $H$ 的次正规性．

**参考文献**


[1] Каргаполов, М. И., Мерзляков, Ю. И., Основы теории групп, 2 изд., М., 1977（英译本：Kargapolov, M. H. and Merzljakov, J. I., Fundamentals of the theory of groups, Springer, 1979）.


Н. Н. Вильямс 撰

【补注】 次正规子群也称为次不变子群（subinvariant subgroup）.

与其换位子群重合且除以其中心的商是单群的 $G$ 的一个次正规子群，称为 $G$ 的分量（component）．$G$ 的所有分量之积称为 $G$ 的层（layer）．在有限单群理论中，它是 $G$ 的一个重要的特征子群，例如见[A1].

**参考文献**


[A1] Suzuki, M., Group theory, 1－2, Springer, 1986.

[A2] Lennox, J. C. and Stonehewer, S. E., Subnormal subgroups of groups, Clarendon Press, 1987.

[A3] Robinson, D. J. S., A course in the theory of groups, Springer, 1982


石生明 译　王　杰 校

**子对象 [subobject; подобъект]**，范畴中一个对象的

与数学结构的子结构概念类似的一个概念．令 $\mathfrak{K}$ 是任意范畴（category），$A$ 是 $\mathfrak{K}$ 中一个固定的对象．可以在 $\mathfrak{K}$ 的以 $A$ 为值域（目标）的单态射类中定义一个前序关系（右可除关系）：$\mu: X \rightarrow A$ 先于 $\sigma: Y \rightarrow A$，或 $\mu \prec \sigma$，若有 $\mu': X \rightarrow Y$，使 $\mu = \mu' \sigma$．事实上，态射 $\mu'$ 是唯一确定的，因为 $\sigma$ 是单态射．前序关系诱导出以 $A$ 为值域的单态射之间的一个等价关系：单态射 $\mu: X \rightarrow Y$ 和 $\sigma: Y \rightarrow A$ 是等价的，当且仅当 $\mu \prec \sigma$ 且 $\sigma \prec \mu$．单态射的一个等价类叫作 $A$ 的一个子对象（subobject）．以 $\mu: X \rightarrow A$ 为代表的一个子对象有时记作（$\mu: X \rightarrow A$］或（$\mu$］．也可用 Hilbert $\tau$ 符号选择 $A$ 的子对象的代表，并将这些代表作为子对象．在集合、群、Abel 群和向量空间的范畴中，任意对象的子对象定义为子集（子群、子空间）在环绕集（群、空间）中的嵌入．但是在拓扑空间范畴中，子对象的概念比带有诱导拓扑的子集要广．

以 $A$ 为值域的单态射之间的前序关系诱导出 $A$ 的子对象之间的偏序关系：$(\mu] \leqslant (\sigma]$，若 $\mu \prec \sigma$．这个关系类似于给定集合的子集的包含关系．

若单态射 $\mu$ 是正则的（见**正规单态射**（normal monomorphism）），则任意与之等价的单态射也是正则的．从而可以谈论任意对象 $A$ 的正则子对象．特别地，以 $1_A$ 为代表的子对象是正则的．在带有零态射的范畴中，可类似地引出正规子对象．若 $\mathfrak{K}$ 有双范畴（bicategory）结构（$\mathfrak{K}$，$\mathfrak{L}$，$\mathfrak{M}$），则对象 $A$ 的一个子对象（$\mu: X \rightarrow A$］当 $\mu \in \mathfrak{M}$ 时叫作（相对于该双范畴结构）容许的（admissible）．　М. Ш. Цаленко 撰

【补注】 上文（以及本书其他地方）所用符号（$\mu$］并不标准，大多数作者不在符号上区分子对象和代表它的单态射．

参考文献见**范畴**（category）.　张英伯 译

**从属原理 [subordination principle; подчинения принцип]**

**Lindelöf 原理**（Lindelöf principle）的一种形式，它用到了函数从属的概念．设 $\omega(z)$ 是在圆盘 $|z|<1$ 内正则且满足条件 $\omega(0)=0$，在 $|z|<1$ 内 $|\omega(z)|<1$ 的任一函数；设 $F(z)$ 是 $|z|<1$ 内的亚纯函数．若函数 $f(z)$ 具有形式 $f(z)=F(\omega(z))$，则称 $f(z)$ 在圆盘 $|z|<1$ 内从属于函数 $F(z)$，并称 $F(z)$ 为从属函数（subordinating function）．这一从属关系（sub-

ordination relation)用 $f(z) \prec F(z)$ 表示之．在 $F(z)$ 是 $|z|<1$ 内**单叶函数**(univalent function)的最简单情形，该关系恰好意味着 $f(0)=F(0)$ 且 $f(z)$ 在圆盘 $|z|<1$ 内不取任一为 $F(z)$ 所不取的值．下列基本定理是常用的．

定理1　设函数 $w=F(z)$ 在圆盘 $|z|<1$ 内亚纯且把该圆盘映射成 **Riemann 曲面**(Riemann surface) $G(F)$．设 $G_r(F)$ 是 $G(F)$ 的对应于 $|z|\leqslant r$ 的那一部分，$r<1$．若 $f(z)\prec F(z)$，则在 $|z|\leqslant r$ 内 $f(z)$ 的值(从 $f(0)=F(0)$ 出发的**解析延拓**(analytic continuation)所确定的值)属于 $G_r(F)$．且仅当 $f(z)=F(\varepsilon z)$，$|\varepsilon|=1$ 时才取到 $G_r(F)$ 的边界点([2])．

定理2　若 $f(z)\prec F(z)$ 且 $F(z)$ 在 $|z|\leqslant r$ 内正则，$r<1$，则令

$$M_\lambda(r,f)=\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^\lambda d\theta\right\}^{1/\lambda},\ \lambda\geqslant 0$$

时有 $M_\lambda(r,f)\leqslant M_\lambda(r,F)$，$\lambda\geqslant 0$，$0\leqslant r\leqslant 1$([1])．

定理3　若 $f(z)\prec F(z)$ 且 $F(z)$ 在 $z=0$ 正则，则关于展开式 $f(z)=\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$，$F(z)=\sum_{n=0}^\infty A_n z^n$ 的系数有 $\sum_{n=1}^m |a_n|^2\leqslant\sum_{n=1}^m|A_n|^2$，$m=1,2,\cdots$([2])．

从属的一般理论对于研究解析函数的取值集合是有用的．应用从属关系可以有两种不同的途径．首先，可从给定的函数 $F(z)$ 出发并检验所有从属于 $F(z)$ 的 $f(z)$ 的性质．若 $F(z)$ 完全已知，则使 $f(z)$ 的值位于其内的区域 $G_r(F)$ 亦已知(定理1)，同时积分均值 $M_\lambda(r,f)$ 的上界亦已知(定理2)．若 $F(z)$ 还在 $z=0$ 正则，则 $f(z)$ 的系数有上界(定理3)．其次，可考虑在圆盘 $|z|<1$ 内亚纯且其性质蕴含它不可能在 $|z|<1$ 内从属于给定函数 $F(z)$ 的函数 $f(z)$．若其中的 $F(z)$ 比如说是单叶的，则 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内必须取 $G(F)$ 以外的值．运用从属关系的这些思想不仅形象地描述了从属原理而且可以推广到多连通区域([3])．

**参考文献**


[1] Littlewood, J. E., On inequalities in the theory of functions, *Proc. Lond. Math. Soc.* (2), **23** (1925), 481－519.

[2] Rogosinski, W., On subordinate function, *Proc. Combridge Philos. Soc.*, **35** (1939), 1－26.

[3] Аленицын, Ю. Е., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», **60** (1961), 5－21.

[4] Rogosinski, W., Schr. K. Gelehrt. Gesellsch. Naturwiss. *Kl.*, **8** (1931), 1, 1－31.

[5] Rogosinski, W., On a theorem of Bieberbach-Eilenberg, *J. Lond. Math. Soc.*, **14** (1939), 53, 4－11.

[6] Rogosinski, W., On the coefficients of subordinate functions, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **48** (1943), 48－82.

[7] Lifflewood, J. E., Lectures on the theory of functions, Oxford Univ. Press, 1944.

[8] Голузин, Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966 (英译本 Goluzin, G. M., Geometric theory of functions of a complex variable, Amer. Math. Soc., 1969).


Ю. Е. Аленицын 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Duren, P. L., Theory of $H^p$ spaces, Acad. Press, 1970.


杨维奇 译

**下抛物函数**[**subparabolic function**; **субпараболическая функция**]，亦称次抛物函数，下热函数(subcaloric function)

关于热(传导)方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta^2 u=0 \qquad (*)$$

的类似于**下调和函数**的概念，其中 $u=u(x,t)$，$t\in R$，$x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$，而 $\Delta^2 u=\sum_{j=1}^n\partial^2 u/\partial x_j^2$ 为 **Laplace 算子**(Laplace operator)．例如，对 $C^2$ 类函数 $v=v(x,t)$ $(x\in\mathbf{R},t>0)$，如果 $\partial v/\partial t-\partial^2 v/\partial x^2\leqslant 0$ 在矩形

$$D=\{(x,t)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}:a<x<b,\ 0<t<h\}$$

里处处成立，那么它是一个下抛物函数．更一般地，设 $(x_0,t_0)\in D$，$\Delta$ 是充分小的、底面平行于轴 $t=0$ 的等边三角形使得 $(x_0,t_0)\in\Delta\subset D$．那么在闭区域 $\bar{D}$ 连续的函数 $v=v(x,t)$ 称为在 $D$ 里是下抛物的(subparabolic)，如果它在任一点 $(x_0,t_0)\in D$ 的值不大于方程(*)在 $\Delta$ 内的那种在 $\Delta$ 的边上取与 $v(x,t)$ 相同值的解在该点的值，这里 $\Delta$ 是任一充分小的三角形且 $(x_0,t_0)\in\Delta$．

下调和函数的许多性质，包括最大值原理，对于下抛物函数也成立．

**参考文献**


[1] Смирнов, В. И., Курс высшей математики, 5 изд, т. 4, М., 1958 (中译本：В. И. 斯米尔诺夫，高等数学教程，人民教育出版社，1958)．

[2] Петровский, И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, 3 изд., М., 1961 (中译本：И. Г. 彼得罗夫斯基，偏微分方程讲义，人民教育出版社，第二版，1965)．

[3] Petrovskii, I. G., Zur ersten Randwertaufgabe der Wärmeleitungsgleihung, *Compos. Math.*, **1** (1935), 383－419.


Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 用位势论的观点解释下抛物函数可见于[A1]．

**参考文献**


[A1] Doob, J. L., Classical potential theory and its probabilistic counterparts, Springer, 1983 (中译本：J. L. 杜布，经典位势论与概率位势论，上、下册，科

学出版社, 1993).

[A2] Friedman, A., Partial differential equations of parabolic type, Prentice-Hall, 1964.

吴炯圻 高琪仁 译

**次射影空间** [subprojective space; субпроективное пространство]

常曲率空间(射影空间)的推广之一. 已定义过有仿射联络(affine connection)的 $k$ 重射影空间(projective space), 在某个坐标系下它的测地线用 $n-1$ 个方程、其中恰有 $k$ 个方程是线性的系统来表示. 当 $k=n-2$ 时, 测地线是平面曲线, 落在一个二维 Euclid 平面上. 如果所有这些二维 Euclid 平面通过一个公共点, 或者沿一个方向是平行的(公共点在无穷远处), 则称该空间是次射影的.

设 $A_n$ 是 $n$ 维次射影空间, 有无挠的仿射联络. 关于 $A_n$ 的射影坐标系 $x^i$, 联络系数是

$$\Gamma^i_{jk}=x^i f_{jk}+\delta^i_k p_j+\delta^i_j p_k,\ f_{jk}=f_{kj},$$

其中 $\delta^i_j$ 是 Kronecker 记号, 且

$$p_k=\frac{1}{2}\left(\Gamma^k_{kk}-f_{kk}x^k\right).$$

在此坐标系下, $A_n$ 的测地线所位于的二维 Euclid 平面都通过坐标原点.

一般地, 在次射影空间 $A_n$ 中存在典型的坐标系 $x^i$, 使联络系数取最简单的形式

$$\Gamma^i_{jk}=x^i f_{jk}.$$

Riemann 次射影空间(Riemannian subprojective space) $V_n$ 用同样方式定义; 它的度量归结为三种可能形式之一:

$$ds^2=g_{\alpha\gamma}dx^\alpha dx^\gamma,$$

其中 1) $g_{ik}=\partial_i\tau\partial_k\tau+(\lambda/\theta)\partial_{ik}(\nu/\lambda)$,

2) $g_{ik}=\partial_i\tau\partial_k\tau+c(\lambda/\theta)\partial_{ik}\lambda$,

这里 $c=$ 常数 $\neq 0$; $\theta$ 是 $x^i$ 的任意函数, $\tau$ 是变量 $\lambda/\theta$ 的函数, $\nu$ 是 $x^i$ 的二次型, 在 1) 中 $\lambda$ 是线性型、在 2) 中 $\lambda$ 是一个非完全平方的二次型的平方根.

3) 例外情形

$$\theta ds^2=a_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta+2d\lambda dx^{n-1}+2d\nu dx^n,$$

其中 $a_{\alpha\beta}$ 是常数, $\det|a_{\alpha\beta}|\neq 0$, $\theta$ 是 $x^{n-1}$ 和 $x^n$ 的一次齐次函数, $\lambda$ 和 $\nu$ 满足关系式

$$\frac{1}{2}a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta+\lambda x^{n-1}+\nu x^n=0,$$

$$\alpha,\beta=1,\cdots,n-2,$$

不是一次齐次函数.

所有这三种情形通过选择坐标 $z^i$ 化为统一的表达式:

$$1)\ ds^2=e^{-2\mu(z^1)}(e_1dz^{1^2}+\cdots+e_ndz^{n^2}),$$

$$2)\ ds^2=e^{-2\mu(z)}\sum_{i=1}^n(e_idz^{i^2}),\ z=\sqrt{\sum_{i=1}^n e_idz^{i^2}},$$

$$3)\ ds^2=e^{-2\mu(z^1)}\left(2dz^1dz^2+\sum_{i=3}^n e_idz^{i^2}\right)$$

($e_i=$ 常数). 所有的 Riemann 次射影空间 $V_n$ 是**共形 Euclid 空间**(conformal Euclidean space). Riemann 次射影空间属于半可约 Riemann 空间类, 它们的度量有一个特殊的结构.

对于从共形 Euclid 空间类中区分出共形 Euclid 次射影空间的张量判别准则是存在的. 每一个(除情形 3)之外的)次射影空间 $V_n$ 在情形 1) 可实现为 Euclid 空间 $E_{n+1}$ 中的一张超曲面, 在情形 2) 可实现为 $E_{n+1}$ 中的旋转超曲面. 逆命题亦真: 在 Euclid 空间 $E_{n+1}(n>2)$ 中围绕一条非迷向轴的旋转超曲面是其度量为情形 2) 的 Riemann 次射影空间.

Riemann 次射影空间中的运动按通常的方式定义. 次射影空间 $V_n$ 的表征事实是: 若 $V_n$ 不是常曲率空间, 则它容许一个 $n(n-1)/2$ 阶的极大可迁运动群, 反过来每一个容许 $n(n-1)/2$ 阶极大可迁运动群的 Riemann 空间是一个次射影空间. Riemann 次射影空间 $V_n$ 是有极大运动的非 Einstein 空间(常曲率空间在 Einstein 空间中占有同样的位置).

次射影空间的概念容许有下列推广: 具有仿射联络的空间 $A_n$ 称为**广义次射影空间**(generalized subprojective space), 如果它的测地线落在 Euclid 平面 $E_{r+1}$ 上 $(1\leqslant r\leqslant n-2)$, 而且这些平面都经过一个固定的平面 $E_{r-1}$(在有限远或无限远处).

**参考文献**

[1] Каган, В. Ф., Субпроективные пространства, М., 1961.

Л. А. Сидоров 撰

**【补注】**

**参考文献**

[A1] Schouten, J. A., Ricci calculus, Springer, 1954 (译自德文).

陈维桓 译

**表示的子表示** [subrepresentation of a representation; подпредставление представления]

群(代数、环或半群) $X$ 的表示 $\pi$ 在不变子空间 $F\subset E$ 中的**线性表示**(linear representation) $\rho$, 其中 $E$ 是表示 $\pi$ 的向量(拓扑向量)空间, 而 $\rho$ 由下列公式所定义: $\rho(x)\xi=\pi(x)\xi$, 对所有 $\xi\in F$, $x\in X$. 若 $\pi$ 是群、拓扑代数、拓扑环或拓扑半群的**连续表示**(continuous representation), 则它的任何子表示也是

连续的.　　A. И. Штерн 撰　石生明 译　王 杰 校

**代换法则**[**substitution rule**; **подстановки правило**], 亦称代换规则

逻辑 - 数学演算中的**推导法则**(derivation rule)之一. 代换法则有各种不同形式. 例如, 在**命题演算**(propositional calculus)中, 代换法则是用一个公式代换命题变元在命题公式中的所有的出现. 在**谓词演算**(predicate calculus)中, 它是: a) 用一个公式代换谓词公式中的**谓词变元**(predicate variable)(这里需要遵守一系列关于个体变元出现的限制以避免变元碰撞(variable collision), 即出现在公式中的自由变元通过代换变为约束变元); b) 项的代换法则是用一个项代换谓词公式中相应类型的个体变元的自由出现(这里也必须避免变元碰撞).

**参考文献**


[1] Новиков, П. С., Элементы математической логики, 2 изд., М., 1973(英译本: Novikov, P. S., Elements of mathematical logic, Oliver & Boyd and Acad. Press, 1964.

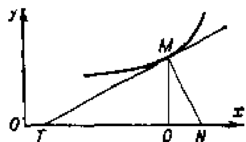
[2] Shoenfield, J. R., Mathematical logic, Addison - Wesley, 1967.

[3] Hilbert, D. and Bernays, P., Grundlagen der Mathematik, 1 – 2, Springer, 1968 – 1970.


С. Н. Артемов 撰　眭跃飞 译

**次切线和次法线**[**subtangent and subnormal**; **подкасательная и поднормаль**]

有向线段 $QT$ 和 $QN$, 它们是某一曲线在点 $M$ 处的**切线**(tangent line)段 $MT$ 和**法线**(normal)段 $MN$ 在 $x$ 轴上的投影(见图).




如果这一曲线是函数 $y=f(x)$ 的图形, 则次切线和次法线的长度分别等于

$$QT=-\frac{f(x)}{f'(x)},\ QN=f(x)f'(x),$$

其中 $x$ 是点 $M$ 的横坐标. 如果这一曲线由参数式给出:

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),$$

则

$$QT=-\frac{\psi(t)\varphi'(t)}{\psi'(t)},\ QN=\frac{\psi(t)\psi'(t)}{\psi'(t)},$$

其中 $t$ 是确定曲线上点 $M$ 的参数值.　　БСЭ - 3

【补注】


[A1] Berger, M., Geometry, 2, Springer, 1989(中译本: M. 贝尔热, 几何, 第一 – 五卷, 科学出版社, 1987 – 1991).

[A2] Gomes Teixeira, F., Traité des courbes, 1 – 3, Chelsea, reprint, 1971.

[A3] Lamb, H., Infinitesimal calculus, Cambridge Univ. Press, 1924.


杜小杨 译

**减法**[**subtraction**; **вычитание**]

一种算术运算, 是**加法**(addition)的逆运算, 即给定两项之和与其中的一项, 求另一项. 给定的和称为被减数(minuend), 给定的一项称为减数(subtrahend), 而所求的一项称为差(difference). 减法的符号是 −(减). 因此, 在表达式

$$a-b=c$$

中, $a$ 是被减数, $b$ 是减数, $c$ 是差.

【补注】

**参考文献**


[A1] Cohn, P. M., Algebra, 1, Wiley, 1982.


杜小杨 译

**对合子簇**[**subvariety, involutive**; **инволютивное подразнообразие**], 辛几何学中的

**【补注】** 设 $V$ 是 $2n$ 维向量空间, $\omega$ 是 $V$ 上的非退化交错 2 形式. 给定 $V$ 的子空间 $W$, (按通常方式)定义

$$W^{\perp}=\{x\in V:\omega(x,w)=0,\ \forall\ w\in W\}.$$

如果 $W\subset W^{\perp}$, 则称 $W$ 是迷向子空间(isotropic subspace); 如果 $W\supset W^{\perp}$, 则称 $W$ 为对合子空间(involutive subspace)(或上迷向子空间(co-isotropic subspace)); 如果 $W=W^{\perp}$, 则称 $W$ 是 Lagrange 子空间(Lagrangian subspace). $W$ 是对合子空间的必要条件是 $\dim W\geqslant n$.

现在设 $V$ 是辛流形(symplectic manifold) $X$ 的一个子簇(可能有奇点; 或更一般地, 一个解析子集). 设 $\mathrm{Reg}(V)$ 是 $V$ 的点集, 其中每一点有 $V$ 中的一个邻域不含有任何奇点. 如果对于所有的 $p\in\mathrm{Reg}(V)$, $X_p$ 的子空间 $V_p$ 是对合的, 则称 $V$ 是 $X$ 的对合子簇(involutive subvariety). 类似地可以定义迷向子簇(isotropic subvariety), 和 Lagrange 子簇(Lagrangian subvariety)的概念. 若 $\mathrm{Reg}(V)$ 在 $V$ 中是稠密的, 则 $V$ 是对合的, 当且仅当 $X$ 上任意两个在 $V$ 上为零的 $C^1$ 函数 $f$, $g$ 的 Poisson 括号积 $\{f, g\}$(根据 $X$ 上的辛 2 形式来定义)在 $V$ 上也为零.

**参考文献**

[A1] Libermann, P. and Marle, Ch. M., Symplectic geometry and analytical mechanics, Reidel, 1987 (译自法文).
陈维桓 译

**充分统计量** [**sufficient statistic**; **достаточная статистика**], 概率分布族 $\{P_\theta: \theta\in\Theta\}$ 的, 或参数 $\theta\in\Theta$ 的

满足如下条件的统计量(随机向量) $X$: 对于任意事件 $A$, 条件概率 $P_\theta\{A|X=x\}$ 不依赖于 $\theta$. 此条件等价于: 在 $X=x$ 的条件下, 任何其他统计量 $Y$ 的条件分布不依赖于 $\theta$.

关于充分统计量 $X$ 的知识, 为对参数 $\theta$ 的统计推断提供了完全的资料, 因为除 $X$ 的分布所含关于参数 $\theta$ 的信息外, 任何附加统计数据不会为此信息增加任何内容. 这一性质数学上表述了统计决策理论的结果之一: 基于充分统计量的决策规则集是本质完全类. 从原分布族转向充分统计量分布族, 称为统计问题的约化 (reduction of the statistical problem). 约化的含义是减小(常是十分显著地减小)观测空间的维数.

实际求充分统计量基于如下因子分解定理. 设分布族 $\{P_\theta\}$ 受控于 $\sigma$ 有限测度 $\mu$, 而 $p_\theta=dP_\theta/d\mu$ 是 $P_\theta$ 对于测度 $\mu$ 的密度. 统计量 $X$ 对于分布族 $\{P_\theta\}$ 是充分的, 当且仅当

$$p_\theta(\omega)=g_\theta(X(\omega))h(\omega), \qquad (*)$$

其中 $g_\theta$ 和 $h$ 是非负可测函数($h$ 与 $\theta$ 无关). 对于离散型分布, 作为 $\mu$ 可以取"计数"测度: 这时, 或以(*)中 $p_\theta(\omega)$ 表示基本事件 $\omega$ 的概率.

例如, 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是独立随机变量列, 其中每个随机变量以概率 $\nu$ 取 1 为值, 以概率 $1-\nu$ 取 0 为值(见 **Bernoulli 方案** (Bernoulli scheme)). 那么

$$p_\nu(x_1,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^n \nu^{x_i}(1-\nu)^{1-x_i}=$$

$$=\nu^{\sum_1^n x_i}(1-\nu)^{n-\sum_1^n x_i}.$$

如果令

$$X=\sum_{i=1}^n X_i,\ g_\theta=p_\theta,\ h=1\ (\theta=\nu),$$

则满足方程(*). 这样, 对于 Bernoulli 概形中的未知概率 $\nu$, 经验频率

$$\hat\nu=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$$

是充分统计量.

设 $X_1,\cdots,X_n$ 是独立正态分布随机变量, 其数学期望 $\mu$ 和方差 $\sigma^2$ 未知. $X_1,\cdots,X_n$ 关于 Lebesgue 测度的联合分布密度为

$$p_{\mu,\sigma^2}(x_1,\cdots,x_n)=$$

$$=(2\pi\sigma^2)^{-n/2}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n(x_i-\mu)^2\right]=$$

$$=(2\pi\sigma^2)^{-n/2}\exp\left[-\frac{n\mu^2}{2\sigma^2}-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n x_i^2+\right.$$

$$\left.+\frac{\mu}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n x_i\right],$$

它仅仅通过变量

$$\sum_{i=1}^n x_i,\ \sum_{i=1}^n x_i^2$$

依赖于 $x_1,\cdots,x_n$. 因此, 向量统计量

$$X=\left(\sum_{i=1}^n X_i,\ \sum_{i=1}^n X_i^2\right)$$

是二维参数 $\theta=(\mu,\sigma^2)$ 的充分统计量. 这里, 样本均值

$$\hat\mu=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$$

和样本方差

$$\hat\sigma^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(X_i-\hat\mu)^2$$

二者一起也是充分统计量, 因为统计量

$$\sum_{i=1}^n X_i,\ \sum_{i=1}^n X_i^2$$

可以通过 $\hat\mu$ 和 $\hat\sigma^2$ 表示.

对于同一分布族可以存在多个充分统计量. 特别地, 全部观测值的总体(上例中的 $(X_1,\cdots,X_n)$) 是平凡充分统计量. 不过, 重要的是可以实现统计问题真正约化的统计量. 充分统计量称为最小的 (minimal) 或必要的 (necessary), 如果它是其他任何充分统计量的函数. 必要充分统计量能实现统计问题的最大限度约化. 在上例中求得的充分统计量是必要的.

充分性概念的重要应用, 是基于 Rao-Blackwell-Колмогоров 定理 (Rao-Blackwell-Kolmogorov theorem) 改进无偏估计量的方法. 根据此定理, 如果 $X$ 是分布族 $\{P_\theta\}$ 的充分统计量, $X_1$ 是在向量空间 $\mathbf{R}^d$ 取值的任意统计量, 则对于 $\mathbf{R}^d$ 上的实连续凸函数 $g$, 有

$$\mathsf{E}_\theta g(X_1-\mathsf{E}_\theta(X_1))\geqslant \mathsf{E}_\theta g(\hat X_1-\mathsf{E}_\theta(\hat X_1)),\ \theta\in\Theta,$$

其中 $\hat X_1=\mathsf{E}_\theta(X_1|X)$ 是统计量 $X_1$ 关于 $X$ 的条件数学期望(由于 $X$ 是充分统计量, $\hat X_1$ 实际上与 $\theta$ 无关). 常用 $\mathbf{R}^d$ 上的正定二次型作损失函数 $g$.

统计量 $X$ 称为完全统计量 (complete statistic), 若由等式 $\mathsf{E}_\theta f(X)\equiv 0\ (\theta\in\Theta)$, 可得关于 $P_\theta\ (\theta\in\Theta)$ 几乎必然有 $f(X)=0$. Rao-Blackwell-Колмогоров 定理的一条推论是: 如果存在完全充分统计量 $X$, 则它

是其数学期望 $e(\theta)=\mathrm{E}_\theta X$ 关于 $\theta$ 一致最优的无偏估计量．在前面的例中有类似的情形．例如，在 Bernoulli 概形中，经验频率 $\hat{\nu}$ 是概率 $\nu$ 的一致最优无偏估计量；而样本均值 $\hat{\mu}$ 和样本方差 $\hat{\sigma}^2$，是正态分布参数 $\mu$ 和 $\sigma^2$ 的一致最优无偏估计量．

在理论水平上，有时并不使用充分统计量，而宜使用充分 $\sigma$ 代数．设 $\{P_\theta:\theta\in\Theta\}$ 是概率空间 $(\Omega,\mathscr{A})$ 上的分布族，则称子 $\sigma$ 代数 $\mathscr{B}\subset\mathscr{A}$ 为对于 $\{P_\theta\}$ 充分的（sufficient），如果对于任何事件 $A\in\mathscr{A}$，存在不依赖于 $\theta$ 的条件概率 $P_\theta(A\mid\mathscr{B})$．统计量 $X$ 充分，当且仅当它所诱导的 $\sigma$ 代数 $\mathscr{A}=X^{-1}(\mathscr{B})$ 充分．


**参考文献**

[1] Halmos, P. R. and Savage, L. J., Application of the Radon-Nikodym theorem on the theory of sufficient statistics, *Ann. Math. Stat.*, 20(1949), 225－241.

[2] Колмогоров, А. Н., 《Изв. АН СССР сер. матем.》, 14(1950), 4, 303－326.

[3] Rao, C. R., Linear statistical inference and its applications, Wiley, 1973（中译本：C. R. 劳，线性统计推断及其应用，科学出版社，1987）.


А. С. Холево 撰

【补注】


**参考文献**

[A1] Lehmann, E. L., Testing statistical hypotheses, Wiley, 1988.

[A2] Kagan, A. M., Linnik, Yu. V. and Rao, C. R., Characterization problems in mathematical statistics, Wiley, 1973, Chapt. 8.


周概容 王健 译

**和函数**[**sum function**; **сумматорная функция**]，函数 $f$ 的

$x\geqslant 1$ 的函数，表示在自然数集 $n\leqslant x$ 上函数 $f$ 的值 $f(n)$ 的和 $\sum_{n\leqslant x}f(n)$．和函数是表示数列的各种性质的基本方法之一．

和函数举例：$\leqslant x$ 的素数的个数；$\psi(x)=\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)$——**Чебышев 函数**（Chebyshev function）；所有 $n\leqslant x$ 的除数的个数，等等．（见[1]，[2]）．

基本问题是找出和函数的尽可能精确的表示式，而对于没有渐近式的和函数，则是寻求当 $x$ 取大值时它的模的最佳估计．

**Cauchy 积分定理**（Cauchy integral theorem）和形如

$$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}f(n)n^{-s}$$

的 **Dirichlet 级数**（Dirichlet series）是研究和函数的解析方法的基础．如果这级数当 $\mathrm{Re}\,s>\sigma_0\geqslant 1$ 时绝对收敛，则对于非整数 $x$ 及 $c>\sigma_0$，等式

$$\sum_{n\leqslant x}f(n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}F(s)\frac{x^s}{s}\,ds$$

成立．由此及利用 $F(s)$ 的解析开拓，移动积分路径至左边某直线 $\mathrm{Re}\,s=\sigma_1<0$，再沿新的路径估计积分，就可以得到对和函数 $f$ 的相应的估计．例如，当 $f(n)=\Lambda(n)$ 时，积分可以移至 $\mathrm{Re}\,s=-\infty$ 上，则得到关于 $\psi(x)$ 的 Riemann-von Mangoldt 公式．在这个方法的通常应用中，下面的定理是已知的：

假设：$f(n)$，$l_n$ 是复数，$\alpha\geqslant 0$，$\alpha_r$、$\gamma_r$ 是实数，$\sigma_r$，$\beta_r$ 是正数，$\mu$ 和 $\nu$ 是 $\geqslant 1$ 的整数，$\Gamma$ 是 gamma 函数，及 $\lambda_1<\lambda_2<\cdots$．

1）对于任意 $\varepsilon>0$，$f(n)\ll n^{\alpha+\varepsilon}$；

2）在 $s=\sigma+it$，$\sigma>1+\alpha$ 上定义的函数

$$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}f(n)n^{-s}$$

在全平面上是亚纯的，且在带形 $\sigma_1\leqslant\sigma\leqslant\sigma_2$ 内有有限多个极点；

3）当 $\sigma<0$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}l_n\exp(\lambda_n s)$ 绝对收敛；

4）对于 $\sigma<0$，

$$\prod_{r=1}^{\mu}\Gamma(\alpha_r+\beta_r s)F(s)=$$

$$=\prod_{r=1}^{\nu}\Gamma(\gamma_r-\delta_r s)\sum_{n=1}^{\infty}l_n\exp(\lambda_n s);$$

5）$\beta_1+\cdots+\beta_\mu=\delta_1+\cdots+\delta_\nu$；

6）如果假设有

$$\sum_{r=1}^{\nu}\gamma_r-\sum_{r=1}^{\mu}\alpha_r+\frac{1}{2}(\mu-\nu)=\eta,$$

则 $\eta\geqslant\alpha+1/2$．

对于固定的带形域 $\sigma_1\leqslant\sigma\leqslant\sigma_2$，存在常数 $\gamma=\gamma(\sigma_1,\sigma_2)$，使得估计式 $F(s)\ll\exp(\gamma|t|)$ 在 $\sigma_1\leqslant\sigma\leqslant\sigma_2$ 及大的 $|t|$ 上成立．

结论：对于任意 $\varepsilon>0$，有

$$\sum_{n\leqslant x}f(n)=R(x)+O(x^{\{(\alpha+1)(2\eta-1)/(2\eta+1)\}+\varepsilon}),$$

此处 $R(x)$ 是函数 $F(s)x^s/s$ 在带形

$$(\alpha+1)\frac{2\eta-1}{2\eta+1}<\sigma\leqslant\alpha+1$$

中所有极点上的残数和．


**参考文献**

[1] Titchmarsh, E. C., The theory of the Riemann zeta-function, Clarendon, 1951.

[2] 华罗庚，指数和的估计及其在数论中的应用，科学出版社，1963.


А. Ф. Лаврик 撰

【补注】关于 $\psi(x)$ $(x>1)$ 的 Riemann-von Mangoldt 公式（Riemann-von Mangoldt formula），或者 von Mangoldt 公式（von Mangoldt formula）是

$$\psi(x)=x-\sum_{\rho}\frac{x^\rho}{\rho}+\sum_{n}\frac{x^{-2n}}{2n}+\text{常数}.$$

这是 Riemann 主要公式（Riemann main formula）

$$J(x) = \mathrm{Li}(x) - \sum_{\rho} \mathrm{Li}(x^{\rho}) - \log 2 + \int_{x}^{\infty} \frac{dt}{t(t^2-1)\log t}$$

的 von Mangoldt 的另一表示，其中 $x>1$，$J$ 函数（$J$-function）是

$$J(x) = \frac{1}{2}\left[\sum_{p^n<x} \frac{1}{n} + \sum_{p^n\leq x} \frac{1}{n}\right],$$

而 $\mathrm{Li}(x)$ 是对数积分（logarithmic integral）

$$\mathrm{Li}(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{0}^{1-\varepsilon} \frac{dt}{\log t} + \int_{1+\varepsilon}^{x} \frac{dt}{\log t}\right].$$

参考文献

[A1] Edwards, H. M., Riemann's zeta function, Acad. Press, 1974, Chapt 3.

【译注】

参考文献

[B1] Ivić, A., The Riemann zeta-function, John Wiley & Sons, 1985.

戚鸣皋 译 潘承彪 校

**可和性域**［**summability field; суммируемости поле**］，求和法的收敛域（convergence field of a summation method），对于序列求和法的（见**求和法**（summation methods））

对于某种方法可和的所有序列的集合．任意正则矩阵求和法（matrix summation method）（亦见**正则求和法**（regular summation methods））的可和性域，不能包含所有有界序列（[3]）．正则矩阵法的可和性域，甚至一个发散序列有和的，也不会仅由有界序列组成（[4]）．然而，正则矩阵求和法确实存在发散序列有和并且可和性域不含有有界发散序列的情形．对于给定方法可和的有界序列的集合称为**有界可和性域**（bounded summability field）．正则矩阵求和法的可和性域是具有连续坐标射影的完全局部凸度量空间．

参考文献

[1] Cooke, R. G., Infinile matrices and sequence spaces, Macmillan, 1950.

[2] Кангро, Г. Ф., в сб.: Итоги науки и техники, Математический анализ, т. 12, М., 1974, 5 – 70.

[3] Steinhaus, H., Some remarks on the generalization of the concept of limit, *Prace. Mat. Fiz.*, **22** (1911), 121 – 134 (波兰文).

[4] Mazur, S. and Orlicz, W., Sur les méthndes linéaires du sommation, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **196** (1933), 32 – 34.

И. И. Волков 撰 罗嵩龄 译

**可和性乘子**［**summability multipliers; суммируемости множители**］

（对于级数的项）数值因子 $\lambda_n$，它将一个依求和法（summation methods）$A$ 可和的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (1)$$

变成为依方法 $B$ 可和的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n u_n. \qquad (2)$$

这时，可和性乘子 $\lambda_n$ 称为 $(A, B)$ 型的可和性乘子．例如，当 $0<s<k+1$ 时，数 $\lambda_n = 1/(n+1)^s$ 是 $((C,k),(C,k-s))$ 型可和性乘子（见 **Cesàro 求和法**（Cesàro summation methods））（见 [1]）．

可和性乘子理论中的基本问题是找出一个条件，在此条件下数 $\lambda_n$ 是一种类型或另一种类型的可和性乘子．这个问题可以更恰当地叙述如下：若 $X$，$Y$ 为两类级数，那么什么样的条件可以使数 $\lambda_n$ 将 $X$ 中的任意级数（1）变为属于 $Y$ 的级数（2）？可和性乘子理论在外观上回到了 Dedekind-Hadamard 定理（Dedekind-Hadamard theorem）：对于任何收敛级数（1），级数（2）收敛，当且仅当

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\Delta\lambda_n| < \infty,$$

其中 $\Delta\lambda_n = \lambda_n - \lambda_{n+1}$．对于 Cesàro 法的可和性，这个定理可以推广．

参考文献

[1] Hardy, G. H., Divergent series, Clarendon, 1949.

[2] Кангро, Г. Ф., 《Ученые записки Тартуского университета》, 37 (1955), 191 – 232.

[3] Кангро, Г. Ф., Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 12, М., 1974, 5 – 70.

[4] Баров, С., Введение в теорию суммируемости Таллин, 1977.

[5] Moore, C. N., Summable series and convergence factors, Dover, reprint, 1966.

И. И. Волков 撰 罗嵩龄 译

**强可和性**［**summability, strong; суммируемость сильная**］，数或函数（或以 $S_n$ 为部分和的级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$）的复序列 $\{S_n\}$ 对于数 $S$ 的

依方法 $A=\|a_{nk}\|$ 的可和性（见**求和法**（summation methods）），使对某一 $p>0$：

1）序列

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} |S_k - S|^p$$

对于每个 $n>1$ 及函数序列时几乎所有的 $x$ 收敛；

2）$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$．保留 2），并用下述 1′）代替 1）：

1′）对于每个单调增加的指标序列 $\{v_k\}$，序列

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nv_k} |S_{v_k} - S|^p$$

对每个 $n>1$ 及函数序列时几乎所有的 $x$ 收敛，这就

引出了极强可和性（very strong summability）的概念.

强可和性概念的引进与 Fourier 级数的（$C$, 1）可和性有关（见 **Fourier 级数的求和**（summation of Fourier series）. 这一概念的重要性在强（$C$, 1）可和性的例子中得到很好的解释. 强（$C$, 1）可和性表明破坏序列 $\{S_n\}$ 收敛性的部分和 $S_{\nu_1}$, $S_{\nu_2}$, …, 几乎完全没有位置, 即具有零密度. 与强可和性不同的是, 极强可和性表明序列 $\{S_n\}$ 的收敛性会被很稀疏的序列 $\{S_{\nu_m}\}$ 破坏.

**参考文献**


[1] Hardy, G. H. and Littlewood, J. E., Sur la série de Fourier d'une fonction à carré sommable, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 156 (1913), 1307 – 1309.

[2] Алексич, Г., Проблема сходимости ортогональных рядов, пер. с англ., М., 1963 (英译本: Aleksich, G., Convergence problems of orthogonal series, Pergamon, 1961).

[3] Zygmund, A., Trigonometric series, 2, Cambridge Univ. Press, 1988.

[4] Бари, Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961 (英译本: Bary, N. K. [N. K. Bari], A treatise on trigonometric series, Pergamon, 1964).

[5] Sunouchi, Gen-Ichirô, Strong summability of Walsh-Fouriér series, *Tôhoku Math. J.*, 16 (1964), 228 – 237.

[6] Sunouchi, Gen-Ichirô, *Acta Sci. Math.*, 27 (1966), 1 – 2, 71 – 76.

[7] Болгов, В. А., Ефимов, А. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 35 (1971), 6, 1389 – 1408. (英译本: Bolgov, V. A. and Efimov, E. V., On the rate of summability of orthogonal series, *Math. USSR Izv.*, 5 (1971), 6, 1399 – 1417).

[8] Zatewasser, Z., *Studia Math.*, 6 (1936), 82 – 88.

[9] Leindler, L., Ueber die sehr starke Riesz-Summierbarkeit der Orthogonalreihen und Konvergenz lückenhafter Orthogonalreihen, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 13 (1962), 3 – 4, 401 – 414.


А. В. Ефимов 撰 罗嵩龄 译

**可和函数 [summable function; суммируемая функция]**

函数 $f$: $X \to \mathbf{R}$, 它定义在带非负测度的空间（$X$, $\mu$）上的 **Lebesgue 积分**（Lebesgue integral）$\int_X f d\mu$ 是有限值. 在可测函数空间中, 可和函数的集合 $L(X)$ 组成线性空间. 取其函数的绝对值, 以及一组有限个函数的最大值和最小值不会超出 $L(X)$ 的范围. 若 $\mu X < \infty$, 则 $L(X)$ 在一致收敛（uniform convergence）意义下是封闭的. И. А. Виноградова 撰

【补注】（$X$, $\mu$）上的可和函数或 Lebesgue 可积函数（Lebesgue integral functions）的标准记法是 $L^1(\mu)$ 或 $L^1(X, d\mu)$（或 $L_1(\mu)$, $L_1(X, d\mu)$）.

**参考文献**


[A1] Rudin, W., Real and complex analysis, McGraw-Hill, 1966, 24 (中译本: W. 卢丁, 实分析和复分析, 人民教育出版社, 1981).

[A2] Shilov, G. E. and Gurevich, B. L., Integral, measure, and derivative, a unified approach, Dover, reprint, 1977, 29 ff (译自俄文).


周民强 译

**求和 [summation; суммирование]**, 级数的, 序列的, 积分的

分别计算级数和, 序列极限以及积分值的方法. "求和"这个词也可以表示级数和（序列极限, 积分值）的实际定义, 其中这些值在通常定义中不存在, 即级数（序列, 积分）发散. 这种定义通常以规则形式给出, 并称之为级数（序列, 积分）的求和法, 见**求和法**（summation methods）.

И. И. Волков 撰 罗嵩龄 译

**求和法 [summation methods; суммирования методы]**, 可和性方法（summability methods）

构造级数广义和, 序列广义极限以及广义积分值的方法.

在数学分析中, 有必要将级数和（序列极限, 积分值）的概念推广到包括常规意义中级数（序列, 积分）发散的情形. 这种推广通常采用规则或算子的形式, 并称之为求和法（summation method）.

1）以 $2\pi$ 为周期的连续函数 $f$ 的 **Fourier 级数**（Fourier series）, 在无穷点集 $E \subset [0, 2\pi]$ 中可能发散. 该级数的前 $n$ 项部分和的算术平均值序列 $\{\sigma_n(x)\}$,

$$\sigma_n(x) = \frac{s_0(x) + \cdots + s_n(x)}{n+1}, \qquad (1)$$

在整个 $x$ 轴上一致收敛于 $f$. 若级数的和定义为

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n(x),$$

则在这个意义上, $f$ 的 Fourier 级数在整个 $x$ 轴上一致收敛于 $f$.

2）级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \qquad (2)$$

是由下面两个分别收敛于 $A$ 和 $B$ 的级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ 与 } \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

相乘得到的, 仍可能证明它发散. 如果级数（2）的和仿例 1）定义, 也就是用前 $n$ 项部分和的算术平均值序列的极限定义, 那么在这个意义上两个给定级数的

积将收敛于和 $C=AB$.

3）级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \tag{3}$$

当 $|z|<1$ 时收敛于和 $1/(1-z)$，当 $|z|\geq 1$ 时发散. 若（3）的和定义为

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s_n x^n}{n!},$$

其中 $s_n$ 为（3）的部分和，则在这个意义上（3）对于满足条件 $\mathrm{Re}\,z<1$ 的所有 $z$ 收敛，并且和为函数 $1/(1-z)$（见 **Borel 求和法**（Borel summation method））.

求和法的最重要性质是正则性（见**正则求和法**（regular summation methods））和线性性（见**线性求和法**（linear summation method））. 最普通的求和法都具有这些性质. 许多方法还有传递性（见**求和法的传递性**（translativity of a summation method））. 矩阵求和法与半连续求和法组成了更广泛的一类求和法（见**矩阵求和法**（matrix summation method）；**半连续求和法**（semi-continuous summation method））. 这些方法是线性的，并且对它们已经构造了正则性条件. 特别地，矩阵求和法包括 **Voronoi 求和法**（Voronoí summation method）及 **Cesàro 求和法**（Cesàro summation methods）. 由行有限矩阵定义的方法（见**行有限求和法**（row-finite summation method）），特别是由三角矩阵定义的方法（见**三角求和法**（triangular summation method））组成了矩阵求和法的一个子类. 在半连续求和法中有 **Abel 求和法**（Abel summation method），**Borel 求和法**（Borel summation method），**Mittag-Leffler 求和法**（Mittag-Leffler summation method），**Lindelöf 求和法**（Lindelöf summation method）及 **Riesz 求和法**（Riesz summation method）. 这些之外，还存在其他形式的求和法，如 Borel 积分求和法及 **Hölder 求和法**（Hölder summation methods）.

相同序列（级数）可能对一种方法可和，而对另一种方法不可和. 对于给定方法可和的所有序列（级数）的集合，称为该方法的**可和性域**（summability field）.

研究两种求和法，如果一个方法的可和性域包含另一个的可和性域，就说是**求和法的包含**（inclusion of summation methods）；如果域相同，就说求和法等价（equivalence）. 如果一个求和法的域仅由收敛序列组成，就说求和法与收敛等价. 确定求和法包含所需要的条件是可和性理论的问题之一. 两种或多种求和法可能相容，可能不相容. 求和法称为相容的（compatible），如果它们没有和或者相同序列没有不同的极限. 这时，如果从级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k$$

依方法 $A$ 的可和性，能得到级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k u_k$$

依方法 $B$ 可和，就说数 $\lambda_k$ 是 $(A, B)$ 型的**可和性乘子**（summability multipliers）.

关于求和法有两种不同类型的定理. 在第一（Abel）型定理中，序列的性质可以用来表示变换求和法后所得这个序列均值的性质. 例如，Cauchy 定理表明，由 $s_n\to s$ 总可得到 $(s_0+\cdots+s_n)/(n+1)\to s$. 在第二（Tauber）型定理中，对应于给定求和法均值的性质，加上附加条件，可以表示被变换序列的性质（见 **Tauber 定理**（Tauberian theorems））.

与通常的收敛相类似，可以引进特殊形式可和性的概念：绝对可和性，无条件可和性，强可和性，殆可和性，$\lambda$ 可和性等.

广义极限概念也可应用于函数与积分中. 这时就说是函数（或积分）的求和. 例如，对所有 $y$ 都有定义的函数 $s(y)$，求和法与序列的矩阵求和法类似，此序列由以 $c(x, y)$ 为核的积分变换

$$t(x)=\int_0^{\infty} c(x, y)s(y)dy$$

给出，若

$$\lim_{x\to\infty} t(x)=s,$$

就以与函数 $s(y)$ 有关联的数 $s$ 作为 $y\to\infty$ 时的广义极限.

同样地，广义积分

$$\int_0^{\infty} a(t)dt \tag{4}$$

有一种求和法就是由以 $K(x, t)$ 为核的变换

$$\gamma(x)=\int_0^{\infty} K(x, t)a(t)dt$$

所组成，若

$$\lim_{x\to\infty}\gamma(x)=s,$$

则称积分（4）可和于值 $s$.

由数列与函数列求和所引进的求和法的定义，推广到包含任意集合的元素的序列，求和法的一般定义就叙述为：设 $X$ 是给定集合，$s(X)$ 是元素 $\xi_n\in X$ 的序列 $x=\{\xi_n\}$ 的集合，$\overline{A}$ 是定义在取值于 $X$ 的子集 $A^*\subset s(X)$ 上的一个算子. 那么偶对 $(\overline{A}, A^*)$ 称为定义在 $s(X)$ 上的一种求和法（summation method），$A^*$ 称为可和性域. 这时，称序列 $x\in A^*$（或以 $u_k=\xi_k-\xi_{k-1}$ 为项的级数 $\sum_{k=0}^{\infty}u_k$）可和于极限 $\overline{A}(x)$，

这里 $\bar{A}(x)=\bar{A}x$.

参考文献

[1] Hardy, G. H., Divergent series, Clarendon, 1949.
[2] Cooke, R. G., Infinite matrices and sequence spaces, Macmillan, 1950.
[3] Кангро, Г. Ф., в сб.: Итоги науки и техники, Математический анализ, т. 12, М., 1974, 5 – 70 (英译文: Kangro, G. F., Theory of summability of sequences and series, *J. Soviet Math*. 5 (1970), 1, 1 – 45).
[4] Барон, С., Введение в теорию суммируемости рядов, Таллин, 1977.
[5] Peyerimhoff, A., Lectures on summability, Springer, 1969.
[6] Knopp, K., Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Springer, 1964.
[7] Zeller, K. and Beekmann, W., Theorie der Limitierungsverfahren, Springer, 1970.
[8] Pitt, H., Tauberian theorems, Oxford Univ. Press, 1958.
[9] Ganelius, T. H., Tauberian remainder theoreins, Springer, 1971.
[10] Petersen, G. M., Regular matrix transformations, McGraw-Hill, 1966.
[11] Брудно, А. Л., 《Матем. сб.》, **16** (**58**), 2, (1945), 191 – 247.
И. И. Волков 撰

【补注】

参考文献

[A1] Moore, C. N., Summable sequences and convergence factors, Dover, reprint, 1966.
罗嵩龄 译

**发散级数的求和 [summation of divergent series; суммирование расходящихся рядов]**

利用**求和法** (summation methods) 构造发散级数的广义和. 如果借助确定的规则 $P$, 为级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k \qquad (*)$$

指定一个被称为级数和 (sum of the series) 的数, 那么就说该级数依求和法 $P$ 是可和的 (summable), 其和为 $s$, 或者说 $P$ 可和于和 $s$, 这个事实用下述记号中的一种表示:

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = s(P), \quad \lim s_n = s(P),$$

$$P-\lim s_n = s,$$

其中 $s_n$ 为级数 (*) 的部分和. 这时, 数 $s$ 也称为级数的 $P$ 和 ($P$-sum). 例如, 对于级数 (*), 它的前 $n$ 项部分和的算术平均值序列 $\{\sigma_n\}$:

$$\sigma_n = \frac{s_0+\cdots+s_n}{n+1}$$

就值得研究. 若当 $n\to\infty$ 时 $\sigma_n$ 有极限

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = s,$$

则称级数 (*) 依**算术平均求和法** (arithmetical averages, summation method of) 是可和的, 其和为 $s$, 并记为

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = s(C,1)$$

或

$$\lim s_k = s(C,1).$$

(亦见 **Cesàro 求和法** (Cesàro summation methods)).

按照级数和的这种定义, 任何收敛级数必可和于它收敛的那个和, 此外, 存在着依这个方法可和的发散级数. 例如级数

$$1-1+1-1+\cdots$$

依上述方法可和, 并且它的 $(C,1)$ 和等于 $1/2$.

求和法的定义常常适合于那些需要研究的级数. 例如, 需要一种方法寻求整个级数类的和: 它不能与收敛相抵触, 也就是说, 对于收敛级数而言, 它的和就是级数收敛的那个和 (见**正则求和法** (regular summation methods)); 最后, 对于级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda u_k+\mu v_k)$$

以 $\lambda U+\mu V$ 为和的可和性, 可由给定的方法, 级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k \text{ 与 } \sum_{k=0}^{\infty} v_k$$

分别以 $U$ 与 $V$ 为和的可和性得出 (线性性质). 也见**发散级数** (divergent series).

参考文献

[1] Hardy, G. H., Divergent series, Clarendon, 1949.
[2] Cooke, R. G., Infinite matrices and sequence spaces, Macmillan, 1950.
[3] Кангро, Г. Ф., в сб.: Итоги науки и техники, Математический анализ, т. 12, М., 1974, 5 – 70.
[4] Барон, С., Введение в теорию суммируемости рядов, Таллин, 1977.
[5] Peyerimhoff, A., Lectures on summability, Springer, 1969.
[6] Knopp, K., Theorie and Anwendung der unendlichen Reihen, Springer, 1964.
[7] Zeller, K. and Beekmann, W., Theorie der Limitierungsverfahren, Springer, 1970.
[8] Petersen, G. M., Regular matrix transformations, McGraw-Hill, 1966.

И. И. Волков 撰

【补注】

参考文献

[A1] Moore, C. N., Summable series and convergence

factors. Dover, reprint, 1966. 罗嵩龄 译

**Fourier 级数的求和** [**summation of Fourier series**; **сум-мирование рядов Фурье**]

用求和法(summation methods)建立 **Fourier 级数**(Fourier series)的平均．发展最好的是关于三角函数系的 Fourier 级数求和理论．在这种情形时，对于 Fourier 级数为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\equiv\sum_{k=0}^{\infty}A_k(x)$$

的函数 $f\in L(0,2\pi)$，相应于求和法的平均的性质已被研究．例如，对应于 **Abel-Poisson 求和法**(Abel-Poisson summation method)，平均是单位圆盘上的调和函数

$$f(r,x)=\sum_{k=0}^{\infty}r^kA_k(x);$$

而对应于**算术平均求和法**(arithmetical averages, summation method of)，平均是 Fejér 和

$$\sigma_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)A_k(x).$$

除了这两种方法外，在一维三角级数理论中最重要的求和法还有：**Cesàro 求和法**(Cesàro summation methods)，**Riesz 求和法**(Riesz summation method)，**Riemann 求和法**(Riemann summation method)、**Бернштейн-Rogosinski 求和法**(Bernstein-Rogosinski summation method)以及 **de la Vallée-Poussin 求和法**(de la Vallée-Poussin summation method)．利用或多或少随意的 $\lambda$ 乘子序列的求和法

$$\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_{n,k}A_k(x)$$

也已有研究．

Fourier 级数的求和应用于下述问题．

用 **Fourier 级数表示函数**．例如，在 $f(x)$ 的连续点上，Abel-Poisson 平均 $f(r,x)$ 当 $r\to1-0$ 及 Fejér 和 $\sigma_n(x)$ 当 $n\to\infty$ 时都收敛到 $f(x)$，而且如果 $f(x)$ 在所有点上都连续，则上述收敛是一致的；对于任意函数 $f\in L$，这些平均依 $L$ 的度量收敛到 $f$．Fourier 级数的部分和不具有这些性质．

**构造具有良好逼近性质的多项式**．**Jackson 不等式**(Jackson inequality)的建立实际上借助于 Fourier 级数的求和．为了解决这一问题，除了应用一些已知的求和法外，还提出了一些新方法，诸如 **Jackson 奇异积分**(Jackson singular integral)及 **de la Vallée-Poussin 和**(de la Vallée-Poussin sum)．

函数的许多性质可以用 Fourier 级数的平均刻画．例如，函数 $f$ 本质有界，当且仅当存在常数 $M$ 使得 $|\sigma_n(x)|\leqslant M$ 对所有的 $n$ 及 $x$ 成立．

Fourier 级数的求和在多重三角级数理论中起着基本的作用．例如，经常使用足够高阶的 Riesz 平均代替球形部分和．

也研究了关于其他正交函数系的 Fourier 级数的求和，包括具体的函数系和函数系类(例如正交多项式)以及任意的规范正交系．

**参考文献**

[1] Бари, Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961 (英译本: Bary, N. K. [N. K. Bari], A treatise on trigonometric series, Pergamon, 1964).
[2] Zygmund, A., Trigonometric series, 1-2, Cambridge Univ. Press, 1988.
[3] Hardy, G. H., Divergent series, Clarendon, 1949.
[4] Kaczmarz, S. and Steinhaus, H., Theorie der Orthogonalreihen, Chelsea, reprint, 1951.
[5] Тиман, А. Ф., Теория приближения функций действительного переменного, М., 1960 (英译本: Timan, A. F., Theory of approximation of functions of a real variable, Pergamon, 1963).

С. А. Теляковский 撰 朱学贤 译 刘和平 校

**超群** [**super-group**; **супергруппа**], Lie 超群(Lie supergroup)

**超流形**(super-manifold)范畴中的一个群对象．超群 $\mathscr{G}$ 是由交换超代数范畴到群范畴的一个函子 $\mathscr{G}$ 定义的．**Lie 定理**(Lie theorem)适用于超群，它给出了超群和有限维 Lie 超代数之间的对应(见**超代数**(superalgebra))．

例．1) 超群 $\mathrm{GL}_{n|m}$ 定义为函子 $C\mapsto\mathrm{GL}_{n|m}(C)$，其中 $\mathrm{GL}_{n|m}$ 是 $M_{n|m}(C)$ 的偶可逆矩阵群(见**超空间**(super-space))，即形如

$$\left\|\begin{matrix}X & Y\\ Z & T\end{matrix}\right\|$$

的矩阵，此处 $X$ 和 $T$ 是 $C_0^-$ 上阶为 $n,m$ 的可逆矩阵，$Y$ 和 $Z$ 是 $C_1^-$ 上的矩阵．同态 $\mathrm{GL}_{n|m}(C)\to C_0^*$ 由公式

$$\mathrm{Ber}\left\|\begin{matrix}X & Y\\ Z & T\end{matrix}\right\|=\det(X-YT^{-1}Z)\det T^{-1}$$

定义(Березин 公式)；

2) $\mathrm{SL}_{n|m}=\mathrm{Ker\ Ber}$；

3) $\mathrm{OS}_{p_{n|2m}}\subset\mathrm{GL}_{n|2m}$ 和 $\Pi_n\subset\mathrm{GL}_{n|m}$；它们保持偶或奇的对称非退化双线性型不变．

对于任意超群 $\mathscr{G}$ 及其超子群 $\mathscr{H}$，有一个相关超流形 $\mathscr{G}/\mathscr{H}$，由函子 $C\mapsto\mathscr{G}(C)/\mathscr{H}(C)$ 表示．这个超流形是 $\mathscr{G}$ 的一个齐性空间．

**参考文献**

[1] Manin, Yu. I., Gauge fields and complex geometry, Springer, 1988 (译自俄文).

[2] Березин, Ф. А., Кац, Г. И., 《Матем. сб.》, 82 (1970), 343 – 350 (英译本: Berezin, F. A., Introduction to superanalysis, Reidel, 1987).
[3] Лейтес, Д. А., 《Успехи матем. наук》, 35 (1980), 1, 3 – 57 (英译本: Leites, D. A. (ed.), Seminar on supermanifolds, Kluwer, 1991).

Д. А. Лейтес 撰 张英伯 译

**超流形 [super-manifold; супермногообразие]**

流形 (manifold) 概念的一个推广, 其上的函数取值于交换**超代数** (super algebra). 带有结构层 $\mathscr{O}_M$ 的微分流形 $M$ 上的超流形结构定义为层 $\mathscr{O}_M$ 上的交换超代数层 $\mathscr{O}_{\mathscr{M}}$, 任意点 $p\in M$ 有一个邻域 $U$, 使得环化空间 $(U, \mathscr{O}_{\mathscr{M}}|_U)$ 同构于 $(U, (\mathscr{O}_M|_U\otimes\Lambda(\mathbf{R}^m))$, 此处 $\Lambda(\mathbf{R}^m)$ 是有 $m$ 个奇生成元的外代数. 解析超流形可用同样的方法定义. 微分 (或解析) 超流形构成一个范畴, 它们的态射是赋环空间甚至结构层上的态射. 数对 $(\dim M, m)$ 叫作超流形的维数 (dimension of the supper-manifold). 形如 $(\dot U, \dot{\mathscr{O}}_U\otimes\Lambda(\mathbf{R}^m))$ 的超流形叫作 $(n, m)$ 维超区域 (super-domain), 此处 $(\dot U, \dot{\mathscr{O}}_U)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的开子流形. 每个超流形都局部同构于一个超区域.

令 $E$ 是 $M$ 上的向量丛, 则丛 $\Lambda E$ 的截面层 $L_{\Lambda E}$ 定义了 $M$ 上的一个超流形结构. 每个微分超流形都同构于一个形如 $(M, L_{\Lambda E})$ 的超流形; 但在复分析中, 此结论不真. 这时在超流形范畴中比在向量丛范畴中有更多的态射.

一个超流形 $\mathscr{M}$ 可以由从交换超代数范畴到集范畴的函子 $\mathscr{M}_-$ 来定义; 该函子将每个超代数 $C$ 对应到集合 $\mathscr{M}(C)=\mathrm{Mor}(\mathrm{Spec}\,C, \mu)$, 此处 $\mathrm{Spec}\,C$ 是 $C$ 中素理想的集合, 带有超代数的自然层结构 (见**可表示函子** (representable functor)).

微分流形上的分析的基本概念亦被应用于超流形.

超流形也出现在理论物理学中; 它能够将粒子的 **Bose-Einstein 统计法** (Bose-Einstein statistics) 以及 **Fermi-Dirac 统计法** (Fermi-Dirac statistics) 统一到单一的多重谱, 也可将规范理论中的内部和动力对称统一到单一的超群.

**参考文献**

[1] Березин, Ф. А., Кац, Г. И., 《Матем. сб.》, 82 (1970), 343 – 350 (英译本: Berezin, F. A., Introduction to superanalysis, Reidel, 1987).
[2] Лейтес, Д. А., 《Успехи матем. наук》, 35 (1980), 1, 3 – 57 (英译本: Leites, D. A., (ed.): Seminar on supermanifolds, Kluwer, 1990).

Д. А. Лейтес 撰

【补注】 如上所述, 超流形研究的部分动力来自理论物理学, 特别是超对称和超重力, [A4]. 并非所有的作者都认为上述定义相对于这些目的而言是最好的, 见 [A2], [A3]. [A1] 中讨论了对于一个超流形的"良行为"范畴的"令人满意的公理". 超流形的某些定义满足这些公理, 例如上述定义, 而另一些则不满足.

**参考文献**

[A1] Rothstein, M., The axioms of supermanifolds and a new structure arising from them, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 297 (1986), 159 – 180.
[A2] Seiert, H. J., Clarke, C. J. S., Rosenblum, A. (eds.): Mathematical aspects of superspace, Reidel, 1984.
[A3] Bartocci, Cl., Bruzzo, U. and Hernández-Ruipérez, D., The geometry of supermanifolds Kluwer, 1991.
[A4] De Witt, B., Suppermanifolds, Cambridge Univ. Press, 1984.
[A5] Leites, D. A., Introduction to the theory of supermanifolds, *Russian Math. Surveys*, 35 (1980), 1, 1 – 64. (*Uspekhi Mat. Nauk*, 35 (1980), 1, 3 – 58.)
[A6] Berezin, F. A. and Shubin, M. A., The Schrödinger equation, Kluwer, 1991. Supplement 3: D. A. Leites, Quantization and supermanifolds.

张英伯 译

**超空间 [super-space; суперпространство]**

域 $k$ 上一个**向量空间** (vector space) $V$ 被赋予一个 $\mathbf{Z}/2$ 分次 $V=V_{\bar 0}\oplus V_{\bar 1}$. 空间 $V_{\bar 0}$ 和 $V_{\bar 1}$ 的元素分别称为偶的与奇的; 对于 $x\in V_i$, 奇偶性 $p(x)$ 定义为 $i(i\in\mathbf{Z}/2=\{\bar 0, \bar 1\})$. 每个超空间 $V$ 带有与之关联的另一个超空间 $\Pi(V)$, 使得 $\Pi(V)_i=V_{i+\bar 1}$ $(i\in\mathbf{Z}/2)$. 数对 $(m, n)$ 称为超空间 $V$ 的维数 (dimension of the super-space), 其中 $m=\dim V_{\bar 0}$, $n=\dim V_{\bar 1}$. 域 $k$ 通常被认为是一个具有维数 $(1, 0)$ 的超空间.

对于两个超空间 $V$ 和 $W$ 来说, 空间 $V\oplus W$, $\mathrm{Hom}_k(V, W)$ 和 $V^*$ 等的超空间结构自然地被定义. 尤其, 一个线性映射 $\varphi: V\to W$ 称为偶的, 如果 $\varphi(V_i)\subset W_i$; 称为奇的, 如果 $\varphi(V_i)\subset W_{i+\bar 1}$. 一个齐次双线性型 $\beta: V\otimes V\to k$ 称为对称的, 如果

$$\beta(y, x)=(-1)^{p(x)p(y)+p(\beta)(p(x)+p(y))}\beta(x, y);$$

称为斜对称的, 如果

$$\beta(y, x)=-(-1)^{p(x)p(y)+p(\beta)(p(x)+p(y))}\beta(x, y).$$

所有这些概念同样地适用于在一个任意交换**超代数** (superalgebra) $C$ 上的 $\mathbf{Z}/2$ 分次自由模 $V$, $V$ 里的基通常这样选择, 使得其最初的向量都是偶的, 而其最后的向量均为奇的. 模 $V$ 的任一自同态 $\varphi$ 在这样的基下记作一个分块矩阵

$$\alpha = \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & T \end{bmatrix},$$

其中 $X \in M_n(C)$、$T \in M_m(C)$，使得若 $\varphi$ 是偶的，则 $X$ 和 $T$ 由偶元素组成，以及 $Y$ 和 $Z$ 由奇元素组成，反之若 $\varphi$ 是奇的，则 $X$ 和 $T$ 由奇元素组成，以及 $Y$ 和 $Z$ 由偶元素组成（在前面的情况下，矩阵 $\alpha$ 是偶的，在后面的情况下，$\alpha$ 是奇的）。

**参考文献**


[1] Березин, Ф. А., Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными, М., 1983（英译本：Berezin, F. A., Introduction to superanalysis, Reidel, 1987）。

[2] Leites, D. A. (ed.), Seminar on super-manifolds, Kluwer, 1990. Д. А. Лейтес 撰


【补注】

**参考文献**


[A1] Berezin, F. A. and Shubin, M. A., The Schrödinger equation, Kluwer, 1991. Supplement 3: Leites, D. A. Quantization and supermanifolds.


蒋滋梅 译

**超代数［superalgebra；супералгебра］**

域 $k$ 上的 **Z/2 分次代数**（graded algebra），即 $k$ 上的一个**超空间**（super-space）$A$，带有一个偶线性映射 $A \otimes A \to A$。一个超代数被称为交换的（commutative）（分次交换的（graded-commutative）或超交换的（supercommutative）），若

$$ab = (-1)^{p(a)p(b)} ba,\ a, b \in A;$$

这里 $p$ 是奇偶性，即 Z/2 分次。

超代数的定义可以被推广到标量区域是任意交换结合超代数 $C$ 的情形。

$C$ 上结合超代数的例子是：形如

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & T \end{bmatrix}$$

的矩阵代数 $M_{m|n}(C)$，这里 $X \in M_m(C)$，$T \in M_n(C)$，有一个自然的 Z/2 分次（见**超空间**（super space））；$C$ 上 Z/2 分次模 $M$ 的**张量代数**（tensor algebra）$T(M)$；模 $M$ 的**对称代数**（symmetric algebra）$S(M) = T(M)/I$，这里 $I$ 是由形如

$$x \otimes y - (-1)^{p(x)p(y)} y \otimes x$$

的元素生成的理想；以及模 $M$ 的**外代数**（exterior algebra）$\Lambda(M) = S(\Pi(M))$（后两个超代数是交换的）。

带有乘法 $[\cdot, \cdot]$ 的超代数 $\mathfrak{G}$ 称为 Lie 超代数（Lie superalgebra），如果对所有的 $x, y, z \in \mathfrak{G}$，

$$[x, y] = (-1)^{p(x)p(y)+1}[y, x],$$

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] + (-1)^{p(x)p(y)}[y, [x, z]]$$

（当 $p(x) = \bar{1}$，$\operatorname{char} k = 3$ 时，$[x, [x, x]] = 0$）。特别地，当特征为 2 时不存在 Lie 超代数，仅存在 Z/2 分次 Lie 代数。

例．任何结合的超代数，以换位（commutation）（超换位子差分（supercommutator difference））

$$[x, y] = xy - (-1)^{p(x)p(y)+1} yx$$

作为括号运算；任何超代数 $A$ 的导子（derivation）代数 $\operatorname{Der} A$（即线性变换 $\delta: A \to A$ 的代数，其中 $\delta(ab) = (\delta a)b + (-1)^{p(\delta)p(a)} a(\delta b)$），连同换位运算．对任何 Lie 超代数 $\mathfrak{G}$，存在一个结合的泛包络超代数，并且 **Birkhoff-Witt 定理**（Birkhoff-Witt theorem）的直接推广成立．

域 $\mathbf{C}$ 上的有限维单 Lie 超代数的分类已经知道（见[2]，[3]）．它们被分成经典型 Lie 超代数（Lie superalgebras of classical type）（由 Lie 代数 $\mathfrak{G}_0$ 是约化的这一事实所刻画）和 Cartan 型 Lie 超代数（Lie superalgebras of Cartan type）．经典型 Lie 超代数由以下一系列矩阵代数完全给出：

$$\mathrm{sl}(m, n) = \left\{ \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & T \end{bmatrix} \in M_{m|n}(\mathbf{C}) : \operatorname{Tr} X = \operatorname{Tr} Y \right\}$$

$$(m \neq n);$$

对一个偶对称非退化双线性型 $\beta$

$$\mathrm{osp}(m, 2n) =$$
$$= \{\alpha \in M_{m|n}(\mathbf{C}) : \beta(\alpha(x), y) +$$
$$+ (-1)^{p(\alpha)p(x)} \beta(x, \alpha(y)) = 0\};$$

对一个奇对称非退化双线性型 $\beta$

$$\mathrm{pe}(n) = \{\alpha \in M_{n|n}(\mathbf{C}) : \beta(\alpha(x), y) +$$
$$+ \beta(x, (-1)^{p(\alpha)p(x)} \alpha(y)) = 0\};$$

$$\mathrm{spe}(n) = \mathrm{pe}(n) \cap \mathrm{sl}(n, n),$$

$$\mathrm{q}(n) = \left\{ \begin{bmatrix} X & Y \\ Y & X \end{bmatrix} \in M_{n|n}(\mathbf{C}) : \operatorname{Tr} Y = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ \alpha \in M_{n|n}(\mathbf{C}) : \left[ \alpha, \begin{bmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{bmatrix} \right] = 0 \right\},$$

$$\mathrm{sq}(n) = \{\alpha \in \mathrm{q}(n) : q\operatorname{Tr} \alpha = 0\},$$

这里

$$q\operatorname{Tr} \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} = \operatorname{Tr} B \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{psq}(n) = \mathrm{sq}(n) / \{cE : c \in \mathbf{C}\};$$

及某些例外代数（17，31 和 40 维的）．Cartan 型超

代数是代数 $\operatorname{Der}\Lambda(\mathbf{C}^n)$ 及其超子代数，类似于单 Lie 分次代数 $W_n$，$S_n$，$H_n$（见**分次 Lie 代数**（Lie algebra, graded））.

单 Lie 超代数的实结构分类和半单 Lie 超代数由单 Lie 超代数的刻画也已解决．

Lie 超代数的线性表示理论实质上比 Lie 代数的更为复杂，单 Lie 超代数的表示一般不是完全可约的，而可解 Lie 超代数的不可约表示未必是一维的．C 上有限维单 Lie 超代数的不可约表示存在一个根据首权进行的分类（见[1]，[2]），有限维表示的明确的刻画，如同这些代数的一系列**特征标公式**（charater formula）一样，已经得到（[1]）.

**参考文献**


[1A] Leites, D. A., Lie superalgebras, Josmar 30(1984).

[1B] Leites, D. A. (ed), Seminar on supermanifolds, Kluwer, 1990.

[2] Kac, V. G., Lie superalgebras, *Adv. Math.*, **26** (1977), 8 – 96.

[3] Scheunert, M., The theory of Lie superalgebras. An introduction, Springer, 1979.


Д. А. Лейтес 撰

【补注】 C 上有限维单 Lie 超代数的分类由 V. G. Kac 在 1975 年获得（见[2]）.

可解 Lie 超代数有限维不可约表示的分类可在[2]中找到．

单 Lie 超代数的有限维不可约表示分成两类：典型的和非典型的（例外的）．在[A1]中计算了典型表示（typical representation）的特征标．非典型表示（atypical representation）的特征标，甚至 $\mathrm{sl}(m,n)$ 的情形，还不知道．

**参考文献**


[A1] Kac, V. G., Representations of classical Lie superalgebras, in K. Bleuler, et al. (ed.), Differential Geometrical Methods in Mathematical Physics II, Lecture notes in math., Vol. 676, Springer, 1978, 597 – 626.

[A2] Berezin, F. A. and Shubin, M. A., The Schrödinger equation, Kluwer, 1991. Supplement 3, D. A. Leites, Quantization and supermanifolds.

[A3] Berezin, F. A., Introduction to superanalysis, Reidel, 1987(译自俄文).


黎传仁 译

**超有效估计量** [**superefficient estimator** 或 hyperefficient estimator; **сверхэффективная оценка**]

术语"超有效估计量序列"的通用简称，指比未知参数的相合最大似然估计量序列好（更有效）的、相合渐近正态估计量序列．

设 $X_1,\cdots,X_n$ 是取值于样本空间 $(\mathfrak{X},\mathscr{B},\mathsf{P}_\theta)(\theta\in\Theta)$ 的随机变量．假设对于分布族 $\{\mathsf{P}_\theta\}$，存在参数 $\theta$ 的相合最大似然估计量 $\hat{\theta}_n=\hat{\theta}_n(X_1,\cdots,X_n)$ 的序列 $\{\theta_n\}$．其次，设 $\{T_n\}$ 是参数 $\theta$ 的渐近正态估计量 $T_n=T_n(X_1,\cdots,X_n)$ 的序列．假如对于一切 $\theta\in\Theta$，有

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{E}_\theta[n(T_n-\theta)^2]\leqslant\frac{1}{I(\theta)},$$

其中 $I(\theta)$ 是 **Fisher 信息量**（Fisher amount of information），并且至少在一个点 $\theta^*(\theta^*\in\Theta)$，满足严格不等式

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{E}_{\theta^*}[n(T_n-\theta^*)^2]<\frac{1}{I(\theta)},\qquad(*)$$

则称序列 $\{T_n\}$ 关于平方损失函数为超有效的（superefficient），而使（*）式成立的点 $\theta^*$ 称为超有效点（point of superefficiency）.

**参考文献**


[1] Ибрагимов, И. А., Хасьминский, Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979(英译本: Ibragimov, I. A. and Khas'minskii, R. Z., Statistical estimation: Asymptotic theory, Springer, 1981).

[2] Schmetterer, L., Introduction to mathematical statistics, Springer, 1974(译自德文).

[3] Le Cam, L., On some asymptotic properties of maximum likelihood estimates and related Bayes estimates, *Univ. California Publ. Stat.*, **1**(1953), 277 – 330.


М. С. Никулин 撰 周概容 译

**母图** [**supergraph**; **надграфик**]，函数的

设 $f\colon X\to\overline{\mathbf{R}}$ 为定义在某集合 $X$ 上，在扩充的实轴 $\overline{\mathbf{R}}=\mathbf{R}\cup\{-\infty\}\cup\{+\infty\}$ 上取值的函数，则 $f$ 的母图是 Descartes 积 $X\times\mathbf{R}$ 的子集，它是由在 $f$ 的图"之上"的所有点 $(x,\alpha)$ 组成．母图有时也称作上境图（epigraph）且记作 $\operatorname{epi}f$:

$$\operatorname{epi}f=\{(x,\alpha)\in X\times\mathbf{R}:\alpha\geqslant f(x)\}.$$

母图在 $X$ 上的投影称作 $f$ 的有效定义域（effective domain），记作 $\operatorname{dom}f$:

$$\operatorname{dom}f=\{x\in X: f(x)<+\infty\}.$$

称函数 $f$ 是正常的（proper），如果

$$f(x)>-\infty,\ \forall x,\ \text{且}\ \operatorname{dom}f\neq\emptyset.$$

定义在实向量空间 $X$ 上的函数 $f\colon X\to\mathrm{R}$ 是凸的（convex），当且仅当 $\operatorname{epi}f$ 是 $X\times\mathbf{R}$ 的凸子集．定义在拓扑空间 $X$ 上的函数 $f\colon X\to\overline{\mathbf{R}}$ 是上半连续的（upper semi-continuous），当且仅当 $\operatorname{epi}f$ 是闭集．

В. М. Тихомиров 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Rockafellar, R. T., Convex analysis, Princeton Univ. Press, 1970, p. 23; 307.


赵希顺 译

**上调和函数** [**superharmonic function** ; **супергармоническая функция**]

在 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n(n \geq 1)$ 或者调和空间中点 $x$ 的函数 $u(x)$，使得 $-u(x)$ 是**下调和函数**（subharmonic function）．　　Е．Д．Соломенцев 撰

【补注】 既是下调和，又是上调和的函数称为**调和函数**（harmonic function）．　　吴炯圻　高琪仁 译

**上抛物函数** [**superparabolic function** ; **суперпараболическая функция**]，上热函数（supercaloric function）

使得 $-v(x,t)$ 是**下抛物函数**（subparabolic function）的函数 $v(x,t)$，其中 $x \in \mathbf{R}^n$，$t \in \mathbf{R}$．

Е．Д．Соломенцев 撰　高琪仁　吴炯圻 译

**函数的叠加** [**superposition of functions**; **суперпозиция функций**]，函数的合成（composition of functions）

两个（或更多个）函数合成的函数．

王斯雷 译

**超可解群** [**supersolvable group** 或 supersoluble group; **сверхразрешимая группа**]

一个群 $G$，它具有有限的正规子群列（subgroup series）

$$G = G_1 \supseteq \cdots \supseteq G_{n+1} = E,$$

且列中每个商群 $G_{i-1}/G_i$ 是循环群．超可解群皆为**多循环群**（polycyclic group）．超可解群的子群和商群仍超可解，超可解群的换位子群是幂零群．一个有限群为超可解的，当且仅当它的所有极大子群有素数指数（Huppert 定理（Huppert theorem））．

Н．Н．Вильямс 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Doerk, K. and Hawkes, T., Finite soluble groups, de Gruyter, 1992, p. 483.

[A2] Hall, M., The theory of groups, Macmillan, 1959 Sects. 10.1; 10.5（中译本：M．赫尔．群论，科学出版社，1984）．


石生明 译　王　杰 校

**支撑函数** [**support function**; **опорная функция**]，支撑泛函（support functional），实向量空间 $X$ 中集合 $A$ 的

对偶于 $X$ 的向量空间 $Y$ 上的函数 $sA$，由以下关系定义：

$$(sA)\ (x) = \sup_{y \in A} \langle x, y \rangle.$$

例如，作为其共轭空间的对偶的赋范空间中单位球面的支撑函数是其共轭空间的范数．

支撑函数总是凸的、闭的和正（一次）齐次的．算子 $s: A \to sA$ 是从 $X$ 中闭凸集族到闭凸齐次函数族上的一一映射；其逆算子是支撑函数（在零点）的次微分（subdifferential）．事实上，如果 $A$ 是 $X$ 中的凸闭子集，则 $\partial(sA) = A$；如果 $p$ 是 $Y$ 上的闭凸齐次函数，则 $s(\partial p(0)) = p$．这两个关系式（由 Fenchel-Moreau 定理导出的结果，见**共轭函数**（conjugate function））也表示了闭凸集和闭凸齐次函数之间的对偶性．

联系算子 $s$ 与代数和集合论运算的关系的例子是：

$$s(\lambda C) = \lambda s C,\ \lambda > 0;\ s(A_1 + A_2) = sA_1 + sA_2;$$

$$s(\mathrm{conv}(A_1 \cup A_2))\ (x) = \max(sA_1(x),\ sA_2(x)).$$

**参考文献**


[1] Rockafellar, R. T., Convex analysis, Princeton Univ. Press, 1970.

[2] Minkowski, H., Geometrie der Zahlen, Chelsea, reprint, 1953.

[3] Minkowski, H., Gesammelte Abhandlungen, 2 Teubner, 1911.

[4] Fenchel, W., On conjugate convex functions, *Canad. J. Math.*, 1 (1949), 73 – 77.

[5] Fenchel, W., Convex cones, sets and functions, Princeton Univ. Press, 1953.

[6] Hörmander, L., Sur la fonction d'appui des ensembles convexes dans un espace localement convexe, *Ark. Mat.*, 3 (1955), 181 – 186.


В．М．Тихомиров 撰

【补注】 支撑函数在泛函分析和凸分析的其他应用，例如最优化和数的几何中，有重要作用．

已发现 $\mathbf{R}^{2n}$ 中闭凸域的支撑函数在整函数的增长（和零点分布）的研究中的应用，如见 **Borel 变换**（Borel transform）；**整函数**（entire function）；**增长标形**（growth indicatrix）．

**参考文献**


[A1] Gruber, P. M. and Lekkerkerker, C. G., Geometry of numbers, North-Holland, 1987.

[A2] Schneider, R., Boundary structure and curvature of convex bodies, in J. Tölke and J. M. Wills (eds.): Contributions to Geometry, Birkhäuser, 1979, 13 – 59.


陆珊年 译

**函数 $f$ 的支集** [**support of a function**; **носитель функции**]，定义在拓扑空间 $X$ 上的

使数值函数 $f$ 在余集 $X \setminus S$ 上处处为 0 的最小闭集 $S = \mathrm{supp} f \subset X$．换言之，$S$ 为 $X$ 中使 $f(x) \neq 0$

的所有点 $x$ 所成点集的闭包． Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 称函数 $f$ 具有紧支集（compact support），若 supp$f$ 为紧集．取值于实数域 **R** 或复数域 **C**（或其他环或域）的具紧支集的函数，构成一个向量空间．

**参考文献**


[A1] Rudin, W., Real and complex analysis, Mc Graw. Hill, 1966, p.38（中译本：W. 卢丁：实分析与复分析，人民教育出版社，1981）． 王斯雷 译


**广义函数的支集［support of a generalized function; обобщенной функции носитель］**

使得该广义函数（generalized function）在其任何邻域内不为零的那些点（且只是那些点）的集合．$D'(O)$ 中的一个广义函数 $f$ 在一开集 $O'\subset O$ 为零，如果对所有的 $\varphi\in D(O')$，$(f,\varphi)=0$．用单位分解可证明如果 $D'(O)$ 中广义函数 $f$ 对每点 $y\in O$ 在某邻域 $U_y\subset O$ 为零，则 $f$ 在 $O$ 中为零．其中 $f$ 为零的所有邻域之并，称为 $f$ 的零集（zero set）且记为 $O_f$．$f$ 的支集，记为 supp$f$，是 $O_f$ 在 $O$ 中的补，即 $\mathrm{supp} f=O\backslash O_f$ 是 $O$ 中闭集．如果 $f$ 是 $O$ 中的一个连续函数，则 $f$ 的支集的一个等价定义如下：supp$f$ 是在其上 $f$ 为零的点的集合的补集在 $O$ 中的闭包（见**函数的支集**（support of a functron））．例如，$\mathrm{supp}\, x=\mathbf{R}^1$，$\mathrm{supp}\,\delta=\{0\}$．

一个广义函数的奇异支集（singular support）（sing-supp）是使得该广义函数在其任何邻域中不等于 $C^\infty$ 函数的那些点（且只是那些点）的集合．例如，$\mathrm{sing\,supp}\, x=\phi$，$\mathrm{sing\,supp}\,\delta=\{0\}$． В. С. Владимиров 撰

【补注】 上面用到的零集概念有点不寻常且与普通函数（不是广义函数）的零集不一致，后者是指函数取零值的点的集合．当然，对广义函数 $f$ 语句"$f(x)=0$"无意义．

广义函数 $f$ 的支集中的一个点 $x_0$ 称为 $f$ 的本质点（essential point），见［A4］．

**参考文献**


[A1] Schwartz, L., Théorie des distributions, Hermann, 1966.

[A2] Hörmander, L., The analysis of linear partial differential operators, 1, Springer, 1983.

[A3] Vladimirov, V. S., Drozzinov, Yu. N. and Zavialov, B. I., Tauberian theory for generalized functions, Kluwer, 1988（译自俄文）．

[A4] Gel'fand, I. M. and Shilov, G. E., Generalized functions, 1, Properties and operations, Acad. Press, 1964, p.5（译自俄文；中译本：И. М. 盖尔芳特等，广义函数（1），科学出版社，1965）．


葛显良 译 鲁世杰 校

**测度 $\mu$ 的支集［support of a measure $\mu$; носитель меры $\mu$］**

集合 $S(\mu)=G\backslash G_0(\mu)$，其中 $G$ 是局部紧 Hausdroff 空间，$\mu$ 是此空间上给定的正则 Borel 测度，$G_0(\mu)$ 是使 $\mu(G_0)=0$ 的最大开集．换句话说，$S(\mu)$ 是 $\mu$ 被支撑的最小闭集．（这里，如果 $\mu(G\backslash E)=0$，那么 $\mu$ 支于 $E$．）若 $S(\mu)$ 是紧集，则称 $\mu$ 是具有紧支集（compact support）的．

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 对拓扑空间 $G$ 上的测度 $\mu$，当所有 $\mu$ 零开子集的并集仍为零测集时，是可以定义 $\mu$ 的支集的．在 $G$ 有可数基，或 $\mu$ 是胎紧的或 $\mu$ 是 Radon 测度（见**正则测度**（regular measure））时正是这种情形．但若 $G$ 仅为局部紧以及 $\mu$ 不是胎紧的，则就不总是如此了．

当然，对于带拓扑 $\tau$ 的拓扑空间 $G$ 上的测度 $\mu$，总是可以定义

$$S(\mu)=G\backslash\bigcup\{V:\ V\in\tau \text{ 且 } \mu(V)=0\},$$

但此时不一定有 $\mu(G\backslash S(\mu))=0$，而有违于支集的直觉．

**参考文献**


[A1] Rudin, W., Real and complex analysis, McGraw-Hill, 1966, 57（中译本：W. 卢丁，实分析和复分析，人民教育出版社，1981）．

[A2] Federer, H., Geometric measure theory, Springer, 1969, 60, 62, 71, 108.


周民强 译

**模的支集［support of a module; носитель модуля］**，交换环 $A$ 上模 $M$ 的

所有使得此模的局部化 $M_p$ 不为零的 $A$ 的素理想 $\mathfrak{p}$ 的集合（见**交换代数中的局部化**（localization in a commutative algebra））．此集合记为 $\mathrm{Supp}(M)$．它是此环的谱的子集（见**环的谱**（spectrum of a ring））．例如，对于有限 Abel 群 $M$，把它看作整数环上的模，则 $\mathrm{Supp}(M)$ 由所有素理想 $(p)$ 组成，其中 $p$ 整除 $M$ 的阶．对任一模 $M$，$\mathrm{Supp}(M)$ 为空集，当且仅当 $M=0$．

**参考文献**


[1] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Commutative algebra, Addison-Wesley, 1972（译自法文）．


Л. В. Кузьмин 撰 赵春来 译

**支撑超平面［supporting hyperplane; опорная гиперплоскость］**，$n$ 维向量空间中集合 $M$ 的

一个含有 $M$ 的闭包的若干点的 $(n-1)$ 维平面，使得 $M$ 位于一个闭半空间中．当 $n=3$ 时，支撑超平面称为支撑平面（supporting plane），当 $n=2$

时，称为支撑直线（supporting line）.

至少有一个支撑超平面通过的 $M$ 的一个边界点称为 $M$ 的一个支撑点（support point）. 在一个凸集 $M$ 中，所有的边界点都是支撑点．这一性质被 Archimedes 用于作为 $M$ 的凸性的一个定义．只有一个支撑超平面通过的凸集 $M$ 的边界点称为光滑的（smooth）.

在一般的向量空间中，其中一个超平面可定义为一个线性泛函取常数值的区域，一个集合 $M$ 的支撑超平面的概念也可以定义（线性泛函在 $M$ 的点上取的值都小于（都大于）或等于线性泛函在该超平面上取的值）. В. А. Залгаллер 撰

【补注】 支撑超平面在凸性，如最优化和数的几何中也有重要的应用.

**参考文献**


[A1] Gruber, P. M. and Lekkerkerker, C. G., Geometry of numbers, North-Holland, 1987.

[A2] Rockafellar, R. T., Convex analysis, Princeton Univ. Press, 1970.

[A3] Schneider, R., Boundary structure and curvature of convex bodies, in J. Tölke and J. M. Wills (eds.): Contributions to Geometry, Birkhäuser, 1979, 13–59.

[A4] Stoer, J. and Witzgall, Ch., Convexity and optimization in finite dimensions, 1, Springer, 1970.

[A5] Lindenstrauss, J. and Milman, V. D. (eds.), Geometric aspects of functional analysis, Lecture notes in math., 1376, Springer, 1988.


陆珊年 译

**曲面 [surface; поверхность]**

几何学中的基本概念之一．在各种几何学领域内曲面的定义有实质性差别.

在初等几何学中，考虑平面、多面形，以及某些弯曲的面（如球面）．每一个弯曲的面都用一种特殊的方式来定义，经常作为点的集合或线的集合．在初等几何学中对面的一般概念只是作描述，而不是定义：通常把一个物体的边界，或者一条运动的线的迹称为一个面，等等.

在解析几何学和代数几何学中，曲面被看作其坐标满足一种特定形式的方程的点的集合（见**二次曲面**（surface of the second order）；**代数曲面**（algebraic surface））.

在三维 Euclid 空间 $E^3$ 中，曲面是借助于曲面片（surface patch）——一个矩形在 $E^3$ 中的同胚象来定义的．曲面被看作是一个连通集，它是曲面片的并集（例如，球面是两个半球面的并集，而每一个半球面是曲面片）.

通常，$E^3$ 中的曲面是用向量函数给出的：

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)),$$

其中 $0\leqslant u,\ v\leqslant 1$，且

$$x=x(u,v),\ y=y(u,v),\ z=z(u,v)$$

是参数 $u$，$v$ 的函数，满足一定的正则性条件，例如

$$\operatorname{rank}\left\|\begin{matrix} x_u' & y_u' & z_u' \\ x_v' & y_v' & z_v' \end{matrix}\right\|=2.$$

（见**微分几何学**（differential geometry）；**曲面理论**（theory of surfaces）；Riemann **几何学**（Riemannian geometry））.

从拓扑学的观点看，曲面是一个二维流形（two-dimensional manifold）. Л. А. Сидоров 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Stoker, J. J., Differential geometry, Wiley (Interscience). 1969

[A2] Thorpe, J. A., Elementary topics in differential geometry, Springer, 1979.


陈维桓 译

**曲面函数 [surface function; поверхностная функция]**

同**面积函数**（area function）.

**曲面积分 [surface integral; поверхностный интеграл]**

曲面（surface）上的**积分**（integral）. 假设 $S$ 为三维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^3$ 中的可能自相交的曲面，它用直角坐标 $x$，$y$，$z$ 的向量表达式为

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v), \tag{1}$$

其中 $\mathbf{r}(u,v)=(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))$ 是 $(u,v)$ 的连续可微向量函数，定义在直角坐标 $u$，$v$ 的平面中某二维 Jordan 可测区域 $G$ 的闭包 $\bar{G}$ 上．设

$$g_{11}=\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\right)^2,\ g_{12}=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v},\ g_{22}=\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right)^2$$

为 $S$ 的**第一基本形式**（first fundamental form）的系数．若 $F(x,y,z)$ 为定义在 $S$ 上的函数，即函数 $F(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))$，则第一类曲面积分（surface integral of the first kind）（或曲面面积上的积分（integral over the surface area））由下式定义：

$$\iint_S F(x,y,z)\,dS= \tag{2}$$

$$=\iint_G F(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}\,du\,dv.$$

这定义与曲面的表达式无关．第一类曲面积分是相应于曲面上的 Riemann 和的极限．例如，假设 $F(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))$ 为 Riemann 可积函数，$\tau=\{S_i\}_{i=1}^k$ 为把 $S$ 剖分成许多部分 $S_i$ 的一个分解，它

但是 $\overline{G}$ 分解成点集 $E_i \subset \overline{G}$ 的一个剖分 $\tau_0=\{E_i\}_{i=1}^{i=k}$ 在映射(1)下的象(见**多重积分**(multiple integral)),又设

$$\operatorname{mes} S_i=\iint_{E_i}\sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}\,du\,dv$$

为 $S_i$ 的面积,那么

$$\iint_S F(x,y,z)\,dS=\lim_{\delta_{\tau_0}\to 0}\sum_{i=1}^{k}F(x(\xi_i,\eta_i),$$

$$y(\xi_i,\eta_i),z(\xi_i,\eta_i))\operatorname{mes} S_i,$$

其中 $\delta_{\tau_0}$ 为剖分 $\tau_0$ 的直径,而 $(\xi_i,\eta_i)\in E_i$. 若 $S$ 可以显式表示为 $z=f(x,y)$, $(x,y)\in\overline{G}$, 则(2)成为

$$\iint_S F(x,y,z)\,dS=$$

$$=\iint_G F(x,y,f(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy.$$

若向量表达式(1)的曲面 $S$ 上无奇点,即 $\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\neq 0$, 那么其上可以选取一连续的单位法向量 $\mathbf{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, 例如

$$\mathbf{n}=\frac{\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|},$$

而将 $S$ 定向. 对于定向曲面 $S^+$, 用下面的关系定义**第二类曲面积分**(surface integrals of the second kind)

$$\left.\begin{aligned}
\iint_{S^+}F(x,y,z)\,dx\,dy&=\iint_S F(x,y,z)\cos\gamma\,dS,\\
\iint_{S^+}F(x,y,z)\,dy\,dz&=\iint_S F(x,y,z)\cos\alpha\,dS,\\
\iint_{S^+}F(x,y,z)\,dz\,dx&=\iint_S F(x,y,z)\cos\beta\,dS,
\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

其中,右方均为第一类曲面积分. 假如 $S^-$ 表示与 $S^+$ 定向相反的曲面 $S$, 那么定义

$$\iint_{S}F(x,y,z)\,dx\,dy=-\iint_{S^-}F(x,y,z)\,dx\,dy.$$

(3)中另外两个积分也类似地定义. 与第一类曲面积分类似,第二类曲面积分,也可以通过曲面上 Riemann 和的极限来表示.

若

$$\mathbf{n}=\frac{\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|},$$

那么

$$\iint_{S^+}F(x,y,z)\,dx\,dy=$$

$$=\iint_G F(x(u,v),\,y(u,v),\,z(u,v))\,\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,du\,dv.$$

(3)中其余两个第二类型积分也有类似的公式. 特别,对于曲面 $z=f(x,y)$, $(x,y)\in\overline{G}$ 的情形,

$$\iint_{S^+}F(x,y,z)\,dx\,dy=\iint_G F(x,y,f(x,y))\,dx\,dy,$$

$$\iint_{S^-}F(x,y,z)\,dx\,dy=-\iint_G F(x,y,f(x,y))\,dx\,dy.$$

上述积分的第一个称为在 $S$ 的"上"侧的积分,而第二个积分则称为在 $S$ 的"下"侧的积分. 这些名词的由来是因为当 $S$ 在显式表示,即 $x=u,y=v$ 而 $z=f(x,y)$ 时,向量

$$\mathbf{n}=\frac{\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|}$$

在第一种情形,与 $z$ 轴的夹角为锐角,即"向上";而在第二种情形,它与 $z$ 轴的夹角为钝角即"向下".

若光滑曲面 $S$ 为一有界区域的边界,$S^+$ 表示相对于区域,用向外的法线将 $S$ 定向,从而 $S^-$ 表示用向内的法线对 $S$ 的定向,这样,在定向曲面 $S^+$ 上的第二类曲面积分就称为**关于曲面外侧的曲面积分**(surface integrals with respect to the outside of the surface),而 $S^-$ 上的积分,则称为**关于曲面内侧的曲面积分**(surface integrals with respect to the inside).

能分解成有限片并可分别有向量表达式(1)的逐片光滑的曲面,其上的曲面积分定义为逐片光滑曲面的曲面积分之和. 这样定义的曲面积分与曲面的分法无关.

**Остроградский 公式**(Ostrogradski formula)建立了三维有界区域上的三重积分与其边界上曲面积分之间的关系,而 **Stokes 公式**(Stokes formula)给出了曲面积分和表示其边界的围道上的曲线积分之间的关系.

曲面积分 $\iint_S dS$ 等于 $S$ 的**面积**(area). 假设密度为 $F(x,y,z)$ 的物质分布在 $S$ 上,那么曲面积分 $\iint_S F(x,y,z)\,dS$ 等于它的全部质量. 若 $\mathbf{a}=\mathbf{a}(x,y,z)$ 为 $S$ 上定义的向量函数,而 $S$ 通过它的单位法线 $\mathbf{n}$ 定向,那么曲面积分

$$\iint_S(\mathbf{a}\cdot\mathbf{n})\,dS$$

称为**向量场 a 通过 S 的流量**(flux of the vector field $\mathbf{a}$). 显然,它与 $\mathbf{R}^3$ 中坐标的选取无关. 曲面积分也用来表示**双层位势**(double-layer potential)或**单层位势**(simple-layer potential).

假设曲面 $S$ 是可微 2 维流形,而连续可微的非负函数 $\varphi_j(x,y,z)$, $j=1,\cdots,m$, 构成了 $S$ 上的一个**单位分解**(partition of unity),即每个函数的支集含于 $S$ 的**某坐标卡**(chart)内,且 $\sum_{j=1}^{m}\varphi_j(x,y,z)=1$ 对每点 $(x,y,z)\in S$ 成立. 再设 $F(x,y,z)$ 是定义在 $S$ 上的函数,那么由定义,

$$\iint_S F(x,y,z)dS = \sum_{j=1}^{m} \iint_S \varphi_j(x,y,z)F(x,y,z)dS, \tag{4}$$

其中右方每个积分都是（2）意义下的积分．假设 $S^+$ 是定向的二维流形，那么

$$\iint_{S^+} F(x,y,z)dxdy =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \iint_{S^+} \varphi_j(x,y,z)F(x,y,z)dxdy. \tag{5}$$

(3) 中第二类曲面积分的其他情形可类似定义．定义（4）与（5）均与 $S$ 上单位分解的选取无关．

**参考文献**


[1] Ильин, В. А., Позняк, Э. Г., Основы математического анализа, 2 изд., ч. 2, М., 1980 (英译本: Il'in, V. A. and Poznyak, E. G., Fundamentals of mathematical analysis, 1－2, Mir, 1982).

[2] Кудрявцев, Л. Д., Курс математического анализа, т. 2, М., 1981.

[3] Никольский, С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 2, М., 1975 (中译本: С. М. 尼科尔斯基, 数学分析教程, 第二卷, 高等教育出版社, 1992).

[4] Дубровин, Б. А., Новиков, С. П., Фоменко, А. Т., Современная геометрия, М., 1979 (英译本: Dubrovin, B. A., Novikov, S. P. and Fomenko, A. T., Modern geometry, Springer, 1987).

[5] Мищенко, А. С., Фоменко, А. Т., Курс дифференциальной геометрии и топологии, М., 1980 (英译本: Mishchenko, A. S. and Fomenko, A. Г., A course of differential geometry and topology, Mir, 1988).


Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】 Остроградский 公式在西方通常称为 Gauss 公式 (Gauss formula). 有时也叫**散度定理** (divergence theorem).

可以将 $g_{11}g_{22}-g_{12}^2$ 写成向量形式:

$$g_{11}g_{22}-g_{12}^2 = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\|.$$

在西方文献中，通常不区分第一类与第二类曲面积分．

用 2 次形式可以容易地定义可微 2 维流形上的积分．例如见 [A4] 以及**流形上的积分** (integration on manifolds).

**参考文献**


[A1] Shilov, G. E., Mathematical analysis, 1－2, M. I. T., 1974 (译自俄文).

[A2] Apostol, T., Calculus, 2, Waltham, 1969 (中译本: T. M. 阿波斯托, 微积分学, 高等教育出版社, 1987).

[A3] Apostol, T., Mathematical analysis, Addison-Wesley, 1974.

[A4] Berger, M. and Gostiaux, B., Differential geometry: manifolds, curves and surfaces, Springer, 1988 (译自法文).

[A5] Spivak, M., A comprehensive introduction to differential geometry, 1－5, Publish or Perish, 1979.

[A6] Stoker, J. J., Differential geometry, Wiley (Interscience), 1969.

[A7] Struik, D. J., Lectures on classical differential geometry, Addison-Wesley, 1961.

[A8] Buck, R. C., Advanced Calculus, McGraw-Hill, 1965.

[A9] Fleming, W., Functions of several variables, Springer, 1977.

[A10] Marsden, J. and Weinstein, A., Calculus, 3, Springer, 1988.


王斯雷 译

**螺旋运动曲面** [**surface of screw motion; винтовая поверхность**]，螺旋面 (helical surface)

一条平面曲线 $L$ 绕一条轴匀速旋转，同时沿该轴匀速前进所描绘出的曲面．若 $L$ 落在旋转轴 $z$ 的平面上，由方程 $z=f(u)$ 所定义，则螺旋面的位置向量是

$$r = \{u\cos v,\ u\sin v,\ f(u)+hv\},\ h = \text{常数},$$

其线元是

$$ds^2 = (1+f'^2)du^2 + 2hf'dudv + (u^2+h^2)dv^2.$$

螺旋面能变形为一个旋转面，使得生成螺旋线成为平行圆 (Boor 定理 (Boor theorem))．若 $f=$ 常数，则得**直螺旋面** (helicoid)；若 $h=0$，则得**旋转曲面** (rotation surface).

И. Х. Сабитов 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Berger, M. and Gostiaux, B., Differential geometry, Springer, 1988 (译自法文).

[A2] Coxeter, H., Introduction to geometry, Wiley, 1963.

[A3] Do Carmo, M., Differential geometry of curves and surfaces, Prentice Hall, 1976


陈维桓 译

**二次曲面** [**surface of the second order; поверхность второго порядка**]

三维实或复空间中一些点的集合，这些点在 Descartes 坐标系中的坐标满足二次代数方程 (algebraic equation):

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz +$$

$$+ 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0. \tag{*}$$

方程 (*) 不一定定义实的几何图象，在这种情况下，

就说（*）定义一个虚的二次曲面．根据一般方程（*）中的系数，可以通过坐标系的平移和旋转，把这个方程变换为下面给出的 17 种典范形式之一，其中每一种形式对应某一类曲面．确切地说，包括非奇异不可约曲面（non-singular irreducible surfaces）：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$（**椭球面**（ellipsoid）），

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$$（虚椭球面），

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

（**单叶双曲面**（hyperboloid）），

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$（双叶双曲面），

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z,\ p,q>0$$

（**椭圆抛物面**（elliptic paraboloid）），

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z,\ p,q>0$$

（**双曲抛物面**（hyperbolic paraboloid））；

奇异不可约曲面（singular irreducible surfaces）（见柱面（cylindrical surface（cylinder）））：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$（**椭圆柱面**（elliptic cylinder）），

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$$（虚椭圆柱面），

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$（**双曲柱面**（hyperbolic cylinder）），

$$y^2=2px$$（**抛物柱面**（parabolic cylinder））；

**锥面**（conical surface）：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$（锥面），

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$$（虚锥面），

奇异可约曲面（singular reducible surfaces）：

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$$（一对相交平面），

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$$（一对虚相交平面），

$$\frac{x^2}{a^2}=1$$（一对平行平面），

$$x^2+a^2=0$$（一对虚平行平面），

$$x^2=0$$（一对重合平面）．

具有唯一对称中心（曲面的中心（centre of surface））的二次曲面称为中心曲面（central surface）．中心的坐标作为下列方程的解来确定：

$$a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}=0,$$

$$a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{24}=0,$$

$$a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_{34}=0.$$

无对称中心的，或具有不确定中心的二次曲面称为非中心曲面（non-central surface）．

可以不把一般方程化为典范形式而是通过联合考虑所谓的二次曲面的基本不变量（basic invariants of second-order surfaces）来研究二次曲面．这是一些由方程（*）的系数构成的表达式，它们的值在坐标系的平移和旋转下保持不变：

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},\quad \delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{13} & a_{11} \end{vmatrix}.$$

$$S=a_{11}+a_{22}+a_{33},$$

以及半不变量（semi-invariants）$\Delta'$ 和 $\Delta''$，它们在坐标系的旋转下保持不变：

$$\Delta'=\Delta_{11}+\Delta_{22}+\Delta_{33},$$

其中 $\Delta_{ij}$ 是在 $\Delta$ 中 $a_{ik}$ 的代数余子式，以及

$$\Delta''=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

**表 1　根据不变量对二次曲面的分类**

| | | 非奇异曲面 | | 奇异曲面 |
|---|---|---|---|---|
| | | $\Delta>0$ | $\Delta<0$ | $\Delta=0$ |
| 中心曲面 $\delta\neq0$ | $\delta S>0$ $T>0$ | 虚椭球面 | 椭球面 | 虚锥面 |
| | $\delta S<0$ 和（或）$T\leqslant0$ | 单叶双曲面 | 双叶双曲面 | 实锥面 |
| 非中心曲面 $\delta=0$ | | 双曲抛物面 | 椭圆抛物面 | 柱面和可约曲面（见表 2） |

一般地说，这些不变量确定二次曲面到相差 Euclid 空间中的一个**运动**（motion）；如果两个曲面的对应的不变量相等，则通过运动可使这两个曲面重合．换句话说，这两个曲面关于空间运动群是等价的（度量等价

的).

**表 2** 柱面和二次可约曲面

| | 柱面 $\Delta'\neq 0$ | | 可约曲面 $\Delta'=0$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $T>0$ | 椭圆柱面 | | 一对虚相交平面 | | |
| | 虚的 $\Delta'S>0$ | 实的 $\Delta'S<0$ | | | |
| $T<0$ | 双曲柱面 | | 一对相交平面 | | |
| $T=0$ | 抛物柱面 | | 一对虚平行平面 $\Delta''>0$ | 一对平行平面 $\Delta''<0$ | 一对重合平面 $\Delta''=0$ |

从其他变换群的观点来看，也存在二次曲面的分类．例如，关于仿射变换群，由相同典范形式的方程定义的任何两个曲面是等价的，例如，两个相似的二次曲面是等价的．

利用二次曲面的各种仿射类之间的关系可以从射影几何学的观点来建立一种分类，这时，认为通过射影变换可以相互映射的那些曲面是等价的．例如，从射影几何学的观点来看，椭球面、椭圆抛物面和双叶双曲面都是实卵形曲面．它们的射影等价性表现在：存在某一射影坐标系，使得这些曲面的方程具有相同的形式：

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2=0,$$

即对应的二次形式 $\Phi(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 具有相同的阶(4)和相同的符号差(3)．它们的射影差别表现在同反常平面的交线的类型上：椭圆面相交于虚卵形线，双曲面相交于实卵形线，椭圆抛物面相交于一对虚相交直线．总共有八种二次曲面的射影等价类：

$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=0$ (虚卵形曲面)，

$x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2=0$ (实卵形曲面)，

$x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2=0$ (环形曲面)，

$x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$ (虚锥面)，

$x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$ (实锥面)，

$x_1^2+x_2^2=0$ (一对虚平面)，

$x_1^2-x_2^2=0$ (一对实平面)，

$x_1^2=0$ (一对重合平面)．

关于参考文献，见**二次曲线** (second-order curve)．

А. Б. Иванов 撰

【补注】 在其他域上，例如在 C，有限域和 $p$ 进域上，也可进行类似的分类．

**参考文献**

[A1] Berger, M., Geometry, 2, Springer, 1989 (中译本：M．贝尔热，几何，第一－五卷，科学出版社，1987－1991)．

[A2] Hilbert, D. and Cohn-Vossen, S. E., Geometry and the imagination, Chelsea, reprint, 1952 (译自德文)．

[A3] Brink, R. W., Analytic geometry, Appleton-Century, 1935.

[A4] Погорелов, А. В., Геометрия, М., 1987.

[A5] Погорелов, А. В., Аналитическая геометрия, М., 1980.

杜小杨 张鸿林 译

**曲面位势** [**surface potential**; **поверхностный потенциал**]

集中在某个曲面上的测度的位势．有两种形式的曲面位势被利用于处理**位势论** (potential theory) 中的主要边值问题：一种是分布在曲面 $S$ 上、其密度为 $\mu(y)(y\in S)$ 的测度产生的**单层位势** (simple-layer potential)

$$V(x)=\int_S \frac{\mu(y)}{|y-x|}\,dS_y;$$

而另一种是由分布在 $S$ 上具有密度 $\nu(y)$ 的测度产生的**双层位势** (double-layer potential)

$$W(x)=\int_S \nu(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{|y-x|}\,dS_y.$$

在物理学中，单层位势被解释为具有密度 $\mu(y)$ 的电荷的位势，而双层位势是具有密度 $\nu(y)$ 的偶极子的位势 (亦见**多极位势** (multi-pole potential))．

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】

**参考文献**

[A1] Kellog, O. D., Foundations of potential theory, Dover, reprint, 1953.

吴炯圻 高琪仁 译

**割补术** [**surgery**; **перестройка**]，球面割补术 (spherical surgery)，在型 $(\lambda,\ n-\lambda)$ 的流形上的

从一个 $(n-1)$ 维流形 $M_1$ 到另一个流形 $M_2$ 的一个转变，在于删去嵌入于 $M_1$ 中的 $\lambda-1$ 维的一个球面且用一个 $n-\lambda-1$ 维的嵌入球面代替它．有关细节见**环柄理论** (handle theory)．

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 也见 **Morse 割补术** (Morse surgery)．

薛春华 译

**满射** [**surjection** 或 surjective mapping; **сюръекция**]，集合 $A$ 到集合 $B$ 上的

映射 $f$ 满足 $f(A)=B$，即满足对每一 $b\in B$ 存在 $a\in A$，使得 $f(a)=b$．既可以说"$f$ 是满射"，也可以说"$f$ 是从 $A$ 到 $B$ 上的映射"．

О. А. Иванова 撰

【补注】 亦见**单射** (injection)；**一一映射** (bijection)；**集合的置换** (permutation of a set)．

赵希顺 译

**超实数** [surreal numbers; сюрдействительные числа]

【补注】 超实数是英国数学家 J. H. Conway[A2] 的创造. 它们起源于对策论领域. 它们的描述可以在 Conway [A2] (1976) 中找到, 但是两年以前 D. E. Knuth 已经在他的数学小说([A7])中普及了超实数. 只是在那以后超实数才成为较传统的数学论文和数学书的主题([A4], [A1]).

超实数是通过把 Dedekind 从有理数构造出实数的方法(见 **Dedekind 分割** (Dedekind cut))变成一种强有力的机制而得到的. 这种机制可以从什么都没有为起点把所有的数产生出来. 从空集开始, 以划分现有的数集成两个有序的部分为工具逐步地引进新数. 用这个办法新的超实数创造出来了, 同一个集合的不同分划所产生的数具有同一的生日(birthday). 这个构造对每一个作为生日的序数重复, 包括超限序数在内. 事实上, 这个构造永不停止, 因此超实数不形成一个集合, 它们形成一个真类(见**类型论** (types, theory of)).

在有限阶段构造所产生的对象, 它们在有理数中充当二进分数的角色. 余下的有限有理数以及其他实数将一起在第 $\omega$ 日出现, 但是在这一天里第一批超限数和第一批无穷小也将产生. 随之而来更多的标准数也被加入.

有趣的是这个构造随着提出对象的归纳定义也就可以规定顺序、相等以及代数运算诸如加法乘法等的归纳定义. 配备了这些运算的超实数的习性很像实闭域(除了超实数不是集合而是真类之外).

事实上对象的定义和顺序的定义是相辅相成的. 一个数是左集中没有数是大于等于右集中的任何数的一对集合. 如果两个数中第一个数的左集中没有数是大于等于第二个数的并且第二个数的右集中没有数是小于等于第一个数的, 则第一个数是小于等于第二个数. 上面的定义看起来是循环的, 因此抓住这个定义后面的直观是较为困难的, 但 Knuth 的数学小说指出, 这个定义是有意义的, 并且也可以向普通读者说清楚的. 虽然如此, Knuth 和 Conway 二人还都是把给出证明和构造的细节的任务故意留给了读者, 只有以后的作者才不得不全部作出并发表这一困难的数学.

结果, 定义的对象形成了一个**前顺序**(pre-order). 不同的对象可以同时既小于等于又大于等于, 所以顺序构造只有在按对应的等价关系作商之后才能得到.

加法和乘法的定义照此办理. 例如和的左集是由一个数与另一个数的左集的数的所有和所组成, 而和的右集是由一个数和另一个数的右集的数的所有和所组成.

证明关于构造的性质在几乎所有的情形相当于对每一个对象的总体归纳法(见**归纳公理** (induction axiom)), 或者在某些情形相当于对出生日子的**超限归纳法** (transfinite induction). 这些归纳法是建立在集合的良基性的基础之上(见**良基关系** (well-founded relation))或者在生日 0 时什么都没有产生的基础之上.

尽管初始的对超实数的出版物是起源于对策论(Conway)和休闲数学(Knuth), 但超实数与严肃数学是有关的. N. L. Alling 曾写了一本书([A1]), 在此书中他把超实数与 Hahn([A5]) 在有序向量空间上的古典结果联系起来; 这种空间是有理数或实数在一个指标集上的字典顺序和的一个子域, 而指标集自己是一个有序 Abel 群. 这对应于超实数的另一种表示法, 后者可以利用在一个指标集上的形式幂级数来给出, 而指标集同构于超实数本身.

Dedekind 构造是用来填平有理数之间的缝隙的. 对于超实数来说, 事情就更为复杂. Alling (在 [A3] 之后) 把构造超实数的分割称为 Cuesta Dutari 分割 (Cuesta Dutari cut), 当这种分割把前面的缝隙填满时新的缝隙又产生了. 没有一个阶段能使结果形成一个连通的拓扑区域. 无论如何在减弱点集拓扑的公理(只要求开集对有界的基数来说是封闭于并运算的)的代价之下将存在这样的生日, 使直到这一天所构造出来的区域在弱拓扑的意义之下行为像是一个连通集.

幂级数的经典理论可以在很大程度上推广到超实数. 事实上收敛性质有时要比传统的实数好. Conway 观察到: 例如, 每一个实系数的形式多变量幂级数对于变数的所有无穷小值是绝对收敛的. 微分和导出函数的概念也是可以推广的, 这些概念的行为和初等微积分是一样的. 充斥在 Alling 书中的麻烦仍然是超实数不能形成一个集合而形成一个真类的事实. 对 Conway 这是一个支持他的数学家解放运动 (mathematicians liberation movement) 的又一个论点: 只要仍然是好的数学, 自由构造就应该得到允许并且数学家们永远不应该把他们的手绑在任何特殊的数学基础之上. Alling 指出, 这种革命的号召对超实数来说是不需要的; 他的处理是完全包含于 Kelley-Morse 的集合论的框架之中.

**参考文献**


[A1] Alling, N. L., Foundations of analysis over surreal number fields, North-Holland, 1987.

[A2] Conway, J. H., On numbers and games, Acad. Press, 1976.

[A3] Cuesta Dutari, N., Algebra ordinal, *Rev. Acad. Ciencis. Madrid*, **48** (1954), 103 – 145.

[A4] Gonshor, H., An introduction to the theory of surreal numbers, Cambridge Univ. Press, 1986.

[A5] Hahn, H., Über die nichtarchimedischen Grössens-

ysteme, *S. Ber. Akad. Wiss. Wien., Math. Naturw. Kl. IIa*. 116 (1907), 601 – 655.

[A6] Kelley, J. E., General Topology, van Nostrand, 1955.

[A7] Knuth, D. E., Surreals numbers, Addison-Wesley, 1974.

Peter van Emde Boas 撰 罗里波 译 王世强 校

**Суслин 条件[Suslin condition; Суслина условие]**

陈述 **Суслин 假设**(Suslin hypothesis)时提出的一个条件. 一个拓扑空间(Boole 代数, 偏序集合)满足 Суслин 条件, 当且仅当每个非空互不相交的开子集族是可数的. Суслин 条件已被推广到任意基数; 相应的基数不变量是 Суслин 数. В. И. Малыхин 撰

【补注】 在偏序集中, Суслин 条件常被称为可数反链条件(countable anti-chain condition). 在 Boole 代数中, 与 Суслин 条件等价的陈述是每一个全序子集是可数的; 由于这个原因, Суслин 条件也被称为可数链条件(countable chain condition), 而且这种说法也被(使人误解地)用于偏序集.

拓扑空间 $X$ 的 Суслин 数是最小基数 $\kappa$, 使得 $X$ 的每个两两不相交的开子集族的基数小于 $\kappa$. Суслин 数与胞腔度(cellularity)密切相关; 胞腔度是两两互不相交的开子集族的基数的上确界.

参考文献

[A1] Comfort, W. W. and Negrepontis, S., Chain conditions in topology, Cambridge Univ. Press, 1982.

何 青 译 罗里波 校

**Суслин 准则[Suslin criterion; Суслина критерий]**

见 **Суслин 定理**(Suslin theorem).

**Суслин 假设[Suslin hypothesis; Суслина гипотеза]**

一个断言每个没有端点的、完全的、稠密并且满足 Suslin 条件的线性序集同构于实直线的假设. 这里完全性演示着每个非空有界集合存在最小上界, 稠密性表示每个区间 $(a, b)$, $a<b$ 非空, 而 **Суслин 条件**(suslin condition)要求每个两两互不相交的区间族是可数的. 实直线具有 Суслин 假设中陈述的所有这些性质. 因此 Суслин 假设断言有序集的上述性质完全地定义了它. 这个假设是 М. Я. Суслин 在 1920 年提出的([1]).

假设 ZF 是和谐的, 在 ZFC(ZF 系统加**选择公理**(axiom of choice))的系统框架下不可能证明和否证 Суслин 假设. 由 Gödel 的可构造性公理(见 **Gödel 构造集**(Gödel constructive set))可以证明 Суслин 假设的否定成立. 使用**力迫方法**(forcing method)的一个变种(迭代力迫), 通过构造一个相应的模型可以证明 Суслин 假设与 ZFC 公理系统的协调性. 在 ZFC 系统上添加上**连续统假设**(continuum hypothesis)既不能证明, 也不能否证 Суслин 假设.

Суслин 假设和它的推广对于**公理集合论**(axiomatic set theory)的发展产生了巨大的影响. 许多思想和原理是在研究 Суслин 假设的过程中产生. 它们包括 Jensen 的组合原理 $\diamondsuit_\kappa$ 和 $\Box_\kappa$(见[4]), 可构造分层的精细结构理论(见[5]), Martin 公理[7]和迭代力迫原理[2].

Jensen 原理($\mathrm{Jensen}$ principle)$\diamondsuit_\kappa$: 一个基数 $\kappa=\{\alpha: \alpha<\kappa\}$ 的子集 $A\subseteq\kappa$ 被称为是闭无界的(closed unbounded), 如果它包含它的所有 $<\kappa$ 的极限点, 而且对任何 $\alpha<\kappa$, 都存在 $\beta\in A$, 使得 $\alpha<\beta$. 一个集合 $A\subseteq\kappa$ 称为是稳定的(stationary), 如果它与每个基数为 $\kappa$ 的有界闭集的交都不空.

Jensen 原理 $\Box_\kappa$: 存在一个序列 $\langle S_\alpha: \alpha<\kappa\rangle$, $S_\alpha\subseteq\alpha$, 使得对每一个 $X\subseteq\kappa$, 集合 $\{\alpha<\kappa: S_\alpha=X\cap\alpha\}$ 是稳定的. 对每个正则基数 $\kappa$, 原理 $\diamondsuit_\kappa$ 可由可构造性公理证明, 而 Суслин 假设的否定可由 $\diamondsuit_{\omega_1}$ 证明. Jensen 组合原理, 以及 Martin 公理在拓扑学中有许多成功的应用(见[4], [6], [8]).

设 $P$ 是一个偏序集. 集合 $D\subseteq P$ 称为是稠密的(dense), 如果对每个 $p\in P$, 都存在 $d\in D$, 使得 $d\leqslant p$. 集合 $Q\subseteq P$ 称为是相容的(compatible), 如果对任何有限子集 $F\subseteq Q$, 都存在 $p\in P$, 使得对每个 $r\in F$ 都有 $p\leqslant r$. $P$ 中的两个元素 $p_1, p_2$ 称为是不相容的, 如果集合 $\{p_1, p_2\}$ 是不相容的. 如果偏序集 $P$ 的每个两两不相容的元素组成的集合都是可数的, 则称 $P$ 满足可数反链条件(countable anti-chain condition). Martin 公理(Martin axiom)陈述为: 如果偏序集 $P$ 满足可数反链条件, 并且 $\mathscr{D}$ 是基数小于 $2^\omega$ 的稠密子集族, 则存在一个相容集 $Q\subseteq P$, 使得对每个 $D\in\mathscr{D}$, 交 $D\cap Q$ 都不空.

在**连续统假设**(continuum hypothesis)(CH)成立的条件下, Martin 公理可以证明. 组合 Martin 公理($MA$)和连续统假设的否定($\neg$CH)可以得到更有趣的结果. 原理 $\diamondsuit_{\omega_1}$ 矛盾于 $MA+\neg$CH 组合, 因为 $\diamondsuit_{\omega_1}$ 蕴涵 CH. 经常出现的情况是由 $\diamondsuit_{\omega_1}$ 推出的结果将被 $MA+\neg$CH 否证. 例如 Суслин 假设就是这种情况. 事实上, $MA+\neg$CH 蕴涵 Суслин 假设, 而 $\diamondsuit_{\omega_1}$ 蕴涵 Суслин 假设的否定.

如果 ZF 是协调的, 则组合 $MA+\neg$CH 与 ZFC 是相容的.

**参考文献**

[1] Souslin, M. [M. Ya. Suslin], Problème 3, *Fundam. Math.*, 1 (1920), 223.

[2] Devlin, K. J. and Johnsbraten, H., The Souslin problem, Lecture notes in math., 405, Springer, 1974.

[3] Jech, T. Lectures in set theory, with particular emphasis on the method of forcing. Lecture notes in math., 217, Springer, 1971.

[4] Barwise, J. (ed.), Handbook of mathematical logic, North-Holland, 1977, Chapts. B4 − B7.

[5] Devlin, K. J., Aspects of constructibility, Lecture notes in math., 354, Springer, 1973.

[6] Федорчук, В. В., 《Матем. сб.》, **99** (1976), 1, 3 − 33.

[7] Martin, D. A. and Solovay, R., Internal Cohen extensions, *Ann. Math. Logic*, 2 (1970), 143 − 178.

[8] Малыхин, В. И., 《Успехи матем. наук》, **38** (1983), 1, 69 − 118.

В. Н. Гришин 撰

【补注】 Jensen 组合原理 (Jensen combinatorial principles) ◇ 和□ 分别被称作钻石 (diamond) 和正方形 (square). 可数反链条件有时被称作可数链条件 (countable chain condition), 而且被缩写为 ccc.

**参考文献**

[A1] Devlin, K. J., Constructibility, Springer, 1984.

[A2] Fremlin, D. H., Consequences of Martin's axiom, Cambridge Univ. Press, 1984.

[A3] Jech, T. J., Multiple forcing, Cambridge Univ. Press, 1986.

[A4] Jech, T. J., Set theory, Acad. Press, 1978.

[A5] Kunen, K., Set theory. An introduction to independence proofs, North-Holland, 1980.

何 青 译 罗里波 校

**Суслин 问题 [Suslin problem; Суслина проблема]**

一个完全稠密没有端点的、并且每个互不相交的非空区间族为可数的线性序集, 是否同构于实数集?

认为上述断言是真的假设就是 **Суслин 假设** (Suslin hypothesis), 它是由 M. Я. Суслин 在 [1] 中提出的. Суслин 假设等价于不存在一个线序不可分的, 并且每个互不相交的区间族是可数的 $T_2$ 紧统, 这样的 $T_2$ 紧统称为 Суслин 连续统 (Suslin continuum), 或 Суслин 线 (Suslin line).

现已证明, Суслин 问题是独立于集合论的基本公理的. 在 1967 − 1968 年, 应用力迫方法首先构造了 Суслин 连续统. 在 1970 年, 又证明了由 Martin 公理与连续统假设的否定 (它们是与集合论的 Zermelo-Fraenkel 公理系统相容的) 可以推出不存在 Суслин 连续统, 也就是说 Суслин 假设成立.

**参考文献**

[1] Suslin, M. [M. Ya. Suslin], Problèm 3, *Fundam. Mat.*, **1** (1920), 223.

В. И. Малыхин 撰

【补注】 更多的细节参见 **Суслин 假设** (Suslin hypothesis).

何 青 译 罗里波 校

**Суслин 定理 [Suslin theorem; Суслина теорема]**, 描述集合论中的

1) 存在一个不是 **Borel 集** (Borel set) 的 $\mathscr{A}$ 集 (数轴 $R$ 上的).

2) 使得给定的 $\mathscr{A}$ 集是 Borel 集的充分必要条件是它的补集也是 $\mathscr{A}$ 集.

3) $n$ 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中每个 $\mathscr{A}$ 集都是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的 Borel 集 (甚至为 $G_\delta$ 型) 的 (正交) 投影 (作为推论, 存在平面的 $G_\delta$ 型的 Borel 集, 它的投影不是 Borel 集); $\mathscr{A}$ 集的投影还是 $\mathscr{A}$ 集.

所有这些结论都是 M. Я. Суслин 在 [1] 中得到的. 为了定义 $\mathscr{A}$ 集, 他使用了 $\mathscr{A}$ **运算** ($\mathscr{A}$-operation), 其他定义 $\mathscr{A}$ 集的方法陆续被发现. $\mathscr{A}$ 运算实际上是由 П. С. Александров ([2]) 首先发现的, 他证明了 (虽然他没有明确用公式表示它) 每个 Borel 集可以由闭集 (也是 $\mathscr{A}$ 集) 通过 $\mathscr{A}$ 运算得到. 应用这个结果可以证明关于 $R$ 上的 Borel 集 (事实上, 也是 $\mathscr{A}$ 集) 的基数的定理. H. H. Лузин 后来提出了是否存在不是 Borel 集的 $\mathscr{A}$ 集的问题. 定理 1) 回答了这个问题. 定理 1) 和 2) 是 Суслин 在 [1] 中给出的但是没有证明. Суслин 后来证明了它们, 但是直到 Luzin 简化这个了这个证明之后才正式发表. 为了证明 1), Суслин 构造了一个平面 $\mathscr{A}$ 集, 它对于所有 Borel 集是泛的, 并且考察了点在对角线 $y = x$ 上的集合 (见 [3], p. 94). 定理 2) 现在常称为 Borel 集的 Суслин 准则. Суслин 关于这个定理的证明是基于将一个 $C\mathscr{A}$ 集分解为 $\aleph_1$ 个 Borel 集的和 (见 [4], [5]).

**参考文献**

[1] Souslin, M., Sur une definition des ensembles mesurables $B$ sans nombres transfinis, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **164** (1917), 88 − 91.

[2] Alexandroff, P. S., Sur la puissance des ensembles mesurables $B$, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **162** (1916), 323 − 325.

[3] Келдыш, Л. В., Новиков, П. С., 《Успехи матем. наук》, **8** (1953), 2, 93 − 104.

[4] Лузин, Н. Н., Собр. соч., т. 2, М., 1958.

[5] Hausdorff, F., Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig, 1914, Reprinted (incomplete) English translation: Set theory, Chelsea (1978)

A. Г. Елькин 撰

【补注】 关于 $\mathscr{A}$ 集 (也称为解析集) 的更综合的历史注记见 Rogers 在 [A1] 中的文章. 事实上, Суслин 的工作始于发现 H. Lebesgue 的一篇著名论文 (1905) 的错误, 这篇论文对于构造描述集合论中的首批工具 (泛集, $\mathscr{A}$ 运算等等) 有巨大的正面影响. Александров 证明的 Borel 集的基数定现也被 F. Hausdorff 独立证明 ([A2]) (用类似的方法). Суслин 的定理 2) 现在被做为第一分离定理的推论 (见 **Лузин 分离原理** (Luzin separability principles)). 在有效的

描述集合论（见描述集合论（descriptive set theory）补注）中，Суслин 定理有一个更强的版本称为 Суслин - Kleene 定理：一个集合是超算术的（一般说来，是一个有效 Borel 集），当且仅当它属于 $\mathbf{D}_1^1=\mathbf{S}_1^1\cap\mathbf{P}_1^1$（一般说来，是一个有效解析和余解析集）.

**参考文献**


[A1] Rogers, C. A., Jayne, J. E., Dellacherie, C., Tøpsoe, F., Hoffman - Jørgensen, J., Martin, D. A., Kechris, A. S. and Stone, A. H., Analytic sets, Acad. Press, 1980.

[A2] Hausdorff, F., Die Mächtigkeit der Borelschen Mengen, *Math. Ann.*, 77 (1916), 430 – 437.

[A3] Moschovakis, Y. N., Descriptive set theory, North - Holland, 1980.


何 青 译 罗里波 校

**纬垂** [**suspension**; **надстройка**]，拓扑空间（CW 复形）$X$ 的

空间或 CW 复形（CW-complex）

$$(X\times[0,1])/[(X\times\{0\})\cup(X\times\{1\})],$$

其中 $[0,1]$ 是单位区间，斜线表示把一个子空间等同于一个点的运算．**带基点的空间**（pointed space）$(X, x_0)$ 的纬垂定义为带基点的空间

$$S^1\wedge X=(X\times[0,1])/[(X\times\{0\})\cup\cup(X\times\{1\})\cup(x_0\times[0,1])].$$

这也称为约化纬垂（reduced suspension）或收缩纬垂（contracted suspension）．纬垂记为 $SX$（有时也记为 $\Sigma X$）．对应 $X\mapsto SX$ 定义了（带基点）拓扑空间的范畴到自身的一个函子．

由于纬垂运算是函子，就可定义同态 $\pi_n(X)\to\pi_{n+1}(SX)$，也称为纬垂．这个同态与嵌入 $X\to\Omega SX$ 诱导的同态及 Hurewicz 同构 $\pi_n(\Omega SX)\cong\pi_{n+1}(SX)$ 的复合相同，其中 $\Omega$ 是取**闭路空间**（loop space）的运算．对任何**同调论**（homology theory）$h_*$（上同调论 $h^*$），存在同构

$$\delta:\tilde{h}^n(X)\cong\tilde{h}^{n+1}(SX)=\tilde{h}^{n+1}(CX,X),$$

这个同构就是空间偶 $(CX, X)$ 的正合列的连接同态，其中 $CX$ 是 $X$ 上的**锥**（cone）．一个同调类 $x\in h^n(X)$ 在这个同构下的象称为 $x$ 的纬垂并记为 $\delta x$（或 $Sx$）.

**上同调运算**（cohomology operation）$a$ 的纬垂是如下的上同调运算，它在 $\tilde{h}^*$ 上的作用是 $\delta^{-1}a\delta$，在 $h^*(pt)$ 上的作用与 $a$ 的作用相同．

А. Ф. Харшиладзе 撰

【补注】 纬垂函子及**闭路空间**（loop space）函子是带基点空间范畴上的相伴函子：

$$\mathrm{Top}(SX, Y)\cong\mathrm{Top}(X,\Omega Y).$$

上述一一映射把映射 $f: SX\to Y$ 映为映射 $g: X\to\Omega Y$，其中 $g(x)(t)=f(x,t)$．这个相伴与同伦匹配，因而定义了带基点拓扑空间及映射的同伦类的范畴上的一对相伴函子．

**参考文献**


[A1] Switzer, R. M., Algebraic topology - homotopy and homology, Springer, 1975, Chapt. 2.


潘建中 译 沈信耀 校

**铃木 2 群** [**Suzuki 2 -group**; **Судзуки 2-группа**]

有限非 Abel 2 群 $U$，它不是四元数群，在它的二阶元素的集合 $\Omega$ 上有 $U$ 的自同构的循环群 $\langle a\rangle$ 传递地作用．这意味着对 $\Omega$ 的任两个元素 $x, y$，有自然数 $n$ 使 $y=x^{a^n}$．在铃木 2 群 $U$ 中，集 $\Omega$ 和单位元素构成子群 $Z$，它与 $U$ 的中心重合；商群 $U/Z$ 则是初等 Abel 群．若 $Z$ 的阶等于 $q$，则 $U$ 的阶为 $q^2$ 或 $q^3$.

铃木 2 群已完全描述清楚了（见[1]）．其名称来源于下列事实，在**铃木群**（Suzuki group）中，Sylow 2 子群 $U$ 就有这些性质．

**参考文献**


[1] Higman, G., Suzuki 2-group, *Ill. J. Math.*, 7 (1963), 1, 79 – 96.


В. Д. Мазуров 撰 石生明 译 王 杰 校

**铃木群** [**Suzuki group**; **Судзуки группа**]

**有限单群**（simple finite group）$\mathrm{Sz}(q)$，铃木通夫所发现的单群的无限系列中的成员．

令 $n$ 是自然数，$F$ 是 $q=2^{2n+1}$ 个元素的有限域，$\theta$ 是 $F$ 的自同构使得 $\alpha^{\theta^2}=\alpha^2$，对任何 $\alpha\in F$．由对角元素为 $\lambda^{1+\theta}, \lambda, \lambda^{-1}, (\lambda^{1+\theta})^{-1}$ 的所有 4 阶对角矩阵，$\lambda\in F$，$\lambda\neq0$，作成子群 $T$，由所有下述形式的三角矩阵

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ \alpha & 1 & 0 & 0\\ \alpha^{1+\theta}+\beta & \alpha^{\theta} & 1 & 0\\ \alpha^{2+\theta}+\alpha\beta+\beta^{\theta} & \beta & \alpha & 1\end{Vmatrix}$$

$(\alpha,\beta\in F)$ 作成子群 $U$，由子群 $T$，子群 $U$ 及矩阵

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{Vmatrix}$$

一起就生成铃木群 $\mathrm{Sz}(q)$．子群 $U$ 是群 $\mathrm{Sz}(q)$ 的 Sylow 2 子群；它是**铃木 2 群**（Suzuki 2-group）．子

群 $UT$ 恰为 $U$ 的正规化子. 群 $Sz(q)$ 在 $UT$ 的陪集上的置换表示是双传递的; 它的次数是 $q^2+1$. 铃木群 $Sz(q)$ 的阶是 $q^2(q-1)(q^2+1)$, 它不被 3 整除. 另一方面, 阶不能被 3 除尽的任何非 Abel 有限单群必同构于铃木群. 群 $Sz(q)$ 是辛群 $Sp(4,q)$ 的极大子群, 且是群 $Sp(4,q)=B_2(q)$ 的一个二阶自同构在 $Sp(4,q)$ 中的中心化子. 换句话说, $Sz(q)$ 同构于 $q$ 个元素的有限域上 $B_2$ 型 **Chevalley 群** (Chevalley group) 的扭类似物 $^2B_2(q)$.

**参考文献**


[1] Suzuki, M., On a class of doubly transitive groups, *Ann. of Math.*, 75 (1962), 1, 105 – 145.

[2] Carter, R., Simple groups of Lie type, Wiley (Interscience), 1972. В. Д. Мазуров 撰


【补注】 实际上恰有 $F$ 的一个自同构 $\theta$ 使得 $\theta^2(\alpha)=\alpha^2$, 对所有 $\alpha\in F$. 它是 $\theta(\alpha)=\alpha^{2^{m+1}}$.

存在扭配极, 其绝对点是 $F_q^4$ 的 $q^2+1$ 个 1 维子空间, 它们是被 $UT$ 的一个共轭所固定. 如上得到的绝对点的集合是一个**卵形** (ovoid). 见 [A1] – [A2].

**参考文献**


[A1] Tits, J., Ovoides et groupes de Suzuki, *Arch. Math.*, 13 (1962), 187 – 198.

[A2] Tits, J., Une propriété charactéristique des ovoides associés aux groupes de Suzuki, *Arch. Math.*, 17 (1966), 136 – 153.

[A3] Huppert, B. and Blackburn, N., Finite groups, 3, Springer, 1982, Chapt. IX. 3.

石生明 译 王 杰 校


**铃木零散群 [Suzuki sporadic group; Судзуки спорадическая группа]**

铃木通夫构造的阶为

$$448\,345\,497\,600=2^{13}\cdot 3^7\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11\cdot 13$$

的**有限单群** (simple finite group), 是 1782 次本原置换群, 其稳定化子同构于 **Chevalley 群** (Chevalley group) $G_2(4)$.

对别的零散群, 见**零散单群** (sporadic simple group).

【补注】 它的 Schur 乘子是 6; 其中心覆盖是复 **Leech 格** (Leech lattice) 的自同构群. 参见 [A1].

**参考文献**


[A1] Conway, J. H., et al., Atlas of finite groups, Clarendon Press, 1985. 石生明 译 王 杰 校


**曲线的突转 [swerve of a curve; извивание кривой]**, 曲线的自旋转 (self-rotation of a curve)

非正则曲面上一条曲线的转动的、不是由子曲面的积分曲率集中在曲线的点集上引起的变差部分. 对于一条简单曲线弧, 突转等于 $(\sigma_l+\sigma_r-\Omega)/2$, 其中 $\sigma_l$, $\sigma_r$ 是左、右横越 $L$ 所得的变差, $\Omega$ 是 $L$ 作为集合的曲率变差. 突转为零的曲线称为**拟测地线** (quasi-geodesic line).

**参考文献**


[1] Александров, А. Д., Стрельцов, В. В., 《Тр. матем. ин-та АН СССР》, 76 (1965), 67 – 80.

Ю. Д. Бураго 撰


【补注】

**参考文献**


[A1] Busemann, H., Convex surfaces, Interscience, 1958, Chapt. III, Sect. 15. 陈维桓 译


**Sylow 基 [Sylow basis; Силова базис]**

【补注】 令 $G$ 是有限群 (finite group), $\pi$ 是 $G$ 的阶 $n$ 的素因子集合的子集合. Sylow $\pi$ 基 (Sylow $\pi$-basis) $S$ 是 $G$ 的一些 Sylow $p$ 子群 $P_p$ 的集合 (见 **Sylow 子群** (Sylow subgroup)), 对每个素数 $p\in\pi$ 有一个 $P_p$, 且满足: 若 $P_{p_1},\cdots,P_{p_t}$ 属于 $S$, 则 $\{P_{p_1},\cdots,P_{p_t}\}$ (由 $P_{p_1},\cdots,P_{p_t}$ 生成的子群) 中的每个元素的阶是 $p_1,\cdots,p_t$ 的非负幂的积. 若 $\pi$ 是整除 $n$ 的全部素数的集合, 则说成完全 Sylow 基 (complete Sylow basis). 两个 Sylow 基是共轭的, 若有 $G$ 的单个元素, 用它作共轭可把第一个基的全部群变到第二个基的全部群中. Hall 第二定理 (Hall second theorem) ([A2]) 说, 每个有限可解群有完全 Sylow 基, 且所有这种基皆共轭. 反之, 若有限群有完全 Sylow 基, 则它是**可解群** (solvable group).

**参考文献**


[A1] Курош, А. Г., Теория групп, 3 изд, М., 1967 (中译本: А. Г. 库洛什, 群论, 高等教育出版社, 上册, 1987; 下册, 1982).

[A2] Hall, P., On the Sylow systems of a soluble group, *Proc. London. Math. Soc.*, 43 (1937), 316 – 323.

石生明 译 王 杰 校


**Sylow 子群 [Sylow subgroup; Силова подгруппа]**

群的极大 $\pi$ 子群, 其中 $\pi$ 是素数的一个集合; 也即周期子群, 但其元素的阶仅被 $\pi$ 中的素数除尽且它不含于有这种性质的更大的子群中 (Sylow $\pi$ 子群 (Sylow $\pi$-subgroup)). $\pi$ 仅有一个素数 $p$ 时, 即为 Sylow $p$ 子群, 它在群论中有基本的重要性. 赋以此名称是表示对 L. Sylow 的敬意, 他证明了有限群中有关这种子群的若干定理 (见 **Sylow 定理** (Sylow theorems)).

Sylow 子群在有限群论中起重要作用. 例如, 正规 Abel 子群的补的问题化为 Sylow 子群的同样问

题；非平凡 $p$ 商群的存在性与 Sylow $p$ 子群的正规化子的非平凡 $p$ 商群的存在性相联系；有限单群的结构很大程度上由它的 Sylow 2 子群决定的．无限群论中，除去局部有限群外，Sylow 子群的作用较为次要，因为除一些特殊情形外，Sylow $p$ 子群的共轭性的基本问题不再有肯定的回答．

参考文献

[1] Каргаполов, М. И., Мерзляков, Ю. И., Основы теории групп, 3 изд., М., 1977 (英译本：Kargapolov, M. I. and Merzljakov, J. I., Fundamentals of the theory of groups, Springer, 1979).

[2] Шеметков, Л. А., 《Успехи матем. наук》, **30** (1975), 2, 179－198.

[3] Suzuki, M., Group theory, I, Springer, 1982.

[4] Huppert, B., Endliche Gruppen, I, Springer, 1974 (中译本：贝・胡佩特，有限群，I，上、下册，福建人民出版社，1992).

В. Д. Мазуров 撰　石生明 译　王　杰 校

## Sylow 定理 [Sylow theorems; Силова теоремы]

L. Sylow ([1]) 所证明的关于有限群的极大 $p$ 子群的三个定理，它们在有限群论中起重要作用．有时将这三个定理统称为 Sylow 定理 (Sylow theorem)．

令 $G$ 为阶为 $p^m s$ 的有限群，这里 $p$ 为除不尽 $s$ 的素数．下列定理成立．

Sylow 第一定理 (Sylow first theorem)：对所有 $i=1, 2, \cdots, m$, $G$ 含有阶为 $p^i$ 的子群；且每个 $p^{i-1}$ 阶的子群必至少在一个阶为 $p^i$ 阶的子群中正规．特别地，这个定理蕴涵了下述重要结果：$G$ 中有阶为 $p^m$ 的 **Sylow 子群** (Sylow subgroup)；$G$ 的任何 $p$ 子群皆包含在 $p^m$ 阶的某 Sylow $p$ 子群中；Sylow $p$ 子群的指数不能被 $p$ 除尽；若 $G=P$ 是 $p^m$ 阶的群，则它的任何真子群含在阶 $p^{m-1}$ 的某极大子群中，且 $P$ 的所有极大子群为正规子群．

Sylow 第二定理 (Sylow second theorem)：一个有限群的所有 Sylow $p$ 子群皆共轭．

对无限群，一般地没有类似的结果．

Sylow 第三定理 (Sylow third theorem)：有限群的 Sylow $p$ 子群的数目除尽群的阶且模 $p$ 同余于 1．

对任意素数集合 $\pi$，类似的定理仅对有限可解群才具有 (见 **Hall 子群** (Hall subgroup))．对非可解群，情形就不同了．例如在 5 次交错群 $A_5$ 中，对 $\pi=\{2, 3\}$ 存在 6 阶 Sylow $\pi$ 子群 $S$，可是它的指数能被 $\pi$ 中的一个数除尽．此外，在 $A_5$ 中有同构于 $A_4$ 的 Sylow $\pi$ 子群，但它与 $S$ 不共轭．$A_5$ 中 Sylow $\pi$ 子群的数目除不尽 $A_5$ 的阶．

参考文献

[1] Sylow, L., Théorémes sur les groupes de substitutions, *Math. Ann.*, **5** (1872), 584－594.

[2] Hall, M., The theory of groups, Macmillan, 1959 (中译本：M．赫尔：群论，科学出版社，1982).

В. Д. Мазуров 撰　石生明 译　王　杰 校

## 算子的象征 [symbol of an operator; символ оператора]

与一算子相关且多少反映算子性质的标量或矩阵函数．通常假设赋以象征的算子属于一个代数．然后，作为一个规则，当算子求和时，其象征应相加；算子相乘时，象征也应相乘，这种乘法或者是准确地相乘，或者允许相差一个在某种意义下的小项．算子的象征通常是在一个代数 (特别是，在一个算子代数) 中取值，而此代数比算子原来所属的代数较为简单．

通常是对作用在函数空间上的算子赋以象征．这时，典型的情况是，算子作用在 $n$ 元函数上 (或者更广泛一些说，作用在定义于一 $n$ 维流形的函数上)，而象征则是 $2n$ 元函数 (或定义在一个 $2n$ 维流形上)．**伪微分算子** (pseudo-differential operator) 理论就是使用这种象征建立出来的．象征和算子的对应是量子化的基础，在这个对应中，象征是经典的可观测量，而算子自身则是相应的量子可观测量．

**$\mathbf{R}^n$ 上算子的象征**．设有一多项式

$$a(p, q)=\sum_{|\alpha+\beta|\leq m} a_{\alpha\beta} q^\alpha p^\beta$$

这里 $q, p\in\mathbf{R}^n$, $q=(q_1, \cdots, q_n)$, $p=(p_1, \cdots, p_n)$．$\alpha$ 与 $\beta$ 是重指标 (即 $\alpha=(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$; $\alpha_i\geqslant 0$ 是整数，$|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$), $\alpha_{\alpha\beta}\in\mathbf{C}$．于是可以用多种方法作出作用于 $\mathbf{R}^n$ 上的函数的算子 $A$，而都是将 $q_j$ 换成算子 $\hat{q}_j$，就是乘以 $\mathbf{R}^n$ 的坐标 $x_j$ 之一，将 $p_j$ 换成算子 $\hat{p}_j=(h/i)(\partial/\partial x_j)$, $i=\sqrt{-1}$, $h$ 是任意常数 (起 Planck 常数的作用)．只要将 $p$ 和 $q$ 的位置改变，就会得到不同的算子．如果令

$$A=a(\overset{2}{\hat{q}}, \overset{1}{\hat{p}})=\sum_{|\alpha+\beta|\leq m} a_{\alpha\beta}\hat{q}^\alpha\hat{p}^\beta,$$

则 $a(q, p)$ 称为 $A$ 的 $qp$ 象征 ($qp$-symbol) 或左象征 (left symbol)．左象征与这样得出的算子的对应是多项式与具有多项式系数的微分算子的一一对应，而可以用以下公式

$$(Au)(x)=$$

$$\frac{1}{(2\pi h)^n}\int e^{i(x-y)\xi/h}a(x, \xi)u(y)dyd\xi$$

推广到广泛得多的算子类和象征类上去，这里 $z\xi=z_1\xi_1+\cdots+z_n\xi_n$ 而 $z=(z_1, \cdots, z_n)$, $\xi=(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ 是 $n$ 维向量，$dy=dy_1\cdots dy_n$, $d\xi=d\xi_1\cdots d\xi_n$．

具有 $pq$ 象征 ($pq$-symbol) 或右象征 (right symbol) $a(q, p)$ 的算子 $A$ 由下式定义：

$$A=a(\overset{1}{\hat{q}}, \overset{2}{\hat{p}})=\sum_{|\alpha+\beta|\leq m} a_{\alpha\beta}\hat{p}^\beta\hat{q}^\alpha,$$

或对更广的象征类用下式定义

$$(Au)(x)=$$
$$=\frac{1}{(2\pi h)^n}\int e^{i(x-y)\xi/h}a(y,\xi)u(y)dyd\xi.$$

构造相应于一多项式 $a(q,p)$ 的算子的更为对称的方法是，对不可交换的算子 $B$、$C$ 用下式引入其对称化乘积 $(B^kC^l)$

$$(sB+tC)^n=\sum_{k+l=n}\frac{n!}{k!l!}s^kt^l(B^kC^l),$$

然后再令

$$A=\sum_{|\alpha+\beta|\leq m}a_{\alpha\beta}(\hat{q}_1^{\alpha_1}\hat{p}_1^{\beta_1})\cdots(\hat{q}_n^{\alpha_n}\hat{p}_n^{\beta_n}).$$

这时 $a(q,p)$ 称为 $A$ 的 Weyl 象征（Weyl symbol）.算子 $A$ 可以用其 Weyl 象征按下式来表示：

$$(Au)(x)=$$
$$=\frac{1}{(2\pi h)^n}\int e^{i(x-y)\xi/h}a\left(\frac{x+y}{2},\xi\right)u(y)dyd\xi.$$

另一种量子化会导致 $\mathbf{R}^n$ 上的算子的另外两类象征出现，即 Wick 象征（Wick symbol）与反 Wick 象征（anti-Wick symbol）. 这种量子化即引入**产生算子**（creation operators）$a_j^-=\hat{q}_j-i\hat{p}_j$ 与**湮没算子**（annihilation operators）$a_j=\hat{q}_j+i\hat{p}_j$，并将带多项式系数的微分算子 $A$ 写成

$$A=\sum_{\alpha,\beta}c_{\alpha,\beta}(a^+)^\alpha a^\beta,$$

或

$$A=\sum_{\alpha,\beta}c'_{\alpha,\beta}a^\beta(a^+)^\alpha,$$

则其 Wick 象征 $c(q,p)$ 与反 Wick 象征 $a(q,p)$ 各由下式给出

$$c(q,p)=\sum_{\alpha,\beta}c_{\alpha,\beta}(q-ip)^\alpha(q+ip)^\beta,$$
$$a(q,p)=\sum_{\alpha,\beta}c'_{\alpha,\beta}(q-ip)^\alpha(q+ip)^\beta.$$

关于一个算子的不同象征的关系公式见[1]－[4].

**流形上算子的象征**. 上述 $\mathbf{R}^n$ 上的各类象征与相当广泛的算子类一一对应，而在流形上，一般说来就没有自然的象征使这种一一对应存在. 在流形上，所谓主象征（principal symbol）起重要的作用，它是对某些伪微分算子定义的，而且是 $T^*X\setminus 0$（即流形 $X$ 的余切丛除去零截面）上的齐次函数. 它的可逆性就蕴涵所述的算子 $A$ 是椭圆型的，且保证正则性定理成立，即具有光滑右方 $f$ 的方程 $Au=f$ 的解是光滑的，同时（若 $X$ 为紧）$A$ 在某些适当的 Соболев 空间中是 Fredholm 的. 在算子的加法与乘法之下，主象征也分别相加与相乘. 当对算子加上低阶项时，主象征不变.

**有边流形上算子的象征**. 在以 $Y$ 为边的流形 $X$ 上，伪微分算子形如矩阵（[5]－[7]）：

$$\mathfrak{A}=\begin{pmatrix}A+B & K\\ T & Q\end{pmatrix}:\begin{matrix}\Gamma(E_1)\\ \oplus\\ \Gamma(G_1)\end{matrix}\to\begin{matrix}\Gamma(E_2)\\ \oplus\\ \Gamma(G_2)\end{matrix}$$

这里 $E_1$ 和 $E_2$ 是 $X$ 上的向量丛；$G_1$ 和 $G_2$ 是 $Y$ 上的向量丛；$A$ 是 $X$ 上一个具有传输性质（见**传输条件**（transmission, condition of））的伪微分算子；$T$ 是一边缘算子，即在某边界条件中作用的算子（通常是伪微分算子）；$K$ 是一上边缘算子或称位势型算子；$B$ 是奇异 Green 算子（即一边缘算子与上边缘算子之乘积或一有类似构造的更广泛的算子）；$Q$ 是 $Y$ 上的一个伪微分算子. 算子 $\mathfrak{A}$ 有两类象征：内象征与边缘象征. 内象征（interior symbol）$\sigma^u(\mathfrak{A})$ 即 $A$ 的通常的象征，它是 $T^*X\setminus 0$ 上的函数，更准确地说，是丛 $\mathrm{Hom}(\pi^*E_1,\pi^*E_2)$ 的一个截面，这里 $\pi:T^*X\setminus 0\to X$ 是典范投射. 边界象征（boundary symbol）$\sigma_Y(\mathfrak{A})$ 则是 $T^*Y\setminus 0$ 上的函数，而其值为半轴 $[0,\infty)$ 上的算子，这算子是由 $\mathfrak{A}$ 将其主部系数冻结在边缘的点上（采用一个坐标系使边界为一超平面），然后再对切向变量作 Fourier 变换而得. $\sigma^u(\mathfrak{A})$ 的可逆性即 $A$ 的通常的椭圆性（见**椭圆型算子**（elliptic operator））. 若假设了这个椭圆性，$\sigma_Y(\mathfrak{A})$ 在定义于半轴上的减函数类上的可逆性，事实上就是由 $\mathfrak{A}$ 定义的边值问题的椭圆性条件，即所谓的 Шапиро-Лопатинский 条件（Shapiro-Lopatinskii condition）. 所以自然地把偶对（$\sigma^u(\mathfrak{A})$, $\sigma_Y(\mathfrak{A})$）称为 $\mathfrak{A}$ 的象征. 若象征 $\sigma^u(\mathfrak{A})$ 与 $\sigma_Y(\mathfrak{A})$ 均可逆，则称 $\mathfrak{A}$ 为椭圆型的，这时，通常的正则性定理以及 Fredholm 性质定理（后者需设 $X$ 为紧）均成立.

**参考文献**


[1] Березин, Ф. А., Метод вторичного квантования, М., 1965（英译本：Berezin, F. A., The method of second quantization, Acad. Press, 1966）.

[2] Маслов, В. П., Операторные методы, М., 1973（英译本：Maslov, V. P., Operator methods, MIR, 1976）.

[3] Шубин, М. А., Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория, М., 1978（英译本：Shubin, M. A., Pseudodifferential operators and spectral theory, Springer, 1987）.

[4] Березин, Ф. А., 《Матем сб.》, **86** (1971), 4, 578－610.

[5] Boutet de Monvel, L., Boundary problems for pseudo-differential operators, *Acta Math.*, **126** (1971), 11－51.

[6] Rempel, S. and Schulze, B.-M., Index theory of elliptic boundary problems, Akad. Verlag, 1982（译自德文）.

[7] Grubb, G., Functional calculus of pseudo-differential boundary problems, Birkhäuser, 1986.


М. А. Шубин 撰

【补注】 象征的概念在奇异积分算子（singular integral operators）（一维或多维，见**奇异积分方程**（singular integral equations））理论中也起重要作用．含这种算子的方程组的研究引出了矩阵象征（matrix symbol）的概念．后一概念不仅对方程组是重要的；它也在具有分段连续标量系数的奇异积分算子的研究中出现．

**参考文献**


[A1] Krupnik, N. Ya., Banach algebras with symbol and singular integral operators, Birkhäuser, 1987（译自俄文）.

[A2] Михлин, С. Г. и Проесдорф, С., Сингулярные интегральные операторы, М., 1970（英译本：Mikhlin S. G. and Prossdorf, S., Singular integral operators, Akad. Verlag, 1986）.

[A3] Boutet de Monvel, L., A course on pseudodifferential operators and their applications, Math. Dept. Duke University, 1976.

[A4] Taylor, M. E., Pseudodifferential operators, Princeton Univ. Press, 1981.

[A5] Hörmander, L., The analysis of linear partial differential operators, Vol. 3, Springer, 1985.

[A6] Plamenevskiĭ, B. A., Algebras of pseudodifferential operators, Kluwer. 1989（译自俄文）. 齐民友 译


## 符号动力学 [symbolic dynamics; символическая динамика]

1）狭义的符号动力学就是研究拓扑 **Bernoulli 自同构**（Bernoulli automorphism）$\sigma$（其定义见下）及其不变闭子集，不变测度等等．拓扑 Bernoulli 自同构（topological Bernoulli automorphism）$\sigma$ 作用在一空间 $\Omega$ 上，$\Omega$ 由某字母表 $A$（通常是有限的）中的符号所成的双侧无穷序列构成，对 $\Omega$ 赋以无穷多个 $A$ 的直积拓扑（在每个 $A$ 中通常取离散拓扑）．具体说来，$\sigma$ 映序列 $\omega=\{\omega_i\}$ 为 $\omega'=\{\omega'_i\}$ 而 $\omega'_i=\omega_{i+1}$（即序列向"左"方"位移"一位）．一个明显的推广是群（或半群）$G$ 在由 $G$ 到 $A$ 的函数之空间 $A^G$ 上的作用．

把 $A$ 中的符号的某些对 $(a, b)$ 称为"可容许的"．对一切 $i$，$(\omega_i, \omega_{i+1})$ 均为可容许的这种序列 $\{\omega_i\}$，形成一个闭的（$\sigma$-）不变子集 $\Omega_1 \subset \Omega$．这是拓扑 Bernoulli 自同构的不变子集最重要的例子．由移位 $\sigma|_{\Omega_1}$ 在 $\Omega_1$ 中产生的**动力系统**（dynamical system）称为拓扑 Марков 链（topological Markov chain）．

2）广义的符号动力学就是把狭义符号动力学用于研究这样的动力系统，它的定义与 $\Omega$ 和 $\sigma$ 完全无关．

**参考文献**


[1] Алексеев, В. М., Символическая динамика, К., 1976（Одиннадцатая（летняя）математическая школа, ч. 1）.

[2] Bowen, R., Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms, Lecture notes in math., 470, Springer, 1975. Д. В. Аносов 撰


【补注】 A1）通常用移位变换（shift transformation）一词（简称移位（shift））来代替"拓扑 Bernoulli 自同构"一词．移位系统及其闭的不变子空间（时常称为子移位（subshift））是一族有许多应用（包括动力系统理论以外的应用）的重要的瀑布族．

在**遍历理论**（ergodic theory）和**拓扑动力学**（topological dynamics）中有许多重要的例子与反例都是用子移位来定义的，这些子移位又经常是作为 $\Omega$ 中某点的轨道之闭包得出的．问题中的点是具有特殊的组合性质的双侧无穷序列 $\omega=\{\omega_i\}$．例如 Morse-Thue 序列（Morse-Thue sequence）就是字母表 $\{0, 1\}$ 上的双侧序列 $\{\mu_i\}$，这里对于一切 $i \geq 1$，$\mu_{-i}=\mu_{i-1}$，而 $i \geq 0$ 时的 $\mu_i$ 又是这样给出的：若用 $Q_n$ 记最初 $2^n$ 项所成的块，则 $Q_0=0$ 而 $Q_{n+1}$ 则是块 $Q_n$ 和 $\bar{Q}_n$ 的链锁；$\bar{Q}_n$ 是将 $Q_n$ 中的 0 与 1 对换而得．于是 $\mu$ 的非负坐标是 0110100110010110⋯．另一个定义是：令 $\alpha_n$ 是 $n$ 的二进展开式中 1 的个数；则当 $n \geq 0$ 时令 $\mu_n=\alpha_n(\bmod 2)$．这个序列定义了 $\Omega$ 中一点，它是殆周期的（almost periodic）而非周期的；见 [A10]，Chapt. 12．关于移位系统的一般结果，可参看 [A11]，[A12]．

上面定义的拓扑 Марков 链也称为有限型子移位（subshifts of finite type）．这样一个子移位可以用一 $(m \times m)$ 矩阵 $M$ 来刻画，$m$ 是所考虑的字母表 $A$ 中元素个数，$M$ 的作法如下：令 $A=\{a_1, \cdots, a_m\}$；则偶对 $(a_i, a_j)$ 为可容许的，当且仅当 $M$ 之元 $M_{ij}$ 为 1；$M$ 的其他元为 0（$M$ 即拓扑 Марков 链的转移矩阵（transition matrix））．拓扑 Марков 链的性质常可用相伴的转移阵来表述．例如拓扑 Марков 链的**拓扑熵**（topological entropy）等于 $\log\lambda$，而 $\lambda$ 是转移阵的最大的正本征值．关于拓扑 Марков 链的分类，参见 [A2] 与 [A8]．

与拓扑 Марков 链有关的还有复杂移位系统（sofic system）（[A5]，[A18]）．复杂移位系统就是一个子移位 $\Omega_1$ 使得有一个拓扑 Марков 链 $\Omega_2$ 和一个连续的满射 $\varphi: \Omega_2 \to \Omega_1$，而且 $\varphi$ 与 $\Omega_2$ 和 $\Omega_1$ 中的移位变换可交换．关于复杂移位系统分类的问题可见 [A7]．

关于拓扑 Марков 链和复杂移位系统在信息理论中构造代码上的应用可见 [A1]，[A18]．作为另一个例子应该提到 Morse-Thue 序列还可用于证明某些负曲率流形上返回的非闭测地线的存在性（[A21]），以及用于否证 Burnside 猜想即有界群必为有限（见 **Burnside 问题**（Burnside problem）2）．

移位系统在遍历理论中几乎起了"无所不在"的

作用．一个重要的类是由 Bernoulli 移位（Bernoulli shift）（亦称 Bernoulli 自同构（Bernoulli automorphism））组成的；例如见［A24］．许多用别的方式定义的系统原来都是同构于 Bernoulli 移位的（例如负曲率曲面上的测地流［A22］）．在这方面也应提到 Jewett-Krieger 定理（Jewett-Krieger theorem）（见**强遍历性**（strong ergodicity））．关于 Morse（－Thue）系统的遍历性质，例如可见［A15］；它是唯一遍历的（uniquely ergodic）（［A16］，［A17］）．直接或间接讨论移位系统的遍历理论的论著还有［A2］，［A3］，［A9］，［A13］，［A14］，［A23］．

A2）广义的符号动力学依据于以下原理．设一瀑布 $f: W \to W$ 的相空间 $W$ 可分成有限多个互不相交的集合 $W_1, \cdots, W_n$，则对每一个 $w \in W$ 与 $n \in \mathbf{Z}$，都有唯一的 $\varphi(n, w) \in \{1, \cdots, n\}$ 使得 $f^n(w) \in W_{\varphi(n, w)}$．序列 $\Phi(w) = \{\varphi(n, w); n \in \mathbf{Z}\}$——称为 $w$ 的日程表（itinerary）——可以看作是字母表 $A = \{1, \cdots, n\}$ 上的移位系统 $\Omega$ 中的元素，而映射 $\Phi: W \to \Omega$ 对一切 $w \in W$ 满足等式 $\Phi(f(w)) = \sigma(\Phi(w))$．在实践上，这种表示法过于受限制．于是试图构造一个所谓的 $W$ 的 Марков 分划（Markov partition）．它其实完全不是分划，而是用内部互不相交的闭集来覆盖 $W$（还要适合一些附加的条件，因为过于复杂，此处不讲）．与这样一个 Марков 分割相联，也有一个转移阵 $M$ 定义如下：$M_{ij} = 0$ 或 1，视 $\operatorname{int} W_i \cap f^{-1}(\operatorname{int} W_j)$ 是否为空集而定．在对 $f$ 的适当条件下（包括相空间为**双曲集**（hyperbolic set）），这个矩阵定义一个拓扑 Марков 链 $\Omega_M$，使得对于它可以定义一个连续满射 $\pi: \Omega_M \to W$ 而 $f \circ \pi = \pi \circ \sigma$，$\pi$ 在 $\Omega_M$ 的一个稠密的 $G_\delta$ 集上是一一的，而且对所有 $\omega \in \Omega$ 和所有 $n \in \mathbf{Z}$ 有 $f^n(\pi(\omega)) \in W_{\omega_n}$，即 $\omega = \{\omega_n\}$ 是 $\pi(\omega)$ 的日程表．这个映射可以利用拓扑 Марков 链 $\Omega_M$ 的特殊性质从拓扑学的与测度论的两种观点用来研究已给的瀑布．

应用这个方法得到成功的瀑布的重要例子例如有环面的双曲自同构（［A3］），Аносов 微分同胚（见 $Y$ 系统（$Y$-system））（［A26］，［A27］），公理 $A$ 微分同胚（axiom-$A$ diffeomorphism）的"基本子集"（［A6］，亦见［2］，［A25］和［A4］）（紧 $C^\infty$ 流形上的微分同胚称为满足公理 $A$（axiom-$A$），如果其非游荡点（non-wandering point）的集合是双曲的，且为周期点集合的闭包）．

符号动力学也被用于分析动力系统的混沌行为（见**浑沌**（chaos）；**分形集**（fractals）；**奇怪吸引子**（strange attractor））．与符号动力学有关的还有区间映射的"揉搓演算"（［A20］）．

**参考文献**


［A1］Adler，R．L．，Coppersmith，D．and Hassner，M．．Algorithms for sliding block codes，*IEEE Trans．Inform．Theory*，**219**（1983），5－22．

［A2］Adler，R．L．and Marcus，B．．Topological entropy and equivalence of dynamical systems，*Mem．Amer．Math．Soc．*，**219**（1979）．

［A3］Adler，R．L．and Weiss，B．，Similarity of automorphisms of the torus，*Mem．Amer．Math．Soc．*，**98**（1970）．

［A4］Alekseev，V．M．and Yakobson，M．V．，Symbolic dynamics and hyperbolic dynamic systems．*Physics Reports*，**75**（1981），5，287－325．

［A5］Weiss，B．，Subshifts of finite type and sofic systems，*Monatsh．Math．*，**77**（1973），462－474．

［A6］Bowen，R．，Markov partitions for Axiom A diffeomorphisms，*Amer．J．Math．*，**92**（1970），725－747．

［A7］Boyle，M．and Krieger，W．Almost Markov and shift equivalent sofic systems，in J．C．Alexander（ed．）：Dynamical Systems，Springer，1988，33－93．

［A8］Boyle，M．，Marcus，B．and Trow，P．，Resolving maps and the dimension group for shifts of finite type，*Mem．Amer．Math．Soc．*，**377**（1987）．

［A9］Denker，M．，Grillenberger，C．and Sigmund，K．，Ergodic theory on compact spaces，Springer，1976．

［A10］Gottschalk，W．H．and Hedlund，G．H．，Topological dynamics，Amer．Math．Soc．，1955．

［A11］Hedlund，G．H．，Endomorphisms and automorphisms of the shift dynamical system，*Math．Systems Theory*，**3**（1969），320－375．

［A12A］Hedlund，G．H．and Morse，M．，Symbolic dynamics Ⅰ，*Amer．J．Math．*，**60**（1938），815－866．

［A12B］Hedlund，G．H．and Morse，M．，Symbolic dynamics Ⅱ，*Amer．J．Math．*，**62**（1940），1－42．

［A13］Jacobs，K．and Keane，M．，0－1 sequences of Toeplitz type，*Z．Warsch．verw Geb．*，**13**（1969），123－131．

［A14］Del Junco，A．，Keane，M．，Kitchens，B．，Marcus，B．and Swanson，L．，Continuous homomorphisms of Bernoulli schemes，in A Katok（ed．）：Ergodic Theory and Dynamical Systems，Birkhäuser，1981，91－111．

［A15］Kakutani，S．，Ergodic theory of shift transformations，in L．le Cam and J．Neyman（eds．）：Proc．5 th Berkeley Symp．Math．Probab．Stat．Ⅱ，Univ．Calif．Press，1967，405－414．

［A16］Kakutani，S．Strictly ergodic symbolic dynamical systems，in L．le Cam，Neyman，J．and Scott，E．L．（eds．）：Proc．6 th Berkeley Symp．Math．Probab．Stat Ⅱ，Univ．Calif．Press，1972，319－326．

［A17］Keane，M．Generalized Morse sequences．*Z．Warsch verw．Geb．*，**10**（1968）335－353．

［A18A］Krieger，W．，On sofic systems Ⅰ，*Israel J．Math．*，

48 (1984), 305 - 330.

[A18B] Krieger, W., On sofic systems II, *Israel J. Math.*, **60** (1987), 167 - 176.

[A19] Marcus, B, Sofic systems and encoding data, *IEEE Trans. Inform. Theory*, **31** (1985), 366 - 377.

[A20] Milnor, J. and Thurston, R., On iterated maps of the interval. in J. C. Alexander (ed.): Dynamical Systems, Lecture notes in math., Vol 1342, springer, 1988, 465 - 563.

[A21] Morse, M., *Recurrent geodesics on a surface of negative curvature*, *Amer. J. Math.*, **43** (1921), 33 - 51.

[A22] Ornstein, D. and Weiss, B., Geodesic flows are Bernoullian, *Israel J. Math.*, **14** (1973), 184 - 198.

[A23] Parry, W. S. and Tuncel, S., Classification problems in ergodic theory, Cambridge Univ. Press, 1982.

[A24] Shields, P., *The theory of Bernoulli shifts*, Univ. Chicago Press, 1973.

[A25] Shub, M., Global stability of dynamical systems, Springer, 1987 (译自法文).

[A26] Sinai, Ya. Markov partitions and C-diffeomorphisms, *Funct. Anal. Appl.*, **2** (1968), 1, 64 - 89 (*Funkts. Anal. Prilozh.*, **2** (1968), 1, 64 - 89)

[A27] Sinai Ya., Construction of Markov partitions, *Funct. Anal. Appl.*, **2** (1968), 2, 70 - 80 (*Funkts. Anal. Prilozh.*, **2** (1968), 3, 64 - 80). 齐民友 译

**对称代数 [symmetric algebra; симметрическая алгебра]**

多项式代数的一个推广．如果 $M$ 是一个有幺元的交换结合环 $A$ 上的一个幺模（unitary module），则 $M$ 的对称代数是代数 $S(M)=T(M)/I$，其中 $T(M)$ 是 $M$ 的**张量代数**（tensor algebra），$I$ 是形如 $x\otimes y-y\otimes x\ (x,\ y\in M)$ 的元素生成的理想．对称代数是有幺元的交换结合的 $A$ 代数．它是分次的

$$S(M)=\sum_{p\geqslant 0}S^p(M),$$

其中 $S^p=T^p(M)/I\cap T^p(M)$, $S^0(M)=A$, $S^1(M)=M$．模 $S^p(M)$ 称作模 $M$ 的 $p$ 次对称幂（$p$-th symmetric power）．如果 $M$ 是以 $x_1,\cdots,x_n$ 为有限基的自由模，则对应 $x_i\rightarrow X_i\ (i=1,\cdots,n)$ 扩充为 $S(M)$ 到多项式代数 $A[X_1,\cdots,X_n]$ 上的同构（见**多项式环**（ring of polynomials））．

对任一 $A$ 模同态 $f:M\rightarrow N$，$p$ 次张量幂 $T^p(f)$: $T^p(M)\rightarrow T^p(N)$ 诱导出同态 $S^p(f)$: $S^p(M)\rightarrow S^p(N)$（同态 $f$ 的 $p$ 次对称幂（$p$-th symmetric power of the homomorphism $f$））．结果得到一个 $A$ 代数同态 $S(f)$: $S(M)\rightarrow S(N)$．对应 $f\rightarrow S^p(f)$ 和 $f\rightarrow S(f)$ 分别是 $A$ 模范畴到自身和 $A$ 代数范畴的共变函子．对任意两个 $A$ 模 $M$ 和 $N$，有自然的同构 $S(M\oplus N)\simeq S(M)\otimes_A S(N)$．

如果 $M$ 是特征 0 的域上的向量空间，则对称化 $\sigma:T(M)\rightarrow T(M)$（见**对称化（张量的）**（symmetrization (of tensors)））定义了由对称代数 $S(M)$ 到代数 $\widetilde{S}(M)\subset T(M)$ 上的同构，其中 $\widetilde{S}(M)$ 是 $M$ 上的关于对称乘法

$$u\vee v=\sigma(u\otimes v),\ u\in\widetilde{S}^p(M),\ v\in\widetilde{S}^q(M)$$

的对称反变张量的代数．

**参考文献**

[1] Bourbaki, N., Eléments de mathématique, 2. Algèbre, Hermann, 1964, Chapt. IV - VI.

[2] Кострикин, А. И., Манин, Ю. И., Линейная алгебра и геометрия, М., 1980 (英译本: Kostrikin, A. I. and Manin, Yu. I., Linear algebra and geometry, Gordon & Breach, 1989). А. Л. Онищик 撰

【补注】 由 $A$ 模到交换西 $A$ 代数的函子 $S$ 解决了下述泛问题（universal problem）．设 $M$ 是 $A$ 模，$B$ 是交换西 $A$ 代数．对每个 $A$ 模同态 $f:M\rightarrow B$，存在唯一的 $A$ 代数同态 $g:S(M)\rightarrow B$，使得 $g$ 在 $S^1(M)$ 上的限制与 $f$ 相同．于是 $S$ 是交换西 $A$ 代数范畴到 $A$ 模范畴的基础函子的左伴随函子．

赵春来 译

**对称信道 [symmetric channel; канал симметричный]**

转移函数具有某种对称性的**通信信道**（communication channel）．输入和输出字母集分别为有限集 $Y$ 和 $\widetilde{Y}=Y$ 的齐次离散时间**无记忆信道**（memoryless channel）称为对称信道，如果它的转移概率矩阵 $\{q(y,\widetilde{y}):y,\widetilde{y}\in Y\}$ 满足

$$q(y,\widetilde{y})=\begin{cases} q & \text{当 } y=\widetilde{y} \text{ 时,} \\ \dfrac{1-q}{n-1} & \text{当 } y\neq\widetilde{y} \text{ 时,}\end{cases} \qquad (*)$$

其中 $n$ 表示集合 $Y$ 中元素个数，$0\leqslant q\leqslant 1$．研究最广泛的一类无记忆对称信道是二元对称信道（binary symmetric channel），其转移概率矩阵为

$$\left\|\begin{matrix} q & 1-q \\ 1-q & q \end{matrix}\right\|.$$

和非对称信道相比，对称信道中许多重要的信息理论的特征参数或者可以直接通过公式计算出来或者在计算中有实质上的简化．例如，当无记忆对称信道的转移概率矩阵 $\{q(y,\widetilde{y}):y,\widetilde{y}\in Y\}$ 满足（$*$）式时，其信道容量 $C$（见**信道传输速率**（transmission rate of a channel））由下式给出：

$$C = \log n + q\log q + (1-q)\log\frac{1-q}{n-1}.$$

参考文献见通信信道（comunication channel）文献[1]，[4]． Р．Л．Добрушин，В．В．Прелов 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Gallager, R. C., Information theory and reliable communication, Wiley, 1968.


【译注】 参考文献亦见 **Shannon 定理**（Shannon theorem）译注之参考文献．

骆源 符方伟 沈世镒 译

**对称导数**［symmetric derivative；симметрическая производная］

导数概念对 $n$ 维 Euclid 空间上集函数 $\Phi$ 情形的一种推广．在点 $x$ 的对称导数是极限

$$\lim_{r\to 0}\frac{\Phi(S(x;r))}{|S(x;r)|}\equiv D_{\mathrm{sym}}\Phi(x),$$

如果它存在的话，其中 $S(x;r)$ 表示以 $x$ 为心，$r$ 为半径的闭球．一元函数 $f$ 在点 $x$ 的 $n$ 阶对称导数（symmetric derivative of order $n$）定义为极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta_s^n f(x,h)}{h^n}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k f\left(x+\frac{n-2k}{2}h\right)}{h^n}=$$

$$=D_{\mathrm{sym}}^n f(x).$$

一元函数 $f$ 在点 $x$ 有 $2r$ 阶对称导数

$$D_{\mathrm{sym}}^{2r} f(x)=\beta_{2r},$$

如果

$$\frac{1}{2}(f(x+h)+f(x-h))-\sum_{k=0}^{r}\beta_{2k}\frac{h^{2k}}{(2k)!}=$$

$$=o(h^{2r});$$

如果

$$\frac{1}{2}(f(x+h)-f(x-h))-\sum_{k=0}^{r}\beta_{2k+1}\frac{h^{2k+1}}{(2k+1)!}=$$

$$=o(h^{2r+1}),$$

则 $f$ 在点 $x$ 有 $2r+1$ 阶对称导数

$$D_{\mathrm{sym}}^{2r+1} f(x)=\beta_{2r+1}.$$

当 $f$ 在点 $x$ 有 $n$ 阶导数 $f^{(n)}$ 时，则（在两种情形）它在点 $x$ 都有对称导数，且等于 $f^{(n)}(x)$．

**参考文献**


[1] Saks, S., Theory of the integral, Hafner, 1952（译自波兰文）．

[2] James, R. D., Generalized $n$ th primitics, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 76(1954), 1, 149－176


Т．П．Лукашенко 撰 王斯雷 译

**对称导出数**［symmetric derived number；симметрическое производное число］

通常导出数概念（见 **Dini 导数**（Dini derivative））对于 $n$ 维 Euclid 空间中集函数 $\Phi$ 的一种推广．$\Phi$ 在 $x$ 的对称导出数定义为极限

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\Phi(S(x,r_k))}{|S(x,r_k)|},$$

其中 $S(x,r_k)$ 是以 $x$ 为心，半径为 $r_k$ 的一列闭球，且当 $k\to\infty$ 时，$r_k\to 0$．

一元函数 $f$ 在 $x$ 的 $n$ 阶对称导出数（$n$-th symmetric derived numbers）定义为极限

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\Delta_s^n f(x,h_k)}{h_k^n}=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}(-1)^m f\left(x+\frac{n-2m}{2}h_k\right)}{h_k^n},$$

其中当 $k\to\infty$ 时，$h_k\to 0$，而 $\Delta_s^n f(x,h_k)$ 是 $f$ 在 $x$ 的对称差分（$n$ 阶的）（symmetric difference of order $n$）．

**参考文献**


[1] Saks, S., Theory of the integral, Hafner, 1952（译自波兰文）．


Т．П．Лукашенко 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Rudin, W., Real and complex analysis, McGraw-Hill, 1974（中译本：W．卢丁，实分析与复分析，人民教育出版社，1982）．


王斯雷 译

**对称差分（$n$ 阶的）**［symmetric difference of order $n$；симметрическая разность порядка $n$］，一元实变函数 $f$ 在点 $x$ 上的

表达式

$$\Delta_s^n f(x,h)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k f\left(x+\frac{n-2k}{2}h\right).$$

将 $h$ 换成 $2h$，下面的表达式也称为对称差分：

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k f(x+(n-2k)h).$$

假若 $f(x)$ 在 $x$ 有 $n$ 阶导数 $f^{(n)}(x)$，那么

$$\Delta_s^n f(x,h)=f^{(n)}(x)h^n+o(h^n).$$

Т．П．Лукашенко 撰

【补注】

**参考文献**

[A1] Meschkowski, H., Differenzengleichungen, Vandenhoeck & Ruprecht, 1959.

[A2] Milne-Thomson, L. N., The calculus of finite differences, Chelsea, reprint, 1981

[A3] Nörlund, N. E., Vorlesungen über Differenzenrechnung. Chelsea, reprint, 1954.

王斯雷 译

**集合的对称差**[**symmetric difference of sets; симметрическая разность**]

集合间的一种运算. 给定两个集合 $A$ 和 $B$, 它们的对称差(symmetric difference), 记作 $A\Delta B$, 定义为

$$A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=$$
$$=(A\cup B')\cup(B'\cap A),$$

其中符号 $\cup$, $\cap$, $\setminus$, $'$ 分别表示集合的并运算, 交运算, 差运算和补运算.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 对称差运算满足结合律, 即 $A\Delta(B\Delta C)=(A\Delta B)\Delta C$, 且交运算关于它是可分配的, 即 $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$. 从而, 与并和交相对应, $\Delta$ 和 $\cap$ 定义了集合 $X$ 的幂集(power set)($X$ 的子集的集合)上的环结构. 这个环与 $X$ 上的 $Z(2)$ 值函数组成的环(其上运算为点态乘法和点态加法)相同. 亦见 **Boole 代数**(Boolean algebra)和 Boole 代数中关于对称差运算的 **Boole 环**(Boolean ring).

**参考文献**

[A1] Kuratowski, K., Introduction to set theory and topology, Pergamon, 1961, p. 34, 35(译自法文).

赵希顺 译

**对称区域**[**symmetric domain; симметрическая область**]

一复流形(complex manifold) $D$ 同构于 $C^n$ 中的一有界区域并使得, 对每一点 $p\in D$, 有一对合全纯变换 $\sigma_p: D\to D$ 以 $p$ 为唯一不动点. 一对称区域是一关于 Bergman 度量(见 **Bergman 核函数**(Bergman kernel function))是负曲率的 **Hermite 对称空间**(Hermitian symmetric space). 它的自守群是包含在(作为一复流形)运动群中并且有相同的连通分支 $G(D)$, 它是一没有中心的非紧实半单 Lie 群. $G(D)$ 中 $p\in D$ 的固定子群 $H(D)$ 是一具有一维中心的连通紧 Lie 群. 作为一实流形, 一对称区域微分同胚于 $\mathbf{R}^{2n}$.

每一对称区域都可唯一分解为一不可约对称区域的直积, 这些列于下表中(其中 $M_{p,q}$ 表示复 $(p\times q)$ 矩阵空间).

一 Ⅲ 型的对称区域可表为 Siegel 上半平面:

$$\{Z\in M_{p,p}: Z'=Z, \operatorname{Im}Z>0\}.$$

它的点主要地参数化配极 Abel 簇. 其他对称区域也可表为第一或第二类 **Siegel 区域**(Siegel domain)(见[2]).

**参考文献**

[1] Siegel, C. L., Automorphe Funktionen in mehrerer Variablen, Math. Inst. Göttingen, 1955.

[2] Пятецкий-Шапиро, И. И., Геометрия классических областей и теория автоморфных функций, Москва, 1961(英译本: Pyatetskiĭ-Shapiro, I. I., Automorphic functions and the geometry of classical domains, Gordon & Breach, 1969).

[3] Cartan, E., Domains bornés homogènes de l'espace de $n$ variables complexes, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 1(1935), 116-162.

[4] Drucker, D., Exceptional Lie algebras and the structure of hermitian symmetric spaces, Amer. Math. Soc., 1978.

Э. Б. Винберг 撰

【补注】 固定子群 $H(D)$ 有一维中心, 当且仅当对称区域是不可约的.

**参考文献**

[A1] Helgason, S., Differential geometry, Lie groups,

| Cartan 型 | $G(D)$ 的类型 | $H(D)$ 的类型 | $D$ 的维数 | $D$ 的模式 |
|---|---|---|---|---|
| Ⅰ | $A_{p+q-1}$ | $A_{p-1}+$ $+A_{q-1}$ $(p\geqslant q)$ | $pq$ | $\{Z\in M_{p,q}: Z^*Z<E\}$ |
| Ⅱ | $D_p$ | $A_{p-1}$ | $\frac{p(p-1)}{2}$ | $\{Z\in M_{p,p}: Z'=-Z,$ $Z^*Z<E\}$ |
| Ⅲ | $C_p$ | $A_{p-1}$ | $\frac{p(p+1)}{2}$ | $\{Z\in M_{p,p}: Z'=Z,$ $Z^*Z<E\}$ |
| Ⅳ | $D_{p/2+1}$ $B_{(p+1)/2}$ | $D_{p/2-1}$ $B_{(p-1)/2}$ | $\}p$ | $\{z\in C^p, \sum\lvert z_i\rvert^2<$ $<\frac{1}{2}[1+\lvert\sum z_i^2\rvert^2<1\}$ |
| Ⅴ | $E_6$ | $D_5$ | 16 | |
| Ⅵ | $E_7$ | $E_6$ | 27 | |

and symmetric spaces. Acad. Press, 1978.

【译注】

参考文献

[B1] 华罗庚，多复变函数论中典型域的调和分析，科学出版社，1958.

[B2] 陆启铿，典型流形与典型域，上海科学技术出版社，1963.

钟同德 译

**对称函数** [symmetric function; симметрическая функция]

在自变量任意置换下不变的函数．下面是对称函数的一些例子：$x_1+x_2+\cdots+x_n$，$x_1x_2\cdots x_n$，

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j,\ \max(x_1,\cdots,x_n),$$

$$x_1+\cdots+x_n(\mathrm{mod}\,m),$$

在十进制下由单数字组成的任意集之和，以及“选举”函数——自变量仅取 1（“同意”）和 0（“反对”），而函数值当自变量取 1 超过半数时为 1 否则为 0 的这样的函数．常数函数和一元函数是对称函数最简单的例子．

任意非常数的对称函数本质上依赖于它所有的变量．因此加入除常数外的非本质变量将使函数不对称，而去掉它将会使之对称．所以对称函数的概念依赖于它所有变量的精确表达．判别函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 为对称的一个简单准则是，下面两个等式同时成立：

$$f(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)=f(x_2,x_1,x_3,\cdots,x_n),$$

$$f(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)=f(x_n,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}),$$

或以下 $n-1$ 个等式成立：

$$f(x_1,\cdots,x_i,x_{i+1},\cdots,x_n)=f(x_1,\cdots,x_{i+1},x_i,\cdots,x_n)$$

以及

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n)=f(x_n,x_2,\cdots,x_{n-1},x_1).$$

对称函数与**对称多项式**（symmetric polynomial）有一定的联系（在特征为 0 的域上的）任何对称有理函数必为两个对称多项式之商．任何 Boole 对称函数，在含有同样多个单位元的自变量集上取相同值．这些函数在数学控制论及它的应用，尤其是在算术和其他运算的模式实现中都起着重要的作用．

参考文献

[1] Waerden, B. L. van der., Algebra, 1－2, Springer, 1967－1971（中译本：B. L. 范德瓦尔登，代数学，1－2，科学出版社，1962）.

[2] Яблонский, С. В., Введение в дискретную математику, М., 1979.

В. М. Храпченко 撰

【补注】 对称多项式是初等对称函数的多项式这一定理也称为 Newton 定理（Newton theorem）．类似的结论对连续函数、全纯函数以及 $C^\infty$ 函数（光滑函数）也成立．例如，若 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 为对称的光滑函数，则存在光滑函数 $g:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 使

$$f(x_1,\cdots,x_n)=g(S_1(x),\cdots,S_n(x))$$

（[A1]）．更一般地，设 $G$ 为线性作用于 $\mathbf{R}^n$ 上的紧群，$\rho_1,\cdots,\rho_m$ 为不变量环 $\mathbf{R}[x_1,\cdots,x_n]^G$ 的齐次生成元．又设 $\rho:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 为相应的映射，$x\mapsto(\rho_1(x),\cdots,\rho_m(x))$．那么

$$\rho:C^\infty(\mathbf{R}^m)\to C^\infty(\mathbf{R}^n)^G$$

为满射（[A2]）．这是光滑不变函数的基本定理（fundamental theorem for smooth invariant functions）．这结果依赖于 Malgrange 预备定理（Malgrange preparation theorem）（$C^\infty$ 预备定理，光滑预备定理），Weierstrass 预备定理的 $C^\infty$ 类比（见 **Weierstrass 定理**（Weierstrass theorem 4））．

参考文献

[A1] Glaeser, G., Fonction composées différentiables, *Ann. of Math.*, 77(1963), 193－209.

[A2] Schwarz, G., Smooth functions invariant under the action of a compact Lie group. *Topology*, 14(1975), 63－68.

[A3] Golubitsky, M. and Guillemin, V., Stable mappings and their singularities, Springer, 1973, p. 108 ff.

[A4] Poénaru, V., Singularités $C^\infty$ en présence de symétrie, Springer, 1976, 3－58.

王斯雷 译

**对称群** [symmetric group; симметрическая группа]

集合 $X$ 上所有置换（到自身的一一映射）的群，其运算是合成（见**置换群**（permutation group））．集合 $X$ 上的对称群记为 $S(X)$．对等势的 $X$ 和 $X'$，群 $S(X)$ 和 $S(X')$ 是同构的．有限集 $X=\{1,2,\cdots,n\}$ 上的对称群记为 $S_n$．每个抽象群同构于某集合 $X$ 上的对称群 $S(X)$ 的一个子群（Cayley 定理（Cayley theorem））．

令 $X$ 是有限集．$X$ 上的每个置换 $\pi$ 可唯一地表为无交轮换的乘积（置换的轮换分解（cycle decomposition of a permutation））（无交的）；整数序列

$$z(\pi)=(a_1,\cdots,a_n),$$

其中 $a_i$ 是 $\pi$ 的长为 $i$ 的轮换个数，称为 $\pi$ 的轮换型（cycle type）（或轮换指数（cycle index））．两个置换 $\pi$ 及 $\pi'$ 在 $S_n$ 中共轭，当且仅当它们的轮换类型相同，具有轮换型

$$(n-2,1,0,\cdots,0)$$

的置换称为对换（transposition）；它们构成 $S_n$ 的生成系．对换的集合 $\Sigma=\{(i,i+1)|i=1,\cdots,n-1\}$

是 $S_n$ 的极小生成集. 一般地, 集合 $\Delta = \{(i_k, j_k) | i_k \neq j_k\}$ 生成 $S_n$, 当且仅当由 $X$ 作顶点集又以点对 $(i_k, j_k)$ 作边, 作成的图是树 (tree) ([2]). 这样的生成集的数目为 $n^{n-2}$ 个.

**交错群** (alternating group) $A_n$ 是 $S_n$ 的正规子群. 若 $n \neq 4$, $A_n$ 是 $S_n$ 的唯一非平凡真正规子群, 又 $S_4$ 仅含一个别的非平凡正规子群——Klein 4 群 (Klein four-group): $K_4 = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$. 对 $n \leqslant 4$, 群 $S_n$ 是可解群, 但 $n \geqslant 5$ 时, 它不可解且 $A_n$ 是非 Abel 单群. Hölder 定理 (Hölder theorem): 对 $n \neq 2, 6$, 群 $S_n$ 是**完全群** (complete group). 群 $S_2$ 是交换群及 $S_6$ 有一个 2 阶的外自同构.

$S_n$ 中所有极大的非传递及非本原子群都已知. 对每个分划 $n = m_1 + m_2$, $m_1 \neq m_2$, $S_n$ 中仅有的极大非传递子群是子群 $S_{m_1} \times S_{m_2}$. $S_n$ 中仅有的传递非本原极大子群是 $S_{m_1}$ 与 $S_{m_2}$ 的**圈积** (wreath product) (对每个分解 $n = m_1 m_2$). $S_n$ 中本原极大子群还未弄清 (1992), 但已知某些无限系列. 例如, $S_n$ 自然地作用在 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 中 $m$ 个元素的全部子集的集合 $B_n^m$ 上; 当 $n \neq 2m$ 时, 这决定了 $B_n^m$ 的置换的一个本原群. 当 $(m, n) \neq (2, 6), (2, 8), (3, 10), (4, 12), (m, 2m), (m, 2m+1)$ 时它在 $S(B_n^m)$ 中是极大子群 (见[1]). 考虑 $q$ 个元素的有限域上 $n$ 维向量空间中半线性变换的群 $\Gamma L_n(q)$, 就可得另一个系列. 该群确定了 **Grassmann 流形** (Grassmann manifold) $G_{n,m}(q)$, $1 \leqslant m \leqslant n-1$, 的一个本原置换群, 当 $n \geqslant 3$ 时, 它在 $S(G_{n,m}(q))$ 中是极大子群.

令 $X$ 是无限集. 仅变动 $X$ 上有限个元素的全体置换的群称为在 $X$ 上有限的 (finitary) 或限制的 (restricted) 对称群 (symmetric group), 且记成 $\mathrm{SF}(X)$; 它的偶置换的群称为 $X$ 上有限的 (finite) 或限制的 (restricted) 交错群 (alternating group), 记成 $\mathrm{AF}(X)$. 子群 $\mathrm{SF}(X)$ 及 $\mathrm{AF}(X)$ 都在 $S(X)$ 中正规. 更一般地, 令 $\alpha$ 为 $X$ 的基数, 令 $\beta \leqslant \alpha$ 是无限基数; $X$ 上至多移动 $\beta$ 个元素的置换的集合是 $S(X)$ 的子群, 记成 $S_\beta(X)$. 和 $\mathrm{SF}(X)$ 及 $\mathrm{AF}(X)$ 一起, 群 $S_\beta(X)$, 对所有 $\beta \leqslant \alpha$, 是 $S(X)$ 的正规子群, 且实际上, $S(X)$ 中没有其他非平凡正规子群 (Schreier-Ulam-Baer 定理 (Schreier-Ulam-Baer theorem), 见[3]).

亦见**集合的置换** (permutation of a set) 的参考文献.

**参考文献**


[1] Калужнин, Л. А., Клин, М. Х., 《Матем. сб.》, **87** (1972), 1, 91 – 121.

[2] Ore, O., Theory of graphs, Amer. Math. Soc., 1962.

[3] Плоткин, Б. И., Группы автоморфизмов алгебраических систем, М., 1966 (英译本: Plotkin, B. I., Groups of automorphisms of algebraic systems, Wolters-Noordhoff, 1972).

[4] Устименко-Бакумовский, В. А., 《Докл. АН СССР》, **240** (1978), 6, 1305 – 1308.


Л. А. Калужнин 撰

【补注】 完全群 (complete group), 即为无中心及无外自同构的群, 也称为完满群 (perfect group).

关于 $S_n$ 的子群结构的一个结果, 亦见[A1].

**参考文献**


[A1] Aschbacher, I. M. and Scott, L. L., Maximal subgroups of finite groups, *J. Algebra*, 1 (1985), **44** – 80

[A2] Wielandt, H., Finite permutation groups, Acad. Press, 1964 (中译本: H·维兰特, 有限置换群, 科学出版社, 1984).

[A3] Passman, D., Permutation groups, Benjamin, 1968.


【译注】 $S_n$ 中极大子群的分类参见文献[B1].

**参考文献**


[B1] Liebeck, M. W., Praeger, C. E., Saxl, J., A classification of the maximal subgroups of the finite alternating and symmetric groups, *J. Algebra*, **111** (1987), 365 – 383.


石生明 译 王 杰 校

## 对称矩阵 [symmetric matrix; симметрическая матрица]

一个方阵, 其中关于主对角线位置对称的任意两个元素彼此相等, 即矩阵 $A = \| a_{ik} \|_1^n$ 等于它的转置矩阵:

$$a_{ik} = a_{ki}, \; i, k = 1, \cdots, n.$$

一个 $n$ 阶实对称矩阵恰有 $n$ 个实本征值 (按重数计算). 如果 $A$ 是一个对称矩阵, 那么 $A^{-1}$ 和 $A^p$ 也是对称矩阵, 如果 $A$ 与 $B$ 是同阶的对称矩阵, 那么 $A+B$ 是对称矩阵, 而 $AB$ 是对称的, 当且仅当 $AB = BA$.

Т. С. Пиголкина 撰

【补注】 每一个复方阵相似于一个对称矩阵. 一个 $(n \times n)$ 实矩阵是对称的, 当且仅当其相伴算子 $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ (关于标准基) 是自伴的 (关于标准内积). **极分解** (polar decomposition) 将矩阵 $A$ 分解为一个对称矩阵与一个正交矩阵之积 $SQ$.

令 $B: V \times V \to k$ 是向量空间 $V$ 上的一个双线性型 (bilinear form) (见**双线性映射** (bilinear mapping)). 那么 $B$ 的矩阵 (关于这两个因子 $V$ 的相同的基) 是对称的, 当且仅当 $B$ 是一个对称双线性型 (symmetric bilinear form), 即 $B(u, v) = B(v, u)$.

**参考文献**


[A1] Gantmacher, F. R. [Gantmakher, F. R.], The

theory of matrices, Chelsea, reprint, 1959－1960, Vol. 1, Chapt. Ⅸ; Vol. 2, Chapt. Ⅺ(中译本：甘特马赫尔，矩阵论，高等教育出版社，1955).

[A2] Noll. W., Finite dimensional spaces, Nijhoff, 1987, Sect. 2.7.

蒋滋梅 译

**对称算子 [symmetric operator; симметрический оператор]**

从 Hilbert 空间 $H$（一般是复的）中集合 $D_A$ 到 $H$ 中一个线性映射 $A$，使得对所有 $x, y \in D_A$，$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$. 如果 $D_A$ 是 $H$ 中一个处处稠密的流形（以下总作此假设），则 $A$ 是线性算子. 如果 $D_A = H$，则 $A$ 是有界的从而在 $H$ 上连续. 对称算子 $A$ 在 $D_A$ 上诱导出一个双线性 Hermite 型 $B(x, y) = \langle Ax, y\rangle$，即 $B(x, y) = \overline{B(y, x)}$. 对应的二次型 $\langle Ax, x\rangle$ 是实的. 反之，如果型 $\langle Ax, x\rangle$ 在 $D_A$ 上是实的，则 $A$ 是对称的. 具有公共定义域 $D_A = D_B$ 的两个对称算子 $A$ 和 $B$ 的和 $A + B$ 仍然是对称算子，而如果 $\lambda$ 是一个实数，则 $\lambda A$ 也是对称的. 每个对称算子有唯一定义的闭包 $\overline{A}$ 和一个伴随 $A^* \supset \overline{A}$，一般，$A^*$ 不是对称的且 $A^* \neq \overline{A}$. 如果 $A^* = A$，则 $A$ 称为**自伴算子**（self-adjoint operator）. 例如，在定义在整个 $H$ 上的对称算子的情形，这是成立的. 如果 $A$ 在 $D_A$ 上对称且有界，则 $A$ 可以扩张成整个 $H$ 上的一个有界对称算子.

例 1) 设 $\|a_{ij}\|$, $i, j = 1, 2, \cdots$, 是一个无穷矩阵使得 $a_{ij} = \overline{a}_{ji}$，且

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < \infty .$$

则对 $x = \{\xi_i\} \in l_2$ 确定 $y = \{\eta_i\}$ 的方程组

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\xi_j, \quad i = 1, 2, \cdots$$

定义了一个有界对称算子，可证明它在复空间 $l_2$ 上是自伴的.

2) 在复空间 $L_2(0, 1)$ 中，设 $A = i\,d/dt$ 是定义在有平方可和导数且满足条件 $x(0) = x(1) = 0$ 的 $[0, 1]$ 上绝对连续函数 $x$ 的集合 $D_A$ 上. 则 $A$ 是对称的但不是自伴的.

**参考文献**

[1] Люстерник, Л. А., Соболев, В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965（中译本：Л. А. 刘斯铁尔尼克，В. И. 索伯列夫，泛函分析概要，第二版，科学出版社，1985).

[2] Riesz, F. and Szökefalvi-Nagy, B., Leçons d'analyse fonctionelle, Akad. Kiadó, 1955（中译本：F. 黎茨，B. 塞克佛尔维-纳吉，泛函分析讲义，科学出版社，第一卷，1963，第二卷，1980).

В. И. Соболев 撰

【补注】 一个重要问题是求一个对称算子的自伴扩张. 这个问题有不同的说法，依赖于在原空间或在更大的空间求扩张. 现有这个课题的完整的理论.

**参考文献**

[A1] Akhiezer, N. I. and Glazmann, I. M., Theory of linear operators in Hilbert space, 1－2, Pitman, 1980（译自俄文).

葛显良 译 吴绍平 校

**对称多项式 [symmetric polynomial; симметрический многочлен]**

系数属于某域或有单位元的可交换结合环 $K$ 的多项式 $f$，且关于各变量为**一对称函数**（symmetric function），即对变量的一切置换不变：

$$f(x_1, \cdots, x_n) = f(\pi(x_1), \cdots, \pi(x_n)). \qquad (*)$$

对称多项式全体构成 $K$ 上的一个代数 $S(x_1, \cdots, x_n)$.

对称多项式最重要的例子是初等对称多项式（elementary symmetric polynomials）

$$s_k(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} x_{i_1} \cdots x_{i_k}$$

以及乘方和（power sums）

$$p_k(x_1, \cdots, x_n) = x_1^k + \cdots + x_n^k .$$

后者通过循环公式可以用初等对称多项式表达，称为 Newton 公式（Newton formulas）：

$$p_k - p_{k-1}s_1 + p_{k-2}s_2 + \cdots$$
$$\cdots + (-1)^{k-1}p_1 s_{k-1} + (-1)^k k s_k = 0,$$
$$\text{当 } 1 \leq k \leq n \text{ 时；}$$
$$p_k - p_{k-1}s_1 + p_{k-2}s_2 + \cdots$$
$$\cdots + (-1)^{n-1}p_{k-n+1}s_{n-1} + (-1)^n p_{k-n}s_n = 0,$$
$$\text{当 } k > n \text{ 时 .}$$

对于最高次项系数为 1 的任意一元多项式 $x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ 的根的初等对称多项式 $s_1, s_2 \cdots, s_k$ $(1 \leq k \leq n)$，成立 $a_k = (-1)^k s_k$（见 **Viète 定理**（Viète theorem)).

对称多项式的基本定理（fundamental theorem on symmetric polynomials）：每个对称多项式都是初等对称多项式的多项式，且表示是唯一的. 换言之，初等对称多项式是代数 $S(x_1, \cdots, x_n)$ 的自由生成元的集合. 如果域有特征 0，那么多项式 $p_1, \cdots, p_n$ 也构成此代数的自由生成元集.

斜对称多项式（skew-symmetric polynomial）或交错多项式（alternating polynomial）是这样的多项式 $f(x_1, \cdots, x_n)$，当 $\pi$ 为偶时，它满足关系 $(*)$，而当 $\pi$ 为奇时，则满足条件

$$f(x_1,\cdots,x_n)=-f(\pi(x_1),\cdots,\pi(x_n)).$$

任何斜对称多项式能写成 $\Delta_n g$ 的形式，其中 $g$ 为对称多项式，而

$$\Delta_n=\prod_{i<j}(x_i-x_j).$$

这样的表示式并不唯一，因为有关系式 $\Delta_n^2=\mathrm{Dis}(s_1,\cdots,s_n)$.

参考文献

[1] Курош, А. Г., Курс высшей алгебры, 11 изд., М., 1975 (中译本: А. Г. 库洛什, 高等代数教程, 1962).

[2] Кострикин, А. И., Введение в алгебру, М., 1977 (英译本: Kostrikin, A. I., Introduction to algebra, Springer, 1982).

[3] Мишина, А. П., Проскуряков, И. В., Высшая алгебра, 2 изд., М., 1965.

О. А. Иванова 撰

【补注】 另外一类重要的对称多项式是 Schur 多项式 (Schur polynomials) ($S$ 函数 ($S$-functions)) $S_{\{\lambda\}}$, 出现在对称群的表示论中. 它们对一切分划 $\{\lambda_1,\cdots,\lambda_p\}=\lambda$ 都有定义，并且包含上述函数作为特例，例如 $S_{\{1,1,\cdots,1\}}=s_k$, $S_{\{k\}}=\rho_k$ (例如见 [A4]，第六章).

一般地，根为 $x_1,\cdots,x_n$ 的多项式 $a_0x^n+\cdots+a_n$ 的判别式定义为 $D=a_0^{2n-2}\prod_{1\leq i<j\leq n}(x_i-x_j)^2$，且满足

$$D=a_0^{2n-2}\begin{vmatrix} p_0 & \cdots & p_{n-1} \\ p_1 & \cdots & p_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n-1} & \cdots & p_{n-2} \end{vmatrix},$$

而 $p_0(x_1,\cdots,x_n)=n$.

见判别式 (discriminant).

设 $A_n\subset S_n$ 为**交错群** (alternating group)，它由一切偶置换组成. 域 $k$ 上多项式的多项式环 $k[x_1,\cdots,x_n]^{A_n}$ 显然包含初等对称函数 $s_1,s_2,\cdots,s_n$ 以及 $\Delta_n=\prod_{i<j}(x_i-x_j)$. 如果 $k$ 的特征不为 2，那么多项式环由 $s_1,\cdots,s_n$ 及 $\Delta_n$ 生成，而且关系的理想由 $\Delta_n^2=\mathrm{Dis}(s_1,\cdots,s_n)$ 生成. 对于形如 $\Delta_n g$ 而 $g$ 为对称的每个斜对称多项式，条件 $\mathrm{char}\,k\neq 2$ 对于上述结论也是必要的. 更精确地说，对此要求的是：$2u=0$ 蕴涵着当 $u\in k$ 时有 $u=0$.

参考文献

[A1] Jacobson, N., Basic algebra, Freeman, 1974.

[A2] Kurosh, A. G., An introduction to algebra Mir, 1971 (译自俄文).

[A3] Waerden, B. L. van der., Algebra, 1, Springer, 1967 – 1971 (中译本: B. L. 范德瓦尔登, 代数学, 1, 科学出版社, 1976).

[A4] Littlewood, D. E., The theory of group characters and matrix representations of groups, Clarendon Press, 1950.

[A5] Poénaru, V., Singularités $C^\infty$ en présence de symmétrie, Springer, 1976, p. 14 ff.

[A6] Cohn, P. M., Algebra, 1. Wiley, 1982, p. 181.

王斯雷 译

**对称空间** [symmetric space; **симметрическое пространство**]

赋予微分几何学中各种类型空间的一个通用名称.

1) 具有仿射联络的流形称作是局部对称的仿射空间 (locally symmetric affine space)，如果它的**挠率张量** (torsion tensor)，和**曲率张量** (curvature tensor) 的协变导数恒为零.

2) 一个 (伪) **Riemann 流形** (pseudo-Riemannian manifold) 称作是局部对称的 (伪) Riemann 空间 (locally symmetric (pseudo-) Riemannian space)，如果它的曲率张量关于 Levi-Civita 联络的协变导数恒为零.

3) 一个伪 Riemann 流形 (或者是具有仿射联络的流形) $M$ 称作是整体对称的伪 Riemann (仿射) 空间 (globally symmetric pseudo-Riemmannian (affine) space)，如果对每一点 $x\in M$ 指定了 $M$ 的一个等距 (仿射变换) $S_x$，使得 $S_x^2=\mathrm{id}$，且 $x$ 是 $S_x$ 的孤立不动点.

4) 设 $G$ 是连通 Lie 群，$\Phi$ 是一个对合自同构 ($\Phi^2=\mathrm{id}$)，设 $G^\Phi$ 是所有的 $\Phi$ 不动点构成的闭子群，$G_0^\Phi$ 是 $G^\Phi$ 的单位元连通分支，$H$ 是 $G$ 的闭子群，使得

$$G_0^\Phi\subset H\subset G^\Phi,$$

则齐性空间 $G/H$ 称为对称齐性空间 (symmetric homogeneous space).

5) 在 Loos 意义下的对称空间 (symmetric space in the sense of Loos) (Loos 对称空间 (a Loos symmetric space)) 是指具有乘法

$$M\times M\to M,\ (x,y)\mapsto x\cdot y$$

的流形 $M$，该乘法满足下列 4 个条件:

a) $x\cdot x=x$;

b) $x\cdot(x\cdot y)=y$;

c) $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot(x\cdot z)$;

d) 每一点 $x\in M$ 有一个邻域 $U$，使得对于所有的点 $y\in U$, $x\cdot y=y$ 蕴含着 $y=x$.

任何一个大范围对称的仿射 (伪 Riemann) 空间是局部对称的仿射 (伪 Riemann) 空间，也是对称齐性空间. 任意一个齐性对称空间是大范围对称仿射空

间和 Loos 对称空间. 每一个连通的 Loos 对称空间是一个齐性对称空间.

设 $M$ 是一个连通的 Loos 对称空间，因而是一个齐性空间: $M=G/H$. 则 $G/H$ 能装备一个无挠的不变仿射联络，具有以下性质: $\alpha$) 曲率张量的协变导数为零，$\beta$) 每一条测地线 $\gamma$ 是 $G$ 的某个单参数子群 $\psi$ 的轨道，向量沿 $\gamma$ 的平行移动与它们借助于 $\psi$ 的平行移动是一致的; $\gamma$) 测地线在乘法之下是封闭的(它们称为一维子空间). 类似地，能引进 $M$ 的任意的子空间的概念，即 $M$ 的在乘法之下为封闭的、且关于诱导的乘法是对称的子流形. $M$ 的. 在乘法之下是稳定的闭子集 $N$ 是一个子空间. 对于对称空间 $G/H$ 而言，Lie 代数的类似物定义如下. 设 $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ 分别是群 $G$, $H$ 的 Lie 代数，设 $\varphi=d\Phi_e$(在单位元处的微分)，其中 $\Phi$ 是定义对称齐性空间 $G/H$ 的对合自同构. 空间的自同构 $\varphi$ 的对应于特征值 $-1$ 的特征向量构成一个子空间 $\mathfrak{m}$，使得 $\mathfrak{g}$ 是子空间 $\mathfrak{m}$ 和 $\mathfrak{h}$ 的直和，$\mathfrak{m}$ 能够等同于 $G/H$ 在点 $0=H$ 的切空间. 若在向量空间 $\mathfrak{m}$ 上定义三重线性合成

$$\mathfrak{m}\times\mathfrak{m}\times\mathfrak{m}\to\mathfrak{m},\ (X,\ Y,\ Z)\mapsto R(X,\ Y)Z,$$

其中 $R$ 是曲率张量，则 $\mathfrak{m}$ 成为一个 **Lie 三元系统** (Lie ternary system). 若 $N$ 是 $M$ 的经过 0 的子空间，则 $N$ 在 0 的切空间是 $\mathfrak{m}$ 的子系统. 反之亦然.

若 $M$ 是 Loos 对称空间，则乘积 $M\times M$ 也是. 设 $R$ 是 $M\times M$ 的一个子空间，它在 $M$ 上定义了一个等价关系，则称 $R$ 为一个合同 (congruence). 这个概念用于构造对称空间的覆叠理论. 两点 $x$, $y\in M$ 称为是交换的 (commute)，若对所有的 $a$, $b\in M$ 有

$$x\cdot(a\cdot(y\cdot b))=y\cdot(a\cdot(x\cdot b)).$$

$M$ 关于一点 $0\in M$ 的中心 (centre) $Z(M)$ 定义为 $M$ 中与 0 交换的点的集合. $Z(M)$ 是 $M$ 的闭子空间，能够装备一个 Abel 群结构. 设 $M$ 是单连通对称空间，则寻求以 $M$ 为覆叠空间的对称空间归结为 $Z(M)$ 的离散子群的分类.

在对称空间理论中，相当多的注意力集中于分类问题(见[2]). 设 $M$ 是局部对称 Riemann 空间，则 $M$ 称为可约的 (reducible)，如果在某个坐标系下，它的基本二次形式能写成

$$ds^2=g_{ij}(x^1,\ \cdots,\ x^k)dx^i dx^j+$$
$$+g_{\alpha\beta}(x^{k+1},\ \cdots,\ x^n)dx^\alpha dx^\beta,$$
$$i,\ j=1,\ \cdots,\ k;\ \alpha,\ \beta=k+1,\ \cdots,\ x^n.$$

若不然，则称该空间是不可约的 (irreducible). E. Cartan 证明了所有不可约局部对称 Riemann 空间的研究归结为他所完成的实紧 Lie 代数的对合自同构的分类. 同时，他解决了其基础群是单、紧情形的对称齐性空间的局部分类问题. 基础群是单. 非紧情形的对称齐性空间的分类也已经得到(见[2]、[3]、[5]).

**参考文献**


[1] Широков, П. А., Избранные работы по геометрии, Казань, 1966.

[2A] Cartan, E., Sur une classe rémarkable d'espaces de Riemann, *Bull. Soc. Math. France*, **54** (1926), 214－264.

[2B] Cartan, E., Sur une classe rémarkable d'espaces de Riemann, *Bull. Soc. Math. France*, **55** (1927), 114－134.

[3] Berger, M., Les espaces symmétriques noncompacts, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, **74** (1957), 85－177.

[4] Loos, O., Symmetric spaces, 1－2, Benjamin, 1969.

[5] Helgason, S., Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces. Acad. Press, 1978.


А. С. Феденко 撰

【补注】 设 $M$ 是整体对称 Riemann 空间，$G$ 是 $M$ 的等距群的单位元连通分支，$H$ 是 $G$ 在 $M$ 的某一点的迷向子群，则可以根据对应的 Lie 代数对 $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ 来给出 $M$ 是紧型 (compact type)，非紧型 (non-compact type) 和 Euclid 型 (Euclidean type) 的定义. 特别是，若 $M$ 是非紧型的，则 $\mathfrak{g}$ 有 **Cartan 分解** (Cartan decomposition) $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{m}$，见[5].

陈维桓 译

**对称张量** [**symmetric tensor**; **симметрический тензор**]，关于一对指标的

在互易这对指标时不变的张量. 一个对称张量关于这对指标**交错** (alternation) 的结果为零. 一个张量关于一组指标是对称的 (symmetric with respect to a set of indices)，如果它关于该组中任意两个指标是对称的.

А. В. Иванов 撰

【补注】 见**对称化(张量的)** (symmetrization (of tensors)).

**参考文献**


[A1] Brand, L., Vector and tensor analysis, Wiley, 1947.

[A2] Nelson, E., Tensor analysis, Princeton Univ. Press, 1967.

[A3] Spain, B., Tensor calculus, Oliver & Boyd, 1953.


陈维桓 译

**对称化** [**symmetrization**; **симметризация**]

对每个对象 $F$ 结合一个具有某种对称性的(同一类的)对象 $F^*$. 通常，对称化用于 Euclid 空间 $E^n$ (或常曲率空间)中的闭集 $F$，也用于映射; 进一步，对称化构造成使得 $F^*$ 连续依赖于 $F$. 对称化保

持对象的一些特征同时单调地改变另一些特征．对称化被用于几何学、数学物理和函数论中极值问题的求解．第一个对称化由 J. Steiner 于 1836 年引进，用于**等周不等式**（isoperimetric inequality）的证明．

$E^n$ 中关于子空间 $E^{n-k}$ 的对称化（symmetrization relative to a subspace $E^{n-k}$ in $E^n$）：对集合 $F$ 和子空间 $E^k \perp E^{n-k}$ 相交的每个非空截面，构造一个中心在 $E^k \cap E^{n-k}$ 且和 $F \cap E^k$ 有相同 $k$ 维体积的 $E^k$ 中的球；由这些球构成的集合 $F^*$ 就是对称化的结果．关于子空间的对称化保持体积和凸性，且不增加边界的面积或横截测度的积分（见[2]）．对 $k=1$，这是 Steiner 对称化（Steiner symmetrization），对 $k=n-1$，它是 Schwarz 对称化（Schwarz symmetrization）．

$E^n$ 中关于半空间 $H^{n-k}$ 的对称化（symmetrization relative to a half-space $H^{n-k}$ in $E^n$）：对 $F$ 和中心在边界 $\partial H^{n-k}$ 的 $E^{k+1} \perp H^{n-k}$ 中的球面 $S^k$ 相交的每个非空截面，构造一个和 $F \cap S^k$ 有相同 $k$ 维体积的球冠 $S^k \cap D^n$（$D^n$ 是中心在 $H^{n-k} \cap S^k$ 的球）；由这些球冠构成的集合 $F^*$ 就是对称化的结果．对 $k=n-1$，这是球对称化（spherical symmetrization），如果 $n=2$，它是圆对称化（circular symmetrization）．

位移对称化（symmetrization by displacement）：对凸集 $F \subset E^n$，构造它关于子空间 $E^k$ 的对称 $F'$；位移对称化的结果是集合 $F^* = (F+F')/2$，其中集合加法取向量和．

滚动对称化（symmetrization by rolling）：对凸体 $F \subset E^n$，将其**支撑函数**（support function）在单位球面的平行截面上求平均；滚动对称化的结果是由所得支撑函数构造出的体 $F^*$．

在 $E^3$ 中，Steiner 对称化保持体积且不增加曲面面积、直径和容量；Schwarz 对称化保持边界的 Gauss 曲率的连续性且不减少其最小值；关于半空间的对称化不增加该区域的基频或边界的面积；球对称化不增加容量；位移对称化保持边界的平均曲率的积分且不减少边界的面积；滚动对称化保持宽度（见[1]，[3]）．

在 $E^2$ 中 Steiner 对称化不增加惯性极矩、外半径、容量或基频；不减少挠刚性或最大内共形半径（见[3]）．

与对称化的多种应用相联系，对称化的收敛性问题已被考虑过．非闭集的类似对称化的定义允许有分歧．关于对称化在函数论中的应用见**对称化方法**（symmetrization method）．

**参考文献**


[1] Blaschke, W., Kreis und Kugel, Chelsea, reprint, 1949（中译本：W．伯拉须凯，圆与球，上海科学技术出版社，1986）．

[2] Hadwiger, H., Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie, Springer, 1957.

[3] Pólya, G. and Szegö, G., Isoperimetric inequalities in mathematical physics, Princeton Univ. Press, 1951.

[4] Leichtweiss, K., Konvexe Mengen, Springer, 1979.


С. Л. Печерский 撰

【补注】

非常一般地，如果 $G$ 是一个作用在域 $k$ 上向量空间 $V$ 上的有限群，$v \in V$，则 $v$ 的对称化形式（symmetrized version）是元素 $\sum_{s \in G} sv$（或 $(1/|G|)\sum_s sv$）．元素

$$e = \frac{1}{|G|}\sum_s s \in k[G]$$

称为对称化子．例如，如果 $G = S_m$ 是 $m$ 个字母的对称群且 $V = \otimes^m W$，向量空间 $W$ 的 $m$ 次张量积（相应地，域 $k$ 上 $m$ 个变元的多项式的向量空间），则 $G$ 自然地作用（通过置换张量的因子，相应地，置换变元）并且应用幂等元 $e$ 于一个张量（相应地，多项式）给出对应的对称化张量（symmetrized tensor）（相应地，对称化多项式（symmetrized polynomial））．亦见**对称化（张量的）**（symmetrization (of tensors)）．

对适当的无限群，代替求和，对称化子用积分定义．

如果 $G$ 是 $S_m$ 的子群，也可考虑交错化（alternation），即应用元素

$$f = \frac{1}{|G|}\sum_{\sigma \in G}\operatorname{sgn}(\sigma)\sigma,$$

其中 $\operatorname{sgn}(\sigma)$ 是置换 $\sigma$ 的符号．**Young 对称化子**（Young symmetrizer）是由关于 **Young 子群**（Young subgroup）的对称化再（关于对应子对偶分拆的 Young 子群）交错化得到的．更一般地，如果 $\chi$ 是任意作用在 $V$ 上的**群 $G$ 的特征标**（character of a group），$H$ 是 $G$ 的子群，则由 $\chi$ 和 $H$ 定义的对称化子（symmetrizer）是

$$\frac{1}{|H|}\sum_{h \in H}\chi(h)h.$$

交错化子（alternator）对应于 $S_m$ 的交错特征标 $\sigma \to \operatorname{sgn}(\sigma)$．

**参考文献**


[A1] Bandle, C., Isoperimetric inequalities, in P. M. Gruber and J. M. Wills (eds.): Convexity and Its Applications, Birkhäuser, 1983, 30－48.

[A2] Eggleston, H. G., Convexity, Cambridge Univ. Press, 1963.

[A3] Benson, R. V., Euclidean geometry and convexity, McGraw-Hill, 1966.

[A4] Weyl, H., The classical groups, Princeton Univ

Press, 1946. 120.

[A5] Marcus, M., Finite dimensional multilinear algebra. 1, M. Dekker, 1973, 78 ff.

陆珊年 译 彭家贵 校

**对称化方法** [**symmetrization method**; **симметризации метод**], 函数论中的

几何函数论中求解极值问题的方法之一. 该方法的基础是 $n$ 维 Euclid 空间的开集和闭集的对称化 (symmetrization) 概念. 函数论中的对称化方法首先被用来研究超限直径的性质 (见 [1]), 稍后用来求解 Carleman-Milloux 问题 (见 [2]), 此后其应用就十分广泛了 (见 [3] — [6], [9]).

对称化方法在函数论中的应用基于在各种形式的对称化下区域的容量与内半径的改变的单调性质. 用对称化方法求解几何函数论中的极值问题的可行性源自极值变换的一种确定的对称性. 基于在关于直线或射线的对称化下区域内半径的非减性质, 并应用关于正则函数变换下区域内半径的改变的定理, 可得到如下的**对称化原理** (symmetrization principle) (见 [4]): 设函数 $w = f(z)$ 在圆盘 $E$: $|z| < 1$ 内正则, $f(0) = w_0$, $f'(0) = a_1$, $E_f$ 是 $w = f(z)$ 在 $E$ 内的值域, $E_f^*$ 是 $E_f$ 关于过 $w = w_0$ 的直线或射线的对称化集, $r(E_f^*, w_0)$ 是 $E_f^*$ 关于点 $w_0$ 的内半径, 则

$$r(E_f^*, w_0) \geq |a_1|. \qquad (*)$$

(*) 中等号成立, 当且仅当 $w = f(z)$ 在 $E$ 内单叶且 $E_f^*$ 与 $E_f$ 重合 (在 Steiner 对称化下) 或为 $E_f$ 绕 $w_0$ 旋转所得 (在 Pólya 对称化下). 对于满足内半径非减性质的别的对称化方式亦有类似结果. 常常需要作进一步研究的是判明 (*) 中等号成立的条件.

对称化原理已推广到圆环的情形及具有任意连通性的区域 (参看 [6]). 对于求解几何函数论中的极值问题, 将对称化方法与其他方法联合起来是十分有效的 (**见极值度量法** (extermal metric, method of the), **二次微分** (quadratic differential) 等). 通过这一途径已得到给定区域内各种正则函数类 (圆盘或圆环内单叶, 平均单叶, 弱 $p$ 叶等函数类) 的一系列覆盖定理与畸变定理 (见 [4] — [6]).

对称化方法亦已被应用于拟共形映射空间的性质研究. 对于研究此类映射有效的有限几个方法来说, 这一进展尤为重要. 对称化方法使人们能够在具有不变的几何性质的二连通空间区域中找出具有最大共形模的区域. 这样一个区域的确定, 使得随之而确定了拟共形映射的一个极值性质. 特别地, 通过运用对称化方法, 对三维 Euclid 空间中的拟共形映射已建立了一些畸变定理 (见 [7], [8]).

**参考文献**

[1] Faber, G., Ueber Potentialtheorie und konforme Abbildung, Sitzungsber *Bayer Akad. Wiss. Math.-Naturwiss Kl.*, **20** (1920), 49 — 64.

[2] Beurling, A, Etudes sur un problème de majoration, in L. Carleson, et al (ed.): Collected Works, Birkhäuser, 1989, 1 — 108. Thèse.

[3] Pólya, G. and Szegö, G., Isoperimetric inequalities in mathematical physics, Princeton Univ. Press, 1951.

[4] Hayman, W. K., Multivalent functions, Cambridge Univ. Press, 1958.

[5] Jenkins, J. A., Univalent functions and conformal mappings, Springer, 1958.

[6] Голузин, Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966 (英译本: Goluzin, G. M., Geometric theory of functions of a complex variable, Amer. Math. Soc., 1969).

[7] Шабат, Б. В., 《Докл. АН СССР》, **132** (1960), 5, 1045 — 1048.

[8] Gehring, F. W., Symmetrization of rings in space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **101** (1961), 3, 499 — 519.

[9] Baernstein, A., Integral means, univalent functions and circular symmetrization, *Acta Math.*, **133** (1974), 139 — 169.

И. П. Митюк 撰 杨维奇 译

**对称化 (张量的)** [**symmetrization (of tensors)**; **симметрирование**]

张量代数中的一种运算, 它从一个已知张量构造出 (关于一组指标) 对称的张量. 对称化总是对若干个上指标或若干个下指标进行的. 分量为 $\{s_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_p} : 1 \leqslant i_\nu, j_\mu \leqslant n\}$ 的张量是分量为 $\{t_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_p} : 1 \leqslant i_\nu, j_\mu \leqslant n\}$ 的张量关于 $m$ 个上指标, 例如关于指标组 $I = (i_1, \cdots, i_m)$, 作对称化的结果, 如果

$$s_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_p} = \frac{1}{m!} \sum_{I \to \alpha} t_{j_1 \cdots j_q}^{\alpha_1 \cdots \alpha_m i_{m+1} \cdots i_p}. \qquad (*)$$

这里的和号是在 $I$ 的全体 $m!$ 个置换 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ 上取的. 关于一组下指标的对称化是以类似方式定义的. 关于一组指标的对称化记成用圆括号 ( ) 把这组指标括起来. 固定不动的指标 (即在对称化中不用的指标) 用竖线分隔出来. 例如 (若在 4, 1, 7 上作对称化; 5 保持不动),

$$t^{(4|5|17)} = \frac{1}{3!}[t^{4517} + t^{1574} + t^{7541} + t^{4571} + t^{7514} + t^{1547}].$$

若指标组 $I_1 \subset I_2$, 则关于 $I_1$ 和 $I_2$ 接连作两次对称化的结果与关于 $I_2$ 作对称化的结果一致. 换言之, 若 $s_{j_1 \cdots j_q} = t_{(j_1 \cdots (j_k \cdots j_l) \cdots j_q)}$, 则 $s_{j_1 \cdots j_q} = t_{(j_1 \cdots j_q)}$ (即去掉内含的圆括号).

关于某指标组的对称化不变的张量称为一个对称张量(symmetric tensor).

关于某指标组先作交错化(见交错(alternation)),再作对称化,则得零张量.

两个以上的张量作张量积,然后作关于全体指标的对称化,称为对称乘法(symmetric multiplication).张量的对称化和交错化一起用于把张量分解成结构较简单的张量.对称化也用于表述形如(*)的有多重指标的项之和.例如,若矩阵

$$\left\| \begin{matrix} a_1^1 \cdots a_n^1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_1^n \cdots a_n^n \end{matrix} \right\|$$

的元素关于乘法是交换的,则表达式

$$n!a_1^{(1}a_2^2\cdots a_n^{n)} = n!a_{(1}^1 a_2^2 \cdots a_{n)}^n$$
$$= n!a_{(1}^{(1}a_2^2\cdots a_{n)}^{n)}$$

称为矩阵的积和式(permanent of the matrix).


**参考文献**

[1] Широков, П. А., Тензорное исчисление, 2 изд., Казань, 1961.

[2] Беклемишев, Д.В., Курс аналитической геометрии и линейной алгебры, М., 1971.

[3] Schouten, J. A., Tensor analysis for physicists, Cambridge Univ. Press, 1951. Л. П. Купцов 撰


【补注】 见对称化(symmetrization)的补注.


**参考文献**

[A1] Akivis, M. A. and Goldberg, V. V., An introduction to linear algebra & tensors, Dover, reprint, 1977 (译自俄文).

[A2] Marcus, M., Finite dimensional multilinear algebra, 1, M. Dekker, 1973, p. 77ff. 陈维桓 译


**对称** [symmetry; симметрия]

1) 一个改变定向的对合正交变换(对合变换是实施两次则产生恒等变换的变换).例如,空间内关于一平面 $\alpha$(或平面内关于一直线 $a$)的一个反射(reflection)是一个对称,在它之下每一点 $M$ 映射到一点 $M'$,使得线段 $MM'$ 垂直于平面 $\alpha$(直线 $a$)且被它平分.$\alpha(a)$ 称为对称平面(plane)(轴(axis))(见图 1).任何正交变换或等距是有限个反射的复合.

2) 对称是一个几何图形 $\Phi$ 的如下性质:在某个变换群 $G$ 的作用下,$\Phi$ 被映射到自身上,这个群称为 $\Phi$ 的对称群(group of symmetries).这样,对称反映一个图形形状的某种正则性,即它在群 $G$ 中的变换的作用下的不变性.例如,$\Phi$ 是一个平面图形,使得关于某点 $O$ 旋转一个 $360°/n$($n$ 是一个整数)的角时映到自身上,那么 $\Phi$ 有一个 $n$ 阶对称,且 $O$ 称为对称中心(centre)(见图 2),这里 $G$ 是 $n$ 阶的循环群.一个圆有无限阶的对称(因为它旋转任何角后均映到自身上).

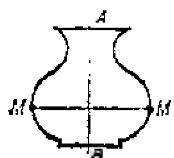



图 1

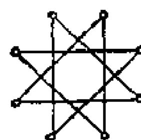


图 2

空间对称的其他的简单形式如下:

a) 关于一直线的 $n$ 阶对称(symmetry of order $n$).这里图形关于某直线(对称轴)旋转 $360°/n$ 角而映到自身上.例如,如果一个平面图形关于一直线 $AB$ 是对称的,则在空间里它有这直线作为轴的 2 阶对称.立方体有直线 $AB$ 作为轴的 3 阶对称,且有直线 $CD$ 作为轴的 4 阶对称(见图 3).一般地,正正则与半正则多面体关于多条直线是对称的(见图 4).对称轴的位置、个数与阶在结晶学中起着基本作用.

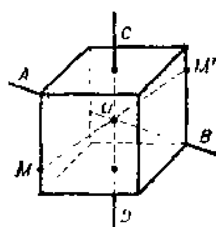



图 3

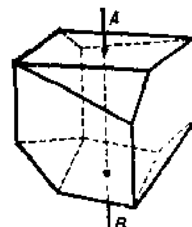



图 4

b) 平移对称(translational symmetry).这里图形沿着一条确定的直线(平移的轴(axis of the translation))平移某一区间而映到自身上.一个具有唯一平移轴与一个对称平面的图形可以有无限多个对称平面(因为任何平移是两个反射的复合)垂直于平移轴(见图 5).具有多个平移轴的图形在晶体格的研究中具有重要作用.

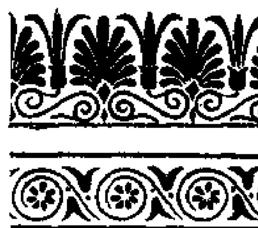


图 5



图 6

由反射和旋转复合成的对称（有界图形的简单对称均属此类），还有平移对称是很有趣的，并且是自然科学、艺术等的诸多领域中的一个研究课题，等等．例如，一个扭曲（twist）或螺旋对称是由关于一个轴经过某个角的旋转与沿着那个轴的平移复合而成的，这是在研究植物叶子排列时观察到的（见图 6）．对称性作为制作刺绣与装饰品的一种手法而被广泛地传播（具有一个或多个平移对称与反射的复合的平面图形，见图 7, 8）．



图 7

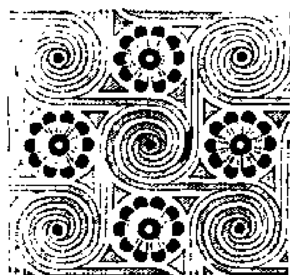


图 8

参考文献

[1] Шубников, А. В., Симметрия. (Законы симметии и их применение в науке, технике и прикладном искусстве), М.-Л. 1940（英译本：Shubnikov, A. V. and Koptsik, V. A., Symmetry in science and art, Plenum, 1974）.

[2] Coxeter, H. S. M., Introduction to geometry, Wiley, 1959.

[3] Weyl, H., Symmetry, Princeton Univ. Press, 1952（中译本：H. 魏尔，对称，商务印书馆，1986）.

М. И. Воицеховский 撰

【补注】 十分一般地，令 $G$ 是一个作用在一个集合 $X$ 上的群（例如，$G$ 可以是 $\mathbf{R}^n$ 的 Euclid 运动群，$X$ 可以是 $\mathbf{R}^n$ 中在 Euclid 运动下封闭的几何图形的某个集合）．对于每一个 $x \in X$，迷向子群（isotropy subgroup）$G_x = \{g \in G : gx = x\}$ 是 $x$ 的对称群（symmetry group）．

具有唯一平移轴的平移对称性蕴涵关于平面的对称性，这个陈述对一般情形不正确．

参考文献

[A1] Schattschneider, D., Visions of symmetry, Freeman, 1990.

[A2] Grünbaum, B. and Shephard, G. C., Tilings and patterns, Freeman, 1986.

[A3] Coxeter, H. S. M., Regular polytopes, Macmillan, 1963.

林向岩 译 陆珊年 校

**对称性（关系的）[symmetry (of a relation); симметричность]**

二元关系（binary relation）的一个性质．称集合 $A$ 上的二元关系 $R$ 是对称的（symmetric），如果对任意两个元素 $a, b \in A$，$aRb$ 蕴涵 $bRa$，即 $R^{-1} \subseteq R$．对称关系的一个例子是等价（equivalence）．

Т. С. Фофанова 撰

【补注】 集合 $A$ 上的反对称关系（anti-symmetric relation）是一个自反关系 $R$，满足 $R \cap R^{-1} \subset \Delta = \{(x, x) : x \in A\}$．

参考文献

[A1] Cohn, P. M., Algebra, 1, Wiley, 1982, p. 17ff.

赵希顺 译

**集合 $X$ 上的对称性 [symmetry on a set; симметрика на множестве]**

定义在 $X$ 的所有元素对的集合上的非负实值函数 $d$，它满足下述公理：

1) $d(x, y) = 0$，当且仅当 $x = y$；

2) $d(x, y) = d(y, x)$，对任意 $x, y \in X$．

与度量（metric）及伪度量（pseudo-metric）的明显不同，对称性不必满足三角形公理．关于集合 $X$ 上对称性 $d$，有一个定义在 $X$ 上的拓扑：集合 $A \subset X$（关于 $d$）闭，当且仅当对每个 $x \in X \setminus A$，$d(x, A) > 0$，这里

$$d(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}.$$

集合 $A$ 在这个拓扑空间的闭包，包含使 $d(x, A) = 0$ 的所有 $x \in X$ 的集合，但不限于这种集合．相应地，环绕 $X$ 中一个点的 $\varepsilon$ 球可能有空内部．拓扑空间称为可对称化的（symmetrizable），如果它的拓扑是由某对称性按上述法则生成的．可对称化空间类比可度量化空间（metrizable space）类更广泛：可对称化空间未必是仿紧空间，正规空间或 Hausdorff 空间．此外，可对称化空间不必满足第一可数公理．

但是，每个可对称化空间都是序列（sequential）空间，即它的拓扑由收敛序列依下述法则确定：集合 $A$ 闭，当且仅当 $A$ 中每个在 $X$ 中收敛点列的极限属于 $A$．对紧 Hausdorff 空间，可对称性与可度量性等价．

参考文献

[1] Архангельский, А. Б., Пономарев, В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974 (英译本: Arkhangel'skii, A. V. and Ponomarev, V. I., Fundamentals of general topology: problems and exercises, Reidel, 1984).

[2] Педев, С. Й., 《Тр. Моск. Матем. об-ва》, 24 (1971), 201 – 236.

А. В. Архангельский 撰 罗嵩龄 译

**对称原理 [symmetry principle; симметрии принцип]**, Schwarz 对称原理 (Schwarz symmetry principle), Riemann-Schwarz 对称原理 (Riemann-Schwarz symmetry principle), 关于解析函数的

设 $G$ 是扩充复平面 $\bar{C}$ 中由闭 Jordan 曲线 $\Gamma$ 围成的区域, 而 $\Gamma$ 有一部分是 $C$ 中一个圆 $L$ 的弧 $l$; 再设 $f(z)$ 是在 $G\cup l$ 上定义且连续的函数, 它在 $G$ 内解析, 在 $l$ 上取属于 $\bar{C}$ 中某个圆 $C$ 的值, 于是 $f(z)$ 可越过弧 $l$ 延拓到 $G$ 关于 $L$ 对称的区域 $G^*$ 中, 即延拓为 $G\cup l\cup G^*$ 内的解析函数. 这样的 (越过 $l$ 的) 延拓是唯一的并由初始函数 $f(z)$ 的下述性质确定: 如果 $z\in G$ 与 $z^*\in G^*$ 关于 $L$ 为对称 (反演), 则 $w=f(z)$ 与 $w^*=f(z^*)$ 关于 $C$ 为对称. 特别地, 如果 $L$ 和 $C$ 与 $\bar{C}$ 中的实轴相同, 则对 $z\in G\cup l\cup G^*$ 有 $f(z)=\overline{f(\bar{z})}$. 扩充复平面中的圆理解为本义的圆和直线两者. 连续性可取通常意义或推广意义即 $f(z)$ 称为在 $z_0$ 处连续, 如果当 $z\to z_0$ 时有 $f(z)\to f(z_0)$, 不管 $f(z_0)$ 为有限或无穷. 曲线 $\Gamma$ 和 $l$ 都可通过无穷远点. 由条件, $f(l)\subset C$, 但不必有 $f(l)=C$. 此外, 如果 $G$ 和 $G^*$ 有公共内点, 则延拓后的函数在这些点处不一定是单值的.

对同样假定的 $G, L, l, G^*$, 关于调和函数的对称原理 (symmetry principle for harmonic functions) 有如下述: 如果函数 $u(x, y)$ 在 $G$ 内调和, 在 $G\cup l$ 上连续且在 $l$ 上等于零, 则 $u$ 可越过 $l$ 延拓到 $G^*$ 内即延拓为在 $G\cup l\cup G^*$ 内调和的函数. 此处如果 $(x, y)\in G$ 与 $(x^*, y^*)\in G^*$ 关于 $L$ 为对称, 则 $u(x^*, y^*)=-u(x, y)$.

对称原理推广到 $l$ (和 $C$) 为解析弧情形的是解析函数和调和函数解析或调和延拓的 Schwarz 原理 (见 [1], [2]). 关于调和函数的对称原理推广到任意多元函数的情形称为**反射原理** (reflection principle). 对称原理广泛用于解析函数论和调和函数论的应用 (弹性论、流体力学、静电学等等中出现的具有一个或几个对称轴的区域的共形映射) 中.

**参考文献**

[1] Schwarz, H. A., Gesammelte mathematische Abhandlungen, 2, Springer, 1890.

[2] Привалов, И. И., Введение в теорию функций комплексного переменного, 12 изд., М., 1977, 350 – 360 (中译本: И. И. 普里瓦洛夫, 复变函数引论, 人民教育出版社, 1956, 374 – 386).

[3] Лаврентьев, М. А., Шабат, Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, 4 изд., М., 1973, 158 – 197, 214 – 215 (中译本: М. А. 拉甫伦捷夫, Б. В. 沙巴特, 复变函数论方法, 高等教育出版社, 1956, 161 – 174, 216 – 217).

Е. П. Долженко 撰

【补注】 在多复变量全纯函数和全纯映射理论中有对称原理的有趣推广.

作为例子, 有楔棱定理 (见 **Боголюбов 定理** (Bogolyubov theorem)) 和关于全纯映射的反射原理, 在许多情形它导致这种映射的光滑性延拓到所涉及的区域的边界. 亦见**双全纯映射** (biholomorphic mapping).

**参考文献**

[A1] Range, R. M., Holomorphic functions and integral representations in several complex variables, Springer, 1986.

[A2] Carathéodory, C., Theory of functions, 2, Chelsea, reprint, 1981.

[A3] Hille, E., Analytic function theory, 2, Ginn, 1959.

沈永欢 译

**对称性检验 [symmetry test; симметрии критерий]**

检定假设 $H_0$ "一维概率密度关于 0 对称" 的统计检验 (statistical test).

设拟检定对称性假设 $H_0$: $p(x)$ 关于 0 对称 (即对于其定义域内的一切 $x$, 有 $p(x)=p(-x)$), 其中 $p(x)$ 是独立随机变量 $X_1, \cdots, X_n$ 的分布律的概率密度. 检定假设 $H_0$ 的任何统计检验, 均称为对称性检验 (symmetry test).

相对 $H_0$ 最常考虑的备选假设是 $H_1$: 被考察的所有随机变量 $X_1, \cdots, X_n$ 有形如 $p(x-\Delta)$ 的概率密度, 其中 $\Delta\neq 0$. 换句话说, 根据假设 $H_1$, 随机变量 $X_i$ 的概率密度, 由密度 $p(x)$ 经沿 $Ox$ 轴方向移位距离 $|\Delta|$ 取得: 依 $\Delta$ 符号不同, 向左移或向右移. 若移位 $\Delta$ 的符号已知, 则备选假设 $H_1$ 是单侧的 (one-sided), 否则是双侧的 (two-sided). **符号检验** (sign test) 是对称性检验的一个简单例子.

对称性检验一般采用**随机化检验** (radomization test).

**参考文献**

[1] Hajek, J. and Sidak, Z., Theory of rank tests, Acad. Press, 1967

[2] Kendall, M. G. and Stuart, A., The advanced theory of statistics, 2. Inference and relationship, Griffin, 1979

М. С. Никулин 撰 周概容 译

**辛联络** [symplectic connection; симплектическая связность]

在具有一个非退化2-形式 $\Phi$ 的 $2n$ 维光滑流形 $M$ 上的一个**仿射联络** (affine connection)，使得 $\Phi$ 关于它是协变常量. 如果 $M$ 上的仿射联络由局部的联络形式

$$\omega^i = \Gamma^i_k dx^k, \ \| \det \Gamma^i_k \| \neq 0,$$

$$\omega^i_j = \Gamma^i_{jk} \omega^k$$

给出，且

$$\Phi = a_{ij} \omega^i \wedge \omega^j, \quad a_{ij} = -a_{ji},$$

则 $\Phi$ 是协变常量的条件能表示成

$$d a_{ij} = a_{kj} \omega^k_i + a_{ik} \omega^k_j.$$

2-形式 $\Phi$ 在 $M$ 上定义了一个辛结构 (或称 Hamilton 结构)，它使每一个切空间 $T_x(M)$ 转化成为有斜对称数量积 $\Phi(X, Y)$ 的辛空间. 辛联络也能定义为在向量的平行移动下保持该数量积不变的仿射联络. 在每一个 $T_x(M)$ 中能选取一个标架使得

$$\Phi = 2\sum_{\alpha=1}^{n} \omega^\alpha \wedge \omega^{n+\alpha}.$$

所有这种标架的集合构成 $M$ 上的一个主纤维丛，其结构群是**辛群** (symplectic group). 辛联络就是在这个主纤维丛上的联络. 存在这样的偶数维流形 $M$，使得在它上面没有大范围定义的非退化 2-形式 $\Phi$，因而没有辛联络. 但是，如果 $\Phi$ 是存在的，则使 $\Phi$ 关于它成为协变常量的辛联络不是唯一决定的.

**参考文献**

[1] Sternberg, S., Lectures on differential geometry, Prentice-Hall, 1964.

Ю. Г. Лумисте 撰

【补注】

**参考文献**

[A1] Abraham, R. and Marsden, J., Foundations of mechanics, Benjamin/Cummings, 1978.

陈维桓 译

**辛群** [symplectic group; симплектическая группа]

典型群之一，定义为左 $K$ 模 $E$ 上斜对称双线性型 $\Phi$ 的自同构群，其中 $K$ 是交换环 (见**典型群** (classical group)). 当 $E = K^{2m}$ 及型 $\Phi$ 在 $E$ 的典范基 $\{e_i\}$ 下的矩阵是

$$J_m = \left\| \begin{matrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{matrix} \right\|$$

时 (其中 $I_m$ 是 $m$ 阶单位矩阵)，相应的辛群称为环 $K$ 上 $2m$ 个变量的辛群，记为 $\mathrm{Sp}(m, K)$ 或 $\mathrm{Sp}_{2m}(K)$. $\mathrm{Sp}_{2m}(K)$ 中任意自同构关于基 $\{e_i\}$ 的矩阵称为**辛矩阵** (symplectic matrix).

令 $K$ 是域，$\Phi$ 是 $K$ 上 $n$ 维向量空间 $E$ 上的非退化斜对称双线性型. 若 $n$ 是偶数，则相应于 $\Phi$ 的辛群同构于 $\mathrm{Sp}_n(K)$，且由 $E$ 的所有形为

$$x \mapsto \sigma_{e,\alpha}(x) = x + \alpha\Phi(e, x)e$$

的线性变换 $\sigma_{e,\alpha}$ 所生成，其中 $e \in E$, $\alpha \in K$. 形为 $\sigma_{e,\alpha}$ 的线性变换称为**辛平延** (symplectic transvections) 或沿直线 $Ke$ 方向的**平移** (translations). $\mathrm{Sp}_n(K)$ 的中心 $Z$ 当 $\mathrm{char}\, K \neq 2$ 时由矩阵 $I_n$ 及 $-I_n$ 组成，当 $\mathrm{char}\, K = 2$ 时 $Z = \{I_n\}$. 商群 $\mathrm{Sp}_n(K)/Z$ 称为**射影辛群** (projective symplectic group)，记作 $\mathrm{PSp}_n(K)$. 除了

$$\mathrm{PSp}_2(F_2) = \mathrm{Sp}_2(F_2), \ \mathrm{PSp}_4(F_2) = \mathrm{Sp}_4(F_2)$$

$$\text{及 } \mathrm{PSp}_2(F_3)$$

以外，所有射影辛群皆为单群 (这里 $F_q$ 表示 $q$ 个元素的域)，且上面三个群分别同构于**对称群** (symmetric group) $S_3$、$S_6$ 及**交错群** (alternating group) $A_4$. 群 $\mathrm{Sp}_{2m}(F_q)$ 的阶为

$$q^{m^2}(q^2-1)\cdots(q^{2m-2}-1)(q^{2m}-1).$$

辛群 $\mathrm{Sp}_2(K)$ 与**特殊线性群** (special linear group) $\mathrm{SL}_2(K)$ 一致. 若 $\mathrm{char}\, K \neq 2$，$\mathrm{PSp}_4(K)$ 同构于 $\Omega_5(K, f)$ 被其中心除得的商群，其中 $\Omega_5(K, f)$ 是与 5 个变量的对称双线性型 $f$ 相应的正交群的 (指数为 2) 换位子群.

除去 $m = 2$ 及 $\mathrm{char}\, K = 2$ 的情形，$\mathrm{Sp}_{2m}(K)$ 的每个自同构 $\varphi$ 可写成

$$\varphi(g) = h_1 h_2 g^\tau h_2^{-1} h_1^{-1},$$

其中 $\tau$ 是域 $K$ 的自同构，$h_1 \in \mathrm{Sp}_{2m}(K)$，而 $h_2$ 是空间 $E$ 在基 $\{e_i\}$ 下由形为

$$\left\| \begin{matrix} I_m & 0 \\ 0 & \beta I_m \end{matrix} \right\|$$

的矩阵所表示的线性变换 ($\beta$ 是 $K$ 的非零元素).

$\mathrm{Sp}_{2m}(K)$ 与由方程 $A' J_m A = J_m$ 确定的**线性代数群** (linear algebraic group) $\mathrm{Sp}_{2m}$ 的 $K$ 点的群一致. 这个代数群，亦称辛群，是维数为 $2m^2 + m$ 的型 $C_m$ 的单的单连通线性代数群.

在 $K = \mathbf{C}$ 或 $\mathbf{R}$ 的情形，$\mathrm{Sp}_{2m}(K)$ 是连通的单的复或实的 Lie 群. $\mathrm{Sp}_{2m}(\mathbf{R})$ 是复辛群 $\mathrm{Sp}_{2m}(\mathbf{C})$ 的实型之一. 这个群的其他实型有时也称为辛群. 这些实型是 $\mathrm{Sp}_{2m}(\mathbf{C})$ 的子群 $\mathrm{Sp}(p, q)$，$p, q \geqslant 0$，$p + q = m$，由 $\mathrm{Sp}_{2m}(\mathbf{C})$ 的保持 Hermite 型

$$\sum_{i=1}^{2m} \varepsilon_i z_i \bar{z}_i$$

的那些元素组成，这里 $\varepsilon_i = 1$ 对 $1 \leqslant i \leqslant p$ 及 $m + 1 \leqslant i \leqslant m + p$，在其他情形 $\varepsilon_i = -1$. 群 $\mathrm{Sp}(0, m)$ 是

复辛群 $Sp_{2m}(\mathbf{C})$ 的紧实型. 辛群 $Sp(p, q)$ 同构于四元数除环 $\mathbf{H}$ 上的 $m=p+q$ 维右向量空间 $\mathbf{H}^m$ 中保持指数为 $\min(p, q)$ 的四元数 Hermite 型

$$(x, y)=\sum_{i=1}^{p} x_i \bar{y}_i-\sum_{i=p+1}^{m} x_i \bar{y}_i$$

的所有线性变换的群, 其中

$$x=(x_1, \cdots, x_m), y=(y_1, \cdots, y_m) \in \mathbf{H}^m,$$

字母上的杠表示四元数共轭.

**参考文献**


[1] Artin, E., Geometric algebra, Interscience, 1957.

[2] Bourbaki, N., Algebra, Elements of mathematics, 1, Addison-Wesley & Hermann, 1974 (译自法文).

[3] Dieudonné, J., La géométrie des groupes classiques, Springer, 1955.

[4] Helgason, S., Differential geometry and symmetric spaces, Acad. Press, 1962.

[5] Chevalley, C., Theory of Lie groups, 1, Princeton Univ. Press, 1946.


В. Л. Попов 撰

【补注】 $Sp_{2m}(\mathbf{C})$ 也是单连通的. 但 $Sp_m(\mathbf{R})$ 具有 $S^1\times SU_n$ 的同伦型, 故 $\pi_1(Sp_{2m}(\mathbf{R}))=\mathbf{Z}$. 此处 $S^1$ 是圆周, 而 $SU_n$ 是特殊酉群. 酉辛群 (unitary symplectic group) $USp_{2m}(\mathbf{C})$ 是酉群 (unitary group) $U_{2m}$ 与 $Sp_{2m}(\mathbf{C})$ (在 $GL_{2m}(\mathbf{C})$ 中) 的交. 在拓扑上, $Sp_{2m}(\mathbf{C})\cong USp_{2m}(\mathbf{C})\times \mathbf{R}^{2n^2+n}$.

在 Hamilton 力学 (Hamiltonian mechanics) 中 (见 **Hamilton 方程** (Hamilton equations)), 相空间是辛流形 (symplectic manifold), 即赋予辛形式 (symplectic form) (次数为 2 的在每点上都非退化的闭微分形式 $\omega$) 的流形 $M$. 若 $M=T^*Q$, 即局部坐标为 $(q_1, \cdots, q_n; p_1, \cdots, p_n)$ 的构形空间 $Q$ 的余切丛, 则辛形式 $\sum_{j=1}^{n} dp_j\wedge dq_j$ 称为典范的 (canonical). Hamilton 系统的流保持辛形式不变. 因此, 不动点上的切映射属于切空间的辛群.

见**辛齐性空间** (symplectic homogeneous space); **辛结构** (symplectic structure).

石生明 译 刘木兰 校

## 辛齐性空间 [symplectic homogeneous space; симплектическое пространство однородное]

一个**辛流形** (symplectic manifold) $(M, \omega)$, 且有一个可迁地作用在 $M$ 上的自同构 Lie 群 $G$. $G$ 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的元素可看作 $M$ 上的辛向量场, 即保持辛 2-形式 $\omega$ 不变的向量场 $X$:

$$X\cdot \omega=di_X\omega=0,$$

这里 "·" 表示 Lie 导数, $i_X$ 是用 $X$ 作内乘的算子, $d$ 是外微分. 一个辛齐性空间称作是严格辛的 (strictly symplectic), 如果所有的向量场 $X\in\mathfrak{g}$ 是 Hamilton 向量场, 即 $i_X\omega=dH_X$, 这里 $H_X$ 是 $M$ 上的函数 ($X$ 的 Hamilton 量), 它的选取方式是使映射 $X\mapsto H_X$ 是从 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 到 $M$ 上的函数关于 Poisson 括号的 Lie 代数的同态. 严格辛齐性空间的一个例子是 Lie 群 $G$ 关于它在 $\mathfrak{g}$ 上的线性形式空间 $\mathfrak{g}^*$ 中的余伴随表示 $Ad*G$ 的通过任意一点 $\alpha\in\mathfrak{g}^*$ 的轨道 $M_\alpha=(Ad*G)\alpha$. 在 $M_\alpha$ 上不变的辛 2 形式 $\omega$ 由公式

$$\omega(X_\beta, Y_\beta)=d\beta(X, Y)\equiv\beta([X, Y])$$

给出, 其中 $X_\beta$, $Y_\beta$ 是向量场 $X, Y\in\mathfrak{g}$ 在点 $\beta\in M_\alpha$ 的值. 向量场 $X\in\mathfrak{g}$ 有 Hamilton 量 $H_X(\beta)=\beta(X)$.

对于任意一个严格辛齐性空间 $(M, \omega, G)$, 存在一个 $G$ 等变的矩映射

$$\mu: M\to\mathfrak{g}^*, x\mapsto\mu_x, \mu_x(X)=H_X(x),$$

它把 $M$ 映到 $G$ 在 $\mathfrak{g}^*$ 中的轨道 $\mu(M)$, 且是辛流形的局部同构. 这样, $G$ 的每一个严格辛齐性空间是 $G$ 在余伴随表示中的一条轨道的覆叠.

有一个单连通的、但未必是有效作用自同构群 $G$ 的单连通辛齐性空间与 $G$ 在其 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 上的闭2形式的空间 $Z^2(\mathfrak{g})$上的自然作用是一一对应的. 该对应的定义如下: 2 形式 $\sigma\in Z^2(\mathfrak{g})$的核 $\mathfrak{K}^\sigma$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子代数, Lie 群 $G$ 的对应于 $\mathfrak{K}^\sigma$ 的连通子群 $K^\sigma$ 是闭的, 定义了一个单连通齐性空间 $M^\sigma=G/K^\sigma$. 形式 $\sigma$ 在流形 $M^\sigma$ 关于点 $O=eK^\sigma$ 的切空间 $T_OM^\sigma\simeq\mathfrak{g}/\mathfrak{K}^\sigma$ 上决定了一个非退化的 2 形式, 它可以扩充成 $M^\sigma$ 上 $G$ 不变的辛形式 $\omega^\sigma$. 这样, 对于形式 $\sigma$ 指定了单连通的辛齐性空间 $(M^\sigma, \omega^\sigma)$. 若 $\mathfrak{K}^\sigma$ 不包含 $\mathfrak{g}$ 的理想, 则 $G$ 在 $M^\sigma$ 上的作用是局部有效的. 两个辛齐性空间 $M^\sigma$ 和 $M^{\sigma'}$ 是同构的, 当且仅当形式 $\sigma, \sigma'$ 属于 $G$ 在 $Z^2(\mathfrak{g})$ 中的同一个轨道. 对于恰当 2 形式 $\sigma=d\alpha$, 辛齐性空间 $M^\sigma$ 等同于辛齐性空间 $M_\alpha$ 的通用覆叠空间, 后者是点 $\alpha$ 在余伴随表示中的轨道. 若 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]=\mathfrak{g}$, 则任意一点 $\sigma\in Z^2(\mathfrak{g})$的轨道 $G\sigma$ 可以典型地装备辛齐性空间的结构, 单连通群 $G$ 的任何一个辛齐性空间同构于这些轨道之一上面的覆叠空间. 特别是, $M^\sigma$ 是 $G\sigma$ 的通用覆叠空间.

设 $(M, \omega)$ 是单连通、连通群 $G$ 的紧辛齐性空间, $G$ 的作用是有效的. 则 $G$ 是半单紧群 $S$ 和一个可解群 $R$ 的直积, 其中 $R$ 同构于一个 Abel 群及一个 Abel 正规子群的半直积. 辛齐性空间 $(M, \omega)$ 分解成分别有自同构群 $S$ 和 $R$ 的辛齐性空间的直积.

辛群空间是一种特殊的辛齐性空间, 它由 Lie 群和一个左不变的辛形式 $\omega$ 组成. 熟知对于容许有一个左不变辛形式的 Lie 群, 可约性蕴含着可交换性, 么

模性蕴含着可解性. 维数 ≤4 的所有这种群是可解的，但是从 6 维以上，存在不可解的辛群空间 ([3]).

参考文献


[1] Кириллов, А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978 (英译本: Kirillov, A. A., Elements of the theory of representations, Springer, 1976).

[2] Guillemin, V. and Sternberg, S., Geometric asymptotics, Amer. Math. Soc., 1977.

[3] Chu, B.-Y., Symplectic homogeneous spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 197 (1974), 145－159.

[4] Zwart, Ph. B., and Boothby, W. M., On compact, homogeneous symplectic manifolds, Ann. Inst. Fourier, 30 (1980), 1, 129－157.

[5] Hurt, N. E., Geometric quantization in action, Reidel, 1983.

[6] Alekseevskiĭ, D. V., Vinogradov, A. M. and Lychagin, V. V., The principal ideas and methods of differential geometry, Encycl. Math. Sc., 28, Springer, Chap. 4, Sect. 5 (译自俄文).


Д. В. Алексеевский 撰

【补注】 关于 Lie 导数 (Lie derivative) 和内乘法 (interior multiplication) 的定义，见 **Lie 微分** (Lie differentiation).

陈维桓 译

**辛流形** [**symplectic manifold**; **симплектическое многообразие**]

赋予辛结构 (symplectic structure) 的流形.

**辛空间** [**symplectic space**; **симплектическое пространство**]

域 $k$ 上奇维数的射影空间 $P_{2n+1}$，赋予了零配极的对合关系；用 $\mathrm{Sp}_{2n+1}$ 表示它.

令 $\operatorname{char} k \neq 2$. $\mathrm{Sp}_{2n+1}$ 中绝对的零配极总能写成形式 $u_i = a_{ij}x^j$，其中 $\|a_{ij}\|$ 是斜对称矩阵 ($a_{ij} = -a_{ji}$). 用向量形式，绝对零配极可写成 $\mathbf{u} = A\mathbf{x}$，这里 $A$ 是斜对称算子，在适当基下，它的矩阵化成

$$\|A\| = \left\|\begin{matrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & -1 & 0 \end{matrix}\right\|.$$

这时，绝对零配极取典范形式

$$u_{2i} = x^{2i+1},\ u_{2i+1} = -x^{2i}.$$

绝对零配极诱导了一个双线性型，写成典范形式如下：

$$\mathbf{x}A\mathbf{y} = \sum_i (x^{2i}y^{2i+1} - x^{2i+1}y^{2i}).$$

$\mathrm{Sp}_{2n+1}$ 的与其零配极交换的直射变换称为辛变换 (symplectic transformation)；确定这些直射变换的算子称为辛 (symplectic) 算子. $\|A\|$ 的上述典范形式确定了辛算子 $U$ 的 $2n+2$ 阶方阵，其元素满足条件

$$\sum_i (U_j^{2i}U_k^{2i+1} - U_j^{2i+1}U_k^{2i}) = \delta_{j,k-1} - \delta_{j,k+1},$$

其中 $\delta_{a,b}$ 是 Kronecker 符号. 这样的矩阵称为辛矩阵；其行列式等于 1. 辛变换构成群，它是一个 Lie 群.

空间 $\mathrm{Sp}_{2n+1}$ 的每个点位于它相对于绝对零配极的极超平面上. 也能定义 $\mathrm{Sp}_{2n+1}$ 的极子空间. $\mathrm{Sp}_{2n+1}$ 的自极 $n$ 空间的流形称为它的绝对线性复形 (absolute linear complex). 在这背景下，辛群也称 (线性的 (linear)) 复形群 (complex group).

每对直线以及它们在零配极下的极 $(2n-1)$ 空间在 $\mathrm{Sp}_{2n+1}$ 中确定了对于该空间的辛变换群的唯一辛不变量. 过每条线的任何点都有该线和 $(2n-1)$ 空间的横截通过，这就确定了点的射影四元组. 这是辛不变量 (symplectic invariant) 的几何解释，它断定了点的这些四元组的交叉比的等式.

辛 3 维空间可在双曲空间中解释，这给出了辛空间和双曲空间的联系. 例如 $\mathrm{Sp}_3$ 的辛变换群同构于双曲空间 ${}^2S_4$ 的运动群. 按这种解释，辛不变量相应于双曲空间中点之间的距离.

参考文献


[1] Розенфельд, Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969.


Л. А. Сидоров 撰

【补注】 $P_{2n+1}$ 中辛几何的记号 $\mathrm{Sp}_{2n+1}$ 不是惯常的记号. 用 $\mathrm{Sp}_{2n}(k)$ 表示具有交错 (即斜对称) 双线性型的线性空间 $k^{2n}$ 中的辛群. $P_{2n+1}(k)$ 中相应的射影群记成 $\mathrm{PSp}_{2n}(k)$；它就是上面正文中所说的群，称为射影辛群 (projective symplectic group).

具有零配极的射影空间中的极子空间，也称作迷向子空间 (isotropic subspace)，构成所谓极几何 (polar geometry) 的例子 (亦见**极空间** (polar space)；可见 [A1]). 在 Tits 的厦 (buildings) 理论中，解释为极几何的辛空间是型 $C_n$ 的厦 (见 [A2] 及 **Tits 厦** (Tits building)).

参考文献


[A1A] Veldkamp, F. D., Polar geometry, *Indag. Math.*, 21 (1959), 512－551.

[A1B] Veldkamp, F. D., Polar geometry, *Indag. Math.*, 22 (1960), 207－212.

[A2] Tits, J., Buildings of spherical type and finite $BN$-pairs, Lecture notes in math., 386, Springer, 1974.

[A3] Baer, R., Linear algebra and projective geometry, Acad. Press, 1952.

[A4] Dieudonné, J., La géométrie des groupes classiques,

Springer, 1963.
[A5] Artin, E., Geometric algebra, Interscience, 1957.
[A6] O'Meara, O. T., Symplectic groups, *Amer. Math. Soc.*, 1978.
[A7] Weyl, H., The classical groups, Princeton Univ. Press, 1946.
[A8] Coxeter, H. S. M., Non-Euclidean geometry, Toronto Univ. Press, 1965, 69－70.
[A9] Guillemin, V. and Sternberg, S., Sympletic techniques in physics, Cambridge Univ. Press, 1984.
[A10] Hahn, A. J. and O'Meara, O. T., The classical groups and *K*-theory, Springer, 1989.
[A11] Libermann, P. and Marle, C. M., Symplectic geometry and analytical mechanics, Reidel, 1987 (译自法文).
石生明 译 刘木兰 校

**辛结构 [symplectic structure; симплектическая структура]**

在一个偶数维可定向光滑流形 $M^{2n}$ 上由一个非退化 2 形式 $\Phi$ 所定义的一阶**无穷小结构** (infinitesimal structure). 每一个切空间 $T_x(M^{2n})$ 有辛空间结构，其反对称数量积是 $\Phi(X, Y)$, $M^{2n}$ 的所有与辛结构相适配的切标架 (即关于该标架，$\Phi$ 有典范形式 $\Phi = 2\sum_{a=1}^{n}\omega^a \wedge \omega^{n+a}$) 构成 $M^{2n}$ 上的一个主丛，其结构群是**辛群** (symplectic group) $Sp(n)$. 在 $M^{2n}$ 上指定一个辛结构等价于在 $M^{2n}$ 上指定一个 $Sp(n)$ 结构 (见 **G 结构** ($G$-structure)).

在 $M^{2n}$ 上给定一个辛结构，则在 $M^{2n}$ 上的向量场和 1 形式的模之间存在一个同构. 在该同构下向量场 $X$ 对应于 1 形式 $\omega_X: Y \mapsto \Phi(X, Y)$. 在这种情况下，Lie 括号 $[X, Y]$ 的象称为 Poisson 括号 (Poisson bracket) $[\omega_X, \omega_Y]$. 特别是，当 $\omega_X$, $\omega_Y$ 是恰当微分时，便得到 $M^{2n}$ 上两个函数的 Poisson 括号的概念，推广了相应的经典概念.

辛结构也称为殆 Hamilton 结构 (almost Hamiltonian structure); 如果 $\Phi$ 是闭的，即 $d\Phi = 0$, 则称为 Hamilton 结构 (Hamiltonian structure). 有时条件 $d\Phi = 0$ 也包含在辛结构的定义之中. 这些结构在大范围分析力学中找到了应用，因为任意一个光滑流形 $M$ 的余切丛 $T^*(M)$ 有一个典型的 Hamilton 结构. 它由形式 $\Phi = d\theta$ 定义，这里 $T^*(M)$ 上的 1 形式 $\theta$ 称为 Liouville 形式 (Liouville form), 定义为：对于在点 $u \in T^*(M)$ 的任意一个切向量 $X_u$, $\theta_u(X_u) = u(\pi_* X_u)$, 其中 $\pi: T^*(M) \to M$ 是投影. 如果在 $M$ 上选取局部坐标 $x^1, \cdots, x^n$, $u = y_i(u)\,dx^i_{\pi(u)}$, 则 $\theta = y_i dx^i$, 所以 $\Phi = dy_i \wedge dx^i$. 在经典力学中，$M$ 解释为构形空间，$T^*(M)$ 是相空间.

在有 Hamilton 结构的流形 $M^{2n}$ 上的一个向量场 $X$ 称作是一个 Hamilton 向量场 (Hamiltonian vector field) (或 Hamilton 系统 (Hamiltonian system)). 如果 1 形式 $\omega_X$ 是闭的. 如果它是恰当的，即 $\omega_X = -dH$, 则称 $H$ 为 $M^{2n}$ 上的一个 Hamilton 量 (Hamiltonian). 它是相应的经典概念的推广.

**参考文献**

[1] Sternberg, S., Lectures on differential geometry, Prentice-Hall, 1964.
[2] Godbillon, C., Géométrie differentielle et mécanique analytique, Hermann, 1969.
Ю. Г. Лумисте 撰

【补注】 对于一个流形上的辛结构，通常要求定义中的 2 形式 $\Phi$ 是闭的 (参看 [A1], p.176, [A4], p.36 ff). 若 $\Phi$ 未必是闭的，通常说成是殆辛结构 (almost symplectic structure).

用 $\Phi(\omega)$ 记在辛流形 $M$ 上与 1 形式 $\omega$ 对应的向量场，则在 $C^\infty(M)$ 上的 Poisson 括号定义为

$$\{f, g\} = \Phi(\varphi(df), \varphi(dg)).$$

这使 $C^\infty(M)$ 成为一个 Lie 代数，它满足 Leibniz 性质 (Leibniz property)

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}. \qquad (*)$$

更一般地，若一个代数 $A$ 有一个额外的 Lie 括号 $\{,\}$ 使得 (*) 满足，则称它为一个 Poisson 代数 (Poisson algebra). 若一个光滑流形 $M$ 在 $C^\infty(M)$ 上有一个 Poisson 代数结构，则称为一个 Poisson 流形 (Poisson manifold), [A4], p. 107 ff.

**参考文献**

[A1] Abraham, R. and Marsden, J., Foundations of mechanics, Benjamin / Cummings, 1978.
[A2] Klingenberg, W., Riemannian geometry, de Gruyter, 1982 (译自德文).
[A3] Souriau, J. M., Structure des systems dynamiques, Dunod, 1969.
[A4] Libermann, P. and Marle, C. M., Symplectic geometry and analytical mechanics, Reidel, 1987.
[A5] Arnol'd, V. I., Mathematical methods of classical mechanics, Springer, 1978 (中译本：В. И. Арнольд, 经典力学的数学方法, 高等教育出版社, 1992).
[A6] Arnol'd, V. I. and Givental, A. B., Symplectic geometry, Dynamical Systems, IV, Springer, 1990 (译自俄文).
[A7] Crumeyrolle, A. and Grifone, J. (eds.), Symplectic geometry, Pitman, 1983.
陈维桓 译

**语法语言 [syntactic language; синтаксический язык]**

一种用来研究形式语言而不考虑其解释的语言. 数理逻辑中语法语言概念的产生是与研究和形式化有内容的数学理论的问题相联系的. 形式化某一理论得到的一个形式系统 (formal system), 这个形式系统

可以看成是独立的研究对象，而不管它的来源如何．语法语言就是用这种观点来研究形式系统的．

语法语言是用来描述形式系统的语言，即它的初始符号、项、公式等，用来定义形式系统的推演概念、用公式表述和证明形式系统的定理．因此，一个形式系统同两种语言有关：一种是形式系统自身被研究的语言（对象语言（object language）），另一种是研究形式系统的语言（语法语言（syntactic language）或元语言（meta-language））．

一个语法语言必须含有对象语言的符号和公式的名称，还必须含有取值为这些符号和公式的变元．对象语言的符号和公式在语法语言中作为它们的固有名称出现（即这些名称表示这些符号和公式本身）．通常，语法语言不一定包含语言手段来处理作为独立对象的无穷集．为强调这一点，在提到给定形式系统的基本语法（elementary syntax）时，还要对照理论语法（theoretical syntax），在理论语法中假设任意构词都能研究．理论语法的语言也称为**元语言**（meta-language）．表示得十分仔细的语法语言也可以形式化而成为对象语言．许多足够强的形式系统可以用作为其自身的基本语法语言的形式化．关于形式系统的 **Gödel 不完全性定理**（Gödel incompleteness theorem）就是基于这一事实得到证明的．

在理论语法的语言中，可以考虑给定形式系统的模型，可以在这些模型中确定该形式系统的真假值．初等算术的理论语法的形式语言的一个例子，就是二阶算术语言．

**参考文献**


[1] Church, A., Introduction to mathematical logic, 1, Princeton Univ. Press, 1956.


B. H. Гришин 撰　沈复兴 译　罗里波 校

**语法结构[syntactic structure; синтаксическая структура]**

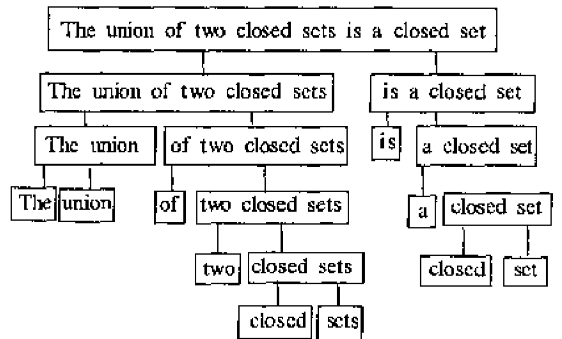
一个在**数理语言学**（mathematical linguistics）中用来描述自然语言句子结构的数学构造．两种类型的语法结构用得最为广泛——部件系统（component system）和语法的从属关系（relation of syntactic subordination）．部件系统的概念可以用下面的方式来定义．设 $x$ 是在**字母表**（alphabet）$V$ 上的非空**链**（chain）（字（word））；在链中嵌人的字（或者字母，见**嵌入的字**（imbedded word））称为它的点（point）；链中形如 $\{x: a \leqslant x \leqslant b\}$ 的点的集合称为链的片段（segment），其中 $a, b$ 是固定的点．一个链 $x$ 的片段的集合 $C$ 称为这个链的部件（component）集，如果：1）$C$ 含有一个由所有 $x$ 的点组成的片段，也含有所有 $x$ 的由一个点组成的片段；2）$C$ 的任意两个片段或者互不相交或者一个包含于另一个的内部．$C$ 的元素称为部件．如果字母表 $V$ 解释成为在自然语言中的字的集合而 $x$ 是一个句子，那么在对于 $x$ 适当选择一个部件系统时，$C$ 的非平凡的部件（即那些在 $C$ 中但不是 1）所提到的部件）代表字组合（word combination），也就是说被懂此语言的人直观地理解为具有“语法联系”的句子片断的字群．例如句子

The union of two closed sets is a closed set

可分解为下面的“自然的”部件系统（非平凡部件的边界用括号来表示）：

(((The union) (of (two (closed sets))))
(is (a (closed set))))

如果用直接包含关系来装备部件系统 $C$，那么 $C$ 就是一棵有根的树（其中根恰好是 $x$ 本身）称为部件树（component tree）．对上面所举例子，它的部件树有如下形式：




部件通常带有标记（label），它就是字组的语法特征（一个部件可以有多于一个标记）．在上面的例子中等同于整个句子的部件是自然地用标记 SENT 来表示句子．部件“The union of two closed sets”记成 $S_{平均}$，用以表示“一个主格单数在本质上是平均型的群体”，等等．这样得到的对象是一个带有标记顶点的树，称为标记部件树（labelled component tree）．

另一种描述句子结构的方式是在链 $x$ 的点的集合 $X$ 上定义一个二元关系 $\rightarrow$，使得图（$X$；$\rightarrow$）形成一棵有向的有根的树．这样一个关系称为（语法）从属关系（relation of (syntactic) subordination），而其所对应的树就称为（语法）从属树（syntactic）subordination tree）．从属概念是通常在中学文法（特别是俄文文法）中考虑一个句子的一些字之间的从属关系的形式化而得到的．在从属树的图表示中人们通常在水平线上安排链的点，然后在它上面画一些箭头．上面的句子有如下的“自然的”从属树．



(从属树的根通常放在谓词上，因为它是句子的组织元素．)

在一棵从属树上的箭头常常配有指明它所代表的语法关系类型的标记．在例子里"is"和"union"之间的关系很自然地是谓词型而"sets"和"closed"之间的关系就是限定型，等等．

商业和科学用文中的从属树通常满足一个所谓的射影条件(projectivity condition)，用上面的图表示来描述便得到如下的说法：在某一个箭头之下的每一个点都能有一个从该箭头的起点通向每一个点的路径．由此推出没有两个箭头是交叉的．这有时又称为弱射影条件(weak projectivity condition)．而这个条件在小说中常常被违反，那是为了起到一定的艺术效果．

一个单一的句子可以采取几种不同的"自然的"部件系统(从属树)．这一点常常见于当一个句子可以有不同的方式来理解的时候，而各种不同的部件系统(从属树)对应着对它的意义作各种不同的解释(语法上的一体多义(syntactic homonymy))．

例如句子"She took the people from London"可能的意义是或者"她把一些伦敦人带到(某一个地方)"或者"她把某些人从伦敦带到(某一个地方)"．前一种意义的部件系统是

She (took (the (people (from London))))

它的从属树是



而后一种意义的部件系统是

She (took (the people) (from London))

它的从属树是



给定一棵在一条链上的从属树和链上的一个点 $\alpha$，链上的可以从 $\alpha$ 出发经由有向路径所能达到的全体点的集合(包括 $\alpha$ 自己)称为点 $\alpha$ 的相关群(dependence group)．任何从 $\alpha$ 的相关群中去掉某些(或全部)从属于 $\alpha$ 的点(也就是从 $\alpha$ 出发的一个箭头能到达的点)的相关群所得的集合称为 $\alpha$ 的一个截断相关群(truncated dependence group)．

一条链 $x$ 的部件系统 $C$ 和定义在 $x$ 上的从属树称为是相容的(compatible)，如果 $x$ 的所有点的相关群是部件，并且每一个部件都是 $x$ 的某些点的相关群或截短了的相关群．一个给定句子的在一定意义下是"自然的"部件系统和从属树通常是兼容的(见上面的例子)．一棵从属树连带一个兼容的部件系统是射影的．对于一个给定的部件系统可以有一棵以上的从属树．但是如果附加某种支配关系于部件之间，则可能构造出一棵"自然的"唯一地定义的从属树．这可以由以下步骤来完成：给定链 $x$ 的部件系统 $C$，对每一个不是只由一个点组成的部件在它的直接包含集中结合上一个所需要的部件，并且把这称为它的主要部件(main component)．此时，有序对 $(C, C')$ (其中 $C'$ 是所有主要部件的集合)称为等级部件系统(hierarchical component system)．一个等级部件系统称为连结(connected)着一棵从属树，如果它是和树相容的，并且对于每一个不是单点的部件 $A$，在从属树中对应于它的子树的根与在 $A$ 中直接包含的部件相结合的主要部件相对应的子树的根相重合．一个句子的"自然的"部件系统在"自然的"等级中是通常与"自然的"从属树相连结的．所以如果在上面的例子中配备部件系统以如下形式的等级：

[(The [union]) (of [two [closed [sets]]])]

[[is] (a [closed [set]])]

(其中主要部件以方括号来表示)，那么所得到的等级部件系统是连结着上面的这个句子的从属树的．

不是所有类型的句子都能用部件系统和从属树来充分满意地描述．特别，对含有字组中带有"特别密切的"内在联系(例如复合动词形式)和复合结构的句子的描述可能会产生困难．此外，要在更深的层次上描述句子的结构以及其他各种词类往往有必要用一个比树更为复杂的图来进行．为了对一个语言作更为满意的描述往往有必要不仅考虑语法连结还要考虑通常称为首语重复的连结(anaphoric connection)，也就是在"为同一事物命名"的字的嵌入中的连结，例如

如果 $f$ 是一个由 $E$ 到 $F$ 上的对应
并且存在一个逆对应 $f^{-1}$，
那么后者是一个由 $F$ 到 $E$ 上的对应．

正在发展着其他更为复杂的语法结构的概念用以适应这种连结．

**参考文献**


[1] Tesnière, L., Eléments de syntaxe structurale, Paris, 1965.

[2] Падучева, Е. В., 《Вопросы языкознания》, 2(1964), 99－113.

[3] Гладкий, А. В., 《Научно-техническая информация, Сер. 2》, 1971, 7, 35－38.

[4] Гладкий, А. В., Формальные грамматики и языки, М., 1973.

[5] Гладкий, А. В., 《Slavica》, 1981, v. XVII, XVIII.


А. В. Гладкий 撰 罗里波 译 王世强 校

**语法定理** [**syntactic theorem**; **синтаксическая теорема**]

关于**语法语言**(syntactic language)的一种定理，即关于形式系统的一种定理，例如谓词演算中的演绎定理、Gödel 算术不完全性定理. 这些都是与基本语法有关的定理. 一个非基本语法定理(即其证明实质性地用到无穷集的定理)的例子是初等算术的相容性定理.

В. Н. Гришин 撰 沈复兴 译 罗里波 校

**语法** [**syntax**; **синтаксис**]，数理逻辑中的

作为纯符号系统的形式公理理论的描述和研究(与之比较，**语义**(semantics)涉及形式理论对象的含义). 在数学基础中区别语法和语义是特别重要的，数学基础所研究的形式理论的语义不是直观上明显的. 在这种情形下，形式理论语法的描述和研究常借助**元理论**(meta-theory)中更加可靠的直觉可信的方法来实现，元理论作为基础使用，而不直接解释所研究的复杂的语义的本质特征. 例如，在**公理集合论**(axiomatic set theory)中，熟知的 Gödel 的选择公理的相容性可以作为语法的、有限地可证明的结论，只要 Zermelo-Fraenkel 形式理论和谐，则加上选择公理也和谐.

当我们不限于数学基础而考虑**证明论**(proof theory)时，语法和语义的区别就不是这么重要的了. 有人采用所谓的半形式系统(semi-formal system)，其中推演概念就与某些语义约定有关. 形式语言可以实质上是集合论式地用无穷长公式等来定义. 另一方面，对于有界可表示的形式语言，诸如**组合逻辑**(combinatory logic)的语言，**算术语言**(algorithmic language)，它们的语义可以用该语言的纯语法的方法严格地阐述出来.

**参考文献**

[1] Carnap, R., The logical syntax of language, Kegan Paul. Trench & Truber, 1937 (译自德文).

[2] Church, A., Introduction to mathematical logic. 1, Princeton Univ. Press, 1956.

[3] Kleene, S. C., Introduction to metamathematics, North-Holland, 1951 (中译本: S. C. 克林, 元数学导论, 科学出版社, 上册 1984, 下册 1985).

А. Г. Драгалин 撰 沈复兴 译 罗里波 校

**综合问题** [**synthesis problems**; **синтеза задачи**]

旨在以预先指定的运转方式构造一个控制系统(control system)的问题的总称. 一个控制系统通常由一些部件组成，这些部件本身也是些简单的控制系统. 早先的综合意指给出部件的结构和组合这些部件的规则，以及使用控制系统结构以确定该系统实现的函数.

每一类控制系统按自然方式产生特定的一类函数. 综合问题(synthesis problem)本意就是要构造一个控制系统，使之实现这一函数类中给定的一个函数.

例子. 1) 给定一 **Boole** 函数(Boolean function)，构造一实现此 Boole 函数的公式. 2) 给定一 Boole 函数集，构造一种多极触点配置方案(contact scheme)，使之实现这一函数集. 3) 给定一**自动机**(automaton)行为的确切描述，构造这一自动机本身. 4) 给定一**可计算函数**(computable function)，找出计算它的一种方法，或编制相应的程序.

上述例子涉及离散数学. 然而，下面的几个例子具有连续特性. a) 给定一(自动)控制系统的对数振幅-频率特性曲线(或更一般地，该系统的工作条件，诸如扰动和控制作用，干扰，对工作时间的限制，等等)，综合一具有这些特性的(自动)控制系统. b) 给定一组线性方程和不等式，以及一线性函数，构造一种计算格式，以使该线性函数在此组线性方程和不等式的解集上达到极大. c) 给定一微分方程组及关于其解的精度要求，找出数值求解该方程组的一种算法，使之达到此精度要求.

习惯上处理后三个例子被视为属于连续数学、然而，寻找近似数值解本身已经预先假定连续函数用离散函数逼近. 因此，这些问题涉及到连续数学和离散数学之间的相互关系.

综合问题的数学提法预先假定用以给出函数的语言有确切的表达. 在解综合问题中到底会发生什么样的问题，取决于所使用的这种语言. 在大多数情况下，存在一种比较简单的方法用以构造一个典范形式的控制系统.

但是，当控制函数类并不太小时，问题就可能有许多别的解；于是自然就产生在某种意义下选择最优解的问题. 为此引进一个刻画控制系统品质的泛函，如系统中部件的个数，系统的代价，体积，容量(即主动状态下其部件的最大数目)，工作时间，损坏概率，等等. 重要的是，通常称为复杂度(complexity)的这种泛函应该准确反映控制系统所要求的性质，并且还应该容易计算. 综合问题的一种改进提法就是对于一给定的函数，构造一控制系统使之以最小复杂度实现这一函数.

实际上，问题的这种明确的提法仅仅适用于控制系统的有限模型. 所有综合问题在这种情形下叙述得更清楚，因此在下面主要关心有限模型.

对于控制系统的有限模型，一种典型的情况是，该问题有平凡解法. 例如，如果希望一个配置方案中的部件数达到最小，那么这种平凡解法就是，首先列出所有含一个部件的配置方案，并检查其中的一种配

置方案能否实现给定的函数，然后列出所有含两个部件的配置方案，并再次检查其中的一种配置方案能否实现给定的函数，如此直到找出一种配置方案使之实现给定的函数．于是这一配置方案具有最小部件数目．

然而，由于所要求的步数太大，这种平凡解法并不是十分有效的．此外，如果待实现的函数的复杂度超出某个相对低的阈值，则这种平凡解法实际上无法实现，并且即使使用最快速计算机也只能稍微扩大其范围．这意味着需要对综合问题的提法做进一步的修正．

下面通过一类控制系统，**功能元图**（diagram of functional elements）的例子，以及对于复杂度取为配置方案部件的数目这种特殊情形，说明了这里所列出的这些意向．由这种类型控制系统能实现的函数是逻辑代数中的函数（Boole 函数）．

首先必须注意，平凡解法求解的不适用性仅仅是导致修改综合问题提法的一个原因．有一个猜测认为，对于每一 Boole 函数，构造一种具有极小部件数目的配置方案，任何一种这样的算法必然在某种意义上包含罗列所有 Boole 函数．作为肯定这一猜测的一个证据，存在一定理：如果对每一变量数目，考虑含有一最复杂函数的 Boole 函数的无穷集合，并且让这一集合在重新命名变量（不加区别）和置换常数这些运算下取闭包，那么就得到由所有一般 Boole 函数组成的集合（不计非本质的可变函数）．这一猜测有许多间接的支持，它们断定：在构造配置方案中，即使放松接近于最优部件数目的要求，而仅仅要求算法适用于每一 Boole 函数，则这种罗列所有 Boole 函数的要求仍然无法减弱．罗列原理中的这种必然性概念是有必要修正综合问题提法的另一个原因．这里有几种可能修正方法．

Shannon 方法（以第一个提出这种触点配置方法的 C．E．Shannon 的名字命名）与函数

$$L(n)=\max L(f)$$

有关，这里 $L(f)$ 为实现函数 $f$ 的配置方案中部件的最小可能数目，而求极大是对所有 $n$ 元 Boole 函数 $f$ 取的．$L(f)$ 和 $L(n)$ 依赖于在构造配置方案中使用的一组函数部件（功能元）组成的基底．综合问题就是对于任意一个 $n$ 元 Boole 函数，找出一种部件数目本质上不超过 $L(n)$ 的构造配置方案的有效方法．

为了综合问题的更一般的提法，对于每一个函数部件（功能元）$E$，指定一正数 $L(E)$ 作为该部件的复杂度，它仅依赖于由部件 $E$ 所能实现的函数．并且让每一种配置方案 $S$ 对应于复杂度

$$L(S)=\sum L(E),$$

这里求和是对配置方案 $S$ 的所有部件 $E$ 取的．对于每一 Boole 函数 $f$，其实现的复杂度（在给定的基底下）定义作

$$L(f)=\min L(S),$$

这里求极小是相对于实现 $f$ 的所有配置方案 $S$ 取的．于是像前面一样，令 $L(n)=\max L(f)$，并且对于任意 $n$ 元 Boole 函数，要求构造一种配置方案，使其复杂度不大于（或不十分大于）$L(n)$．

关于这种算法，要求能计算 $L(n)$ 或精确地得到它的界，至少是下界．看来，通过幂法（power method），基于下面的考虑可以得到 $L(n)$ 的一个很好的下界．复杂度不超过 $L(n)$ 的实现 $n$ 元 Boole 函数的所有可能的配置方案的数目不可能小于 $n$ 元 Boole 函数的总数．在幂法中，只需要得到所考虑的配置方案数目的一个满意的上界．

因此，对于给定的 $n$，知道所构造配置方案的复杂度与 $L(n)$ 的下界相差多少倍，就能在很大程度上判断任意一种普适综合方法（即适用于任意 Boole 函数的方法）的品质．同时，这些配置方案的复杂度用作 $L(n)$ 的一个构造性界，并且当 $n\to\infty$ 时渐近地与它相等．于是，这是一种渐近最好的综合方法，并且能描述 $L(n)$ 的渐近行为．设

$$\rho=\min\frac{L(E)}{i-1},$$

其中 $i$ 是部件 $E$ 出现的数目，而极小是对 $i\geqslant 2$ 的所有 $E$ 取的．于是

$$L(n)\sim\rho\frac{2^n}{n}.$$

对于其他类控制系统，$L(S)$，以及复杂度 $L(f)$ 和 $L(n)$ 用类似的方式定义．对于一个触点配置方案 $S$，$L(S)$ 通常是其中的触点数，而当 $S$ 是一公式时，$L(S)$ 表示其中变量的符号的数目．对于自动机和 **Turing 机**（Turing machine），$L(S)$ 有时取作状态数．在这些情形下，$L(n)$ 的相应的渐近行为示于表 1．

表 1

| 控制系统类 | $L(n)$ | 备　注 |
|---|---|---|
| 功能元图 | $\sim\rho\frac{2^n}{n}$ | $\rho=\min\frac{L(E)}{i-1}$ |
| 触点配置方案 | $\sim\frac{2^n}{n}$ | |
| 公式 | $\sim\frac{2^n}{\log_2 n}$ | |
| 自动机 | $\sim\alpha(n)\frac{2^n}{n}$ | $1\leqslant\alpha(n)\leqslant 2$ |
| Turing 机 | $\sim\frac{2^n}{n(k-1)}$ | $k$ 是机器的内部字母表中字母的个数 |

对于像误差概率这样的其他类型的复杂度，以及像自动机这样的其他类控制系统，相应的渐近关系可以包含不只一个，而是两个甚至更多个参数，并且，寻找（比如说对于自动机）渐近性的问题一般说来是无法算出来的.

分析 $L(n)$ 的下界表明，实际上对于几乎所有的 $n$ 元 Boole 函数，其实现的复杂度渐近地不小于 $L(n)$. 这意味着对几乎所有的 Boole 函数，一种给定的综合方法产生几乎最简单的配置方案.

但是首先，尽管这一函数类包含几乎所有的 Boole 函数，但对于充分大的 $n$，这一函数类中没有一个函数能够清楚地被描述出来. 其次，它由最难以实现的函数组成，而这些函数在应用性问题中很少遇到，因此，这样的函数价值不大. 这一事实又一次表明有必要修正综合问题的提法.

必须指出，在全体 Boole 函数中，对综合问题确实重要的这些函数形成可忽略的一部分，并且如果关于罗列的必要性的如上所述的猜测是真的，则任何一种有效的普适综合方法将自动地在某些情况下给出一些配置方案，这些配置方案决不会是最简单的. 描述这些函数集合是不可能的，并且为了综合目的又出现 Boole 函数的分类问题. 提出问题的这一方法涉及到重要函数类的选择，特定函数类中函数的特殊综合方法的建立，以及如此所得到的配置方案的品质的评估等.

**局部编码原理**（local coding principle）提供了求解这种问题的一个有效的手段. 这一原理预先假定所考虑类中的函数以这样的方式编码，使得一个函数的值可以利用该码的相当小部分计算出来. 如果人们以足够简单的方式成功地实现某些辅助运算，则局部编码原理对于所考虑的类给出渐近最优的综合算法. 此外，下列关系在很大普适程度上成立:

$$L(N_n) \sim \rho \frac{\log_2 |N_n|}{\log_2 \log_2 |N_n|},$$

这里 $N_n$ 是该类中依赖于一给定的 $n$ 变量集的一些函数组成的子集，并且

$$L(N_n) = \max L(f),$$

而其中的极大取在 $N_n$ 中所有 Boole 函数 $f$ 上（这里 $\rho = 1$）.

为了用例子说明这种渐近关系所取的具体形式，最方便的是使用在一给定点数上取值为 1 的 Boole 函数类. 最典型的例子示于表 2.

表 2

| 函数取值为 1 的点数 | $L(N_n)$ |
|---|---|
| $(\log_2 n)^c$, $c > 1$ | $\sim n(\log_2 n)^{c-1}$ |
| $n^c$, $c > 0$ | $\sim \frac{n^{c+1}}{(c+1)(\log_2 n)}$ |
| $2^n$, $0 < c < 1$ | $\sim n^{1-c}2^n$ |
| $2^{cn}$, $0 < c < 1$ | $\sim \frac{1-c}{c}2^{cn}$ |
| $\frac{2^n}{n^c}$, $c > 0$ | $\sim c\frac{2^n \log_2 n}{n^{c+1}}$ |

基于局部编码原理，对于十分窄的一些函数（例如对称函数）类，也就是说，对于从实用观点上最有意义的这些函数，已经得到了一些好的综合方法. 然而，在所考虑的情形下，由幂法所得到的下界看来太弱，以致无法判断配置方案的品质. 在给定时刻限制所考虑函数类，这是不可避免的，因为狭窄类的极限情形就是这样的函数类，其在每一变量数目下所含函数个数不多于 1 个. 这实际上意味着人们考虑个别具体的函数.

这里发生两个问题. $\alpha$) 对于一给定的具体函数 $f$，构造一具有最少可能部件数的配置方案，从而得到 $L(f)$ 的一上界. $\beta$) 得到 $L(f)$ 最好可能的下界. 在这些问题中，通常第一个问题比较简单，因为为了解决它，只需在最后的分析中构造一种配置，而第二个问题要求在某种意义下检查实现 $f$ 的所有配置方案. 这在寻找求得具体函数的下界的方法时启发出了一种全新的方向.

在寻求按 $n$ 为线性的下界中，函数的变元数目（或一般地，输入信息的容积）通常不会引起大的困难. 寻找更严格的下界则是一个相当复杂的问题. 在基底 $\{\&, V, \neg\}$ 中实现 $n$ 元线性函数（按模 2 加法）的公式的阶下界 $n^{1.5}$，以及用于字长 $n$ 的 Марков 正规算法（见**正规算法**（normal algorithm））的阶下界 $n^2/\log_2^2 n$，是这一类型的首批几个例子. 如果不计那些在控制系统类上加很强限制下（例如元素（部件）的系统是不完全的）或者对表示函数用很强的工具而实质上包括罗列所有函数才得到的下界，则至今所得到的最好的阶的下界是 $n^2$.

很多问题（诸如整数乘法，矩阵乘法，以及关于多带 Turing 机代码的对称性的识别）期望有相对高的下界，实际上要比原先所设想的更简单，这一事实也表明，对于实现具体函数的复杂度的研究并非是平凡的.

在使配置方案其他参数达到最小，如时滞，破坏概率等别的参数取极小，大体上也会发生同样的问题. 可以建立各参数之间的明确的关系，而根据某些对象用别的对象的模拟，这一点往往对于不同类中控制系统的参数是可以做到的. 因此，综合问题中所得到的结果并不是孤立的，而是紧密相关的，并且往往

可以从一个领域转移到另一个领域.

上述大部分工作可对控制系统的无穷模型进行. 然而，在综合问题的提法中（甚至在其解法中更是如此），情况则要复杂得多.

**参考文献**

[1] Лупанов, О. Б., 《Проблемы кибернетики》, 14 (1965), 31 — 110.

[2] Яблонский, С. В., 《Проблемы кибернетики》, 2 (1959), 75 — 121.

В. М. Храпченко 撰

【补注】 给定一离散或连续时间输入 - 输出动态系统 (input-output dynamical system) 或控制动态系统 (control dynamical system)，也简称动态系统 (dynamical system):

$$x(t+1)=f(x(t), u(t), t), \dot{x}=f(x, u, t),$$

$$x\in\mathbf{R}^n, u\in\mathbf{R}^m,$$

$$y(t)=h(x(t)), y=h(x),$$

$$y\in\mathbf{R}^p,$$

和在时刻 0 的出发点 $x(0)\in\mathbf{R}^n$，这系统 $\Sigma$ 确定一个从输入函数空间 $\mathscr{U}$ 到输出函数空间 $\mathscr{Y}$ 的函数 $b(\Sigma)$，有时把它叫做初始系统 $(\Sigma, x(0))$ 的行为 (behaviour). 给定行为 $b$，就有一个综合问题，即寻找一（适当类的）动态系统 $\Sigma$，使得 $b(\Sigma)=b$. 于是称 $\Sigma$ 实现 (realize) $b$. 由此综合问题往往也称实现问题 (realization problem)，并且常常谈及实现理论 (realization theory).

在定常线性动态输入 - 输出系统 (linear dynamical input-output system) 情况下:

$$\dot{x}=Ax+Bu, y=Cx,$$

$$A\in\mathbf{R}^{n\times n}, B\in\mathbf{R}^{n\times m}, C\in\mathbf{R}^{p\times n}$$

（或其离散形式），它的行为完全由其传递函数 (transfer function)

$$T(s)=C(sI-A)^{-1}B=$$

$$=s^{-1}T_0+s^{-2}T_1+s^{-3}T_2+\cdots$$

决定，其中

$$T_i=CA^iB,$$

上式给出输入和输出函数的 Laplace 变换（或在离散情形下的 $z$ 变换）. 在这种情形下，就称实现严格真有理矩阵函数 $T(s)$，或者称实现 Марков 参数 (Markov parameters) $T_0, T_1, \cdots$ 的级数. 于是 $T_0, T_1, \cdots$ 的实现是矩阵 $A, B, C$ 的一个三元组，使得 $T_i=CA^iB, i=0, 1, \cdots$. 在 $A$ 为 $(n\times n)$ 矩阵情形下，使得存在实现的最小 $n$ 是 $(T_0, T_1, \cdots)$ 或 $T(s)$ 的 McMillan 度 (McMillan degree). 它等于无穷分块 Hankel 矩阵

$$\begin{bmatrix} T_0 & T_1 & T_2 & \cdots \\ T_1 & T_2 & T_3 & \cdots \\ T_2 & T_3 & T_4 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

的秩. 如果寻找 $A, B, C$ 使得 $T_i=CA^iB, i=0, \cdots, k$，则可称为部分实现问题 (partial realization problem).

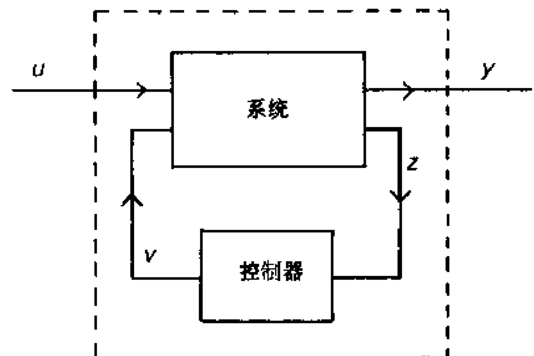
有些实现算法按参数 $T_0, T_1, \cdots$ 是局部连续的. 存在大范围连续的实现的充要条件是 $p=1$（单输出）或者 $m=1$（单输入）（连续典范形式 (continuous canonical forms) 的不存在性）.

已经证明，矩阵函数或更一般地，算子值函数的实现，例如在矩阵和算子值函数的极小分解以及 Wiener-Hopf 分解中是十分有用的工具，见 [A11] — [A13].

在随机动态系统中也发生相类似的实现问题；例如见 [A5] 和 [A6] 讨论的两个随机实现问题（Gauss 随机过程的状态空间模型，实现给定协方差函数的传递线模型）.

关于非线性确定性有限维实现理论的综述，见 [A10].

在控制理论中，相位"综合问题"大多是指对于给定的一个输入 - 输出动态系统 $\Sigma$，寻找一适当的反馈律 $v=k(z)$ 的问题，这里 $z$ 为某（被测量的）输出.（或者更一般地，带输入 $z$ 和输出 $v$ 的一个动态输入 - 输出系统，使得所得到的闭环系统




具有某种所希望的性质. 例如，某些干扰被抑制，或者 $u\to y$ 跟预先给定的行为相匹配.）

关于电力网这样特定的综合或实现问题，见网络(network)的补注以及在那里给出的参考文献.

参考文献


[A1] Pippenger, N., The complexity of monotone Boolean functions, *Math. Syst. Theory*, 11(1978), 289 – 316.

[A2] Razborov, A. A., Lower bounds for the monotone complexity of some Boolean functions, *Soviet Math. Dokl.*, 31 (1985), 354 – 357. (译自 *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 281 (1985), 4, 798 – 801.)

[A3] Savage, J., The complexity of computing, Wiley, 1976.

[A4] Wegener, I., The complexity of Boolean functions, Wiley & Teubner, 1987.

[A5] Lindquist, A. and Picci, G., State space models for Gaussian stochastic processes, in M. Hazewinkel and J. C. Willems (eds.): Stochastic Systems: Math. of Filtering and Identification and Appl., Reidel, 1981, 169 – 204.

[A6] DeWilde, P., Fokkema, J. T. and Widya, I., Inverse scattering and linear prediction, in M. Hazewinkel and J. C. Willems (eds.): Stochastic Systems: Math. of Filtering and Identification and Appl., Reidel, 1981, 307 – 350.

[A7] Hazewinkel, M., (Fine) moduli spaces for linear systems: what are they and what are they good for, in C. I. Byrnes and C. F. Martin (eds.): Geometrical Methods for the Theory of Linear Systems, Reidel, 1980, 125 – 193.

[A8] Zemanian, A. H., Realizability theory for continuous linear systems, Acad. Press, 1972.

[A9] Kalman, R. E., Falb, P. L. and Arbib, M. A., Topics in mathematical system theory, McGraw-Hill, 1969.

[A10] Jakubczyk, B., Realization theory for nonlinear systems: three appeoaches, in M. Fliess and M. Hazewinkel (eds.): Algebraic and Geometric Methods in Nonliear Control Theory, Reidel, 1986, 3 – 32.

[A11] Bart, H., Gohberg, I. and Kaashoek, M. A., Minimal factorization of matrix and operator functions, Birkhäuser, 1979.

[A12] Clancey, K. and Gohberg, I., Factorization of matrix functions and singular integral operators, Birkhäuser, 1981.

[A13] Bart, H., Gohberg, I. and Kaashoek, M. A., Explicit Wiener-Hopf bifurcation and realization, in I. Gohberg and M. A. Kaashoek (eds.): Constructive Methods of Wiener-Hopf Factorization, Birkhäuser, 1986, 235 – 316.

[A14] Wonham, W. M., Linear multivariable control, Springer, 1974.

[A15] Sontag, E. D., Mathematical control theory, Springer, 1990.


冯德兴 译

**综合微分几何学** [**synthetic differential geometry**; **синтетическая дифференциальная геометрия**]

【补注】 几何学家如 S. Lie、E. Cartan 以及其他同时代人等明确地使用无穷小实数，无穷小曲线等，并且 Lie 把基于无穷小的方法称为"综合的"，以反衬于"分析的"方法(见[A1]). 在今天建立在集合论基础上的数学中，这种无穷小实数并不存在，并且综合方法也不可能用一个严密的方式来直接地作出.

综合微分几何学这一术语通常是指由 F. W. Lawvere 的 1967 年的讲义(后来发表作为[A2])所引起的一种发展. 这个发展与其说是基于集合论不如说是基于范畴论，并且是与无穷小兼容的. 例如其基本公理之一(常常称为 Kock-Lawvere 公理)提出，对于直线 **R** 的子客体 $D=\{x: x^2=0\}$，将 $(a, b)$ 送到无穷小直线 $ax+b$ 的映射 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}^D$ 是一个同构映射. 因此函数 $f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 在点 $t\in\mathbf{R}$ 的导数可以用纯代数的方法定义为唯一的数 $f'(t)$，对于它 $f(t+x)=f(t)+xf'(t)$ 对于所有 $x\in D$ 成立. 定义中没有用到极限. "无穷小"微分几何学的大部分内容譬如说联络、曲率等理论都可以类似地在纯代数的方式下明确地运用无穷小来发展. 尤其值得提出的是，在综合微分几何学的背景下 Cartan 所作的无穷小论证都确实是有意义的，也是数学上严密的.

正如在[A3]和[A4]中所呈现的那样，通过适当的模型与普通**微分几何学**(differential geometry)的关系建立了. 这些模型是 Grothendieck 的拓扑伊(topoi)(见**拓扑斯**(topos))，与代数几何的模型十分相像，但是建立在流形上的光滑函数环以及这种环在通常理想下的商环的基础上.

随着 Lawvere 的用法，每一个拓扑斯可以看成一个具有内在逻辑的集合的论域，这种逻辑是直觉主义的. 这样，可以在直觉主义的集合论的基础上，而不是在范畴论的基础上，建立综合微分几何学(这一点在[A5]中完成了).

应该强调在综合微分几何学中所用到的无穷小通常是幂零的，因此不能算作 Robinson 的**非标准分析**(non-standard analysis). 非标准分析与综合微分几何学的兼容性在[A4]中有说明.

对综合微分几何学的各个方面的详尽展开见[A5]，[A7]和[A8].

参考文献


[A1] Lie, S., Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, *Math. Ann.*, 9 (1876), 245 – 296.

[A2] Lawvere, F. W., Categorical dynamics, in A. Kock (ed.). Topos Theoretic Methods in Geometry, Aarhus Univ., 1979, 1 – 28.

[A3] Dubuc, E., $C^\infty$-schemes, *Amer. J. Math.*, 103

(1981), 683 – 690.

[A4] Moerdijk, I. and Reyes, G. E., A smooth version of the Zariski topos, *Adv. Math.*, **65** (1987), 229 – 253.

[A5] Lavendhomme, R., Leçons de la géométrie différentielle synthétique naive, Univ. Louvain, 1987.

[A6] Robinson, A., Non-Standard analysis, North-Holland, 1966 (中译本: A. 鲁滨逊, 非标准分析, 科学出版社, 1980).

[A7] Kock, A., Synthetic differential geometry, Cambridge Univ. Pres, 1981.

[A8] Moerdijk, I. and Reyes, G. E., Models for smooth infinitesimal analysis, Springer, 1991.

I. Moerdijk 撰 罗里波 译 王世强 校

**系统(范畴中的)[system (in a category); спектр (в категории)]**

范畴 $C$ 中的正系统(direct system) $\{Y^\alpha, f_\alpha^\beta\}$ 是由以有向集 $\Lambda=\{\alpha\}$ 为指标集的对象集 $\{Y^\alpha\}$, 以及 $C$ 中的态射集 $\{f_\alpha^\beta: Y^\alpha \to Y^\beta\}$ 组成的, 其中 $\alpha\leqslant\beta$, $\alpha$, $\beta$ 在 $\Lambda$ 中, 使得

a) $f_\alpha^\alpha=1_{Y^\alpha}$, $\alpha\in\Lambda$;

b) $f_\alpha^\gamma=f_\beta^\gamma f_\alpha^\beta: Y^\alpha\to Y^\gamma$, $\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ 在 $\Lambda$ 中.

存在一个范畴 $\operatorname{dir}\{Y^\alpha, f_\alpha^\beta\}$, 其对象以态射集 $\{g_\alpha: Y^\alpha\to Z\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为指标集, 若在 $\Lambda$ 中 $\alpha\leqslant\beta$, 则 $g_\alpha=g_\beta f_\alpha^\beta$, 从 $\{g_\alpha: Y^\alpha\to Z\}$ 到 $\{g'_\alpha: Y^\alpha\to Z'\}$ 的态射是 $C$ 的态射 $h: Z\to Z'$, 满足 $hg_\alpha=g'_\alpha$, 对 $\alpha\in\Lambda$. $\operatorname{dir}\{Y^\alpha, f_\alpha^\beta\}$ 的始对象叫作正系统 $\{Y^\alpha, f_\alpha^\beta\}$ 的正极限(direct limit). 集合、拓扑空间、群和 $R$ 模的正向极限是在它们各自范畴中正极限的例子.

对偶地, $C$ 中的逆系统(inverse system) $\{Y_\alpha, f_\alpha^\beta\}$ 是由以有向集 $\Lambda=\{\alpha\}$ 为指标集的对象集 $\{Y^\alpha\}$, 以及 $C$ 中的态射集 $\{f_\alpha^\beta: Y_\beta\to Y_\alpha\}$ 组成的, 其中 $\alpha\leqslant\beta$, $\alpha$, $\beta$ 在 $\Lambda$ 中, 使得

a′) $f_\alpha^\alpha=1_{Y_\alpha}$, $\alpha\in\Lambda$;

b′) $f_\alpha^\gamma=f_\alpha^\beta f_\beta^\gamma: Y_\gamma\to Y_\alpha$, 在 $\Lambda$ 中 $\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma$.

存在一个范畴 $\operatorname{inv}\{Y_\alpha, f_\alpha^\beta\}$, 其对象以态射集 $\{g_\alpha: X\to Y_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为指标集, 若在 $\Lambda$ 中 $\alpha\leqslant\beta$, 则 $g_\alpha=f_\alpha^\beta g_\beta$, 从 $\{g_\alpha: X\to Y_\alpha\}$ 到 $\{g'_\alpha: X'\to Y_\alpha\}$ 的态射是 $C$ 的态射 $h: X\to X'$, 满足 $g'_\alpha h=g_\alpha$, 对 $\alpha\in\Lambda$. $\operatorname{inv}\{Y_\alpha, f_\alpha^\beta\}$ 的终对象叫作逆系统 $\{Y_\alpha, f_\alpha^\beta\}$ 的反极限(inverse limit). 集合、拓扑空间、群和 $R$ 模的反极限是在它们各自的范畴中反极限的例子.

反极限的概念是**投射极限**(projective limit) 这一拓扑概念的范畴一般化.

**参考文献**

[1] Spanier, E. H., Algebraic tepology, McGraw-Hill, 1966.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 术语"正极限"可用"上极限"代替, "反极限"可用"极限"代替.

**参考文献**

[A1] Mitchell, B., Theory of categories, Acad. Press, 1965.

张英伯 译

**闭类系统[system of closed classes; замкнутых классов система]**

一种在有关函数系统(functional system) 的运算之下为闭的函数类的系统. 最重要的例子有逻辑代数的子代数系统, 有限值逻辑系统, 自动机映射系统, 递归函数代数系统, 等等. В. Б. Кудрявцев 撰

【补注】

**参考文献**

[A1] Pöschel, R. and Kalužnin, L. A. [L. A. Kaluzhnin], Funktionen-und Relationenalgebren, Deutsch. Verlag Wissenschaft., 1979 (译自俄文).

冯德兴 译

**共同代表系[system of common representatives; общих представителей система]**, 同时代表系 (system of simultaneous representatives).

基数为 $m$ 的集合 $R$, 它是给定集合 $S$ 的 $t$ 个子集族 $\mathscr{S}_1, \cdots, \mathscr{S}_t$ 的每一个族的**相异代表系**(system of different representatives), 其中每一个族有 $m$ 个元素. 假设 $t=2$ 且 $m$ 有限, 令 $\mathscr{S}_1=\{F'_1, \cdots, F'_m\}$, $\mathscr{S}_2=\{F''_1, \cdots, F''_m\}$ 并且 $S=\bigcup_{i=1}^m F'_i=\bigcup_{i=1}^m F''_i$. $\mathscr{S}_1$ 和 $\mathscr{S}_2$ 有共同代表系, 当且仅当 $\mathscr{S}_1$ 的任何 $k$ 个子集不含在 $\mathscr{S}_2$ 的小于 $k$ 个子集中, $k=1, \cdots, m$. 当族 $\mathscr{S}_1$ 和 $\mathscr{S}_2$ 的每个子集都有限时, 那么这个定理对无限的 $m$ 也成立. 对 $t>2$, 共同代表系的存在性条件已得知, 但叙述较复杂.

**参考文献**

[1] Hall, M., Combinatorial theory, Wiley, 1986.

В. Е. Тараканов 撰

【补注】

**参考文献**

[A1] Ryser, H. J., Combinatorial mathematics, Math. Assoc. Amer. 1963 (中译本: H. J. 赖瑟, 组合数学, 科学出版社, 1983).

[A2] Mirsky, L., Transversal theory, Acad. Press, 1971.

[A3] Aigner, M., Combinatorial theory, Springer, 1979.

刘振宏 译 李 乔 校

**相异代表系[system of different representatives 或 system of distinct representatives; различных представителей система]**, 对于集合 $S$ 的一个给定子集族 $\mathscr{S}=\{F_i: i\in I\}$ 的

由具有如下性质的一一映射 $\pi: I\to S$ 所确定的

集合 $R=\{\pi(i): i\in I\}$: 对任意 $i\in I$, 有 $\pi(i)\in F(i)$ (这里 $I$ 是指标集). 相异代表系 $R$ 的另一个名字是族 $\mathscr{S}$ 的横截(transversal for the family). 人们也讨论族 $\mathscr{S}$ 的部分横截(partial transversal of a family), 即形如$\{\pi(i): i\in I_0\}$的集合, 其中 $I_0$ 是 $I$ 的子集, 并且 $\pi: I_0\to S$ 是一一映射.

相异代表系被用于纯组合数学研究以及线性规划、数理经济和控制论的应用. 在组合数学框架里, 相异代表系在选择问题和极值问题中起着重要作用. 特别是在拉丁方的研究、指派问题、各种极值问题和极小-极大定理、以及给定行和与列和限制的非负矩阵的研究中, 相异代表系都有应用.

对有限集 $I$, 相异代表系存在的准则由 Phillip Hall 定理(Phillip Hall theorem)给出: 假设 $\mathscr{S}=\{F_i: i\in I\}$ 是集合 $S$ 上的一个子集族, $|I|=n$ 是有限数, 则 $\mathscr{S}$ 有相异代表系, 当且仅当对每一个 $k$ ($k=1,\cdots,n$), 和每一个 $k$ 元子集$\{i_1,\cdots,i_k\}\subseteq I$, 有 $|F_{i_1}\cup\cdots\cup F_{i_k}|\geqslant k$. Hall 的定理等价于关于 0-1 矩阵的 König 的定理(见**选择定理**(selection theorem)). 当每一个 $F_i$ ($i\in I$)是有限时, 这个基本准则也适用 $I$ 是无穷集的情况. 粗略地说, 一些例子表明, 这些情形穷尽了 Hall 准则的可应用性的范围, 但在其他一些情形它可作各种准则的出发点(见[3]). 例如: a) 当有子集 $I_0\subset I$, 使 $I-I_0$ 有限, 并且对所有 $i\in I_0$, $F_i$ 都有限时; 或者 b) 当 $I$ 是可数集时.

由于相异代表系有广泛的应用, 所以实际确定它们的算法([1])很有意义.

关于相异代表系的主要问题之一是有限集的有限族的相异代表系的个数问题; 它与 0-1 矩阵的**积和式**(permanent)的计算有关. 关于相异代表系的个数有一些下界. 设族 $\mathscr{S}$ 是由 $n$ 个子集 $F_1,\cdots,F_n$ 组成, 其基数大小的顺序为 $m=|F_1|\leqslant\cdots\leqslant|F_n|$. 若 $\mathscr{S}$ 满足 Hall 准则, 则相异代表系的个数至少是

$$\prod_{k=1}^{\min(m,n)}(|F_k|-k+1).$$

关于代表系问题在**拟阵**(matroid)(也称为独立空间或组合几何(combinatorial geometry))理论中也有讨论. Edmonds-Fulkerson 定理(Edmods-Fulkerson theorem)给出了代表系理论和拟阵之间的联系: 给定一个有限集的子集族, 它的所有部分横截的总体是某个拟阵的所有独立子集的总体. 由族 $\mathscr{S}$ 按上述方式得到的拟阵称为 $\mathscr{S}$ 的横截拟阵(transversal matroid). 许多拟阵能够表示为某个集族的横截拟阵.

相异代表系的概念可以在不同的方向上进行推广, 例如: a) 给定族 $\mathscr{S}=\{F_1,\cdots,F_n\}$ 和整数向量 $\rho=(\rho_1,\cdots,\rho_n)$, $\rho$ 横截($\rho$-transversal)是集合$\{\pi(1),\cdots,\pi(n)\}$, 其中对 $i=1,\cdots,n$, $\pi(i)\subseteq F_i$ 是 $S$ 的两两不交的子集且满足 $1\leqslant|\pi(i)|\leqslant\rho_i$; b) 对 $\mathscr{S}=\{F_i: i\in I\}$ 和整数 $k\geqslant 1$, $k$ 横截($k$-transversal)是由映射 $\pi: I\to S$ 所确定的子集 $R=\{\pi(i): i\in I\}$, 其中 $\pi(i)\subset F_i$ 且满足 $1\leqslant|\{\pi^{-1}(\pi(i))\}|\leqslant k$, $i\in I$.

**参考文献**


[1] Hall, M., Combinatorial theory, Wiley, 1986.

[2] Mirsky, L., Transversal theory, Acad. Press, 1971.

[3] Тараканов, В. Е., Вопросы кибернетики, в. 16, 1975, 110-124.


В. Е. Тараканов 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Ryser, H. J., Combinatorial mathematics, Math. Assoc. Amer. 1963 (中译本: H. J. 赖瑟, 组合数学, 科学出版社, 1983).

[A2] Welsh, D. J. A., Matroid theory, Acad. Press, 1976.

[A3] Aigner, M., Combinatorial theory, Springer, 1979.


刘振宏 译 李 乔 校

**子簇系** [**system of subvarieties**; **систем подмногообразей**], 子流形系(system of submanifolds)

【补注】 给出一个**微分流形**(differential manifold)(或**代数簇**(algebraic variety)) $M$, 子流形系(子簇系)是子流形(子簇)的可微(代数)参数化族$\{N_\lambda\}$. 更一般地, 对于其他几何对象如复空间、拓扑流形、代数等, 这个概念仍然有意义并且是有用的. 这样的系出现在数学的许多部分中, 既是工具又是研究的对象. 常常再添加一些附加的要求.

1. **叶状结构**. 微分流形 $M$ 的一个余维数 $k$ 的叶状结构(codimension-$k$ foliation)是 $n-k$ 维子流形的 $k$ 维系统, 使得在 $M$ 内每个点的附近这个系局部地相似于 $\mathbf{R}^n$ 内 $\mathbf{R}^{n-k}$ 的平行移动系. 关于细节可参见**叶状结构**(foliation).

2. **网**. 微分几何里的网是 $n$ 维流形 $M$ 上 $n$ 个光滑曲线的 $(n-1)$ 参数系$\{\sigma^1,\cdots,\sigma^n\}$的族, 使得对于每个点在每个系中恰有一条曲线通过此点并且过此点 $x$ 的 $n$ 条曲线横截地相交(即它们在 $x$ 的切向量张成整个切空间 $T_xM$). 见**网(微分几何学中的)**(net (in differential geometry)). 因此, 网由 $n$ 个横截地相交的余维数 $(n-1)$ 的叶状结构所构成.

3. **罗**. 更一般地, 可以考虑 $n$ 维流形上 $m$ 个"横截地相交的"余维数 $k$ 的叶状结构, 这里 $k$, $m$, $n$ 都是一般的. 这就导致罗的理论, 见**罗的几何学**(webs, geometry of)以及[A13].

4. **线性系**. 当子簇或子流形是 $\mathbf{C}^n$ 或 $P^n(\mathbf{C})$ 里由方程给出时, 谈论线性系是有意义的. 子簇的线性系(linear system)由一族方程

$$\lambda_0F_1+\cdots+\lambda_mF_m=0 \qquad (*)$$

给出，其中 $F_i$ 是环绕流形上的函数. 亦见线性系 (linear system). 特别在解析、射影和代数几何里，线性代数系的概念倍受重视，譬如说被系 (*) "截制" 而得的簇 $M \subset P^n(\mathbf{C})$ 的子簇的 (线性) 系. 同一线性系里的簇往往有相同维数，甚至有相同类型 (除去非泛的退化外).

5. (**代数几何学中的**) 罗 (web). 簇的 3 (或更多个) 参数线性系，即在 (*) 内 $m=3$. 有时也称为网 (net).

6. (**代数几何学中的**) 网 (net). 簇的双参数线性束，即在 (*) 里 $m=2$. 更多的细节可见网 (net).

7. (**几何学中的**) 束 (pencil). 引起最多注意的是簇和流形的单参数系. 它们被称为束. 因此平面内由

$$\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 = 0$$

确定的曲线族是一个束，这里参数 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 取 (除去 $\lambda_1=0$, $\lambda_2=0$ 外) 所有可能的值 (事实上束仅依赖于一个参数 $\lambda_1:\lambda_2$). 空间内曲面束的方程可类似被写出. 两个方程 $F_1=0$ 和 $F_2=0$ 给出了束的两个元素 (两条曲线或两个曲面)，它们确定了整个束. 束的任意两个元素相交于同一个点集——支集 (support). 束的支集可以包含实点及虚点. 如果束的原始曲线是 $m$ 与 $n$ 次的代数曲线，则支集由 $mn$ 个点构成 (实点或虚点，通常点或例外点，见 **Bezout 定理** (Bezout theorem)).

直线束 (pencil of straight lines) 是位于同一平面且通过一个固定点 (寻常束 (ordinary pencil)) 或平行于一条固定直线 (例外束 (exceptional pencil)) 的所有直线的集合. 直线束的方程有以下形式:

$$\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1)+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2)=0.$$

平面束 (pencil of planes) 是通过一条固定直线 (寻常束 (ordinary pencil) 或平行于某个固定平面 (例外束 (exceptional pencil) 的所有平面的集合. 平面束的方程有以下形式:

$$\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+$$
$$+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0.$$

圆束 (pencil of circles) 是线性依赖于参数的单参数圆族. 圆束包含圆及一条直线. (寻常) 圆束的支撑由两个虚圆点和两个通常点 $a$ 和 $b$ 构成. 如果 $a \neq b$，则圆束可被定义为通过点 $a$ 和 $b$ 的圆的集合 (把直线看成半径无穷大的圆); 如果 $a=b$，则还必须要求这些圆都在 $a$ 点相切. 如果 $a$ 和 $b$ 是不同实点，则称圆束为椭圆的 (elliptic) (图 1)，如果它们是重合的实点，则称为抛物的 (parabolic) (图 2)，如果它们是不同的虚点，则称为双曲的 (hyperbolic) (图 3). 同心圆的集合 (图 4) 是例外束 (exceptional pencil).

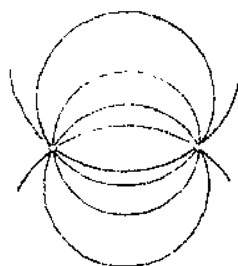


图 1

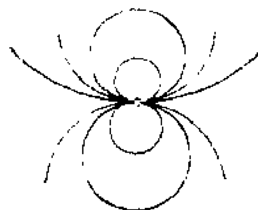


图 2

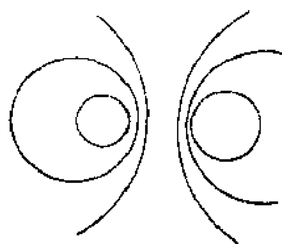


图 3

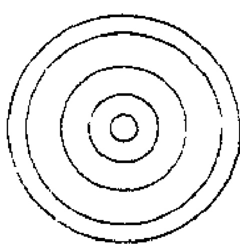


图 4

每个寻常圆束有一个**根轴** (radical axis)，这是一条直线，其上每个点关于束中的所有的圆有相同的幂 (不同的点有不同的幂) (见**点的度** (degree of a point)). 椭圆束的根轴通过圆的公共点; 抛物束的根轴就是它们的公切线; 双曲束的根轴就是两个与束内的圆都正交的圆的连心线. 束内圆的圆心都位于根轴的一条垂线上. 束的圆心连线与根轴的交点称为束的中心 (centre of the pencil). 束的中心关于束内圆的幂都相等称为束的幂 (power of the pencil). 如果 $x$ 轴是束的连心线，$y$ 轴是束的根轴，则束内任意一个圆的方程为:

$$x^2+y^2-2xt+p=0,$$

这里 $t$ 是确定已知圆的参数，$p$ 是束的幂. 对于椭圆束 $p<0$，对抛物束 $p=0$，对双曲束 $p>0$ (例外束的幂可被看作无穷大).

与已给束的所有的圆都正交的圆本身也构成一个束，这个束称为与已给束共轭的 (conjugate). 椭圆束共轭于双曲束，抛物束共轭于抛物束.

任何圆束都是两个圆网 (net) 的交.

球面束 (pencil of spheres) 是线性依赖于参数的单参数球面族. 束内任意两个球面相交于具有实、零或虚半径的圆. 第一种情形的球面束称为椭圆的 (elliptic)，它由通过已知圆的所有球面构成; 第二种情形称为抛物的 (parabolic)，它由互相切于此公共点的所

有球面构成；第三种情形称为双曲的（hyperbolic），这个束由正交于三个交于两点的已知球面的所有球面构成．球面束有一个根平面（radical plane），其上每个点关于束内球面都有相同的幂（不同点有不同幂），束内所有球面的中心都落在根平面的一条重线上．

球面束是中心在同一条直线上的三个球面网的交．

在射影几何里，代数线束（algebraic pencil of lines）是射影平面内的坐标 $u_1$，$u_2$，$u_3$ 满足下列方程的所有直线的集合：

$$F(u_1, u_2, u_3) = 0,$$

这里 $F(u_1, u_2, u_3)$ 是关于变量 $u_1$，$u_2$ 和 $u_3$ 为齐次的不恒等于 0 的多项式．$F$ 的次数称为线束的次数（degree 或 order）．一次代数线束（first-order algebraic pencil of lines）由方程

$$a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 = 0$$

给出，它是通过坐标为（$a_1$，$a_2$，$a_3$）的点的所有直线的集合．

二次代数线束（second-order algebraic pencil of lines）由方程

$$f_{11}u_1^2 + f_{22}u_2^2 + f_{33}u_3^2 + 2f_{12}u_1u_2 + 2f_{13}u_1u_3 +$$
$$+ 2f_{23}u_2u_3 = 0, f_{ij} = f_{ji}, i, j = 1, 2, 3$$

给出，这里 $f_{ij}$ 是实数而且至少一个不是零．如果判别式 $\delta = |f_{ij}|(i, j = 1, 2, 3)$ 非零，则此二阶线束称为非退化的（non-degenerate），如果 $\delta = 0$，则是退化的（degenerate）．非退化二阶束都是一个非退化**二次曲线**（second-order curve）的切线的集合；非退化二次曲线都是某个非退化二阶束的**包络**（envelope）．

在下列条目中讨论了更复杂的代数与几何束：**Лобачевский** 几何学（Lobachevskii geometry），**Darboux** 二次曲面（Darboux quadric），**Halphen** 线束（Halphen pencil），**三次曲线**（cubic），**单值变换**（monodromy transformation），**圆**（circle）．

请注意在某些文献中把罗、网和束分别理解为 ≥3，2 或 1 维的族，有时再附加要求对于每个点恰好有这个系中的给定个数的成员通过它，而线性条件（*）则被抛弃了．可见[A14]．

8. **纤维化**．设 $\{N_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是子流形或子簇的系，使得对于环绕流形 $M$ 的每个点恰有一个 $N_\lambda$ 通过它．从而得出映射 $M \to \Lambda$．这个映射甚至不一定连续．但如果 $M \to \Lambda$ 有合适的性质（例如可微、全纯、代数，根据被考虑对象的类型而定），就可得到一个纤维化（fibration）．反之，一个满映射 $\pi$：$M \to B$ 定义了一个系 $\{\pi^{-1}(b)\}_{b\in B}$．如果纤维化是局部平凡的，即在 $B$ 内映射 $\pi$ 局部地可看成 $U \times F \to U$，则常常用纤维丛（fibre bundle）的称呼代替纤维化．

9. **矩阵束**．"束"这个词也被用于其他数学领域以表示对象的单参数（线性）族．因此有算子束（pencil of operators）$\lambda A + \mu B$，特别地有矩阵束（pencil of matrices）$\lambda A + \mu B$，或写成非齐次形式 $A + \lambda B$．$A$，$B$ 的元素取成域 $K$ 内，则束 $A + \lambda B$ 也可被看成 $K[\lambda]$ 上的矩阵．

设有两个多项式矩阵（polynomial matrix）$M_1(\lambda)$，$M_2(\lambda)$，即元素在 $K[\lambda]$ 里的矩阵．如果存在可逆矩阵 $P(\lambda)$，$Q(\lambda)$，使得 $P(\lambda)M_1(\lambda)Q(\lambda) = M_2(\lambda)$（注意 $K[\lambda]$ 上方阵 $P(\lambda)$ 为可逆，当且仅当它的行列式（determinant）是常数域 $K$ 的非零元），则称 $M_1(\lambda)$ 和 $M_2(\lambda)$ 是等价的（equivalent）．如果存在 $K$ 上可逆阵 $S$，$T$，使 $SM_1(\lambda)T = M_2(\lambda)$，则称多项式矩阵 $M_1(\lambda)$ 和 $M_2(\lambda)$ 是严格等价的（strictly equivalent）．矩阵的等价性可用 Smith 典范形式（Smith canonical form）作精确的描述．详情可见**正规形式**（normal form）．

考虑方阵束 $A + \lambda B$，其中 $\det(B) \neq 0$．对于这样的束，严格等价性与等价性是相同的．矩阵束称为正则的（regular），如果 $\det(A + \lambda B)$ 不恒等于 0．所有其他的束都称为奇异的（singular）．

矩阵束的不变量与标准型的理论是由 L．Kronecker 发展起来的（[A10]）；关于完整的叙述和某些应用亦可见[A9]．

在（自动）线性控制理论中被研究的线性控制系统（linear control system）

$$\dot{x} = Ax + Bu, \ x \in \mathbf{R}^n, \ u \in \mathbf{R}^m,$$

由 $\mathbf{R}$（或 $\mathbf{C}$）上大小分别为 $n \times n$ 和 $n \times m$ 的一对矩阵（$A$，$B$）所确定．所谓的反馈群（feedback group）由下列变换生成：

$$(A, B) \mapsto (A, BT), \ T \in GL_m(\mathbf{R})$$

（这对应于控制空间 $\mathbf{R}^m$ 内的基变换）；

$$(A, B) \mapsto (SAS^{-1}, SB), \ S \in GL_n(\mathbf{R})$$

（这对应于状态空间 $\mathbf{R}^n$ 内的基变换）；

$$(A, B) \mapsto (A + BF, B), \ F \in \mathbf{R}^{m \times n}$$

（这对应于状态反馈（state feedback）：$u \mapsto u + Fx$）．

与线性控制系统（$A$，$B$）相伴的 $n \times (n + m)$ 矩阵的奇异束为

$$(B, -\lambda I + A). \qquad (**)$$

可以看出([A2])形如(**)的两个束严格等价的充要条件是相应的控制系统在反馈群下等价.

如果 $A^iB(i=0,1,\cdots)$ 的列张成整个 $\mathbf{R}^n$,则控制系统 $(A,B)$ 是完全可达的(completely reachable).对于完全可达控制系统的形如(**)的束,束的许多 Kronecker 不变量等于 0.剩下的不等于 0 中最重要的是有限多个整值不变量.它们可如下描述.设 $\mu_i$ 是由 $B, AB, \cdots, A^{i-1}B(i=1,2,\cdots)$ 的列张成的空间的维数.设 $v_i=\mu_i-\mu_{i-1}(i=1,2,\cdots)$,$\mu_0=0$,则 $v_1\geqslant v_2\geqslant\cdots$,且 $v_i=0$ 对 $i>n$.现在设 $\kappa_1,\cdots,\kappa_m$ 是 $n$ 的分划 $(v_1,\cdots,v_n)$ 的对偶分划(dual partition),即 $\kappa_i=\#\{j:v_j\geqslant i\}$.(注意对 $i>m$ 有 $\kappa_i=0$,因为 $v_1\leqslant m$.)这些 $\kappa_1,\cdots,\kappa_m$ 是(**)的非零 Kronecker 不变量,在控制论里被称为 Kronecker 指数(Kronecker indices).对于一个完全可达偶(completely reachable pair) $(A,B)$,存在状态反馈标准型(state-feedback canonical form),其中矩阵 $A$ 是具有 Jordan 块 $Jx_i(0)(i=1,\cdots,m)$ 的 **Jordan 矩阵**(Jordan matrix),$B$ 由标准单位向量 $e_{r_i}(r_i=\kappa_1+\cdots+\kappa_i)$ 以及可能有的其他向量组成.这个典范形式称为 Brunovsky 典范形式(Brunovsky canonical form).见[A12]以及[A11]可得相关的材料.

10.(**代数学、代数几何学、解析几何学与微分几何学中的**)**形变**.另一种看待(于)流形或簇(或其他结构)的族的方法是作为另一种形变(deformation).

**术语附注**.在上面 5.-7.中的术语“罗”、“网”、“束”分别指 $\geqslant 3$, 2 或 1 维的(线性)系,这并不完全是标准的.有时可以发现用“网”代替“罗”的,有时则用“丛”同时代表“网”(如在 6.中)和“束”(如在 7.中或较罕见的 9.中)的意义.

上面 7.里的材料基本上是本百科全书的俄文原版中“Пучок”条目下由 А.Б.Иванов 撰写的关于束的小节的翻译.而本条目的其余部分对于这个经注释和扩充的译本来说则是新增的.

**参考文献**


[A1] Postnikov, M. M., Analytic geometry, Moscow (俄文).

[A2] Coolidge, J. L., A treatise on the circle and the sphere. Chelsea, reprint, 1971.

[A3] Hu, S.-T., Differentiable manifolds, Holt, Rinehart & Winston, 1969.

[A4] Morrow, J. and Kodaira, K., Complex manifolds, Holt, Rinehart & Winston, 1971.

[A5] Berger, M., Geometry, Springer, 1987 (译自法文).

[A6] Coolidge, J., A history of the conic sections and quadratic surfaces, Dover, reprint, 1968.

[A7] Coxeter, H., Introduction to geometry, Wiley, 1963.

[A8] Griffiths, P. and Harris, S., Principles of algebraic geometry, Wiley, 1978.

[A9] Gantmacher, F. R., The theory of matrices, 2, Chelsea, reprint, 1959. Chapt. XII (译自俄文).

[A10] Kronecker, L., Algebraische Reduktion der Schaaren bilinearer Formen, Sitzungsber. Akad. Berlin (1890), 763-776.

[A11] Hazewinkel, M., A partial survey of the uses of algebraic geometry in system and control theory, in Symp. Math. INDAM, Rome 1979, Vol. 24, Acad. Press, 1981, 245-292.

[A12] Kalman, R. E., Kronecker invariants and feedback, in L. Weiss (ed.): Ordinary Differential Equations, Acad. Press, 1972, 459-471.

[A13] Goldberg, V. V., Theory of multicodimensional webs, Kluwer, 1988.

[A14] Severi, F., Vorlesungen über algebraische Geometrie, Johnson, reprint, 1968


陈志杰 译

**系统程序设计**[**system programming**; **системное программирование**],系统工程(system engineering)

计算机系统的系统程序(system program)的设计和实现.系统程序包括操作系统(operating system)和附加的程序,诸如各种实用程序(utility).实用程序实现下列经常使用的功能:帮助程序的创建,文件和输入输出设备的管理.应用程序员(application programmer)将使用这些来创建专门的应用.典型地,操作系统为下列几类任务提供机制:程序创建,程序执行,程序和应用之间的通信,访问输入输出设备,对文件的控制访问(数据的存储和检索),在多用户计算系统情形中的系统访问,等等.

系统程序总的复杂性通常是很大的,这种复杂系统的产生包含相当多的困难.各种工具,包括程序变换(transformations of programs),程序验证(program verification),数学模型(mathematical models)和一般系统理论(general system theory)已被开发,用于克服这种复杂性.

**参考文献**


[1] Brooks, F., The mythical man-month, essays on software engineering, Addison-Wesley, 1975.


А.П.Ершов 撰

**【补注】**

**参考文献**


[A1] Tanenbaum, A. S., Structured computer organization, Prentice Hall, 1976.

[A2] Stallings, W., Computer organization and architecture, Macmillan, 1990.


А.П.Ершов 撰 程虎 译 刘椿年 校

**合冲** [syzygy; **сизигия**]

天文学的术语，表示三个天体位于一条直线上．

在代数学中用它来表示一种关系．令 $M$ 是左 $A$ 模，$(m_i)_{i\in I}$ 是 $M$ 的一组元素．$(m_i)$ 的一个关系，或合冲，是环 $A$ 的一组元素 $(a_i)_{i\in I}$，使 $\sum a_i m_i = 0$．于是出现了合冲模，合冲链复形，等等．见合冲的 **Hilbert 定理** (Hilbert theory)． В．И．Данилов 撰

【补注】 合冲出现在合冲理想 (syzygetic ideal) 的定义及正则代数 (regular algebras) 和正则序列 (regular sequence) 理论中．见 **Koszul 复形** (Koszul complex)；**模的深度** (depth of a module)．

裴定一 译

# T

**$t$ 分布** [**$t$-distribution**; **$t$-распределение**]

见 **Student 分布** (Student distribution).

**$T^2$ 分布** [**$T^2$-distribution**; **$T^2$-распределение**]

见 **Hotelling $T^2$ 分布** (Hotelling $T^2$-distribution).

**$T$ 理想** [**$T$-ideal**; **$T$-идеал**], 自由结合代数的

一个全不变理想，即在所有自同态下不变的理想．域 $F$ 上任一结合代数簇（见**结合环与结合代数** (associative rings and algebras)）的所有多项式恒等式的集合形成可数生成自由代数 $F[X]$ 的一个 $T$ 理想，$X=\{x_1, \cdots, x_k, \cdots\}$. 这样，在 $F[X]$的 $T$ 理想和$F$上的结合代数簇之间存在一个一一对应．如果 $F$有特征 0，则对每个 $T$ 理想$T\subseteq F[X]$，存在一个自然数$n=n(T)$，使得 $M_n(F)$ 的元素的某次幂是 $T$ 的元素，并且 $T$ 仅有这些元素，这里 $M_n(F)$ 是 $F$ 上全体 ($n\times n$) 矩阵的代数 $F_n$ 的恒等式的理想．在这种情况下，$T$ 理想也可以定义为自由代数的在所有微分下闭的（双侧）理想．商代数 $F[X]/T$ 是带有多项式恒等式集合 $T$ 的 **PI 代数** (PI-algebra)．这个代数称为带有恒等式 $T$ 理想 $T$ 的相对自由代数 (relatively free algebra)（或一般代数 (generic algebra)）（并且是由$T$中恒等式定义的代数簇中的自由代数）．代数$F[X]/T$没有零因子，当且仅当对某个自然数$n$，$T=M_n(F)$. 自由结合代数的每个 $T$ 理想 $T$ 是准素的．

特征为零的域上的无限多生成元的自由结合代数的 $T$ 理想在理想的乘法运算下成为一个自由半群．在这种情况下，$T$ 理想也可以定义为自由代数的在所有自同构下不变的理想．

关于 $F[X]$ 的每个 $T$ 理想是否都是有限多元的全不变闭包的问题（Specht 问题 (Specht problem)），亦见**环簇** (variety of rings).

类似于结合代数的情形，可以对非结合（Lie，交错和其他）代数定义 $T$ 理想．

**参考文献**


[1] Procesi, C., Rings with polynomial identities, M. Dekker, 1973.

[2] Jacobson, N., Structure of rings, Amer. Math. Soc., 1956.

[3] Herstein, I., Noncommutative rings, Math. Assoc. Amer., 1968.

[4] Amitsur, S., The $T$-ideals of the free ring, *J. London Math. Soc.*, **30** (1955), 470 – 475.

[5] Specht, W., Gesetze in Ringen I, *Math. Z.*, **52** (1950), 557 – 589.

[6] Bergman, G. and Lewin, J., The semigroup of ideals of a fir is (usually) free, *J. London Math. Soc.* (2), **11** (1975), 1, 21 – 31.


В. Н. Латышев 撰

**【补注】** A. R. Kemer 正面解决了特征为零情况下的 Specht 问题，见**环簇** (varieties of rings)．他还引入了 $T$ 素理想 ($T$-prime ideal) 的概念，即对 $T$ 理想 $P$，如果 $f[x_1,\cdots,x_n]g[x_{n+1},\cdots,x_m]\equiv 0(\operatorname{mod} P)$，在 $f$ 和 $g$ 中带有不同的变量，那么或者 $f[x_1,\cdots,x_n]\in P$，或者 $g[x_{n+1},\cdots,x_m]\in P$. 类似地，有 $T$ 幂零理想 ($T$-nilpotent ideal)．他证明了对每个 $T$ 理想 $I$，存在一个 $T$ 理想 $N(I)\supset I$，使得 $N(I)/I$ 是 $T$ 幂零的，而 $N(I)$ 是 $T$ 素理想的有限积．

**参考文献**


[A1] Kemer, A. R., Solution of the finite basis problem, *Soviet Math. Dokl.*, **37** (1988), 60 – 64. (*Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **298** (1988), 273 – 277).

[A2] Kemer, A. R., Finite basis property of identities of associative algebras, *Algebra and Logic*, **26** (1987),

362 – 397. (*Algebra i Logika*, 26 (1987), 597 – 641).

[A3] Formanek, E., The polynomial identities and invariants of $n \times n$ matrices, Amer. Math. Soc., 1991.

蔡传仁 译

$T_1$ 空间 [$T_1$-space; $T_1$-пространство], 可达空间 (attainable space)

**拓扑空间** (topological space) $X$, 它的任何单点集的闭包就是自身. 这等价于要求点 $x \in X$ 的所有邻域的交集恒等于 $x$, 或者对于任意两个不同的点 $x$, $y \in X$, 存在它们的邻域 $U_x$ 及 $U_y$, 使得 $U_x \not\ni y$, 且 $U_y \not\ni x$, 即**分离公理** (separation axiom) $T_1$ 成立.

可达性, 就是使 $T_1$ 成立的性质, 是一种遗传性质: $T_1$ 空间的任意子空间是 $T_1$ 空间, 强化 $T_1$ 空间的拓扑而得的拓扑仍是 $T_1$ 拓扑. 任意 $T_2$ 空间 (见 **Hausdorff 空间** (Hausdorff space)) 是 $T_1$ 空间, 但是反之不成立: 存在不是 $T_2$ 空间的 $T_1$ 空间. 例如, 一个无穷集 $\beta$, 其拓扑以具有有限余的集合为开集, 就是这种情形.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 通常, $T_1$ 而非 $T_2$ 空间的很重要的一类是具有 Zariski 拓扑的环 $A$ 的谱 Spec($A$), 见**仿射概形** (affine scheme).

**参考文献**

[A1] Engelking, R., General topology, Heldermann, 1989 (译自波兰文).

罗嵩龄 译

**策略构形** [**tactical configuration**; **тактическая конфигурация**], 亦称战术构形, $t$ 设计 ($t$-design), $t$-($v$, $k$, $\lambda$) 设计 ($t$-($v$, $k$, $\lambda$)-design), $v$ 集 $S$ 上的

$t$ 设计是集合 $S$ 上的一个 $k$ 子集 (区组) 系, 使得 $S$ 的每一个 $t$ 子集恰好出现在 $\lambda$ 个区组里. 2 设计类与平衡不完全区组设计类相同 (见**区组设计** (block design)). 策略构形的名字是对一个**关联系统** (incidence system) 而言的, 在这里每一个集合关联于恰好 $k$ 个元素, 而每一个元素关联于恰好 $r$ 个集合. $t = k$ 的 $t$ 设计称为平凡的 (trivial). 若一个 $t$ 设计是非平凡的, 那么

$$t + 1 \leqslant k \leqslant v - 1 - t.$$

对任何 $s \leqslant t$, 每个 $t$ 设计也是 $s$ 设计. 任意一个 $s$ 子集在一个 $t$ 设计区组里出现的次数 $\lambda_s$ 由下式给出:

$$\lambda_s = \binom{k-s}{t-s}^{-1} \binom{v-s}{t-s} \lambda, \ 0 < s \leqslant t.$$

存在一个 $t$ 设计的必要条件为 $\lambda_s$ 是整数. 特别对 $t \geqslant 2$, 每个 $t$ 设计是一个平衡不完全区组设计.

$t$ 设计的主要问题是它们的存在性和构造问题. 长时间以来, 对 $t > 3$ 仅知道几个孤立的 $t$ 设计; 特别是分别与 5 重可迁 Mathieu 群 $M_{12}$ 和 $M_{24}$ 有关的 5-(12, 6, 1) 设计和 5-(24, 8, 1) 设计 (见 **Mathieu 群** (Mathieu group)). 然而在 20 世纪 60 年代发现了 $t$ 设计与编码理论 (见**码** (code) 之间的联系 (见 [3], [4]), 并且从 $v$ 个非零坐标的一些向量出发, 给出了构造一个属于线性 ($n$, $k$) 码的 $t$ 设计的方法, 这个 ($n$, $k$) 码是一个**有限域** (finite field) (见 [5], [7]) 上 $n$ 维向量空间的一个 $k$ 维向量子空间.

众所周知, 不是对称群和交错群的 $t$ 重可迁群, 导出非平凡的 $t$ 设计; 由此产生了 3 设计的几个无穷类. 借助群论和几何的思想 4 设计和 5 设计的无穷类也已构造出来 (见 [6]).

对一个 $t$ 设计中的区组数 $b$ 有不等式:

$$b \geqslant \begin{cases} \binom{v}{s}, & \text{若 } t = 2s, \ v \geqslant k + s, \\ 2\binom{v-1}{s}, & \text{若 } t = 2s + 1, \\ & \quad v - 1 \geqslant k + s. \end{cases} \qquad (*)$$

它推广了关于平衡不完全区组设计的 Fisher 不等式 ($b \geqslant v$). 在 (*) 中等式成立的 $t$ 设计称为紧密的 (tight). 紧密的 $t$ 设计推广了对称 2 设计, 特别地, 当 $t = 2s$ 时, 一个紧密的 $t$ 设计中区组的相交数集合恰含有 $s$ 个不同的元素.

紧密的 3 设计是 Hadamard 设计 (Hadamard designs), 即它们是 3-($4n$, $2n$, $n-1$) 设计, 而当 $s \geqslant 2$ 时, 不存在非平凡的紧密 ($2s+1$) 设计. 由一个给定的 $t$-($v$, $k$, $\lambda$) 设计, 可以得到另外 3 个 $t$ 设计: a) 在 $S$ 中取每一个区组的补; b) 去掉任一个元素及包含它的所有区组; c) 任选一个元素, 取出包含该元素的区组并从中去掉这个元素. 这样得到的诸 $t$ 设计分别称为关于原来设计的补 (complementary) $t$ 设计、剩余 (residual) $t$ 设计和导出 (derived) $t$ 设计. 它们分别是 $t$-($v$, $v-k$, $\lambda^c$) 设计, ($t-1$)-($v-1$, $k$, $\lambda^r$) 设计和 ($t-1$)-($v-1$, $k-1$, $\lambda$) 设计, 其中

$$\lambda^c = \binom{k}{t}^{-1} \binom{v-k}{t} \lambda,$$

$$\lambda^r = (v-k)(k-t+1)^{-1} \lambda.$$

**参考文献**

[1] Dembowski, P., Finite geometrics, Springer, 1968.

[2] Ray-Chaudhuri, D. K. and Wilson, R. M., On $t$-designs, *Osaka J. Math.*, **12** (1975), 737 – 744.

[3] Assmus, E. F. and Mattson, H. F., Perfect codes

and the Mathieu groups, *Arch. Math. Basel*, 17 (1966), 121 – 135.

[4] Assmus, E. F. and Mattson, H. F., New 5-designs, *J. Comb. Theory*, 6 (1969), 122 – 151.

[5] Семаков, Н. В., Зиновьев, В. А., 《Проблемы передачи информации》, 5 (1969), 28 – 36.

[6] Alltop, W. O., An infinite class of 5-designs, *J. Comb. Theory*, 12 (1972), 390 – 395.

[7] Pless, V., Symmetry Codes over GF (3) and new five-designs, *J. Comb. Theory*, 12 (1972), 119 – 142.

B. E. Тараканов 撰

【补注】 $\lambda=1$ 的 $t$-$(v,k,\lambda)$ 设计也称为 **Steiner** 系 (Steiner system)，并记为 $S(t,k,v)$；任一 $t$-$(v,k,\lambda)$ 设计有时也记为 $S_\lambda(t,k,v)$.

无重复区组的非平凡 $t$ 设计的存在性具有特别的意义（无重复区组是指任一 $k$ 子集在列出的区组中不能出现两次）；这样的 $t$ 设计称为简单的 (simple). L. Teirlinck ([A3]) 解决了一个长期未解决的猜想，他证明了对 $t$ 的每一个值都存在非平凡的简单 $t$ 设计. [A4] 中列出了已知的 $t\geqslant 4$ 的简单 $t$ 设计的无穷族及 $v\leqslant 30$ 的简单 $t$ 设计的表.

仅有的非平凡的紧密 4 设计是关联于 Mathieu 群 $M_{23}$ 的唯一 4-(23, 7, 1) 设计 (见 [A5] – [A7])，并且对任一固定值 $s\geqslant 5$，只有有限多个紧密 $2s$ 设计 (见 [A8]).

**参考文献**

[A1] MacWilliams, F. J. and Sloane, N. J. A., The theory of error-correcting codes, North-Holland, 1978.

[A2] Beth, Th., Jungnickel, D. and Lenz, H., Design theory, Cambridge Univ. Press, 1986.

[A3] Teirlinck, L., Non-trivial $t$-designs without repeated blocks exist for all $t$, *Disc. Math.*, 65 (1987), 301 – 311.

[A4] Chee, Y. M., Colbourn, C. J. and Kreher, D. L., Simple $t$-designs with $v\leqslant 30$, *Ars Comb.*, 29 (1990), 193 – 258.

[A5] Ito, N., Tight 4-designs, *Osaka J. Math.*, 12 (1975), 493 – 522.

[A6] Enomoto, H., Ito, N. and Noda, R., Tight 4-designs, *Osaka J. Math.*, 16 (1979), 353 – 356.

[A7] Bremner, A., A diophantine equation arising from tight 4-designs, *Osaka J. Math.*, 16 (1979), 353 – 356.

[A8] Bannai, E., On tight designs, *Quart. J. Math. (Oxford)*, 28 (1977), 433 – 448.

[A9] Hall, M., Combinatorial theory, Blaisdell, 1967.

刘振宏 译 李 乔 校

## 玉河测度 [Tamagawa measure; Тамагавы мера]

定义在整体域 $K$ 上的连通线性代数群 (linear algebraic group) $G$ 的阿代尔 (adèle) 群 $G_A$ 上的测度 $\tau$，其构造如下：设 $\omega$ 是在 $K$ 上定义的 $G$ 上的最高阶非零微分形式. 对于 $K$ 的赋值的等价类集合 $V$ 中的赋值 $v$，以 $\omega_v$ 表示由 $\omega$ 得到的 $G_{K_v}$ 上的 Haar 测度，其中的 $G_{K_v}$ 是 $G$ 在完全化 $K_v$ 上的点的局部紧群 (见 [1] 和 [2]). 如果当 $v$ 遍历所有非 Archimedes 赋值时乘积 $\prod\omega_v(G_{O_v})$ 绝对收敛，其中 $G_{O_v}$ 是 $v$ 进整点群 (如果 $G$ 是半单群或幂幺群，则这总是成立的)，则令 $\tau=\prod_{v\in V}\omega_v$. (否则，按某种非典范的方式定义 $\tau$ 如下：引进数集 $(\lambda_v)_{v\in V}$ (称为收敛因子) 使得乘积 $\prod_{v\in V}\lambda_v\omega_v(G_{O_v})$ 绝对收敛，然后令 $\tau=\prod_{v\in V}\lambda_v\omega_v$，见 [1], [3].) 这样定义的测度 $\tau$ 不依赖于微分形式 $\omega$ 的最初选择，因而是 $G_A$ 上典范的 Haar 测度. 这就可以确切地谈论与 $G_A$ 相伴的齐性空间的体积 (见玉河数 (Tamagawa number)).

**参考文献**

[1] Weil, A., Sur certaines groupes d'opérateurs unitaires, *Acta Math.*, 111 (1964), 143 – 211.

[2] Cassels, J. W. S. and Frohlich, A., Algebraic number theory, Acad. Press, 1986.

[3] Ono, T., On the Tamagawa number of algebraic tori, *Ann. of Math.*, 78 (1963), 47 – 73.

A. C. Рапинчук 撰

**【补注】**

**参考文献**

[A1] Weil, A., Adeles and algebraic groups, Birkhäuser, 1982.

朱学贤 译 赵春来 校

## 玉河数 [Tamagawa number; Тамагавы число]

与定义在整体域 $K$ 上的连通线性代数群 (linear algebraic group) $G$ 的阿代尔 (adèle) 群相伴的齐性空间 $G_A^{(1)}/G_K$ 在玉河测度 (Tamagawa measure) 意义下的体积. 这里，$G_A^{(1)}$ 是 $G_A$ 的子群，由使得

$$\prod_{v\in V}|\chi(g_v)|_v=1$$

对在 $K$ 上定义的 $G$ 的任意特征标 $\chi$ 成立的那些阿代尔 $g=(g_v)_{v\in V}\in G_A$ 组成 (其中的乘积遍历 $K$ 的正规化赋值集合 $V$ 中的所有赋值 $v$). 玉河数的有限性来自约化理论 (见 [5]).

为方便起见，下面分幂幺群、代数环面和半单群这三种情形叙述 $\tau(G)$ 的值. 对于幂幺群，玉河数永远等于 1. 如果 $T$ 是代数 $K$ 环面，则

$$\tau(T)=\frac{[H^1(K,\hat{T})]}{[Ш(T)]},$$

其中的 $[H^1(K,\hat{T})]$ 和 $[Ш(T)]$ 分别是环面 $T$ 的有理特征标模 $\hat{T}$ 的一维 Galois 上同调群的阶和 $T$ 的 Шафаревич-Tate 群的阶. 在这个公式的基础上，构

造出了 $\tau(T)$ 不是整数的环面 $T$ 的例子（[8]）．定义在数域上的半单群的玉河数的确定，可以简化为单连通群的情形（[9]）：设 $G$ 是一个半单 $K$ 群，$\pi: \hat{G} \to G$ 是定义在 $K$ 上的万有覆盖，又设 $F = \mathrm{Ker}\,\pi$ 是 $G$ 的基本群及 $\hat{F}$ 是 $F$ 的特征标群，则有

$$\tau(G) = \tau(\hat{G}) \frac{h^0(\hat{F})}{i^1(\hat{F})},$$

其中，$h^0(\hat{F}) = [H^0(K,F)]$，$i^1(\hat{F})$ 是典范映射

$$H^1(K,\hat{F}) \to \prod_{v \in V} H^1(K_v,\hat{F})$$

的核的阶．猜测对于所有的单连通群玉河数都等于 1（Weil 猜想（Weil conjecture））．对于绝大多数类型的数域上的单群（[3]，[4]，[7]），对于数域上的 Chevalley 群（[2]）以及整体函数域上的 Chevalley 群（[6]），这一猜想已被证实．

**参考文献**


[1] Cassels, J. W. S. and Frohlich, A., Algebraic numbertheory, Acad. Press, 1986.

[2] Арифметические группы и автоморфные функции, М., 1969（译自英文和法文）.

[3] Weil, A., Sur certaines groupes d'opérateurs unitaires, *Acta Math.*, **111**(1964), 143 – 211.

[4] Weil, A., Sur la formule de Siegel dans la théorie des groupes classiques, *Acta Math.*, **113**(1965), 1 – 87.

[5] Платонов, В. П., 《Успехи матем. наук》, **37**(1982), 3 – 54.

[6] Harder, G., Chevalley groups over function fields and automorphic forms, *Ann. of Math.*, **100**(1974), 249 – 306.

[7] Mars, J. G. M., The Tamagawa number of ${}^2A_n$, *Ann. of Math.*, **89**(1969), 557 – 574.

[8] Ono, T., On the Tamagawa number of algebraic tori, *Ann. of Math.*, **78**(1963), 47 – 73.

[9] Ono, T., On the relative theory of Tamagawa numbers, *Ann. of Math.*, **82**(1965), 88 – 111.


А. С. Рапинчук 撰

【补注】 Шафаревич-Tate 群（Shafarevich-Tate group）也称为 Tate-Шафаревич 群，它的定义见 **Galois 上同调**（Galois cohomology）．

$\tau(G)$ 与 $\tau(\hat{G})$ 之间的关系见[A1]．

Weil 猜想已被 R. Kottwitz（[A2]）对数域的情形证实，他假定了 **Hasse 原理**（Hasse principle）的适用性（后者也已建立）．

**参考文献**


[A1] Kottwitz, R. E., Stable trace formula: cuspidal tempered terms, *Duke Math. J.*, **51**(1984), 611 – 650.

[A2] Kottwitz, R. E., Tamagawa numbers, *Ann. of Math.*, **127**(1988), 629 – 646.


朱学贤 译　赵春来 校

**驯顺嵌入 [tame imbedding; ручное вложение]**

拓扑多面体（见**抽象多面体**（polyhedron, abstract））$P$ 在空间 $\mathbf{R}^n$ 中的一个嵌入，它使得存在一个 $\mathbf{R}^n$ 到它自身上的一个同胚（homeomorphism），这个同胚将 $P$ 映入直角**多面体**（polyhedron）．多面体 $P$ 也称为驯顺的（tame）．如果 $P$ 不是驯顺的，它就称为非驯的（wild），而相应的嵌入称为**非驯嵌入**（wild imbedding）．

М. И. Войцеховский 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Glaser, L. C., Geometrical combinatorial geometry, 1 – 2, v. Nostrand, 1972.


薛春华 译

**切触 [tangency; касание]**

意指两条曲线（或一条曲线和一张曲面）在某点有一条公共**切线**（tangent line），或者两张曲面在某点有一个公共**切平面**（tangent plane）的几何概念．切触阶是两条曲线（或曲线和曲面，或两张曲面）在它们的公共点的邻域内接近程度的表征．见**密切**（osculation）．

А. В. Иванов 撰

【补注】 也见**切向量**（tangent vector）．　陈维桓 译

**正切 [tangent; тангенс]**

三角函数

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x};$$

另一记号是 tg．它的定义域是整个数轴除去点 $\pi/2 + n\pi$，$n = \pm 1, \pm 2, \cdots$．正切是无界的、奇的且以 $\pi$ 为周期的周期函数．正切与**余切**（cotangent）的关系是

$$\tan x = \frac{1}{\cot an\, x}.$$

正切的反函数称为**反正切**（arctangent）．

正切的导数是

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

正切的不定积分是

$$\int \tan x\, dx = -\ln|\cos x| + c.$$

正切有级数展开式

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots, \ |x| < \frac{\pi}{2}.$$

复变数 $z$ 的正切函数是具有零点 $z = k\pi$，$k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ 的亚纯函数．

Ю. А. Горьков 撰

【补注】 正切的级数展开式中的一般项为

$$\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)|B_{2n}|}{(2n)!} x^{2n-1},$$

其中 $B_{2n}$ 为 **Bernoulli 数**（Bernoulli numbers）．

亦见三角函数(trigonometric functions)

正切的加法公式(addition formula of the tangent)为:

$$\tan(x_1+x_2)=\frac{\tan x_1+\tan x_2}{1-\tan x_1\tan x_2}$$

**参考文献**

[A1] Abramovitz, M. and Stegun, I. A., Handbook of mathematical functions, Dover, reprint, 1965, p. 71 ff.

王斯雷 译

**辐角正切[tangent amplitude; тангенс амплитуды]**，椭圆正切(elliptic tangent)

两个基本的 **Jacobi 椭圆函数**(Jacobi elliptic functions)之比:

$$\mathrm{sc}\,u=\tan\mathrm{am}\,u=\frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{cn}\,u}.$$

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】

**参考文献**

[A1] Hurwitz, A. and Courant, R., Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen, 1, Springer, 1964.

[A2] Whittaker, E. T. and Watson, G. N., A course of modern analysis, Cambridge Univ. Press, 1952.

[A3] Tannery, J. and Molk, J., Eléments de la théorie des fonctions elliptiques, Chelsea, reprint, 1972.

王斯雷 译

**切丛[tangent bundle; касательное расслоение]**，微分流形 $M$ 的

**向量丛**(vector bundle) $\tau: TM\to M$，也记作 $\tau(M)$，它的全空间 $TM$ 由 $M$ 在各点 $x\in M$ 处的切空间 $TM|_x$ 组成，丛投影 $\tau$ 将 $TM|_x$ 映到点 $x$. 切丛 $\tau(M)$ 的一个截面也称为 $M$ 上的一个向量场(见**流形上的向量场**(vector field on a manifold)). 作为流形 $TM$ 上的一个图册，可由流形 $M$ 上的一个图册(atlas of the manifold)产生. 丛 $\tau(M)$ 是局部平凡的. 切丛的转移函数，可由原流形的图册的转移函数的 Jacobi 矩阵给出.

与切丛相配的主丛，是流形 $M$ 的标架丛. 切丛 $\tau(M)$ 的对偶丛 $\tau^*(M)$，称为 $M$ 的余切丛(cotangent bundle)，它的全空间由 $M$ 各点处的余切空间(cotangent spaces)构成. 它的截面是微分形式或 **Pfaff形式**(Paffian form).

流形间的可微映射 $h: M\to N$ 诱导切丛间态射 $\tau(M)\to\tau(N)$; 全空间上相应的映射 $Th: TM\to TN$ 称为 $h$ 的切映射(tangent mapping)(或 $h$ 的微分(differential)). 尤其是，当 $i: M\to N$ 为一个浸入(见**流形的浸入**(immersion of a manifold))时，$\tau(M)$ 是诱导向量丛 $i^*\tau(N)$ 的一个子丛. 商丛 $\nu(i)=i^*\tau(N)/\tau(M)$ 称为该浸入的法丛(normal bundle). 对偶地，如果 $j: M\to N$ 为一浸没(submersion)，则商丛 $\tau(M)/j^*\tau(N)$ 称为 $j$ 的浸没丛(submersion bundle). 如果分别取 $TM$, $M$ 做为 $M$, $N$, 并且令 $h=\tau: TM\to M$, 则 $\tau^*\tau(M)$ 称为二阶切丛(tangent bundle of second order).

如果 $\tau(M)$ 平凡，则称 $M$ 是可平行化流形(parallelizable manifold).

**参考文献**

[1] Godbillon, C., Géometrie différentielle et mécanique analytique, Hermann, 1969.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 可微映射 $\alpha: M\to N$ 诱导的切映射(又称微分)可以用公式

$$T\alpha(m)(v)(g)=v(g\alpha)$$

给出，其中 $g: N\to\mathbf{R}$, $\alpha: M\to N$, $v: F(M)\to\mathbf{R}$, $F(M)$ 是 $M$ 上全体光滑函数构成的代数，并且**切向量**(tangent vector)被视为一类特殊的实线性映射 $F(M)\to\mathbf{R}$.

如果采用局部坐标系以及"$\partial/\partial x_i$ 记号"(见**切向量**(tangent vector)), $T\alpha(m)$ 的矩阵可以用 $\alpha$ 在局部坐标系中的表达式的 Jacobi 矩阵给出.

在实际应用中，微分 $T\alpha: TM\to TN$ 有许多其他记号. 常见的有 $T\alpha$, $\alpha_*$, $J(\alpha)$, $D\alpha$, $d\alpha$. 最后一个记号，当 $\alpha$ 是一个函数 $\alpha: M\to\mathbf{R}$ 时，在记号或称呼上多少与 $d\alpha$ 作为 $M$ 上由 $\alpha$ 定义的 1 次微分式相一致(见**微分**(differential); **微分形式**(differential form)). 采用 $\partial/\partial x_i$ 以及 $dx_i$ 记号(见**切向量**(tangent vector)), 1 次微分式 $d\alpha$ 在局部坐标系中的表达式是

$$d\alpha=\frac{\partial\alpha}{\partial x_1}dx_1+\cdots+\frac{\partial\alpha}{\partial x_n}dx_n$$

(这里 $\partial\alpha/\partial x_i$ 是切向量 $\partial/\partial x_i$ 在 $\alpha$ 上作用的结果). 用 $t$ 表示 $\mathbf{R}$ 中点的坐标，则 $d\alpha: T_mM\to T_{\alpha(m)}\mathbf{R}$ 的表达式是

$$d\alpha\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\right]=\left[\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\right]\frac{\partial}{\partial t}=$$

$$=\left[\frac{\partial\alpha}{\partial x_1}dx_1+\cdots+\frac{\partial\alpha}{\partial x_n}dx_n\right]\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\right]\frac{\partial}{\partial t},$$

由于 $dx_j(\partial/\partial x_k)=\delta_{jk}$.

$M$ 上的微分 $r$ 标架丛(differential $r$-frame bundle)在点 $m$ 上的纤维是 $T_mM$ 中所有 $r$ 标架的集合. ($m\in M$ 处的一个 $r$ 标架($r$-frame)是 $T_mM$ 中 $r$ 个线性无关的向量的集合. 标架丛(frame bundle)指的是微分 $n$ 标架丛. $M$ 上的一个标架(frame)是标

架丛的一个截面，而标架的流形（framed manifold）则指一个流形，其上取定了一个标架.）

**参考文献**


[A1] Spivak, M., Calculus on manifolds, Benjamin Cummings, 1965（中译本：M.斯皮瓦克，流形上的微积分，科学出版社，1980）.

[A2] Hirsch, M., Differential topology, Springer, 1976.

[A3] Brickell, F. and Clark, R. S., Differentiable manifolds, v. Nostrand Reinhold, 1970.

[A4] Auslander, L. and MacKenzie, R. E., Introduction to differentiable manifolds, Dover, reprent, 1977.

[A5] Hermann, R., Geometry, physics, and systems, M. Dekker, 1973.

[A6] Borisovich, Yu., Bliznyakov, N., Izrailevich, Ya. and Fomenko, T., Introduction to topology, Kluwer, Forthcoming（译自俄文）.


段海豹 译　沈信耀 校

**切锥 [tangent cone; касательный конус]**

1）凸曲面 $S$ 在点 $O$ 的切锥是从 $O$ 发出并和以 $S$ 为界的凸体（convex body）至少相交于一个不同于 $O$ 的点的半直线构成的锥的表面 $V(O)$.（这个锥本身有时也称为立体切锥（solid tangent cone）.）换言之，$V(O)$ 是所有包含 $S$ 的半空间的交的边界且由 $S$ 在 $O$ 的支撑平面定义. 如果 $V(O)$ 是一个平面，则 $O$ 称为 $S$ 的光滑点（smooth point）；如果 $V(O)$ 是一个两面角，则 $O$ 称为脊点（ridge point）；最后，如果 $V(O)$ 是一个非退化（凸）锥，则 $O$ 称为 $S$ 的锥点（conic point）.

**参考文献**


[1] Погорелов, А. В., Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, М., 1969（英译本：Pogorelov, A. V., Extrinsic geometry of convex surfaces, Amer. Math. Soc., 1972）.


М. И. Войцеховский 撰

**【补注】**

**参考文献**


[A1] Schneider, R., Boundary structure and curvature of convex bodies, in J. Tölke and J. M. Wills (eds.): Contributions to Geometry, Birkhäuser, 1979, 13–59.


2）一个代数簇 $X$ 在一点 $x$ 的切锥是通过 $x$ 的割线的极限位置的集合. 更确切地，如果代数簇 $X$ 是嵌入在仿射空间 $A^n$ 中且由环 $k[T_1, \cdots, T_n]$ 的理想 $\mathfrak{A}$ 所定义、使得 $x \in X$ 的坐标为 $(0, \cdots, 0)$，则 $X$ 在 $x$ 的切锥 $C(X, x)$ 由 $\mathfrak{A}$ 中多项式的初始形式的理想给出.（如果 $F = F_k + F_{k+1} + \cdots$ 是 $F$ 的齐次多项式展开且 $F_k \neq 0$，则称 $F_k$ 为 $F$ 的初始形式（initial form）.）还有适合于 Noether 概形（见 [1]）的另一个定义：设 $O_{X,x}$ 是概形（scheme）$X$ 在点 $x$ 的局部环（local ring），且设 $\mathfrak{M}$ 是它的极大理想，则分次环

$$\bigoplus_{n \geq 0} (\mathfrak{M}^n / \mathfrak{M}^{n+1})$$

的谱称为 $X$ 在点 $x$ 的切锥（tangent cone）.

在某种意义下，簇 $X$ 在一点 $x$ 的邻域中与其切锥由同样的方式构造. 例如，如果切锥是约化的、正规的或正则的，则局部环 $\mathscr{O}_{X,x}$ 也是如此. $X$ 在 $x$ 的维数和重数等于切锥的维数和在它的顶点处的重数. 切锥与 **Zariski 切空间**（Zariski tangent space）重合，当且仅当 $x$ 不是 $X$ 的奇点. 簇之间的态射诱导出切锥间的映射.

**参考文献**


[1] Igusa, J.-I., Normal point and tangent cone of an algebraic variety, *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto*, **27** (1952), 189–201.

[2] Samuel, P., Méthodes d'algèbre abstraite en géométrie algébrique, Springer, 1967.

[3] Hironaka, J., Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero Ⅰ, Ⅱ, *Ann. of Math.*, **79** (1964), 109–203; 205–326.

[4] Whitney, H., Local properties of analytic varieties, in S. S. Cairns (ed.): Differential and Combinatorial Topology (Symp. in honor of M. Morse), Princeton Univ. Press, 1965, 205–244.


В. И. Данилов 撰

**【补注】**

**参考文献**


[A1] Shafarevich, I. R., Basic algebraic geometry, Springer, 1977（译自俄文）.


陆珊年 译

**正切曲线 [tangent, curve of the; тангенсоида]**

函数 $y = \tan x$ 的图形（图 a）. 正切（tangent）曲线是一具有周期 $T = \pi$ 的周期曲线，且其渐近线为 $x = (k + 1/2)\pi, k \in \mathbf{Z}$. 当 $x$ 从 $-\pi/2$ 变化到 $\pi/2$ 时，$y$ 从 $-\infty$ 单调增加到 $+\infty$；因此正切曲线由无穷多支分离的，可通过沿 $x$ 轴平移 $k\pi$ 相合的曲线组成. 与 $x$ 轴的交点是 $(k\pi, 0)$. 这些点也是曲线的拐点，它们与 $x$ 轴的倾角为 $\pi/4$.

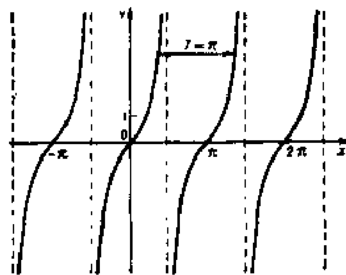



图 a

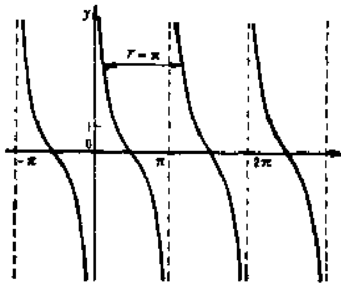


图 b

正切曲线关于 $x$ 轴的镜像反射，再左移 $\pi/2$（图 b），即成为函数 $y=\cot a n\, x=-\tan(\pi/2+x)$ 的图形（见余切（cotangent））；它的渐近线为 $x=k\pi$；它与 $x$ 轴的交点为 $((k+1/2)\pi,0)$，这些点也是曲线的拐点，与 $x$ 轴的倾角为 $3\pi/4$.

Ю. А. Горьков 撰　王斯雷 译

**切流 [tangent flow; касательный поток]**

$n$ 维 **Riemann 流形**（Riemannian manifold）$M$ 的规范正交 $k$ 标架空间 $\Omega_k$ 中具有以下性质的流．令 $\omega(t)$ 是流的任意轨道；由空间 $\Omega_k$ 的定义，$\omega(t)$ 就是在某点 $x(t)\in M$ 处的某个 $k$ 标架 $\xi_1(t),\cdots,\xi_k(t)$（即位于 $M$ 在此点的切空间中）．要求 $dx(t)/dt=\xi_1(t)$（一个变体是要求 $M$ 中的参数化曲线 $x(t)$ 上的活动标架的前 $k$ 个向量恰好是 $\xi_1(t),\cdots,\xi_k(t)$））．要想得到关于切流的有意义的结果，就必须加上各种附加的条件．所得到的结果推广了**测地流**（geodesic flow）（它是切流当 $k=1$ 而且共变导数 $D\xi_1/Dt=0$ 的特例）的某些性质．见[1]，[2]．

某流形 $M$ 的切空间（或当 $M$ 上赋有 Riemann 度量或 Finsler 度量时，则考虑单位切向量空间）上的各种类型的流有时都称为切流．例如，$M$ 上的一个**喷射**（spray）（一般地，一个二阶方程组）和 $M$ 上一个流的变分方程都叫做切流．但是这个词并未得到广泛应用．后来使用了一些较为习用的名词．

**参考文献**

[1] Арнольд, В. И., 《Докл. АН СССР》, 138 (1961), 2, 255－257.

[2] Арнольд, В. И., 《Сиб. матем. ж.》, 2 (1961), 6, 807－813.

Д. В. Аносов 撰　齐民友 译

**正切公式 [tangent formula; тангенсов формула]**

确立一个平面三角形的两条边和它们所对的角之间的关系的一个公式．设 $a$，$b$ 是三角形的两条边，$A$，$B$ 是它们所对的角．正切公式具有形式

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\tan\frac{1}{2}(A+B)}.$$

正切公式有时也称为 Regiomontanus 公式（Regiomontanus formula），J. Regiomontanus 在 15 世纪后半叶建立了这个公式．

А. Б. Иванов 撰

【补注】

**参考文献**

[A1] Berger, M., Geometry, 1－2, Springer, 1987（中译本：M. 贝尔热，几何，第一－五卷，科学出版社，1987－1991）.

[A2] Hobson, E. W., Plane trigonometry, Cambridge Univ. Press, 1925.

杜小杨 译

**双曲正切 [tangent, hyperbolic; тангенс гиперболический]**

见**双曲函数**（hyperbolic functions）．

**切线 [tangent line; касательная]**，曲线的

一条表示割线的极限位置的直线．设 $M$ 是曲线 $L$ 上一点（图 1），$M_1$ 为曲线 $L$ 上另外一点，$MM_1$ 为连接 $M$ 与 $M_1$ 的一条直线．固定点 $M$，让 $M_1$ 沿着曲线 $L$ 接近 $M$．如果当 $M_1$ 趋向于 $M$ 时，直线 $MM_1$ 趋向于极限直线 $MT$，则称 $MT$ 为 $L$ 在 $M$ 处的切线（tangent）．

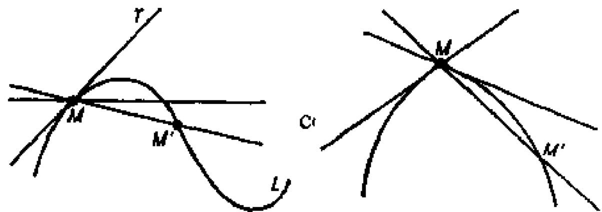


图 1　　图 2

并非每条连续曲线都有切线．当 $M_1$ 从 $M$ 点的不同侧趋于 $M$ 时，$MM_1$ 不是总会趋于一个极限位置的，或者它可能趋于两个不同的极限位置（图 2）．若在带有直角坐标的平面中一条曲线由方程 $y=f(x)$ 所确定，且 $f$ 在 $x_0$ 点可微，则在 $M$ 处的切线的斜率等于在该点 $x_0$ 的导数值 $f'(x_0)$；在该点的切线方程具有形式

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).$$

空间曲线 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ 的切线方程为

$$\tilde{\mathbf{r}}=\mathbf{r}+\lambda\frac{d\mathbf{r}}{dt},\ -\infty<\lambda<+\infty.$$

曲面 $S$ 在点 $M$ 处的切线是指通过点 $M$ 的，且位于 $S$ 在点 $M$ 的**切面**（tangent plane）上的直线．

БСЭ-3

【补注】

**参考文献**

[A1] Berger, M. and Gostiaux, B., Differential geometry, Springer, 1988 (译自法文).
[A2] Coxeter, H., Introduction to geometry, Wiley, 1963.
[A3] Guggenheimer, H., Differential geometry, McGraw-Hill, 1963.
[A4] Hilbert, D. and Cohn-Vossen, S., Geometry and the imagination, Chelsea, reprint, 1952 (译自德文).
[A5] O'Neill, B., Elementary differential geometry, Acad. Press, 1966.

沈纯理 译

**切面**[**tangent plane**; **касательная плоскость**], 曲面 $S$ 在点 $M$ 处的

通过点 $M(\in S)$ 的由如下性质所刻画的平面: 设 $M_1$ 为曲面 $S$ 上的一个动点, 当 $M_1$ 以任意方式接近 $M$ 时, $M_1$ 到该平面的距离与距离 $MM_1$ 比较起来是无穷小. 如果曲面 $S$ 由方程 $z=f(x, y)$ 给出, 则在点 $(x_0, y_0, z_0)$ 处(这里 $z_0=f(x_0, y_0)$)的切面方程具有形式

$$z-z_0=A(x-x_0)+B(y-y_0)$$

的必要和充分条件是 $f(x, y)$ 在点 $(x_0, y_0)$ 处具有全微分. 这时, $A$ 和 $B$ 是偏导数 $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ 在 $(x_0, y_0)$ 处的值. БСЭ-3

【补注】 关于参考文献, 见**切线**(tangent line).

沈纯理 译

**切层**[**tangent sheaf**; **касательный пучок**], 代数几何学中的

域 $k$ 上**代数簇**(algebraic variety)或**概形**(scheme) $X$ 上的层 $\Theta_X$, 它在仿射开子空间 $U=\mathrm{Spec}(A)$ 上的截面是环 $A$ 的 $k$ 微分的 $A$ 模 $\mathrm{Der}_k(A, A)$. 一个等价定义是: $\Theta_X$ 是从微分层 $\Omega^1_{X/k}$ 到结构层 $\mathcal{O}_X$ 的同态层 $\mathrm{Hom}(\Omega^1_{X/k}, \mathcal{O}_X)$ (见**导子模**(derivations, module of)).

对于有理 $k$ 点 $x\in X$, 层 $\Theta_X$ 的茎 $\Theta_X(x)$ 等同于 $X$ 在 $x$ 的 **Zariski 切空间**(Zariski tangent space) $T_{X,x}$, 即 $k$ 向量空间 $\mathrm{Hom}_k(\mathfrak{M}_x/\mathfrak{M}_x^2, k)$, 这里 $\mathfrak{M}_x$ 是局部环 $\mathcal{O}_{X,x}$ 的极大理想. 切层 $\Theta_X$ 可看作是与层 $\Omega^1_X$ 对偶的向量丛 $V(\Omega^1_{X/k})$ (概形 $X$ 的切丛)的截面的芽层. 当 $X$ 是光滑连通 $k$ 概形时, $\Theta_X$ 是 $X$ 上局部自由层, 其秩等于 $X$ 的维数.

**参考文献**

[1] Шафаревич, И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972 (英译本: Shafarevich, I. R., Basic algebraic geometry, Springer, 1977).

И. В. Долгачев 撰

【补注】

[A1] Hartshorne, R., Algebraic geometry, Springer, 1977.

陈志杰 译

**切向量**[**tangent vector**; **тангенциальный вектор**]

【补注】 令 $M$ 为一**微分流形**(differentiable manifold), $F(M)$ 是其上的光滑实值函数的代数. $M$ 在 $m\in M$ 的切向量就是一个 $\mathbf{R}$ 线性映射 $v: F(M)\to\mathbf{R}$ 使得

$$v(fg)=f(m)v(g)+g(m)v(f). \qquad \text{(A1)}$$

在定义中也可以使用 $M$ 在 $m$ 处的光滑函数芽的环 $F(M, m)$ (事实上更好).

$M$ 在 $m\in M$ 处的切向量构成一个 $\mathbf{R}$ 上的 $n$ 维向量空间, 这里 $n=\dim(M)$, 此空间记为 $T_mM$.

令 $\varphi: U\to\mathbf{R}^n$, $m\mapsto(x_1(m), \cdots, x_n(m))$, 这里 $(x_1, \cdots, x_n)$ 是 $M$ 在 $m$ 附近的一个坐标系. 对于 $\varphi$ 的第 $j$ 个偏导数就是切向量

$$(D_{x_j})(m)(f)=\left.\frac{\partial(f\varphi^{-1})}{\partial x_j}\right|_{\varphi(m)},$$

右方即是 $x_1, \cdots, x_n$ 的函数 $f\varphi^{-1}: \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 的在点 $\varphi(m)\in\mathbf{R}^n$ 处的通常的偏导数. 我们有 $D_{x_i}(m)(x_j)=\delta_{ij}$ (Kronecker $\delta$ 函数), 而 $D_{x_i}(m)$ 成为 $T_mM$ 的一个基.

$T_mM$ 的这个由坐标系 $(x_1, \cdots, x_n)$ 决定的基时常记作 $\{\partial/\partial x_1, \cdots, \partial/\partial x_n\}$.

$m\in M$ 处的余切向量(cotangent vector)就是一个 $\mathbf{R}$ 线性映射 $T_mM\to\mathbf{R}$ 使得 $m\in M$ 处的余切空间 $T^*_mM$ 就是 $T_mM$ 的对偶向量空间. $\{\partial/\partial x_1, \cdots, \partial/\partial x_n\}$ 的对偶基记作 $dx_1, \cdots, dx_n$. 有

$$dx_i(v)=v(x_i), \quad v\in T_mM.$$

切空间 $T_mM(m\in M)$ 的不相交并 $TM$, 连同投射 $\pi: TM\to M$, 当 $v\in T_mM$ 时 $\pi(v)=m$, 可以赋予一个可微**向量丛**(vector bundle)的结构, 即**切丛**(tangent bundle).

类似地, 余切空间 $T^*_mM$ 构成一个对偶于 $TM$ 的向量丛 $T^*M$, 称为余切丛(cotangent bundle). $TM$ 的截面即 $M$ 上的向量场(vector fields), $T^*M$ 的截面即 $M$ 上的微分 1 形式(differentiable 1-form).

令 $\alpha: M\to N$ 是微分流形的映射, 而令 $\alpha: F(N)\to F(M)$ 是诱导映射 $g\mapsto g\alpha$. 对于 $m$ 处的一个切向量 $v: F(M)\to\mathbf{R}$, 与 $\alpha$ 复合后即得一个 $\mathbf{R}$ 线性映射 $v\alpha: F(N)\to\mathbf{R}$, 它是 $N$ 在 $\alpha(m)$ 处的切向量. 这就定义了向量空间的同态 $T\alpha(m): T_mM\to T_{\alpha(m)}N$ 以及向量丛的态射 $T_\alpha: TM\to TN$.

在 $M=\mathbf{R}^n$, $N=\mathbf{R}^m$, 并分别地有整体坐标 $x_1, \cdots, x_n$ 和 $y_1, \cdots, y_m$ 的情况下, $\alpha: \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ 是由 $m$ 个可微函数给出的, 而在每一点 $x\in\mathbf{R}^n$ 处

$$T\alpha(x)\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\right]=\frac{\partial y_1}{\partial x_i}(x)\frac{\partial}{\partial y_1}+\cdots+$$

$$+\frac{\partial y_m}{\partial x_i}(x)\frac{\partial}{\partial y_m}$$

给出．所以 $T\alpha(x): T_x\mathbf{R}^n \to T_{\alpha(x)}\mathbf{R}^m$ 相对于 $T_x\mathbf{R}^n$ 的基 $\partial/\partial x_1, \cdots, \partial/\partial x_n$ 和 $T_{\alpha(x)}\mathbf{R}^m$ 的基 $\partial/\partial y_1, \cdots, \partial/\partial y_m$ 的矩阵就是 $\alpha$ 在 $x$ 处的 **Jacobi 矩阵**（Jacobi matrix）．

现令 $M \subset \mathbf{R}^r$ 是一个嵌入流形．令 $c: \mathbf{R} \to M \subset \mathbf{R}^r$, $t \mapsto c(t) = (c_1(t), \cdots, c_n(t))$ 是 $M$ 中的光滑曲线，而且 $c(0) = m$，于是

$$Tc(0)\left[\frac{\partial}{\partial t}\right] = \frac{\partial c_1}{\partial t}(0)\frac{\partial}{\partial y_1} + \cdots + \frac{\partial c_r}{\partial t}(0)\frac{\partial}{\partial y_r}. \qquad (A2)$$

$T_mM \subset T_m\mathbf{R}^r$ 中所有的切向量都可以这样做出来．把向量（A2）与 $r$ 维向量$((\partial c_1/\partial t)(0), \cdots, (\partial c_r/\partial t)(0))$等同起来，并且看作由 $m \in M \subset \mathbf{R}^r$ 点发出的有向线段，这就会回到把切空间 $T_mM$ 看成是 $\mathbf{R}^r$ 中的在 $m$ 点与 $M$ 相切的 $n$ 维平面这样一个直观的图象．

流形 $M$ 上的向量场（vector field）可以定义为 $\mathbf{R}$ 代数 $F(M)$ 上的导子（见环中的导子（derivation in a ring））$X: F(M) \to F(M)$．把它与赋值映射 $f \mapsto f(m)$, $m \in M$，复合起来，就给出一族切向量 $X_m \in T_mM$，于是 $X$"变成"了切丛（tangent bundle）的一个截面．给出了局部坐标 $x_1, \cdots, x_n$ 以后，$X$ 就可以局部地写成

$$X = a_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + a_n(x)\frac{\partial}{\partial x_n},$$

而若一个函数 $f$ 在局部坐标中写为 $f(m) = \tilde{f}(x_1(m), \cdots, x_n(m))$，则 $Xf$ 就可在局部坐标中表示为函数

$$a_1(x)\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_1} + \cdots + a_n(x)\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_n},$$

这再一次表明以"$\partial/\partial x$"为切向量记号的方便．（在实际运用中对于记号比较随便而将 $\tilde{f}$ 写成 $f$.）

令 $\mathscr{E} = \mathscr{E}(m)$ 为光滑函数在 $m \in M$ 点的芽（germ）所成的 $\mathbf{R}$ 代数．令 $\mathfrak{m} \subset \mathscr{E}$ 是在 $m$ 点为零的芽所成的理想．$\mathfrak{m}^2$ 是所有乘积 $fg$, $f, g \in \mathfrak{m}$，所成的理想．若 $x_1, \cdots, x_n$ 是在 $m$ 点的局部坐标使得 $x(m) = 0$，则 $\mathfrak{m}$ 是 $\mathscr{E}$ 中由 $x_1, \cdots, x_n \in \mathfrak{m}$ 所生成的理想，而 $\mathfrak{m}^2$ 则由 $x_ix_j$ $(i, j = 1, \cdots, n)$生成．事实上，商环 $\mathscr{E}/\mathfrak{m}^\infty$ 就是 $n$ 个变量的 $\mathbf{R}$ 幂级数环．这里 $\mathfrak{m}^\infty = \bigcap_r \mathfrak{m}^r$ 是平坦函数芽（flat function germs）的理想．（光滑函数在一点为平坦的（flat），即指它和它的一切导数均在该点为零（$\exp(-x^{-2})$ 在 $0 \in \mathbf{R}$ 就是一个例子）；"Taylor 展开映射" $\mathscr{E} \to \mathbf{R}[[x_1, \cdots, x_n]]$ 是满射，这是 **Whitney 扩张定理**（Whitney extension theorem）的一个特殊推论．

现令 $v \in T_mM$ 是 $M$ 在 $m$ 处的一个切向量．则由（A1），$v(\text{const}) = 0$ 对 $\mathscr{E}$ 中一切常值函数成立．再由（A1）$v(\mathfrak{m}^2) = 0$，于是每一个 $v \in T_mM$ 定义 $\mathrm{Hom}_\mathbf{R}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, \mathbf{R})$ 中的一个元素．$\mathrm{Hom}_\mathbf{R}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, \mathbf{R})$ 的维数是 $n = \dim M$，因为 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 的维数是 $n$（而且此元素唯一地决定了 $v$）．此外，切向量 $\partial/\partial x_1, \cdots, \partial/\partial x_n$ 明显地定义 $\mathrm{Hom}_\mathbf{R}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, \mathbf{R})$ 中的 $n$ 个线性无关元（因为 $(\partial/\partial x_i)(x_j) = \delta_{ij}$）．于是

$$T_mM \simeq \mathrm{Hom}_\mathbf{R}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, \mathbf{R})$$

即 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 的对偶空间．这种观点应用更广泛而成为解析几何学和代数几何学中切空间的定义（见**解析空间**，（analytic space）；**Zariski 切空间**（Zariski tangent space）．

**参考文献**


[A1] Hermann, R., Geometry, physics, and systems, M. Dekker, 1973.

[A2] Bishop, R. L. and Crittenden, R. J., Geometry of manifolds, Acad. Press, 1964.

[A3] Hirsch, M. W., Differential topology, Springer, 1976.

[A4] Novikov, S. P. and Fomenko, A. T., Basic elements of differential geometry and topology, Kluwer, 1991（译自俄文）.

[A5] Borisovich, Yu., Bliznyakov, N., Izrailevich, Ya. and Fomenko., T., Introduction to topology, Kluwer（即将出版，译自俄文）.


齐民友 译

**切线坐标** [**tangential coordinates; тангенциальные координаты**]

被看作坐标的直线方程的系数．在直线方程 $ux + vy + 1 = 0$ 中，系数 $u$ 和 $v$ 被称为非齐次切线坐标（non-homogeneous-tangential coordinates）．在直线的齐次方程 $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ 里，系数被称为齐次切线坐标（homogeneous tangential coordinates）．对曲线联系它的切线的切线坐标的方程称为这条曲线的切线方程（tangential equation）．代数曲线的切线方程是代数的．曲线的切线方程对偶于点坐标的方程．切线方程的次数称为曲线的类．

摘自 БСЭ-2 同名条目

【补注】 这样的坐标也称为包络坐标（envelope coordinates）．

**参考文献**


[A1] Coolidge, J., Algebraic plane curves, Dover, reprint, 1959.

[A2] Robson, A., An introduction to analytical geometry, 1, Cambridge Univ. Press, 1940, p. 59, 152, 165.


陈志杰 译

**切线变换 [tangential transformation; касательное преобразование]**

见邻近变换 ( proximity transformation ).

**Tarski 问题 [Tarski problem; Тарского проблема]**, 关于化圆为方的

【补注】 这个问题是 A. Tarski 在 1925 年提出的，问是否可能在平面内划分圆盘成为有限多个集合，再用平面内的等距将它们重组成为正方形的一个划分. 一个肯定的结果已由 M. Laczkovich 宣布.

这个问题的三维类似比较容易处理 ( 因为等距群较丰富 ). 事实上，有 Banach-Tarski 悖论 ( Banach-Tarski paradox): 如果 $A$ 与 $B$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的任何两个具有非空内部的有界子集，那么 $A$ 与 $B$ 是等度可分解的. 这里，集合 $A$ 与 $B$ 称为等度可分解的 (equidecomposable) ( 关于 $\mathbf{R}^3$ 的等距群 )，如果对于某个 $n\in\mathbf{N}$, 存在划分 $A=\bigcup_{i=1}^n A_i, B=\bigcup_{i=1}^n B_i, A_i\cap A_j=\emptyset=B_i\cap B_j$ 当 $i\neq j$，并且存在 $\mathbf{R}^3$ 的等距 ( 运动 ) $g_1,\cdots,g_n$，使得 $g_i(A_i)=B_i$. 证明利用选择公理 (axiom of choice). Banach-Tarski 悖论的一个雏形是 F. Hausdorff 的一个似非而是的例子. 这一结果也称为 Hausdorff-Banach-Tarski 定理 ( Hausdorff-Banach-Tarski theorem).

在平面内等距群是可解的并且等度可分解的集合必须具有相同的测度. 平面内的两个多边形称为剖分合同的 (congruent by dissection)，如果其中的一个能够分解成为有限多个多边形片，且可将它们用等距 ( 不计边界 ) 重组成为另一个多边形. Bolyai-Gerwien 定理 ( Bolyai-Gerwien theorem) 指出两个面积相等的多边形是剖分合同的. 利用这个结果，Tarski 在 1924 年证明平面内的两个等面积多边形是等度可分解的，并由此导致 Tarski 问题的提出.

亦见**等容与等部件的图形** ( equal content and equal shape, figures of).

**参考文献**


[A1] Wagon, S., The Banach-Tarski paradox, Cambridge Univ. Press, 1965.

[A2] Banach, S. and Tarski, A., Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruents, *Fund. Math.*, 6 (1924), 244 – 277.


林向岩 译 陆珊年 校

**Tate 代数 [Tate algebra; Тейта алгебра]**

【补注】 命 $K$ 为一域，它关于一超度量赋值 ( ultrametric valuation ) $|\cdot|$ ( 即 $|x+y|\leqslant\max(|x|,|y|)$ ) 是完全的. 赋值环 $R=\{a\in K: |a|\leqslant 1\}$ 有唯一的极大理想，$m=\{a\in K: |a|<1\}$. 域 $k=R/m$ 称为 $K$ 的剩余域.

这些域的例子是局部域: 即 $p$ 进数域 $\mathbf{Q}_p$ 的有限扩张，或者是系数在有限域 $\mathbf{F}_p=\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ 的 $t$ 的 Laurent 级数 $\mathbf{F}_p((t))$ 的域 ( 亦见**局部域** ( local field)).

令 $z_1,\cdots,z_n$ 表示不定元. 那么 $T_n(K)=K\langle z_1,\cdots,z_n\rangle$ 表示所有幂级数 $\sum a_\alpha z_1^{\alpha_1}\cdots z_n^{\alpha_n}$ 的代数，其中 $a_\alpha\in K(\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n))$ 使得 $\lim_{|\alpha|\to\infty}a_\alpha=0$ ($|\alpha|=\sum\alpha_i$). $T_n=T_n(K)$ 上的范数由 $\|\sum a_\alpha z^\alpha\|=\max|a_\alpha|$ 给出. 环 $\{f\in T_n: \|f\|\leqslant 1\}$ 记为 $T_n^0$，又 $T_n^{00}=\{f\in T_n: \|f\|<1\}$ 是 $T_n^0$ 的一理想. 那么 $\widetilde{T}_n=T_n^0/T_n^{00}$ 容易看出是多项式 $k[z_1,\cdots,z_n]$ 的环.

$K$ 代数 $T_n(K)$ 称为自由 Tate 代数 (free Tate algebra). 一个仿射型代数 (affinoid algebra)，或 Tate 代数 (Tate algebra)，$A/K$ 是某些 $T_n(K)$ 的有限扩张 ( 即存在一 $K$ 代数的同态 $T_n\to A$，使 $A$ 到一有限生成 $T_n$ 模之内 ). 一 Tate 代数 $A$ 的所有极大理想的空间 Spm ($A$) 称为一仿射型空间 (affinoid space).

$K$ 上的刚性解析空间 ( rigid analytic space ) 是由粘贴仿射型空间得到. $K$ 上的每一代数簇都有唯一的构造作为刚性解析空间. 刚性解析空间和仿射型代数是为了研究曲线和 $K$ 上的 Abel 簇的退化由 J. Tate 引进的.

$R$($K$ 的赋值环 ) 上的形式概形的理论和刚体解析空间理论紧密相关. 这可由下述事实看出.

固定一元素 $\pi\in R$，且 $0<|\pi|<1$. $R_n=R[z_1,\cdots,z_n]$ 关于由理想 $\{\pi^m R_n: m>0\}$ 给定的拓扑的完全化是 $R$ 上的严格幂级数环 ( ring of strict power series ) $R\langle z_1,\cdots,z_n\rangle$. 现在 $R\langle z_1,\cdots,z_n\rangle=T_n^0$，又 $T_n(K)$ 是 $R\langle z_1,\cdots,z_n\rangle$ 关于 $\pi$ 的局部化. 所以可以把 Spm ($T_n(K)$) 看成是 $R$ 上形式概形 Spf($R\langle z_1,\cdots,z_n\rangle$) 的 "一般纤维". 更一般地，$R$ 上的任何形式概形都产生 $K$ 上的一刚性解析空间，它是 $X$ 的 "一般纤维". $R$ 上的非同构形式概形可以有 $K$ 上相同关联刚性解析空间，再者，$K$ 上任何适当的刚性解析空间都关联于 $R$ 上的某一形式概形.

仿射型空间和仿射型代数与仿射空间和 $K$ 上的仿射环有许多共同性质. 一些最重要的是: Weierstrass 预备定理和除法定理对 $T_n(K)$ 成立 ( 亦见 **Weierstrass 定理** (Weierstrass theorem)); 仿射型代数是 Noether 环，甚至是超越环，如果域 $K$ 是完满的; 对仿射型代数 $A$ 的任何极大理想 $M$，商域 $R/M$ 是 $K$ 的一有限扩张; 许多**有限性定理** (finiteness theorems); 仿射型空间 Spm ($A$) 上的任何凝聚层 $S$ 都关联于一有限生成 $A$ 模 $M=H^0(S)$ ( 更有: $H^i(S)=0$，对 $i\neq 0$).

$T_n(K)$ 的另一解释是: $T_n(K)$ 由多圆盘 $\{(z_1,\cdots,$

$z_n) \in K$: 所有 $|z_i| \leqslant 1\}$ 上所有的"全纯函数"组成．这个解释对寻找更复杂的空间像 Drinfel'd 的对称空间 $\Omega^{(n)}$ 上的全纯函数是有用的．令 $K$ 为一局部域具有代数闭包 $\bar{K}$．那么

$$\Omega^{(n)} = \{(x_0, \cdots, x_n) \in P_{\bar{K}}^n: \sum \lambda_i x_i \neq 0$$
$$\text{对所有}\ (\lambda_0, \cdots, \lambda_n) \in P^n(K)\}$$

是一Дринфельд 对称空间(Drinfel'd symmetric space)．

这种类型的空间已经用来构造 Tate 的椭圆曲线，Mumford 曲线和曲面，Shimura 曲线和簇，等等．

**参考文献**


[A1] Bosch, S., Güntzer, U. and Remmert, R., Non-Archimedean analysis, Springer, 1984.

[A2] Drinfel'd. V. G., Coverings of $p$-adic symmetric regions, *Funct. Anal. Appl.*, **10** (1976), 2, 107–115 (*Funkts. Anal. Prilozhen.*, **10**, 2, 29–41).

[A3] Faltings, G., Arithmetische Kompaktifizierung des Modulraums der abelschen Varietäten, Lecture notes in math., 1111, Springer, 1984.

[A4] Fresnel, J. and Put, M. van der, Géométrie analytique rigide et applications, Birkhäuser, 1981.

[A5] Gerritzen, L. and Put, M. van der, Schottky groups and Mumford curves, Lecture notes in math., 817, Springer, 1980.

[A6] Mumford, D., An analytic construction of degenerating curves over complete local fields, *Compos. Math.*, **24** (1972), 129–174.

[A7] Mumford, D., An analytic construction of degenerating abelian varieties over complete rings, *Compos. Math.*, **24** (1972), 239–272.

[A8] Mumford, D., An algebraic surface with $K$ ample, $(K^2) = 9$, $p_g = q = 0$, *Amer. J. Math.*, **101** (1979), 233–244.

[A9] Raynaud, M., Variétés abéliennes en géométrie rigide, in Proc internat. Congress Math. (Nice, 1970), Gauthier-Villars, 1970, 473–477.

[A10] Tate, J., Rigid analytic spaces, *Invent. Math.*, **12** (1971), 257–289.


M. van der Put 撰　钟同德 译

## Tate 猜想[Tate conjectures; Тейта гипотезы]

J. Tate 提出的猜想(见[1])，它描述了**代数簇**(algebraic variety)的 Diophantus 性质与代数几何性质间的关系．

猜想 1．如果域 $k$ 在它的素子域上是有限生成的，$V$ 是 $k$ 上光滑射影簇，$l$ 是异于域 $k$ 的特征数的素数，又若

$$\rho_l^{(i)}: \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \to \mathrm{Aut}_{\mathbf{Q}_l} H_l^{2i}(V \otimes_k \bar{k})\ (i)$$

是自然 $l$ 进表示，$g_l^{(i)} = \mathrm{Lie}(\mathrm{Im}\ (\rho_l^{(i)}))$，则 $\mathbf{Q}_l$ 空间 $[H_l^{2i}(V \otimes_k \bar{k})\ (i)]^{g_l^{(i)}}$，即 $H_l^{2i}(V \otimes_k \bar{k})\ (i)$ 的被 $g_l^{(i)}$ 零化的元素的空间，可由 $V \otimes_k \bar{k}$ 上余维数 $i$ 的代数闭链的同调类所生成(亦见**代数闭链**(algebraic cycle))．

猜想 2．$V$ 上余维数 $i$ 的代数闭链的同调等价类群的秩等于函数 $L_{2i}(V, s)$ 在点 $s = \dim Y + i$ 处的极点的阶．

这些猜想已对大量的特殊情况(同时对域 $k$ 和簇 $V$ 加上限制)得到了验证．

**参考文献**


[1] Tate, J., Algebraic cycles and poles of zeta functions, in D. F. G. Schilling (ed.): Arithmetical Algebraic Geometry (Purdue Univ., 1963), Harper & Row, 1965, 93–110.


С. Г. Танкеев 撰

【补注】 在上面猜想 2 中 $L_i(V, s)$ 是 $V$ 的 $L$ 级数(L-series)，定义为

$$L_i(V, s) = \prod_{\mathfrak{p}} \{P_i(q^{-s})\}^{-1}.$$

这里的乘积取遍使 $V$ 有好的约化的所有素数 $\mathfrak{p}$，$P_i(q^{-s})$ 是出现在 $k$ 在 $\mathfrak{p}$ 的剩余域 $\mathbf{F}_q$ 上的簇 $V \bmod \mathfrak{p}$ 的 $\zeta$ 函数(zeta-function)内的第 $i$ 个多项式因子．

$$\zeta_{V \bmod \mathfrak{p}}(s) = \frac{P_1(q^{-s}) \cdots P_{2d-1}(q^{-s})}{P_0(q^{-s}) \cdots P_{2d}(q^{-s})}.$$

在 $V = A \times \hat{B}$ 的情形下，这里 $A$ 和 $B$ 是 Abel 簇，猜想 1 对 $i = 1$(即对除子)取以下的形式：自然同态

$$\mathrm{Hom}_k(A, B) \otimes \mathbf{Z}_l \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}(T_l(A), T_l(B))$$

是一个同构(这里 $T_l(-)$ 是 Abel 簇的 **Tate 模**(Tate module))(见[1])．这种情形的猜想已被证明的有：i) $k$ 是有限域时被 J. Tate([A1])证明；ii) $k$ 是有限域上的函数域时，被 Ю. Г. Зархин([A2])证明；iii) $k$ 是数域时被 G. Faltings([A3])证明．

Tate 猜想获证的特殊情形的例子可见：[A4] 对有限域上通常 $K3$ 曲面，[A5] 对 Hilbert 模曲面．

**参考文献**


[A1] Tate, J., Endomorphisms of Abelian varieties over finite fields, *Invent. Math.*, **2** (1966), 104–145.

[A2] Zarkin, J. G., A remark on endomorphisms of Abelian varieties over function fields of finite characteristic, *Math. USSR Izv.*, **8** (1974), 477–480.

[A3] Faltings, G., Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern, *Invent. Math.*, 73 (1983), 349–366.

[A4] Nygaard, N. O., The Tate conjecture for ordinary $K3$-surfaces over finite fields, *Invent. Math.*, **74** (1983), 213–237.

[A5] Geer, G. van der, Hilbert modular surfaces, Sprin-

ger, 1987.

[A6] Faltings, G. and Wüstholz, G. (eds.), Rational points, Vieweg, 1984.

陈志杰 译

## Tate 曲线 [Tate curve; Тейта кривая]

【补注】 Tate 曲线是借助于 $q$ 参数化对具有稳定坏约化的椭圆曲线的单值化.

设 $K$ 是**局部域**(local field)(例如 $\mathbf{C}((t))$ 或 $\mathbf{Q}_p$ 的有限扩域). 设 $E$ 是 $K$ 上**椭圆曲线**(elliptic curve)使得它有稳定约化, 则它可能有好的约化(即有整的 $j$ 不变量)或坏的约化(即有非整的 $j$ 不变量). 在稳定坏约化的情形下可以构造 $K$ 上椭圆曲线 $E_q$, 它解析地是 $K^*/q^{\mathbf{Z}}$(这里 $q^{\mathbf{Z}}$ 是 $K^*=K\setminus\{0\}$ 的子群, $K^*$ 由 $q\in K^*$ 生成), 使得 $E$ 和 $E_q$ 在 $K$ 的有限扩域上同构. 这个定理使人惊讶之处是: 从 $E$ 出发构造周期 $q$ 以及 $E_q$ 的 $j$ 值的计算都可以在不出现分母的情况下实现(因而可在任意特征数下进行). 周期 $q$ 的 Tate 曲线的 $j$ 值是系数在 $\mathbf{Z}$ 内的 $q$ 的幂级数:

$$j=q+7444+196884q^2+\cdots.$$

这样的公式可在[A4]第 15 章和[A8]找到. 亦见[A9], A. 1.1 及[A10], 附录 C, Sect. 14. 在[A2], Ⅶ中给出了 $\mathbf{Z}$ 上构造, 并应用于椭圆曲线的模概形的紧化. 到具有完全坏稳定约化的局部域上高维 Abel 簇的推广是由森田寿([A5], [A6])和 D. Mumford ([A7])给出的. 这也在[A3]和[A1]中被 G. Faltings 和 C.-L. Chai 推广到 Abel 簇的稳定约化的情形, 而且被使用于 Abel 簇的模概形的紧化理论.

亦见[A11], [A12].

### 参考文献

[A1] Chai, C.-L., Compactifications of Siegel moduli schemes, Cambridge Univ. Press, 1985.

[A2] Deligne, P. and Rapoport, M., Les schémas de modules de courbes elliptiques, in P. Deligne and W. Kuyk (eds.): Modular Functions Ⅱ, Lecture notes in math., Vol. 349, Springer, 1973, 143 − 316.

[A3] Faltings, G., Arithmetische Kompaktifizierung des Modulraums der abelsche Varietäten, in F. Hirzebruch, J. Schwermer and S. Suter (eds.): Arbeitstagung Bonn 1984, Lecture notes in math., Vol. 1111, Springer, 1985, 321 − 383.

[A4] Lang, S., Elliptic functions, Addison-Wesley, 1973.

[A5] Morikawa, H., On theta functions and abelian varieties over valuation fields of rank one, *Nagoya Math. J.*, **20** (1962), 1 − 27.

[A6] Morikawa, H., On theta functions and abelian varieties over valuation fields of rank one, *Nagoya Math. J.*, **21** (1962), 231 − 250.

[A7] Mumford, D., An analytic construction of degenerating abelian varieties over complete rings, *Compos. Math.*, **24** (1972), 129 − 174; 239 − 272.

[A8] Roquette, P., Analytic theory of elliptic functions over local fields, Vandenhoeck & Ruprecht, 1970.

[A9] Serre, J.-P., Abelian $l$-adic representations and elliptic curves, Benjamin, 1986.

[A10] Silverman, J. H., The arithmetic of elliptic curves, Springer, 1986.

[A11] Chai, C.-L. and Faltings, G., Semiabelian degeneration and compactification, Forthcoming.

[A12] Bosch, S., Lütkebohmert, W. and Raynaud, M., Néron models, Springer, Forthcoming.

F. Oort 撰 陈志杰 译

## Tate 模 [Tate module; Тейта модуль]

与一个 $p$ **可除群**($p$-divisible group) $G$ 相伴的自由 $\mathbf{Z}_p$ 模 $T(G)$, 这里 $G$ 定义在特征数 0 的完全离散赋值环 $R$ 上, $R$ 的剩余域 $k$ 的特征数是 $p$. 设 $G=\{G_\nu, i_\nu\}$ $(\nu\geqslant 0)$, 且 $T(G)=\lim_{\leftarrow} G_\nu(\bar{K})$, 这里 $\bar{K}$ 是环 $R$ 的分式域 $K$ 的代数闭包, 极限是关于映射 $j_\nu: G_{\nu+1}\to G_\nu$ 取的, 且 $i_\nu\circ j_\nu=p$, 则 $T(G)=\mathbf{Z}_p^h$, 这里 $h$ 是群 $G$ 的高度, $T(G)$ 具有 $G(\bar{K}/K)$ 模的自然结构. 函子 $G\mapsto T(G)$ 使得许多关于群 $G$ 的问题能约化为关于 $G(\bar{K}/K)$ 模的更简单的问题.

对于 **Abel 簇**(Abelian variety)可类似地定义 Tate 模. 设 $A$ 是定义在 $k$ 上的 Abel 簇, $A_{p^n}$ 是 $A(\bar{k})$ 内 $p^n$ 阶点的群, 则 $T(A)$ 定义为 $\lim_{\leftarrow} A_{p^n}$. 曲线 $X$ 的 Tate 模(Tate module of a curve)是它的 **Jacobi 簇**(Jacobi variety)的 Tate 模.

模 $T_p(X)$ 的构造可被推广到数域. 设 $K$ 是代数数域且 $k_\infty$ 是域 $k$ 的 $\mathbf{Z}_p$ 扩张(Galois 群同构于 $\mathbf{Z}_p$ 的扩张). 对于 $k$ 上 $p^n$ 次中间域 $k_n$, 设 $\mathrm{Cl}(k_n)_p$ 是域 $k_n$ 的理想类群的 $p$ 分支, 则 $T_p(k_\infty)=\lim_{\leftarrow}\mathrm{Cl}(k_n)_p$, 这里的极限是关于范映射 $\mathrm{Cl}(k_m)_p\to\mathrm{Cl}(k_n)_p$ $(m>n)$ 取的. 模 $T_p(k_\infty)$ 是以它的**岩泽不变量**(Iwasawa invariants) $\lambda$, $\mu$ 和 $\nu$ 来刻画的, 这些不变量定义为

$$|\mathrm{Cl}\,(k_n)_p|=p^{e_n}.$$

这里 $e_n=\lambda n+\mu p^n+\nu$ 对所有充分大的 $n$. 对于分圆 $\mathbf{Z}_p$ 扩张, 不变量 $\mu$ 等于 0. 对 Abel 域这也被证明([4]). 具有 $\mu>0$ 的非分圆 $\mathbf{Z}_p$ 扩张的例子已经知道(见[3]). 甚至在 $\mu=0$ 的情形下, $T_p(k_\infty)$ 也不必是自由 $\mathbf{Z}_p$ 模.

### 参考文献

[1] Tate, J., $p$-divisible groups, in T. A. Springer

(ed.): Proc. Conf. Local Fields, Springer, 1967, 158 – 183.
[2] Шафаревич, И. Р., ζ-функция, М., 1969.
[3] Iwasawa, K., On the μ-invariants of $Z_1$-extensions, in Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra, Kinikuniya, 1973, 1 – 11.
[4] Ferrero, B. and Washington, L. C., The Iwasawa invariant $\mu_p$ vanishes for abelian number fields, *Ann. of Math.*, **109** (1979), 377 – 395.

Л. В. Кузьмин 撰 陈志杰 译

**Tauber 定理** [**Tauberian theorems**; **Тауберовы теоремы**], Tauber 型定理 (theorems of Tauberian type)

寻求在级数 (或序列) 集合中, 两种给定的**求和法** (summation methods) $A$, $B$, 满足包含关系 $A \subset B$ 所需条件的定理. 在求和理论中, 最经常遇到的情形是研究方法 $B$ 与收敛的等价. Tauber 定理就涉及这类情形, 对于级数 (序列) 建立了条件, 在此条件下利用给定的方法从可和性得到收敛. 这些定理的名称都追溯到 A. Tauber ([1]), 他首先证明了关于 **Abel 求和法** (Abel summation method) 两个这种类型的定理:

1) 若级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad (*)$$

依 Abel 方法可和于和 $S$, 且 $a_n = o(1/n)$, 则级数收敛于 $S$.

2) 为了级数 (*) 依 Abel 方法可和于和 $S$ 蕴涵该级数收敛于和 $S$, 充要条件是

$$\sum_{k=0}^{n} k a_k = o(n),$$

定理 1) 是后者的深化; 也就是说, 可以将条件 $a_n = o(1/n)$ 换成 $a_n = O(1/n)$ 而予以证明. 这时就将关于级数的不同于可和性的条件称为 Tauber 条件 (Tauberian conditions). 这类条件可以用多种形式加以叙述. 对于级数 (*), 最宽泛的条件类型为

$$a_n = o\left[\frac{1}{n}\right], \; a_n = O\left[\frac{1}{n}\right], \; a_n > -\frac{H}{n}, \; a_n < \frac{H}{n},$$

其中 $H$ 为常数,

$$\sum_{k=0}^{n} k a_k = o(n),$$

及其推广, 这时自然参数 $n$ 被变量 $\tau_n$ 代替. 在 Tauber 定理中, 除了上面提到的条件之外, 还包括下述条件, 例如: 若级数 (*) 依 Borel 方法 (见 **Borel 求和法** (Borel summation method)) 可和于和 $S$ 且 $a_n = O(1/\sqrt{n})$, 则级数收敛于 $S$.

对任何正则**矩阵求和法** (matrix summation method) (亦见**正则求和法** (regular summation methods)), 存在数 $\tau_n \geq 0$, 使 $\sum_{n=0}^{\infty} \tau_n = \infty$, 并且对于这个方法条件 $a_n = o(\tau_n)$ 是 Tauber 的 (即依这个方法及条件 $a_n = o(\tau_n)$, 级数的可和性蕴涵级数的收敛性).

Tauber 条件可以用级数部分和 $S_n$ 的赋值或 $n$ 与 $m$ 之间良定关系的差 $S_n - S_m$ 的赋值来表述. 满足这种条件的 Tauber 定理有下面一些例子: 若以 $S_n$ 为部分和的级数 (*) 依 Borel 方法可和于和 $S$, 且当 $(n-m)/\sqrt{m} \to 0$ 时

$$\varliminf_{m \to \infty} (S_n - S_m) \geq 0, \; n > m,$$

则级数收敛于 $S$; 若级数 (*) 依 Abel 方法可和于和 $S$, 且部分和 $S_n$ 满足条件 $S_n = O(1)$, 则它依 Cesàro 法 $(C, 1)$ (见 **Cesàro 求和法** (Cesàro summation methods)) 可和于 $S$.

对 $n = n_k$ 时 $a_n = 0$, 级数的缺项见**缺项级数** (lacunary series), 可以用作 Tauber 条件; 这时, 条件用序列 $\{n_k\}$ 的性质有关的术语表达.

除去通常的可和性, Tauber 定理是研究求和理论中一些特殊类型的可和性 (绝对可和性, 强可和性, 加权可和性等) 的.

**参考文献**

[1] Tauber, A., Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reihen, *Monatsch. für Math.*, **8** (1897), 273 – 277.
[2] Hardy, G. H., Divergent series, Clarendon, 1949.
[3] Widder, D. V., The Laplace transform, Princeton Univ. Press, 1941.
[4] Pitt, H., Tauberian theorems, Oxford Univ. Press, 1958.
[5] Peyerimhoff, A., Lectures on summability, Springer, 1969 (译自德文).
[6] Zeller, K. and Beekmann, W., Theorie der Limitierungsverfahren, Springer, 1976.
[7] Кангро, Г. Ф., в кн.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 12, М., 1974, 5 – 70 (英译本: Kangro, G. F., Theory of summability of sequences and series, *J. Soviet Math.*, **5** (1976), 1, 1 – 45).

И. И. Волков 撰

【补注】 有许多从表面上看与之没有关系的结果被称为 Tauber 的, 还有一些虽然与上述断言的意义有关但说法不同的, 也用 "Tauber 定理" 这个词. 在 [A1] 的第 195 页这样写道: "一个定理是 Abel 的, 如果由其通常极限的假设, 能对序列的均值说些什么; 一个定理是 Tauber 的, 如果收敛能从均值有极限推出来." 设

$$a_0, a_1, a_2, \cdots \qquad (A1)$$

是一个数列, 而

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots \qquad (A2)$$

为其生成幂级数．在[2]中引进了下面的说法．“一个定理是 Abel 的，如果生成函数（A2）的性质可由其系数（A1）的性质得出．一个定理是 Tauber 的，如果系数的性质可由生成函数的性质得出．”

在（A2）中以 $e^{-s}$ 代替 $z$，且广义和为整数，那么对于 Laplace-Stieltjes 变换

$$\Phi(s)=\int_0^\infty e^{-su}d\alpha(u), \qquad (A3)$$

Abel 定理从原来的性质可得出（变换下）象的性质，但 Tauber 定理不成立．将这种说法加以推广，用现代观点就是说，Tauber 定理与（广义）函数对其 Fourier 变换，Laplace 变换或某种其他积分变换，从 0 的邻域到无穷大时的（渐近）行为有关．Abel 定理不成立．（见[A5]，p．xiii）．

上述带有 $a_n-O(1/n)$ 的定理 1）的强有力的形式是 Littlewood Tauber 定理（Littlewood Tauberian theorem）．

Hardy-Littlewood Tauber定理（Hardy-Littlewood Tauberian theorem）如下：设幂级数（A2）在 $|z|<1$ 收敛，并存在 $\gamma>0$ 使

$$\lim_{x\uparrow 1}(1-x)^\gamma\sum_{n=0}^\infty a_nz^n=A, \qquad (A4)$$

其中系数 $a_n$ 假定非负，那么当 $N\to\infty$ 时

$$\sum_{n\leqslant N}a_n\sim\frac{A}{\Gamma(1+\gamma)}N^\gamma, \qquad (A5)$$

其中 $\Gamma$ 是 $\Gamma$ 函数．

下面结果讲述 Hardy-Littlewood Tauber 定理中关于余项的一些事情．仍设 $a_n\geqslant 0$ 且用 Laplace-Stieltjes 变换

$$F(s)=\sum_{n=0}^\infty a_ne^{-ns} \qquad (A6)$$

代替（A2）来研究．假设 $s\downarrow 0$ 时，对于给定的 $\alpha>0$ 有

$$F(s)=As^{-\alpha}(1+R(s)), \qquad (A7)$$

其中 $|R(s)|\leqslant Cs^\varepsilon$（$A,C,\varepsilon$ 为正数）．那么

$$\sum_{n\leqslant X}a_n=\frac{Ax^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}(1+O(1/\ln x)). \qquad (A8)$$

这类 Tauber 定理称为带余项的 Tauber 定理（Tauberian theorems with remainder）或定量的 Tauber 定理（quantitative Tauberian theorems）．

Wiener 广义 Tauber 定理（Wiener generalized Tauberian theorem）指出：设 $K_1\in L_1(-\infty,\infty)$，它的 Fourier 变换没有实零；$K_2$ 为 $L_1(-\infty,\infty)$ 的另一元素，$f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上有界，设

$$\lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^\infty K_1(x-y)f(y)dy=A\int_{-\infty}^\infty K_1(x)dx, \qquad (A9)$$

则有

$$\lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^\infty K_2(x-y)f(y)dy=A\int_{-\infty}^\infty K_2(x)dx \qquad (A10)$$

（若 $K_1$ 的 Fourier 变换有实零，则存在 $f$ 及 $K_2$，使（9）成立，但（10）不成立）．这种类型的定理还有不少．由 Wiener 广义 Tauber 定理，Tauber 定理就像诸如 Littlewood Tauber 定理那样可以导出，这主要是恰当地选择 $K_1$ 和 $K_2$，比如见[A4]，§16．

**参考文献**


[A1] Widder, D. V., An introduction to transform theory, Acad. Press, 1971.

[A2] Postnikov, A. G., Tauberian theory and its application, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 144 (1980) (*Trudy Mat. Inst. Steklov*, 144 (1980)).

[A3] Wiener, N., Tauberian theorems, *Ann. of Math.*, 33 (1932), 1–100 (Reprinted in: N. Wiener, Generalized analysis and Tauberian theorems, MIT Press, 1965).

[A4] Wiener, N., The Fourier integral and certain of its applications, Cambridge Univ. Press, 1933.

[A5] Vladimirov, V. S., Drozzinov, Yu. N. and Zavialov, B. I., Tauberian theorems for generalized functions, Kluwer, 1988（译自俄文）.

[A6] Bruijn, N. G. de, Asymptotic methods in analysis, North-Holland & Noordhoff & Interscience, 1958.

[A7] Ganelius, T. H., Tauberian remainder theorems, Springer, 1971.

[A8] Subhankulov, M. H., Tauberian theorems with remainder, Moscow, 1976（俄文）．


罗嵩龄 译

## 重言式 [tautology; тавтология]

一个**真假值**（truth value）恒为真的命题演算公式，它的真假值不依赖于它的命题变元的真假值是“真”或者“假”．例如：$A\supset A$，$A\vee\neg A$，$(A\supset B)\supset(\neg B\supset\neg A)$．

一般地，通过验证所有命题变元真假值的有限个组合，就可以判定一个命题演算的公式是不是重言式．

В. Н. Гришин 撰

**【补注】**

**参考文献**


[A1] Manin, Yu. I., A course in mathematical logic, Springer, 1977, 31, 54（译自俄文）．


何 青 译 罗里波 校

## Taylor 公式 [Taylor formula; Тейлора формула]

函数表示为它的 $n$ 次 ($n=0,1,2,\cdots$) **Taylor 多项式** (Taylor polynomial) 与一个余项之和的表达式．假如一元实值函数 $f$ 在点 $x_0$ 为 $n$ 阶可微，它的 Taylor 公式为

$$f(x)=P_n(x)+r_n(x),$$

其中

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

是它的 **Taylor 多项式** (Taylor polynomial)，而余项 $r_n(x)$ 可以写成 Peano 形式 (Peano form)：

$$r_n(x)=o((x-x_0)^n),\ x\to x_0.$$

若函数 $f$ 在点 $x_0$ 的某个邻域 $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)(\delta>0)$ 内为 $(n+1)$ 阶可微，那么在此邻域内，余项可以写成 Schlömilch-Roch 形式 (Schlömilch-Roch form)

$$r_n(x)=$$

$$=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!p}(1-\theta)^{n-p+1}(x-x_0)^{n+1},$$

其中 $p=1,\cdots,n+1,0<\theta<1$；作为特殊情形，有 Lagrange 形式 (Lagrange form)：

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

和 Cauchy 形式 (Cauchy form)

$$r_n(x)=$$

$$=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1},$$

$$0<\theta<1,\ x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta);$$

数 $\theta$ 依赖于 $x,p$ 及 $n$.

若函数 $f$ 的 $n+1$ 阶导数在以 $x$ 和 $x_0$ 为端点的区间上可积，那么余项可以写成积分形式 (integral form)：

$$r_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

上述具有各种形式的余项的 Taylor 公式可以推广到多元函数的情形．Taylor 公式对于线性赋范空间中将子集映入类似空间的映射也是成立的，此时，余项可写成 Peano 形式或积分形式．

Taylor 公式将一定阶数可微函数的某些性质的研究，归结为相应的 Taylor 多项式性质的研究，而后者实质上要简单得多．这是 Taylor 多项式各种应用以及数值应用的基础，例如应用于函数极限的计算、极值点、拐点、凹凸性区间的研究，级数与积分的收敛性以及它们收敛或发散的速度估计等．

**参考文献**

[1] Ильин, В. А., Садовничий, В. А., Сендов, Б. Х., Математический анализ, М., 1979.

[2] Никольский, С. М., Курс математического анализа, 3 изд., т. 1, М., 1983 (中译本：C. M. 尼科尔斯基，数学分析教程，第一卷，一、二分册，人民教育出版社，1980).

Л. Д. Кудрявцев 撰

**【补注】**

**参考文献**

[A1] Apostol, T., Mathematical analysis, Addison-Wesley, 1957.

[A2] Rudin, W., Real and complex analysis, McGrow-Hill, 1974 (中译本：W．卢丁，实分析与复分析，人民教育出版社，1981).

[A3] Rudin, W., Principles of mathematical analysis, McGraw-Hill, 1976 (中译本：W．卢丁，数学分析原理，人民教育出版社，1979).

[A4] Stromberg, K., An introduction to classical real analysis, Wadsworth, 1981.

王斯雷 译

**Taylor 多项式** [**Taylor polynomial**; **Тейлора многочлен**]，关于 $n$ 次可微的函数 $f$ 在 $x=x_0$ 点的 $n$ 次的多项式

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Taylor 多项式及其所有直至 $n$ 阶的导数在点 $x=x_0$ 的值同该函数及其各阶导数在同一点的值重合：

$$f^{(k)}(x_0)=P_n^{(k)}(x_0),\ k=0,\ \cdots,\ n.$$

Taylor 多项式是函数 $f$ 当 $x\to x_0$ 时的最佳多项式逼近，其含义为：

$$f(x)-P_n(x)=o((x-x_0)^n),\ x\to x_0,\quad (*)$$

且若某个次数不超过 $n$ 的多项式 $Q_n(x)$ 具有性质

$$f(x)-Q_n(x)=o((x-x_0)^m),\ x\to x_0,$$

其中 $m\geqslant n$，则必与 Taylor 多项式 $P_n(x)$ 重合．换言之，具有性质 (*) 的多项式唯一．

若至少有一个导数 $f^{(k)}(x)$, $k=0,\ \cdots,\ n$，在点 $x=x_0$ 不为 0，则 Taylor 多项式是 **Taylor 公式** (Taylor formula) 的主部．

Л. Д. Кудрявцев 撰

**【补注】** 关于参考文献可见 **Taylor 公式** (Taylor formula)．

杨维奇 译

**Taylor 级数** [**Taylor series**; **Тейлора ряд**]

幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \qquad (1)$$

其中数值函数 $f$ 定义在点 $x_0$ 的某邻域，且在该点有各阶导数．Taylor 级数的部分和是 **Taylor 多项式**

(Taylor polynomial).

如果 $x_0$ 是复数，而函数 $f$ 定义在 $x_0$ 的复数邻域内且在 $x_0$ 有各阶导数，那么存在 $x_0$ 的邻域，使得 $f$ 在其中是它的 Taylor 级数 (1) 之和 (见**幂级数** (power series)). 但是，如果 $x_0$ 是实数，$f$ 是定义在 $x_0$ 的某实数邻域内且在 $x_0$ 点有各阶导数，那么可能不存在 $x_0$ 的邻域，使得 $f$ 在此邻域内是它的 Taylor 级数之和．例如，函数

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & 若\ x\neq 0, \\ 0, & 若\ x=0 \end{cases} \tag{2}$$

在整个实轴上是无穷次可微的，且仅在 $x=0$ 处等于 0，但它的 Taylor 级数的一切系数在该点均为 0.

如果某函数在一点的对称邻域内是一幂级数之和，那么这样的级数是唯一的，而且一定是这函数在该点的 Taylor 级数．然而，同一个幂级数可以是不同实函数的 Taylor 级数．事实上，系数全为 0 的幂级数既是在实轴上恒为 0 的函数的 Taylor 级数，也是函数 (2) 在点 0 的 Taylor 级数．

Taylor 级数 (1) 在区间 $(x_0-h, x_0+h)$ 上收敛于实值函数 $f$ 的一个充分条件是，$f$ 在该区间上的一切导数均有公共的界．

Taylor 级数可以推广到线性赋范空间中将子集映为类似空间的映射上去，特别是可推广到多元数值函数以及以矩阵为变量的函数上去．

B. Taylor 于 1715 年发表了级数 (1)，而经过简单变换可以转化为级数 (1) 的一级数，是由 Johann I. Bernoulli 于 1694 年发表的．

**参考文献**

[1] Ильин, В. А., Садовничий, В. А., Сендов, Б. Х., Математический анализ, М., 1979.

[2] Никольский, С. М., Курс математического анализа, 3 изд., т. 1, М., 1983 (中译本: С. М. 尼科尔斯基，数学分析教程，第一卷，一、二分册，人民教育出版社，1980－1981).

Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】 关于参考文献，亦见 **Taylor 公式** (Taylor formula).

**参考文献**

[A1] Stromberg, K., An introduction to classical real analysis, Wadsworth, 1981.

[A2] Dieudonné, J., Foundations of modern analysis, Acad. Press, 1960 (译自法文) (中译本: J. 迪厄多内，现代分析基础，第一、二卷，科学出版社，1982，1986).

王斯雷 译

**Teichmüller 空间** [**Teichmüller space**; **Тайхмюллера пространство**]

一个度量空间 $(M_g, d)$，它的点是抽象 Riemann 曲面 (abstract Riemann surfaces)，即具有选出基本群 $\pi_1(X)$ 生成元的等价 (关于恒等映射) 系统 $\Sigma$ 的亏格是 $g$ 的 Riemann 曲面 $X$ 的共形等价类 $\bar{X}$ (见 **Riemann 曲面的共形类** (Riemann surfaces, conformal classes of))，又其中 $\bar{X}$ 和 $\bar{X}'$ 之间的距离 $d$ 等于 $\ln K$，在此 $K$ 是 Teichmüller 映射 (Teichmüller mapping) 的膨胀 (拟保角映射 $\bar{X}\to\bar{X}'$ 给出所有这种映射中的极大最小膨胀). 由 O. Teichmüller 所引进 ([1]).

**参考文献**

[1] Teichmüller, O., Extremale quasikonforme Abbildungen und quadratische Differentialen, *Abhandl. Preuss. Akad. Wissenschaft. Math.-Nat. Kl.*, **22** (1939), 3－197.

[2A] Bers, L., Quasi-conformal mappings and Teichmüller's theorem, in Analytic Functions, Princeton Univ. Press, 1960, 89－119.

[2B] Ahlfors, L., The complex analytic structure of the space of Riemann surfaces, in Analytic Functions, Princeton Univ. Press, 1960, 45－66.

[2C] Bers, L., Spaces of Riemann surfaces, in Proc. Intern Congress Mathematicians. Edinburgh, 1958, Cambridge Univ. Press, 1959, 349－361.

[2D] Bers, L., Simultaneous uniformization, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **66** (1960), 94－97.

[2E] Bers, L., Holomorphic differentials as functions of moduli, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 67 (1961), 206－210.

[2F] Ahlfors, L., On quasiconformal mappings, *J. d'Anal. Math.*, 3 (1954), 1－58; 207－208.

[3] Крушкаль, С. Л., Квазиконформные отображения и римановы поверхности, Новосиб., 1975 (英译本: Krushkal, S. L., Quasi-conformal mappings and Riemann surfaces, Halsted, 1979).

М. И. Воицеховский 撰

【补注】

**参考文献**

[A1] Gardiner, F. P., Teichmüller theory and quadratic differentials, Wiley, 1987.

[A2] Lehto, O., Univalent functions and Teichmüller spaces, Springer, 1987.

[A3] Nag, S., The complex analytic theory of Teichmüller spaces, Wiley, 1988.

钟同德 译

**电报方程** [**telegraph equation**; **телеграфное уравнение**]

偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+(\alpha+\beta)\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha\beta u=0. \tag{1}$$

这个方程为导体中的电流强度所满足，后者是时间 $t$ 和从导体的任一定点的距离 $s$ 的函数．这里，$c$ 是光速．$\alpha$ 是容量系数．$\beta$ 是感应系数．

用变换

$$e^{\frac{1}{2}(\alpha+\beta)t}u(s,t)=v(x,y),\ x=s+ct,\ y=s-ct,$$

可将方程（1）化成形式

$$v_{xy}+\lambda v=0,\ \lambda=\left(\frac{\alpha-\beta}{4c}\right)^2. \qquad (2)$$

这个方程属于二阶双曲型方程（见**双曲型偏微分方程**（hyperbolic partial differential equation））

$$v_{xy}+av_x+bv_y+cv=f$$

的类，在它的理论中 **Riemann 函数**（Riemann function）$R(x,y;\xi,\eta)$ 起着重要的作用．对方程（2）这个函数可以显式地写为

$$R(x,y;\xi,\eta)=J_0(\sqrt{4\lambda(x-\xi)(y-\eta)}),$$

其中 $J_0(x)$ 是见 **Bessel 函数**（Bessel functions）.

参考文献

[1] Courant, R. and Hilbert, D., Methods of mathematical physics. Partial differential equations, 2, Interscience, 1965（译自德文）（中译本：R．柯朗，D．希尔伯特著，数学物理方法 Ⅱ，科学出版社，1977）.

А. П. Солдатов 撰

【补注】 在[A1]中处理了 $\alpha=-\beta$ 的特殊情形．

参考文献

[A1] John, F., Partial differential equations, Springer, 1978（中译本：F．约翰著，偏微分方程，科学出版社，1986）.

孙和生 译 陆柱家 校

## 张量代数 [tensor algebra; тензорная алгебра]

1）**张量演算**（tensor calculus）的一部分，在其中研究张量上的代数运算（见**向量空间上的张量**（tensor on a vector space））．

2）一个有单位元的交换结合环 $A$ 上酉模 $V$ 的张量代数是 $A$ 上代数 $T(V)$，它的底模有形状

$$T(V)=\bigoplus_{p=0}^{\infty}T^{p,0}(V)=\bigoplus_{p=0}^{\infty}\bigotimes^{p}V,$$

并且藉助于张量乘法在其中定义乘法（见**向量空间上的张量**）．除反变张量代数外，也考虑共变张量代数

$$T(V^*)=\bigoplus_{p=0}^{\infty}T^{0,p}(V)$$

以及混合张量代数

$$\hat{T}(V)=\bigoplus_{p,q=0}^{\infty}T^{p,q}(V).$$

如果 $V$ 是有限生成的自由模，那么 $T(V^*)$ 自然地同构于 $V$ 上一切**多重线性型**（multilinear form）的代数．任意 $A$ 模的同态 $V\to W$ 自然地定义一个张量代数的同态 $T(V)\to T(W)$．

张量代数是结合的，然而一般不是交换的．它的单位元就是环 $A=T^0(V)$ 的单位元．模 $V$ 到一个有单位元的结合 $A$ 代数 $B$ 内的任意一个线性映射可以自然地开拓为一个代数同态 $T(V)\to B$．将单位元映到单位元．如果 $V$ 是一个自由模，$(v_i)_{i\in I}$ 是它的一个基，则 $T(V)$ 是一个具有生成元系 $(v_i)_{i\in I}$ 的**自由结合代数**（free associative algebra）.

参考文献

[1] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Algebra: Algebraic structures. Linear algebra. 1. Addison-Wesley, 1974, Chapt. 1; 2（译自法文）.
[2] Кострикин, А. И., Манин, Ю. И., Линейная алгебра и геометрия, М., 1980（英译本：Kostrikin, A. I. and Manin, Yu. I., Linear algebra and geometry, Gordon & Breach, 1989）.

А. Л. Онищик 撰 郝鈵新 译

## 张量分析 [tensor analysis; тензорный анализ]

**向量分析**（vector analysis）的一种推广，研究微分流形 $M$ 上可微张量场的代数 $D(M)$ 上的微分（和积分）算子的**张量演算**（tensor calculus）的一部分．将此理论推广到比张量场更一般的几何对象，诸如张量密度、向量值的微分形式等等，也被视为张量分析的一部分．

参考文献

[1] Рашевский, П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967.
[2] Schouten, J. A., Tensor analysis for physicists, Cambridge Univ. Press, 1951.
[3] MacConnel, A. J., Applications of tensor analysis, Dover, reprint, 1957.
[4] Sokolnikoff, I. S., Tensor analysis, Wiley, 1964.

К. М. Белов 撰

【补注】 张量分析的最重要的算子把张量场映至张量场，但可能改变场的类型．

1）在向量场 $X\in D^{(1,0)}(M)$ 方向上的**共变导数**（covariant derivative）是一个线性映射 $\nabla_X$，它把向量空间 $D^{(0,1)}(M)$ 映至其自身之中，并满足下述条件：

$$\nabla_{fX+gY}Z=f\nabla_XZ+g\nabla_YZ,$$

$$\nabla_X(fZ)=f\nabla_XZ+X(f)Z,$$

这里 $X,Y,Z\in D^{(1,0)}(M)$，$f$ 和 $g$ 是 $M$ 上的光滑函数．其中向量场 $X$ 被视为关于函数的导数，即在局部坐标系 $u^1,\cdots,u^n$ 下，$X=\sum_{i=1}^n\xi^i(\partial/\partial u^i)$，对于函数 $f$ 的导数有 $X(f)=\sum_{i=1}^n\xi^i(\partial f/\partial u^i)$．由对算子 $\nabla$: $D^{(1,0)}(M)\times D^{(1,0)}(M)\to D^{(1,0)}(M)$

这样的规定，可以定义一个**线性联络**（linear connection）以及沿 $M$ 上曲线的一个**平行移动**（parallel displacement）.

共变导数对流形 $M$ 上任意张量场的推广能用下面的性质来刻画：它是一个保持张量场类型不变的，且与缩并可交换的导算子．可将一个 $(s,r)$ 型张量场视为定义在 $r$ 重相应的切空间及 $s$ 重余切空间上的一个多重线性映射的场，对于 $T\in D^{(s,r)}$，此推广可定义如下：

$$(\nabla_X T)(X_1,\cdots,X_r,\omega^1,\cdots,\omega^s)=$$
$$=\nabla_X(T(X_1,\cdots,X_r,\omega^1,\cdots,\omega^s))+$$
$$-\sum_{i=1}^{r}T(X_1,\cdots,\nabla_X X_i,\cdots,X_r,\omega^1,\cdots,\omega^s)+$$
$$-\sum_{j=1}^{s}T(X_1,\cdots,X_r,\omega^1,\cdots,\nabla_X\omega^j,\cdots,\omega^s),$$

其中 $(\nabla_X\omega)(Y)=\nabla_X(\omega(Y))-\omega(\nabla_X Y)$，$X,Y,X_1,\cdots,X_r\in D^{(1,0)}(M)$，且 $\omega,\omega_1,\cdots,\omega_s\in D^{(0,1)}(M)$．在局部坐标系下，利用上面所导入的概念以及由 $\nabla_{\partial/\partial u^i}\partial/\partial u^j=\sum_{k=1}^{n}\Gamma_{ij}^{k}\partial/\partial u^k$ 所给出的联络系数（connection coefficients）$\Gamma_{ij}^{k}$，藉助于 $T$ 的分量 $T_{i_1\cdots i_r}^{j_1\cdots j_s}$，有下列公式：

$$(\nabla_X T)_{i_1\cdots i_r}^{j_1\cdots j_s}=\sum_{k=1}^{n}\xi^k\left[\frac{\partial}{\partial u^k}(T_{i_1\cdots i_r}^{j_1\cdots j_s})+\right.$$
$$-\sum_{v=1}^{r}\sum_{l=1}^{n}\Gamma_{ki_v}^{l}T_{i_1\cdots i_{v-1}li_{v+1}\cdots i_r}^{j_1\cdots j_s}+$$
$$\left.+\sum_{\mu=1}^{s}\sum_{l=1}^{n}\Gamma_{kl}^{j_\mu}T_{i_1\cdots i_r}^{j_1\cdots j_{\mu-1}lj_{\mu+1}\cdots j_s}\right].$$

由此定义容易得出张量场 $T\in D^{(r,s)}(M)$ 的**共变微分**（covariant differential）$\nabla T\in D^{(s,r+1)}$ 为

$$(\nabla T)(X_0,X_1,\cdots,X_r,\omega^1,\cdots,\omega^s)=$$
$$=(\nabla_{X_0}T)(X_1,\cdots,X_r,\omega^1,\cdots,\omega^s),$$

其中关于第一项的张量特性可从上述关于 $\nabla$ 的法则中看出．在 $M$ 上 Riemann 度量的 Levi-Civita 联络的情形，$T$ 的共变微分关于第一个和某一个另外的共变项的迹给出了**散度**（divergence）在张量场上的推广．

2）沿向量场 $X$ 的 **Lie 导数**（Lie derivative）是由 $L_XY=[X,Y]$ 所定义的映射 $L_X$: $D^{(1,0)}(M)\to D^{(1,0)}(M)$，其中对 $M$ 上的任意光滑函数 $f$，$[X,Y](f)=X(Y(f))-Y(X(f))$．可按照与共变导数同样的方式将 Lie 导数推广到任意的张量场 $T\in D^{(s,r)}(M)$：

$$(L_XT)(X_1,\cdots,X_r,\omega^1,\cdots,\omega^s)=$$
$$=\nabla_X(T(X_1,\cdots,X_r,\omega^1,\cdots,\omega^s))+$$
$$-\sum_{i=1}^{r}T(X_1,\cdots,L_XX_i,\cdots,X_r,\omega^1,\cdots,\omega^s)+$$
$$-\sum_{j=1}^{s}T(X_1,\cdots,X_r,\omega^1,\cdots,L_X\omega^j,\cdots,\omega^s),$$

其中 $(L_X\omega)(Y)=\nabla_X(\omega(Y))-\omega(L_XY)$，$X,Y,X_1,\cdots,X_r\in D^{(1,0)}(M)$，且 $\omega,\omega^1,\cdots,\omega^s\in D^{(0,1)}(M)$．这意味着在局部坐标系下，

$$(L_XT)_{i_1\cdots i_r}^{j_1\cdots j_s}=\sum_{k=1}^{n}\xi^k\frac{\partial}{\partial u^k}(T_{i_1\cdots i_r}^{j_1\cdots j_s})+$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{v=1}^{r}\frac{\partial\xi^k}{\partial u^{i_v}}T_{i_1\cdots i_{v-1}ki_{v+1}\cdots i_r}^{j_1\cdots j_s}+$$
$$-\sum_{k=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{s}\frac{\partial\xi^{j_\mu}}{\partial u^k}T_{i_1\cdots i_r}^{j_1\cdots j_{\mu-1}kj_{\mu+1}\cdots j_s}.$$

3）所谓**外微分**（exterior differential）或**外导数**（exterior derivative）是一个将 $p$ 阶（外）微分形式 $\omega\in F^p(M)$ 映至 $p+1$ 阶微分形式 $d\omega$ 的线性算子 $d$，满足下述与微分形式楔积（wedge product）（**外积**（exterior product））的相容性：

$$d(\omega_1\wedge\omega_2)=d\omega_1\wedge\omega_2+(-1)^p\omega_1\wedge d\omega_2,$$

其中 $\omega_1\in F^p(M)$．进而，又假设对于光滑函数 $f$（即 0 阶微分形式），$df$ 是 $f$ 的通常的微分，且 $ddf=0$．这蕴含了一般地有 $dd\omega=0$．对于 $\omega\in F^p(M)$，外微分可描述为：

$$(d\omega)(X_1,\cdots,X_{p+1})=$$
$$=\sum_{j=1}^{p}(-1)^{j+1}X_j\omega(X_1,\cdots,X_{j-1},X_{j+1},\cdots,X_{p+1})+$$
$$+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_1,\cdots,X_{i-1},$$
$$X_{i+1},\cdots,X_{j-1},X_{j+1},\cdots,X_{p+1}).$$

如果在局部坐标系下 $\omega=\sum_{i_1\cdots i_p}^{n}\omega_{i_1\cdots i_p}du^{i_1}\wedge\cdots\wedge du^{i_p}$，则

$$d\omega=\sum_{i_1\cdots i_p}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\omega_{i_1\cdots i_p}}{\partial u^k}du^k\wedge du^{i_1}\wedge\cdots\wedge du^{i_p}.$$

经典向量分析中的基本算子可以用形式和外微分来描述．例如，作用在 $\mathbf{R}^3$ 中的 2 阶微分形式上的算子 $d$，相应于算子 rot(curl)．微分形式亦是**流形上的积分**（integration on manifolds）理论中适当的对象．利用外导数，可给出 **Stokes 定理**（Stokes theorem）的一般形式．

4）作为张量分析在微分几何中应用的一个例子，应该提及线性联络的**曲率张量**（curvature tensor）$R$．此张量是 $(3,1)$ 型的．利用相应的共变导数 $\nabla$ 及向量场 $X,Y,Z\in D^{(1,0)}(M)$，$R$ 可给出如下：

$$R(X,Y)Z=\nabla_X\nabla_YZ-\nabla_Y\nabla_XZ-\nabla_{[X,Y]}Z,$$

这里和通常一样，可将反变项视为一个向量值的多重线性映射．在 Riemann 度量 $g$ 的 Levi - Civita 联络下，可得出 $R$ 的分量 $R^{l}_{ikj}$ 为

$$R^{l}_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^{l}_{ik}}{\partial u^{j}} - \frac{\partial \Gamma^{l}_{ij}}{\partial u^{k}} + \sum_{\nu=1}^{n} \Gamma^{\nu}_{ik}\Gamma^{l}_{\nu j} - \sum_{\nu=1}^{n} \Gamma^{\nu}_{ij}\Gamma^{l}_{\nu k},$$

其中联络系数可由度量得出：

$$\Gamma^{l}_{jk} = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n} g^{l\nu}\left[\frac{\partial g_{j\nu}}{\partial u^{k}} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu k}}{\partial u^{j}}\right].$$

**参考文献**

[A1] Klingenberg, W., Riemannian geometry, de Gruyter, 1982.

[A2] Hicks, N. J., Notes on differential geometry, v. Nostrand, 1965.

[A3] Kobayashi, S. and Nomizu, K., Foundations of differential geometry, 1－2, Interscience, 1963.

沈纯理 译

**张量丛** [**tensor bundle**; **тензорное расслоение**]，微分流形 $M$ 上 $(p, q)$ 型的

流形 $M$ 上与切标架丛相联系的**向量丛**（vector bundle）$T^{p,q}(M)$，其标准纤维为 $\mathbf{R}^n$ 上的 $(p, q)$ 型张量空间 $T^{p,q}(\mathbf{R}^n)$（见**向量空间上的张量**（tensor on a vector space）），群 $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ 以张量表示的方式作用在 $T^{p,q}(\mathbf{R}^n)$ 上．例如，$T^{1,0}(M)$ 即为 $M$ 上的**切丛**（tangent bundle）$TM$，而 $T^{0,1}(M)$ 则为 $M$ 的余切丛 $T^*M$．一般地，张量丛同构于切丛和余切丛的张量积：

$$T^{p,q}(M) \cong \overset{p}{\otimes} TM \otimes \overset{q}{\otimes} T^*M.$$

$(p, q)$ 型张量丛的截面称为 $(p, q)$ 型张量场（tensor field），它是微分几何学中的基本研究对象．例如，$M$ 上的一个 Riemann 结构是丛 $T^{0,2}(M)$ 的光滑截面，其值为正定对称形式．从 $T^{p,q}(M)$ 的光滑截面构成了 $M$ 上光滑函数代数 $F^{\infty}(M) = D^{0,0}(M)$ 上的模 $D^{p,q}(M)$．若 $M$ 是仿紧的 Hausdorff 流形，则

$$D^{p,q}(M) \cong \overset{p}{\otimes} D^1(M) \otimes \overset{q}{\otimes} D^1(M)^*,$$

其中 $D^1(M) = D^{1,0}(M)$ 是光滑向量场模，$D^1(M)^* = D^{0,1}(M)$ 是 Pfaff 微分形式模（亦见 **Pfaff 形式**（Pfaffian form）），而张量积取在 $F^{\infty}(M)$ 上．在经典微分几何学中，张量场有时被简称为 $M$ 上的张量（tensor）．

**参考文献**

[1] Kobayashi, S. and Nomizu, K., Foundations of differential geometry, 1, Interscience, 1963.

[2] Helgason, S., Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Acad. Press, 1978.

А. Л. Онищик 撰

【补注】 向量场空间 $D^1(M)$ 通常记为 $X(M)$、Pfaff 形式空间 $D^1(M)^*$ 记为 $\Omega^1(M)$．

**参考文献**

[A1] Klingenberg, W., Riemannian geometry, de Gruyter, 1982.

沈纯理 译

**张量演算** [**tensor calculus**; **тензорное исчисление**]

研究张量和张量场的数学分支的传统的名称（见**向量空间上的张量**（tensor on a vector space）；**张量丛**（tensor bundle））．张量演算分为**张量代数**（tensor algebra）（**多重线性代数**（multilinear algebra）的本质部分）和**张量分析**（tensor analysis）（研究张量场代数上的微分算子）两部分．

张量演算是微分几何的重要组成部分．这方面首先是由 G. Ricci 和 T. Levi - Civita 系统地发展的（见[1]）；通常被称为"Ricci 演算"．

"张量"一词在 19 世纪中期已被用来描述物体的弹性形变（见**形变张量**（deformation tensor）；**应力张量**（stress tensor））．从 20 世纪初往后，张量演算作为一种工具，已在相对论中得以应用．

**参考文献**

[1] Ricci, G. and Levi-Civita, T., Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications, *Math. Ann.*, 54 (1901), 125－201.

[2] Einstein, A. and Grossmann, M., Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation, *Z. Math. Physik*, **62** (1914), 225－261.

А. Л. Онищик 撰

【补注】

**参考文献**

[A1] Schouten, J. A., Ricci calculus, Springer, 1954 (译自德文).

沈纯理 译

**张量密度** [**tensor density**; **тензорная плотность**]，伪张量（pseudo - tensor）

在一个坐标系 $x = (x^1, \cdots, x^n)$ 中被 $n^{p+q}$ 个分量 $a^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q}$ 所描述的一个几何对象，$1 \leqslant i_\nu, j_\mu \leqslant n$，在坐标变换 $x \mapsto y = (y^1, \cdots, y^n)$ 之下根据公式

$$a'^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} = \Delta^{-\kappa} a^{\alpha_1 \cdots \alpha_p}_{\beta_1 \cdots \beta_q} \frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial y^{i_p}}{\partial x^{\alpha_p}} \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial y^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{\beta_q}}{\partial y^{j_q}}$$

变换，这里 $\Delta = \det(\partial y^l / \partial x^k)$．数 $\kappa$ 称为张量密度的权（weight of the tensor density）．当 $\kappa = 0$ 时，张量密度就是张量（见**向量空间上的张量**（tensor on a vector space））．像是型、价、共变，反变等概念均可

类似于对应的张量的概念被引入．(1, 0) 型和 (0, 1) 型的张量密度称为向量密度 (vector density)．(0, 0) 型的张量密度称为标量密度 (scalar density)．

Л. П. Купцов 撰

【补注】如上定义的张量密度也称为相对张量 (relative tensor)．区别权为 $\kappa$ 的奇相对张量 (odd relative tensor)，它按上面的公式变换，和偶相对张量 (even relative tensors)，它按同样的公式变换，只是把 $\Delta$ 换成它的绝对值 $|\Delta|$．在 [A2] 里，偶张量密度就简称为"张量密度"，而奇张量密度则称为张量 $\Delta$ 密度．

**参考文献**

[A1] Spivak, M., Differential geometry, 1, Publish or Perish, 1970, p. 437 ff.

[A2] Schouten, J. A., Ricci calculus, Springer, 1954, p. 12 (译自德文).

郝钢新 译

**向量空间上的张量** [**tensor on a vector space**; **тензор на векторном пространстве**]，域 $k$ 上向量空间 $V$ 上的

向量空间

$$T^{p,q}(V) = [\overset{p}{\otimes} V] \otimes [\overset{q}{\otimes} V^*]$$

的一个元素 $t$，这里 $V^* = \mathrm{Hom}(V, k)$ 是 $V$ 的对偶空间．张量 $t$ 称为 $p$ 次反变和 $q$ 次共变的，或者称为 $(p, q)$ 型的．数 $p$ 称为张量 $t$ 的反变价 (contravariant valency)，$q$ 称为共变价 (covariant valency)，而 $p+q$ 称为一般价 (general valency)．空间 $T^{0,0}(V)$ 与 $k$ 等同，$(p, 0)$ 型张量称为反变的 (contravariant)，$(0, q)$ 型张量称为共变的 (covariant)，余下的称为混合的 (mixed)．

张量的例子．

1) 空间 $V$ 的向量 ((1, 0) 型张量)．

2) 空间 $V$ 的余向量 ((0, 1) 型张量)．

3) 任意共变张量

$$t = \sum_{i=1}^{s} h_{i1} \otimes \cdots \otimes h_{iq},$$

这里 $h_{ij} \in V^*$，由公式

$$\hat{t}(x_1, \cdots, x_q) = \sum_{i=1}^{s} h_{i1}(x_1) \cdots h_{iq}(x_q)$$

定义 $V$ 上一个 $q$ 线性型 $\hat{t}$；由空间 $T^{0,q}$ 到 $V$ 上一切 $q$ 线性型的空间 $L^q(V)$ 内的映射 $t \mapsto \hat{t}$ 是线性单射；如果 $\dim V < \infty$，则这个映射是同构映射，因为任意 $q$ 线性型都对应于某个 $(0, q)$ 型张量．

4) 类似地，$T^{p,0}(V)$ 的一个反变张量定义 $V^*$ 上一个 $p$ 线性型，如果 $V$ 是有限维的，则反过来也对．

5) 每一个张量

$$t = \sum_{i=1}^{s} x_i \otimes h_i \in T^{1,1}(V),$$

这里 $x_i \in V$，$h_i \in V^*$，由公式

$$\hat{t}(y) = \sum_{i=1}^{s} h_i(y) x_i$$

定义空间 $V$ 的一个线性变换 $\hat{t}$；如果 $\dim V < \infty$，则 $V$ 的任意线性变换都由一个 (1, 1) 型张量定义．

6) 类似地，任意 (1, 2) 型张量在 $V$ 内定义一个双线性运算，即一个 $k$ 代数结构．而且，如果 $\dim V < \infty$，则在 $V$ 内任意一个 $k$ 代数结构都由一个 (1, 2) 型张量所定义，称为这个代数的结构张量 (structure tensor)．

令 $V$ 是有限维的，$v_1, \cdots, v_n$ 是它的一个基，又令 $v^1, \cdots, v^n$ 是空间 $V^*$ 的对偶基．则张量

$$v_{i_1 \cdots i_p}^{j_1 \cdots j_q} = v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_p} \otimes v^{j_1} \otimes \cdots \otimes v^{j_q}$$

做成空间 $T^{p,q}(V)$ 的一个基．一个张量 $t \in T^{p,q}(V)$ 关于这个基的分量 $t_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_p}$ 也称为张量 $t$ 关于空间 $V$ 的基 $v_1, \cdots, v_n$ 的分量 (components)．例如，向量和余向量的分量与它们关于基 $(v_i)$ 和 $(v^i)$ 的坐标一样；(0, 2) 型张量的分量与对应于这个双线性型的矩阵的元素一样；(1, 1) 型张量的分量与对应的线性变换的矩阵的元素一样；代数的结构张量的分量与它的结构常数一样．如果 $\tilde{v}_1, \cdots, \tilde{v}_n$ 是 $V$ 的另一个基，$\tilde{v}_j = a_j^i v_i$，而 $\|b_j^i\| = (\|a_j^i\|^T)^{-1}$，则张量 $t$ 在这个基内的分量 $\tilde{t}_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_p}$ 由公式

$$\tilde{t}_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_p} = b_{k_1}^{i_1} \cdots b_{k_p}^{i_p} a_{j_1}^{l_1} \cdots a_{j_q}^{l_q} t_{l_1 \cdots l_q}^{k_1 \cdots k_p} \qquad (1)$$

定义．在这里，正如在张量计算中经常发生的那样，应用了 Einstein 的求和约定 (Einstein summation convention)：对于每一对相同的指标，其中一个在上面，一个在下面，则理解为从 1 到 $n$ 求和．反过来，如果域 $k$ 的一组依赖于空间 $V$ 的基的 $n^{p+q}$ 个元素在一个基过渡到另一个基按照公式 (1) 而转换，那么这组元素是某一个 $(p, q)$ 型张量的分量的集合．

在向量空间 $T^{p,q}(V)$ 中，张量的加法和用 $k$ 中一个标量去乘张量的运算被定义．在这些运算下对应的分量相加或用这个标量去乘．不同型的张量的乘法运算也被定义；现介绍如下．存在向量空间的自然同构

$$T^{p,q}(V) \otimes T^{r,s}(V) \cong T^{p+r,q+s}(V),$$

将

$$(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p \otimes h_1 \otimes \cdots \otimes h_q) \otimes$$

$$\otimes (x_1' \otimes \cdots \otimes x_r' \otimes h_1' \otimes \cdots \otimes h_s')$$

映射成

$$x_1 \otimes \cdots \otimes x_p \otimes x_1' \otimes \cdots \otimes x_r' \otimes$$

$$\otimes h_1 \otimes \cdots \otimes h_q \otimes h_1' \otimes \cdots \otimes h_s'.$$

于是，对于任意 $t \in T^{p,q}(V)$ 和 $u \in T^{r,s}(V)$，元素 $v = t \otimes u$ 可以看成一个 $(p+r, q+s)$ 型张量，称为 $t$ 与 $u$ 的张量积（tensor product）．积的分量按照公式

$$v^{i_1 \cdots i_{p+r}}_{j_1 \cdots j_{q+s}} = t^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} u^{i_{p+1} \cdots i_{p+r}}_{j_{q+1} \cdots j_{q+s}}$$

计算．

令 $p > 0$、$q > 0$，并且固定数 $\alpha$，$\beta$，$1 \leqslant \alpha \leqslant p$，$1 \leqslant \beta \leqslant q$．则存在一个良定义的映射 $Y^\alpha_\beta: T^{p,q}(V) \to T^{p-1,q-1}(V)$ 使得

$$Y^\alpha_\beta(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p \otimes h_1 \otimes \cdots \otimes h_q) =$$

$$= h_\beta(x_\alpha) x_1 \otimes \cdots \otimes x_{\alpha-1} \otimes x_{\alpha+1} \otimes \cdots \otimes x_p \otimes$$

$$\otimes h_1 \otimes \cdots \otimes h_{\beta-1} \otimes h_{\beta+1} \otimes \cdots \otimes h_q,$$

称为关于第 $\alpha$ 个反变指标和第 $\beta$ 个共变指标的缩并（contraction）．在分量里，缩并写成以下形式

$$(Y^\alpha_\beta t)^{i_1 \cdots i_{p-1}}_{j_1 \cdots j_{q-1}} = t^{i_1 \cdots i_{\alpha-1} k i_\alpha \cdots i_{p-1}}_{j_1 \cdots j_{\beta-1} k j_\beta \cdots j_{q-1}}.$$

例如，一个 $(1, 1)$ 型张量的缩并 $Y^1_1 t$ 就是对应的线性变换的迹．

在一个有单位元的结合交换环上任意幺模 $V$ 上的张量可类似地定义．所述的张量的例子和性质，作相应的改变，都转移到这个情形，有时需要假设 $V$ 是一个自由模或有限生成的自由模．

设在域 $k$ 上有限维向量空间 $V$ 内给定了一个非退化双线性型 $g$（例如，$V$ 是 $\mathbf{R}$ 上一个 Euclid 空间或伪 Euclid 空间）；在这一情形，$g$ 称为一个度量张量（metric tensor）．一个度量张量根据以下公式定义一个同构 $\gamma: V \to V^*$：

$$\gamma(x)(y) = g(x, y),\ x, y \in V.$$

令 $p > 0$，并且固定一个指标 $\alpha$．$1 \leqslant \alpha \leqslant p$，则公式

$$x_1 \otimes \cdots \otimes x_p \otimes h_1 \otimes \cdots \otimes h_q \mapsto$$

$$\mapsto x_1 \otimes \cdots \otimes x_{\alpha-1} \otimes x_{\alpha+1} \otimes \cdots \otimes x_p \otimes \gamma(x_\alpha) \otimes$$

$$\otimes h_1 \otimes \cdots \otimes h_q$$

定义一个同构 $\gamma^\alpha: T^{p,q}(V) \to T^{p-1,q+1}(V)$，称为第 $\alpha$ 个反变指标的下移（lowering）．换句话说，

$$\gamma^\alpha(t) = Y^\alpha_1(g \otimes t).$$

在分量里，下移一个指标有以下形式：

$$\gamma^\alpha(t)^{i_1 \cdots i_{p-1}}_{j_1 \cdots j_{q+1}} = g_{i j_1} t^{i_1 \cdots i_{\alpha-1} i i_\alpha \cdots i_{p-1}}_{j_2 \cdots j_{q+1}}.$$

类似地，可以定义上移（raising）第 $\beta$ 个共变指标的同构 $(1 \leqslant \beta \leqslant q)$：

$$\gamma_\beta: x_1 \otimes \cdots \otimes x_p \otimes h_1 \otimes \cdots \otimes h_q \mapsto$$

$$\mapsto x_1 \otimes \cdots \otimes x_p \otimes \gamma^{-1}(h_\beta) \otimes$$

$$\otimes h_1 \otimes \cdots \otimes h_{\beta-1} \otimes h_{\beta+1} \otimes \cdots \otimes h_q,$$

它将 $T^{p,q}(V)$ 映到 $T^{p+1,q-1}(V)$ 上．在分量里，上移一个指标被写成以下形式：

$$\gamma_\beta(t)^{i_1 \cdots i_{p+1}}_{j_1 \cdots j_{q-1}} = g^{j i_{p+1}} t^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_{\beta-1} j j_\beta \cdots j_{q-1}},$$

这里 $\|g^{kl}\| = (\|g_{ij}\|^T)^{-1}$．特别，首先上移度量张量 $g$ 的第一个指标，然后再上移其余的共变指标，就得到一个 $(2, 0)$ 型张量，其分量为 $g^{kl}$（一个反变度量张量（contravariant metric tensor）．有时下移的（上移的）指标并不移到第一个（最后一个）位置，而是写在下（上）一组指标中同一位置，出现空位的地方点一个点．例如，对于 $t \in T^{2,0}(V)$，张量 $\gamma^2(t)$ 的分量写成 $t^i_{\cdot j} = g_{kj} t^{ik}$ 的形式．

域 $k$ 上向量空间的任意线性映射 $f: V \to W$ 以自然方式定义线性映射

$$T^{p,0}(f) = \overset{p}{\otimes} f: T^{p,0}(V) \to T^{p,0}(W)$$

和

$$T^{q,0}(f^*) = \overset{q}{\otimes} f^*: T^{0,q}(W) \to T^{0,q}(V).$$

如果 $f$ 是同构，则线性映射

$$T^{p,q}(f): T^{p,q}(V) \to T^{p,q}(W)$$

也被定义并且 $T^{0,q}(f) = T^{q,0}(f^*)^{-1}$．对应 $f \mapsto T^{p,q}(f)$ 具有函子性质．特别，它定义群 $\mathrm{GL}(V)$ 在空间 $T^{p,q}(V)$ 里的一个线性表示 $a \mapsto T^{p,q}(a)$（张量表示（tensor representation））．

**参考文献**

[1] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Algebra: Algebraic structures. Linear algebra, 1, Addison-Wesley, 1974, Chapt. 1; 2（译自法文）．

[2] Гельфанд, И. М., Лекции по линейной алгебре, 4 изд., М., 1971（中译本：И. М. 盖尔冯得，线性代数学，高等教育出版社，1957）．

[3] Кострикин, А. И., Манин, Ю. И., Линейная алгебра и геометрия, М., 1980（英译本：Kostrikin, A. I. and Manin, Yu. I., Linear algebra and geometry, Gordon & Breach, 1989）．

[4] Постников, М. М., Линейная алгебра и дифференциальная геометрия, М., 1979.

[5] Рашевский, П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967.

А. Л. Онищик 撰 郝钢新 译

**张量积［tensor product; тензорное произведение］**

1) 含单位元的结合交换环 $A$ 上两个幺模 $V_1$ 与 $V_2$ 的张量积(tensor product of two unitary modules)是 $A$ 模 $V_1\otimes_A V_2$ 连同一个 $A$ 双线性映射

$$(x_1, x_2)\mapsto x_1\otimes x_2\in V_1\otimes_A V_2,$$

该映射在以下意义上是泛的：对于任意 $A$ 双线性映射 $\beta: V_1\times V_2\to W$，这里 $W$ 是任意 $A$ 模，存在一个唯一的 $A$ 线性映射 $b: V_1\otimes_A V_2\to W$，使得

$$\beta(x_1, x_2)=b(x_1\otimes x_2),\ x_1\in V_1,\ x_2\in V_2.$$

不计自然同构，该张量积是唯一确定的．张量积总是存在的．且可以这样构造：设 $F$ 是由集合 $V_1\times V_2$ 生成的自由 $A$ 模，其 $A$ 子模 $R$ 由形如

$$(x_1+y, x_2)-(x_1, x_2)-(y, x_2),$$

$$(x_1, x_2+z)-(x_1, x_2)-(x_1, z),$$

$$(cx_1, x_2)-c(x_1, x_2),$$

$$(x_1, cx_2)-c(x_1, x_2)$$

的元素生成，其中 $x_1, y\in V_1$，$x_2, z\in V_2$，$c\in A$；作 $F$ 模 $R$ 的商模，则 $x_1\otimes x_2=(x_1, x_2)+R$．如果去掉 $A$ 的交换性这一要求，那么类似于上面所描述的构造能够从一个右 $A$ 模 $V_1$ 与一个左 $A$ 模 $V_2$ 产生一个 Abel 群 $V_1\otimes_A V_2$，亦称为这两个模的张量积([1])．

在下文中总设定 $A$ 是交换的．

张量积具有以下性质：

$$A\otimes_A V\cong V,$$

$$V_1\otimes_A V_2\cong V_2\otimes_A V_1,$$

$$(V_1\otimes_A V_2)\otimes_A V_3\cong V_1\otimes_A(V_2\otimes_A V_3),$$

$$\left[\bigoplus_{i\in I} V_i\right]\otimes_A W\cong \bigoplus_{i\in I}(V_i\otimes_A W),$$

对于 $A$ 上任意模 $V, V_i, W$.

如果 $V_1$ 与 $V_2$ 是自由 $A$ 模，$(x_i)_{i\in I}$ 与 $(y_j)_{j\in J}$ 是 $V_1$ 与 $V_2$ 的基，那么 $(x_i\otimes y_j)_{(i,j)\in I\times J}$ 是模 $V_1\otimes_A V_2$ 的一个基．尤其，如果 $V_i$ 都是有限生成自由模（例如，一个域 $A$ 上的有限维向量空间），则

$$\dim(V_1\otimes_A V_2)=\dim V_1\cdot\dim V_2.$$

循环 $A$ 模的张量积利用公式

$$(A/I)\otimes_A(A/J)\cong A/I+J$$

计算，其中 $I$ 和 $J$ 是 $A$ 的理想．

同样可以定义任意 $A$ 模族（未必有限个）的张量积．张量积

$$\overset{p}{\otimes} V=V\otimes_A\cdots\otimes_A V\ (p\text{ 个因子})$$

称为 $A$ 模 $V$ 的 $p$ 次张量幂($p$-th tensor power)；它的元素是 $V$ 上的 $p$ 次反变张量（见**向量空间上的张量**(tensor on a vector space)）.

对于任意的 $A$ 模同态对 $\alpha_i: V_i\to W_i (i=1, 2)$ 对应于它们的张量积 $\alpha_1\otimes\alpha_2$ 是一个 $A$ 模同态：$V_1\otimes_A V_2\to W_1\otimes_A W_2$，且由公式

$$(\alpha_1\otimes\alpha_2)(x_1\otimes x_2)=\alpha_1(x_1)\otimes\alpha_2(x_2),$$

$$x_i\in V_i$$

来确定．这种运算还可以扩张到任意同态族的情形，并且它具有函子性质（见**模**(module)）．它定义了一个 $A$ 模同态

$$\mathrm{Hom}_A(V_1, W_1)\otimes_A\mathrm{Hom}_A(V_2, W_2)$$

$$\to\mathrm{Hom}_A(V_1\otimes V_2, W_1\otimes W_2),$$

如果所有的 $V_i$ 与 $W_i$ 都是自由模且有限生成，那么这是一个同构．

**参考文献**


[1] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Algebra: Algebraic structures. Linear algebra, 1, Addison-Wesley, 1974, Chapt. 1; 2 (译自法文).

[2] Kasch, F., Modules and rings, Acad. Press, 1982 (译自德文).

[3] Кострикин, А. И., Манин, Ю. И., Линейная алгебра и геометрия, М., 1980 (英译本：Kostrikin, A. I. and Manin, Yu. I., Linear algebra and geometry, Gordon & Breach, 1989).


А. Л. Онищик 撰

【补注】 张量积在（理论）物理里的一个重要解释如下．一个物体，譬如说一个质点，通常它的各种状态定义为 C 上向量空间 $V$, $V$ 是纯态 $e_i(i\in I)$ 的集合的所有复线性组合．令第二个类似物体的纯态是 $f_j(j\in J)$ 产生第二个向量空间 $W$．那么两物体的有序对的纯态是一切偶 $(e_i, f_j)$，并且这个有序对的状态空间是张量积 $V\otimes_{\mathbf{C}} W$.

2) 含单位元的结合交换环 $A$ 上的两个代数 $C_1$ 与 $C_2$ 的张量积(tensor product of two algebras)是 $A$ 上代数 $C_1\otimes_A C_2$，它是在 $A$ 模的张量积 $C_1\otimes_A C_2$ 上按下述公式引进一个乘法而得到的，

$$(x_1\otimes x_2)(y_1\otimes y_2)=(x_1y_1)\otimes(x_2y_2),$$

$$x_i, y_i\in C_i.$$

这个定义可以扩张到任意一族因子的情形．张量积 $C_1\otimes_A C_2$ 是结合的和交换的，如果两个代数 $C_i$ 均有单位元，那么它也含有单位元．如果 $C_1$ 与 $C_2$ 是

域 $A$ 上含单位元的两代数，那么 $\widetilde{C}_1 = C_1 \otimes 1$ 与 $\widetilde{C}_2 = 1 \otimes C_2$ 均为 $C_1 \otimes_A C_2$ 的子代数，它们分别同构于 $C_1$ 与 $C_2$，而且彼此元素间的乘法可交换．反之，设 $C$ 是域 $A$ 上一个含单位元的代数，$C_1$ 与 $C_2$ 是它的子代数且含有它的单位元，并且 $x_1 x_2 = x_2 x_1$ 对任意 $x_i \in C_i$．那么存在一个 $A$ 代数同态 $\varphi$: $C_1 \otimes_A C_2 \to C$，使得 $\varphi(x_1 \otimes x_2) = x_1 x_2$，$x_i \in C_i$．而 $\varphi$ 为一个同构的充分必要条件是在 $C_1$ 中存在一个 $A$ 上的基，它也是右 $C_2$ 模 $C$ 的一个基．

**参考文献**


[1] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Algebra: Algebraic structures. Linear algebra, 1, Addison-Wesley, 1974, Chapt. 1; 2 (译自法文).


А. Л. Онищик 撰

3) 两个矩阵 $A = \| a_{ij} \|$ 与 $B$ 的张量积 (tensor product of two matrices) 或 Kronecker 积 (Kronecker product) 是矩阵

$$A \otimes B = \left\| \begin{array}{c} a_{11}B \cdots a_{1n}B \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}B \cdots a_{mn}B \end{array} \right\|,$$

这里，$A$ 是含单位元的结合交换环 $k$ 上的一个 $(m \times n)$ 矩阵，$B$ 是 $k$ 上的一个 $(p \times q)$ 矩阵，而 $A \otimes B$ 是 $k$ 上的 $(mp \times nq)$ 矩阵．

矩阵的张量积的性质是：

$$(A_1 + A_2) \otimes B = A_1 \otimes B + A_2 \otimes B,$$

$$A \otimes (B_1 + B_2) = A \otimes B_1 + A \otimes B_2,$$

$$\alpha(A \otimes B) = \alpha A \otimes B = A \otimes \alpha B,$$

其中 $\alpha \in k$，

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD.$$

如果 $m = n$ 且 $p = q$，则

$$\det(A \otimes B) = (\det A)^p (\det B)^n.$$

令 $k$ 是一个域，$m = n$ 且 $p = q$．则 $A \otimes B$ 相似于 $B \otimes A$，且 $\det(A \otimes E_p - E_n \otimes B)$，其中 $E_s$ 是单位矩阵，等同于 $A$ 与 $B$ 的特征多项式的结式．

如果 $\alpha$: $V \to V'$ 与 $\beta$: $W \to W'$ 均为有限生成自由 $k$ 幺模的同态，$A$ 与 $B$ 是它们在特定基下的矩阵，那么 $A \otimes B$ 是同态 $\alpha \otimes \beta$: $V \otimes W \to V' \otimes W'$ 在由基向量的张量积所组成的基下的矩阵．

**参考文献**


[1] Halmos, P. R., Finite-dimensional vector spaces, v. Nostrand, 1958.

[2] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Algebra: Algebraic structures. Linear algebra, 1, Addison-Wesley, 1974, Chapt. 1; 2 (译自法文).


Д. А. Супруненко 撰

4) 设 $\pi_1$ 与 $\pi_2$ 分别是一个群 $G$ 在两向量空间 $E_1$, $E_2$ 里的两个表示，这两个表示的张量积 (tensor product of two representations) 是 $G$ 在 $E_1 \otimes E_2$ 里的表示 $\pi_1 \otimes \pi_2$，由条件

$$(\pi_1 \otimes \pi_2)(g)(\xi_1 \otimes \xi_2) = \\ = \pi_1(g)\xi_1 \otimes \pi_2(g)\xi_2 \qquad (*)$$

唯一确定，对一切 $\xi_1 \in E_1$, $\xi_2 \in E_2$ 和 $g \in G$．如果 $\pi_1$ 与 $\pi_2$ 分别是一个拓扑群 $G$ 在两个 Hilbert 空间 $E_1$, $E_2$ 里的连续的酉表示，那么由连续性，向量空间 $E_1 \otimes E_2$ 里的算子 $(\pi_1 \otimes \pi_2)(g)$，$g \in G$，允许唯一地扩张成为 Hilbert 空间 $E_1 \bar{\otimes} E_2$ 里的连续线性算子 $(\pi_1 \bar{\otimes} \pi_2) g$，$g \in G$ (是空间 $E_1 \otimes E_2$，关于以公式 $(\xi_1 \otimes \xi_2, \eta_1 \otimes \eta_2) = (\xi_1, \eta_1)(\xi_2, \eta_2)$ 所定义的标量积的完全化)，并且映射 $\pi_1 \otimes \pi_2$: $g \to (\pi_1 \bar{\otimes} \pi_2) g$，$g \in G$，是群 $G$ 在 Hilbert 空间 $E_1 \bar{\otimes} E_2$ 里的一个连续的酉表示 (unitary representation)，称为酉表示 $\pi_1$ 与 $\pi_2$ 的张量积 (tensor product of the unitary representations)．表示 $\pi_1 \otimes \pi_2$ 与表示 $\pi_2 \otimes \pi_1$ 是等价的 (酉等价的，如果 $\pi_1$ 和 $\pi_2$ 都是酉的)．也可以定义一个拓扑群在一般形式的拓扑向量空间里的连续表示的张量乘法运算．

А. Л. Штерн 撰

【补注】 如果 $\pi_i$ 是代数 $A_i$ 在向量空间 $E_i$ 里的一个表示，$i = 1, 2$，利用

$$(\pi_1 \otimes \pi_2)(a_1 \otimes a_2) = \pi_1(a_1) \otimes \pi_2(a_2)$$

定义张量积 $\pi_1 \otimes \pi_2$，它是 $A_1 \otimes A_2$ 在 $E_1 \otimes E_2$ 里的一个表示．假如 $A = A_1 = A_2$ 是一个双代数 (见 **Hopf 代数** (Hopf algebra))，则这个表示与上乘法 $A \to A \otimes A$ (这是一个代数同态) 的合成就产生 $A$ 的一个新的表示，(亦) 称为张量积．

假如 $G$ 是一个群，$G$ 的一个表示等同于 $G$ 的**群代数** (group algebra) $k[G]$ 的一个表示，$k[G]$ 是一个双代数，所以先前的结构给出了与上述 $(*)$ 同样的定义 ($k[G]$ 的上乘法由 $g \mapsto g \otimes g$ 给出)．

假如 $\mathfrak{g}$ 是一个 Lie 代数，$\mathfrak{g}$ 的一个表示等同于它的**泛包络代数** (universal enveloping algebra) $U\mathfrak{g}$ 的一个表示，$U\mathfrak{g}$ 同样是一个双代数 (由 $x \mapsto 1 \otimes x + x \otimes 1$, $x \in \mathfrak{g}$ 确定其上乘法)．由此可以定义一个 Lie 代数的两个表示的张量积：

$$(\pi_1 \otimes \pi_2)(x) = 1 \otimes \pi_2(x) + \pi_1(x) \otimes 1.$$

5) 拓扑空间 $X$ 上的两个向量丛 $E$ 与 $F$ 的张量积 (tensor product of two vector bundles) 是 $X$ 上向量丛 $E \otimes F$，它在点 $x \in X$ 的纤维是纤维的张量积

$E_x \otimes F_x$. 该张量积可以定义为这样的丛，它的转移函数是丛 $E$ 与丛 $F$ 在相同的平凡覆盖的转移函数的张量积（见上面矩阵的张量积（tensor product of matrices））.

**参考文献**

[1] Atiyah, M. F., *K*-theory: lectures, Benjamin, 1967.

А. Л. Онищик 撰

【补注】 对于空间 $X$ 上的一个向量丛 $E$ 与空间 $Y$ 上的一个向量丛 $F$，定义 $X \times Y$ 上的向量丛 $E \times F$（有时记作 $E \otimes F$）为 $X \times Y$ 上在 $(x, y)$ 具有纤维 $E_x \otimes F_y$ 的向量丛. 通过对角映射 $x \mapsto (x, x)$ 拉回这个丛即为上面所定义的张量积.

蒋滋梅 译

**项 [term; терм]**

用来表示对象的一个语言表示式. 例如，表示式 1，$0+1$，$\lim_{x \to 0}(\sin x)/x$ 是表示同一对象的不同的项. 一个项可以含有**自由变元**（free variable）（参数）. 依照语言的语义法则，一个项的自由变元的取值确定后，这个项的取值便唯一确定为某个对象. 例如，如果 $f$ 是一个变元，其值是可积实函数，$x$，$a$，$b$ 是三个变元，其值都是实数，则表示式 $\int_a^b f(x)dx$ 是含有三个参数的一个项，对参数的每一组值，这个项取值为一个确定的实数（$x$ 在这个项中是约束变元）. 从语法角度来看，项的特点是它们可以替换该语言的其他表示式（项和公式）中的变元，分别得到新的项和公式.

在**形式化语言**（formalized language）中，存在一些与这个语言的语义无关的形式规则，以构造项并指明项中的自由变元. 在许多种类的语言中，还存在一些规则用来确定所出现的项的种类.

В. Н. Гришин 撰

【补注】

**参考文献**

[1] Schoenfield, J. R., Mathematical logic, Addison-Wesley, 1967.

沈复兴 译 罗里波 校

**三元域 [ternary field; тернарное поле]**，平面三元环（planar ternary ring）

【补注】 一个集合 $R$，包括两个特殊元素 0 与 1，并且具有一个三元运算 $T$ 满足:

A) 对于所有的 $a,b,c \in R$，$T(a,0,c)=T(0,b,c)=c$；

B) 对于所有的 $a \in R$，$T(a,1,0)=T(1,a,0)=a$；

C) 如果 $a,b,c,d \in R$，$a \neq c$，那么存在唯一 $x \in R$，使得 $T(x,a,b)=T(x,c,d)$；

D) 如果 $a,b,c \in R$，则存在唯一的 $x \in R$，使得 $T(a,b,x)=c$；

E) 如果 $a,b,c,d \in R$，$a \neq c$，那么存在唯一 $x$，$y \in R$，使得 $T(a,x,y)=b$ 且 $T(c,x,y)=d$.

为了坐标化任意的——不必是 Desargues 的——射影平面（见 **Desargues 假定**（Desargues assumption）；**Desargues 几何学**（Desarguesian geometry）；**射影平面**（projective plane）），[A1] 中引进了三元域. [A2] 与 [A3] 中对原始定义有如下细微变动. 给定一个射影平面，固定**一般位置**（general position）的四个点：$O, X, Y, I$，且令 $A=YI \cap OX$，$B=XI \cap OY$ 与 $J=AB \cap XY$. 对于 $OY$ 上的 $\neq Y$ 的点选取坐标 $(0,y)$，这里 $y$ 跑遍一个集合 $R$ 并且 $O \in R$，指定 $(0,0)$ 为 $O$ 的坐标，$(0,1)$ 为 $B$ 的坐标. $(0,x)$ 的从 $J$ 到 $OX$ 上的射影给出坐标 $(x,0)$，并且有 $Y(x,0) \cap X(0,y)=(x,y)$（见图 A1）. $XY$ 上的点得到一个坐标 $(m)$（$m \in R$）或 $(\infty)$，这里 $\infty$ 是一个 $\notin R$ 的另外的符号，并且直线由 $[m,k]$，$[b]$ 或 $[\infty]$ 坐标化，如图 A2 所示.

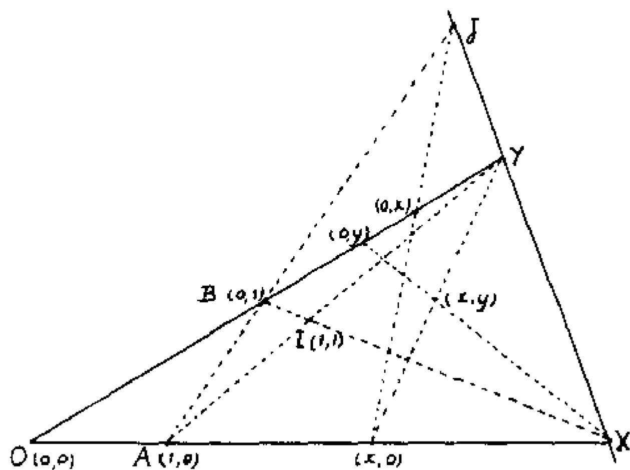



图 A1

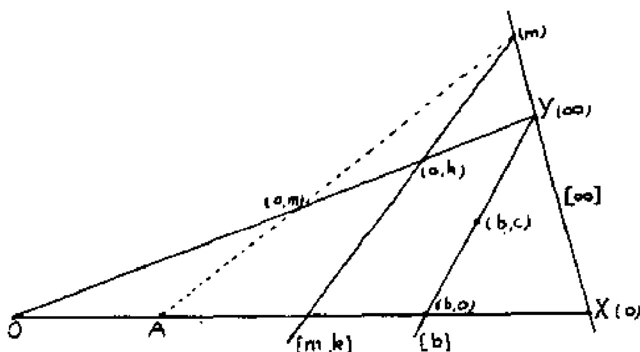



图 A2

$R$ 上的三元运算 $T$ 由 $T(a,b,c)=k$ 定义，当且仅当 $(b,c)$ 位于 $[a,k]$ 上. 关于 $T$ 的性质 A) –

E)则是射影平面的公理的推论．反之，任何三元域坐标化一个射影平面．对于基点 $O,X,Y,I$ 的不同的选取，不同的三元域可以坐标化同一平面．

在 $R$ 是有限的情形，C)与 D)等价于 D)与 E)；进一步，C)是 D)与"最多只有一个如 C)中的 $x$ 的存在性"的推论．

在一个三元域 $(R,T)$ 上，加法(addition)由 $a+b=T(1,a,b)$ 定义；在这个运算下；$R$ 是以 0 为中性元的一个**幺拟群**(loop)．乘法(multiplication)由 $ab=T(a,b,0)$ 定义；这使得 $R\setminus\{0\}$ 成为以 1 为中性元的一个幺拟群．如果对于所有的 $a,b,c,T(a,b,c)=ab+c$，则称 $(R,T)$ 是线性的(linear)．线性等价于一个很弱的关于处于从点 $(\infty)$ 透视的三角形的 Desargues 型条件(见**构形**(configuration)，特别是 Desargues 构形(Desarguesian configuration)，亦见 **Desargues 假定**(Desargues assumption))．$(R,T)$ 的其他代数性质，诸如加法与乘法的结合律与左或右的分配律，也可转化为某些 Desargues 型条件．特别地，一个以 $XY$ 作为平移线的平移平面(translation plane)，即 $XY$ 平移的群对不在 $XY$ 上的点是传递的平面，由一个(左)拟域(quasi-field)坐标化，这是一个具有结合加法并满足左分配律 $a(b+c)=ab+ac$ 的线性三元域．

**参考文献**


[A1] Hall, M., Projective planes, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 54(1943), 229 - 277.

[A2] Pickert, G., Projektive Ebenen, Springer, 1975.

[A3] Hughes, D. R. and Piper, F. C., Projective planes, Springer, 1973.


F. D. Veldkamp 撰 林向岩 译 陆珊年 校

**第三理想**[tertiary ideal; терциарный идеал]，亦称叔理想

环 $R$ 的理想 $I$，该理想不能表示成右分式理想(fractional ideal) $r(I,A)$ 和任一严格大于 $I$ 的理想 $B$ 的交．所有不可约理想都是第三理想．在 Noether 环中，第三理想与准素理想相同．见**理想的加性理论**(additive theory of ideals)；**准素理想**(primary ideal)；**准素分解**(primary decomposition)．

假设环 $R$ 满足对左和右分式理想的极大条件，并且每个理想分解成有限多个不可分解理想的交．则对每个理想 $Q$，存在一个第三根(tertiary radical)，ter$(Q)$，即 $R$ 的最大理想 $T$，使得对任何理想 $B$，

$$r(Q,T)\cap B=Q\Rightarrow B=Q.$$

同对准素理想一样，交定理，存在性定理和唯一性定理对第三理想是正确的．

分析了(环的理想的，模的子模的和其他的)左和右分式性质，导致带有分式的系统，$S$ 准素性和 $S$ 准素根的一般概念在其中自然出现．这就允许将"交"，"存在"和"唯一性定理"形式化为公理理．在这种逼近下，第三性是使得这三个定理成立的相对于准素性的唯一的概念，即是经典准素性概念的唯一"好"的推广(见[1]，[2])．

**参考文献**


[1] Андрунакиевич, В. А., Рябухин, Ю. М., 《Изв. АН СССР. Сер. Матем.》, 31(1967), 5, 1057 - 1090.

[2] Riley, J. A., Axiomatic primary and tertiary decomposition theory, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 105(1962), 117 - 201.


В. А. Андрунакиевич 撰 蔡传仁 译

**检验统计学**[test statistics; статистика, лежащая в основе критерия]

基于**统计检验**(statistical test)的统计学．

**试验**[testing; испытание]

经典统计学与**概率论**(probability theory)中的一个基本术语．在公理化处理中，它的定义是把基本事件空间任意分解为两两不交的事件．称之为"原始试验"，而由它们生成的 $\sigma$ 域的元则称为"与给定试验相关的事件"．"试验"一词基本上是用于组合词中，如"重复试验"，"独立试验"，"Марков 链中的试验"．

Ю. В. Прохоров 撰

【补注】 在西方，很少采用如此简单概念的术语．

潘一民 译

**测试**[tests; тест]，控制论中的

信息逻辑分析的最重要的手段之一．测试最初用于电路功能的控制问题．此后，在测试的基础上，**模式识别**(pattern recognition)算法得到了发展．在数学的许多领域中都可成功地采用测试这一手段．有关测试的基本问题可按以下方式简明陈述．

1．给定一个 $s$ 行 $m$ 列的矩形表，其行代表问题(标记)集 $E$ 中的元素 $e_1,\cdots,e_s$；而其列代表某一对象(模式)集 $F$ 中的元素 $f_1,\cdots,f_m$．

| | $f_1$ | | | $f_m$ |
|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| $e_s$ | | | | |

表的 $i$ 行 $j$ 列的交点的那一格填入答案 $f_j(e_i)$(对第 $j$ 个模式，第 $i$ 个标记的取值)，$f_j(e_i)$ 在某一集合 $G$

中．这样，只要对 $i_1 \neq i_2$ 有 $e_{i_1} \neq e_{i_2}$，可以把第 $j$ 列 $(1 \leqslant j \leqslant m)$ 看作一个问题集上的函数 $f_j(x)$．自然地认为任意不同的两列都有区别．由于集合 $E$ 与 $G$ 的各自特性在测试中无关紧要，此后不妨认为 $E=\{0, 1, \cdots, s-1\}$，$G=\{0, \cdots, k-1\}$，在某些情况下，在 $E$ 与 $G$ 上有一个偏序 $\leqslant$ 有时，各列也可写成概率 $p_1, \cdots, p_m(\sum_i p_i=1)$．

2．定义表的逻辑分析目标．为此，固定一个列号对 $(i, j)$ $(i \neq j)$ 的子集 $\mathfrak{N}$．特别地，$\mathfrak{N}$ 给出划分集合 $F$ 为子集的规则：$f_i$ 与 $f_j$ 不属于同一子集，当且仅当 $(i, j) \notin \mathfrak{N}^*$．子集 $\mathfrak{N}$ 可解释为一个关系，或某种性质．

有两种特殊情形：1) $\mathfrak{N}=\{(1, j), j=2, \cdots, m\}$，而 $f_1$ 是一个区别函数（此情形是与验证问题相联系的）；2) $\mathfrak{N}=\{(i, j): i, j=1, \cdots, m, i \neq j\}$，它关系到诊断问题（完全识别）．

逻辑分析的目标可简述如下：要得到一个程式，对任意的 $i$ 与 $j$，只要 $(i, j) \in \mathfrak{N}$ 此程式就可将 $f_i$ 与 $f_j$ 区别开．如果 $\mathfrak{N}$ 对应于一个 $F$ 的划分（将 $F$ 分为若干类），则问题就等价于将 $F$ 中每一给定的函数 $f$ 归入适当的类别．

以下将主要讨论这一问题．若给出了关于上表以及函数 $f$ 的完全的知识，经上面阐述的问题就有一个平凡解．在实际问题中，只能有代价地获得关于 $f$ 的知识．此外，对于很大一类问题，完全的表或者不知道，或者表太大了，无法全部用它．因而，人们总是限于用它的某一部分，即所谓代表样本(representative sample)，而问题以直观的形式出现．

3．结果应是解该问题的一种允许方式．设 $F$ 中某函数 $f$ 未知．这就需要以指定某些行 $e_{i_1}, \cdots, e_{i_r}$ 来提问的方式，使得答案 $f(e_{i_1}), \cdots, f(e_{i_r})$ 能决定 $f$ 属于那一类．给定的提问既可按所谓绝对实验(absolute experiment)（见自动机的实验(automata, experiment with)）来实现，即同时提出问题 $e_{i_1}, \cdots, e_{i_r}$，并分析其答案 $f(e_{i_1}), \cdots, f(e_{i_r})$；也可按更一般的过程，即借助于所谓条件实验(conditional experiment)来实现，即逐个依次提出问题，下一个提问的内容依赖于前面的问题和答案（并在其有偏序 $\leqslant$ 存在时，考虑 $\leqslant$）．一个条件实验可以用一个有向树来表达，其中顶点代表问题，边代表答案，分支代表实验结果．图 1 表出了 $E_1, E_2, E_3$ 三个实验的结果．

| | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $e_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $e_3$ | 0 | 0 | 0 | 1 |

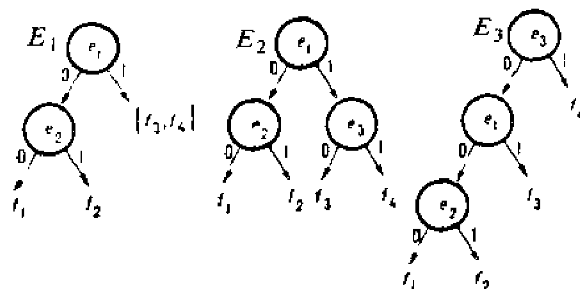


图 1

一组问题 $T$ 以及有关它（答案）的必要信息若能按性质 $\mathfrak{N}$ 去区分对象，就称之为一个初始表的测试．

在绝对实验的情形，通常一个测试理解为一组问题 $\{e_{i_1}, \cdots, e_{i_r}\}$，对任何 $\mathfrak{N}$ 中的 $(i, j)$，$T$ 中一定有 $e$ 使 $f_i(e) \neq f_j(e)$（识别 $\mathfrak{N}$ 的条件）．对多值（与非处处定义）的表，可用其他谓词来代替谓词 $\neq$．

在条件实验的情形，一个测试 $T$ 是一个有向树，以识别性质 $\mathfrak{N}$，它是由在条件实验 $E$ 中抹去最后的边而得到的．这样，在上面给出的诊断问题的例子中，$\{e_1, e_2, e_3\}$ 是它的绝对测试；而实验 $E_2$ 与 $E_3$ 导出条件测试 $T_2$ 与 $T_3$；但实验 $E_1$ 却不能导出一个条件测试．

对任何 $\mathfrak{N}$，集合 $T_0=\{e_1, \cdots, e_s\}$ 总是一个绝对测试（平凡测试(trivial test)）．如果一个表的行列数很大，则平凡测试导致一个十分费功夫的逻辑分析过程．从而就发生了构造简化测试的问题．为此，先定义测试 $T$ 的复杂性(complexity) $l(T)$ 的概念．下面给出几种不同的绝对测试复杂性的定义：

$$l_1(T)=r,$$

这里 $l_1(T)$ 表示测试的“重数”，即测试中元素的个数；

$$l_2(T)=\sum_{j=1}^{r} l(e_{i_j}),$$

其中 $l(e_{i_j})$ 为完成提问 $e_{i_j}$ 所需的时间，$l_2(T)$ 则是作序贯提问（元素的样本）所需测试时间的度量；

$$l_3(T)=\max l(e_{i_j}),$$

它表示并行提问（元素的样本）所需的测试时间．

对条件测试也可引入类似的复杂性表征，即从对应树出发，将树的顶点数、全树长（即树的总边数）以及一个分支的最大长度都表示出来．如果表中各列出现的概率为 $p_1, \cdots, p_m$，则量 $\sum_{i=1}^{m} l_i p_i$（其中 $l_i$ 是指向 $f_i$ 的树的分支长度）也是一个自然的复杂性度量．对给定的表，以 $\mathfrak{N}$ 为控制目标，在上述控制方法与复杂性度量下，一个测试称为最小的(minimal)，如果它具有最小的复杂性．最小测试的构造是测试理论的中心问题之一．其原因可由一个绝对测试的例来表明（这里集合 $E$ 与 $G$ 不是偏序集）．对每一个

表，存在一个测试 $T$ 使得 $l_1(T) \leqslant \min(s, m-1)$，而且还可以描绘出全部以 $\min(s, m-1)$ 为最优上界的表．同时，对 $m = m(s)$，$s \to +\infty$，对几乎全部的表

$$\log_2 m \leqslant l_1(T_{\min}) \leqslant 2\log_2 m,$$

换句话说，对很广一类参数值，最小测试 $T_{\min}$ 比上述测试都简单．

有许许多多构造最小测试的算法，例如，去检查集合 $\{e_1, \cdots, e_s\}$ 的子集的绝对测试，以及去检查分枝数与顶点数均有界的树的条件测试等．然而无论哪种算法都是极其费功夫的．最小测试的构造是与所谓极端测试的构造相联系的．极端测试的概念使得可以从全部测试的集合中挑选那些在某种意义下无冗余的测试．对一个原始表及 $\mathfrak{N}$，一个绝对测试（无偏序 $\leqslant$）$T$ 称为极端的（extremal），如果它没有真子集 $T' \subseteq T$，使得对 $\mathfrak{N}$，$T'$ 也是一个测试．极端测试的概念可借助于集合 $\{f_1, \cdots, f_m\}$ 的划分来表达，令 $R_T$ 是表的列的这样一个划分：它使该表的任何两列属于同类当且仅当它们对 $T$ 中的全部问题都有相同的答案．测试 $T$ 是极端的，当且仅当对任何两个 $T$ 的不同子集 $T'$ 与 $T''$，如 $T'' \subseteq T'$ 且 $T' \neq T''$，则必存在一对 $(i, j) \in \mathfrak{N}$ 使得在 $T''$ 中，$f_i \equiv f_j$，而在 $T'$ 中则不然．这等价于：对于 $\mathfrak{N}$，划分 $R_{T'}$ 是划分 $R_{T''}$ 的细分．对极端测试 $T$，有 $l_1(T) \leqslant m-1$．另一方面，对任一测试，一定可以删去其中部分元素而得到一个极端测试．

对条件测试（无 $\leqslant$），极端性意味着每一个序贯提问 $e$ 是这样选取的，使得至少 $\mathfrak{N}$ 中一个对 $(i, j)$，在提问 $e$ 前是属于划分的同一子块，而 $f_i(e) \neq f_j(e)$，因而经提问 $e$ 将它们归入划分的不同子块．

在前面的例子中，测试 $T = (e_1, e_2, e_3)$ 是一极端绝对测试，而 $T_2$ 与 $T_3$ 是极端条件测试．测试 $T_2$ 肯定比绝对测试 $T$ 在时间上较为经济，因为 $T$ 中各诊断情况均需提问 3 次，而在 $T_2$ 中每种诊断情况只需提问 2 次．将上述例子一般化，容易构造一个表，使得它的最小绝对测试长度为 $m-1$，但在某个条件测试中分支的最大长度只有 $\log_2 m$．这是条件测试相对于绝对测试最大的优点．

在集合 $E$ 与 $G$ 中有偏序 $\leqslant$ 的情况下，极端性的定义变得远为复杂．有关自动机诊断的自动机函数 $\{f_1, \cdots, f_m\}$ 的表的复杂性已有定义（见**自动机的实验**（**automata, experiments with**））．这里 $E$ 与 $G$ 中的元素是由字母表 $A$ 与 $B$ 组成的字；而关系 $x \leqslant y$ 是指字 $x$ 是字 $y$ 的前面部分．当一个字 $e = a_1 \cdots a_t$ 输入自动机，则所有 $e' = a_1 \cdots a_{t'}$，$t' \leqslant t$（字 $e$ 的所有前面部分）也输入了自动机．从而冗余可能是由这元素 $e$ 产生的．更确切地说，一个提问 $e = a_1 \cdots a_t$ 称为不可约的（irreducible），如果对任意的 $v = 1, \cdots, t-2$，以下二者必居其一：(1) 从字 $a_1 \cdots a_v$ 到字 $a_1 \cdots a_{v+1}$ 的转移涉及一个对 $(i, j) \in \mathfrak{N}$，其中 $i$ 与 $j$ 同属于划分 $R(a_1 \cdots a_v)$ 的一个子块；(2) 能以向 $(f_1, \cdots, f_m)$ 中的一个新状态的转移来向前进一步．对于 $v = t-1$，转移肯定使上述划分发生．事实上，只要从字中抹去一些片断使原字所引起的划分仍全部保持，就可以使每一个字都变为不可约的．现在，如附加所有 $T$ 的元素均为不可约的条件，就使绝对极端测试的概念得到推广．条件极端测试的概念有两个追加条件：1) 若在某一阶段选择了提问 $e_v$，则在下一步必须跟着选择 $e_t: e_v \leqslant e_{v+1}$；2) 对应于树 $T$ 上极端顶点的提问必须均不可约．

在测试的理论中有以下问题：构造寻找不同类型测试的有效算法；极端测试总数的估计；测试与表的分类；关于表结构的进一步信息对于测试的复杂性及其构造的有效性的影响的研究．

诊断问题的全部系列归结为表的形式．

1) 电路错误的寻觅（见**控制系统的可靠性和检验**（**reliability and inspection of control systems**））这里，一个待测试的电路 $\Sigma$ 是由一个 Boole 函数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 来实现的．集合 $E$ 由全部 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 组成，$s = 2^n$，$G = \{0, 1\}$，而 $F$ 由 Boole 函数 $\{f_1, \cdots, f_m\}$ 组成，它们表征线路的状态是否正确．

2) 自动机控制．这里，表中通常有无穷多行（输入字集是无限的）．然而，为了控制，只需要那些不可约字的初始片断构成的字，其字长有一个常数上界，而此上界仅依赖于 $m$ 与 $f_1, \cdots, f_m$ 的状态数．因而结果表是有限的．

3) 医学中的诊断问题．为诊断某类疾病，设置一个表，其列对应于症状，而行对应于这类疾病有意义的症兆的表征集．如果症兆是以离散形式表达的（例如体温正常与否，血压正常与否等），于是就得到一个上述类型的表，于是如果症兆集充分大，则每两列均不同．

4) 几何形状识别．假设离散表中每格可有 0, 1 两种符号，它们各自有其特定的实现，而以它们的大小和位置加以区别（见图 2）．要对表中每一格上的状态来提问（是否有阴影），并由此发现写入的记号是什么．这里 $e_1, \cdots, e_s$ 是格中数字，$G = \{0, 1\}$，$f_1, \cdots, f_m$ 均取值为 0 或 1．如果格 $e$ 中为阴影的，则 $f_i(e) = 1$，否则为 0．

5) 博奕论问题．著名的"战舰问题"实际上是去相继选择一系列方格，由合作人宣读每个选择的考查结果，并由此判断敌方战舰的布置的问题．这里，可以造一个表，其列表征所布置的不同战舰（如识别问

题，由若干"0"与"1"构成）．条件测试是解决此问题的一种方法．

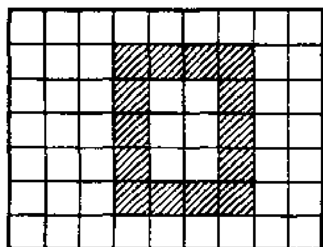


图 2

6) Boole 函数的最小化．它归结为测试问题的特殊情况，其中表描述了集合 $N_f$（使 $f=1$ 的点集）由所谓最大面（对应于 $f$ 的简单内涵）的覆盖情况．

许多**经典组合问题**（classical combinatorial problems）可以看作测试问题．例如推销员旅行问题，背包问题，以及多种求极值问题．

测试问题使得可以去分析标记之间的逻辑关系，并引入标记的重要性的度量．例如，可以说一个标记的重要性定义为所有极端测试总数之比．在应用问题求解中，对于构造启发性算法，建立标记的重要性的度量是很有用的．在地质学，经济学，医学等领域的诊断问题中，这个思路都有很成功的应用．

**参考文献**

[1] Яблонский, С. В., Чегис, И. А., 《Успехи матем. наук》, 10 (1955), 4, 182 – 184.

[2] Соловьев, Н. А., Тесты, Новосиб., 1978.

[3] Дмитриев, А. Н., Журавлев, Ю. И., Кренделев, Ф. П., 《Дискретный анализ》, 1966, 7, 3 – 5.

С. В. Яблонский 撰

【补注】

**参考文献**

[A1] Batchelor, B. G., Pattern recognition, Plenum, 1978.

[A2] Clark, K. L. and Cowell, D. F., Programs. machines. and computation, McGraw-Hill, 1976.

[A3] Duda, O. and Hart, P. E., Pattern classification and scene analysis, Wiley, 1973.

[A4] Nelson, R. J., Introduction to automata, Wiley, 1968.

[A5] Trakhtenbrot, B. A. and Bardzdin, Ya. M., Finite automata, North-Holland, 1973.

[A6] Weihrauch. K., Computability, Springer, 1987.

钱敏平 译

**四圆坐标** [**tetracyclic coordinates; тетрациклические координаты**]，平面中一点的

复反演平面中一点 $(x)$ 的一种齐次坐标 $x_0:x_1:x_2:x_3$．不全为零的数 $x_r$ 由关系

$$(x,x)=x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$$

联系．满足线性方程

$$(y,x)\equiv y_0x_0+y_1x_1+y_2x_2+y_3x_3=0$$

的所有点 $(x)$ 称为构成一个具有"坐标" $(y)$ 的圆（circle）．两个圆 $(y)$ 和 $(z)$ 是正交的（orthogonal），如果 $(y,z)=0$；是相切的（tangent），如果

$$(y,y)(z,z)-(y,z)^2=0.$$

如果两个圆 $(y)$ 和 $(z)$ 相交，则表达式

$$\frac{(y,z)}{\sqrt{(y,y)}\sqrt{(z,z)}}$$

度量了它们夹角的余弦（或它们的反演距离的双曲余弦）．

在三维情形，连同附加坐标 $x_4$，得到类似的**五球坐标**（pentaspherical coordinates），它以球面代替圆．

根据另一种只包含实数的定义，平面内的点与圆的四圆坐标可利用**球极平面投影**（stereographic projection）引入．这里平面内一点的四圆坐标是在球极平面投影下，球面上对应于它的点的齐次坐标．平面中一个圆的四圆坐标是空间中球面上圆的平面的极点的齐次坐标，该点在关于这个球面的球极平面投影下与平面中的这个圆对应．

**参考文献**

[1] Клейн, Ф., Высшая геометрия, М.-Л., 1939（译自德文）.

[2] Бушманова, Г. В., Норден, А. П., Элементы конформной геометрии, Казань, 1972.

Г. В. Бушманова 撰

【补注】 反演平面（inversive plane），也称为共形平面（conformal plane），是由平面的无穷远处添加一个理想点"∞"而得到．名称的由来是由这样的事实：有了这个添加的点，对一个圆的反演（inversion in a circle）成为一个处处确切定义的周期为 2 的"自同构"．（给定一个半径为 $r$ 且中心为 $O$ 的圆，在关于这个圆的反演下，两点 $P$ 与 $P'$ 相对应，当且仅当 $(OP)(OP')=r^2$．）在反演平面中所有直线通过 ∞ 并且（原平面的）一直线是一个中心在 ∞ 的圆．于是所有的圆（直线）或者相切或者有两个交点．

反演空间（inversive space）（共形空间（conformal space））是由 3 空间的无穷远处添加一个理想点而得到（使得对一个球面的反演处处确切定义且周期为 2）．

任何角变为一个相等的角，从而对于反演空间与反演平面使用术语共形空间与共形平面．

**参考文献**

[A1] Clifford, W. K., On the powers of spheres, in Mathematical Papers. Macmillan, 1882, 332 – 336.
[A2] Darboux, G., Sur les rélations entre les groupes de points, de circles et de sphères dans le plan et dans l'espace, *Ann. Ecole Norm. Sup.*, 1 (1872), 323 – 392.
[A3] Klein, F., Vorlesungen über höhere Geometrie, Chelsea, reprint, 1949.
[A4] Lachlan, R., On systems of circles and spheres, *Philos. Trans. Royal Soc. London* A, 177 (1886), 481 – 625.
[A5] Coolidge, J. L., A treatise on the circle and the sphere, Clarendon Press, 1916.
[A6] Woods, F. G., Higher geometry, Ginn, 1922.
[A7] Wilker, J. B., Inversive geometry, in C. Davis, B. Grünbaum and F. A. Sherk (eds.): The Geometric Vein, Springer, 1980, 374 – 442.
[A8] Coxeter, H. S. M., Introduction to geometry, Wiley, 1969, § 6.4, § 6.8. 林向岩 译 陆珊年 校

**四面体坐标 [tetrahedral coordinates; тетраэдральные координаты]**，三维空间中点 $P$ 的

四个数 $x_1, x_2, x_3, x_4$，它们与从点 $P$ 到一个固定的（不一定是正的）**四面体**（tetrahedron）的四个面的距离成比例（具有给定的比例系数）。类似地，可以引入任何维的一般正规坐标。四面体坐标对应的二维情况是所谓的三线坐标（trilinear coordinates）。亦见**重心坐标**（barycentric coordinates）。

Д. Д. Соколов 撰

【补注】

**参考文献**

[A1] Coxeter, H. S. M., Regular polytopes, Dover, reprint, 1973.

杜小杨 译

**四面体空间 [tetrahedral space; тетраэдра пространство]**

作为二元四面体群在三维球面上作用的轨道空间的三维空间。该群由生成元 $R, S$ 和关系 $R^3 = S^3 = (RS)^2$ 所表现。

М. И. Войцеховский 撰

【补注】

**参考文献**

[A1] Coxeter, H. S. M., Regular complex polytopes, Cambridge Univ. Press, 1991, p. 76.

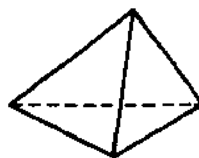
石生明 译 王 杰 校

**四面体 [tetrahedron; тетраэдр]**

不全在同一平面上的四个点的集合构成的凸包，也可以说是这样一个立体图形，它具有四个三角形面，6条棱，6个顶点（在每个顶点上有三个棱相交）。特别是，当 6条棱相等时，为正四面体（regular tetrahedron）——五种 Plato 立体（Platonic solids）之一。如果正四面体的边长是 $a$，则它的体积是

$$\frac{a^3\sqrt{2}}{12} \approx 0.1179\, a^3.$$

一个四面体是一个三棱锥。



БСЭ-3

【补注】 四面体也称为 3 单形（3-simplex）。四面体的 Schläfli 符号（Schläfli symbol of a tetrahedron）是 (3, 3)。

**参考文献**

[A1] Coxeter, H. S. M., Introduction to geometry, Wiley, 1969.
[A2] Senechal, M. and Fleck, G., Shaping space, Birkhäuser, 1988.

杜小杨 译

**定理 [theorem; теорема]**

真实性得到**证明**（proof）的数学命题。

定理概念是与数学证明概念一起发展并且变得更加精确的。就**公理方法**（axiomatic method）来说，所考虑的理论中的定理是由事先选定的称为公理（axiom）的命题，用纯逻辑的方法导出的命题。由于假定公理是真的，定理也应该是真的。定理概念和证明概念的进一步精确与数理逻辑中对**逻辑结果**（logical consequence）概念的研究分不开，因此对于广泛的一类数学理论，就有可能把逻辑演绎过程归约为公式变换；所谓公式无非就是在一个适当的**形式化语言**（formalized language）中用确切的表述法则（演绎法则，见**推导法则**（derivation rule））写成的数学命题，演绎法则只考虑命题形式（不考虑内容）。在用如此方式产生的形式理论中，证明（proof）就是给出公式的一个有限序列：序列中的每一个公式或是一条公理，或是由序列的前面的公式根据演绎法则而得。一个公式称为一个定理，如果它是一个证明中的最后的公式。

定理概念的如此精细改进，提供了用严格数学方法得到数学理论的一系列重要结果的可能性。特别地，已经证明，表达数学实质章节的公理化理论（如算术）是不完全的，也就是说，存在一些命题，它的真或假是不能根据公理用纯逻辑的方法加以证明的。通常这些理论是不可判定的，也就是说，不存在一个统一的方法（算法）以便可以判定一个任意给定的命题是不是一个定理。

В. Е. Плиско 撰

【补注】

参考文献

[A1] Kleene, S. C., Introduction to metamathematics, North-Holland, 1951 (中译本: S. C. 克林, 元数学导论, 科学出版社, 上册 1984, 下册 1985).

[A2] Shoenfield, J. R., Mathematical logic, Addison-Wesley, 1967.

卢景波 译 罗里波 校

**理论程序设计 [theoretical programming; программирование теоретическое]**, 程序设计理论 (theory of programming)

研究程序的数学抽象的数学原理, 把程序看作用形式语言表达的对象, 该对象有某种非形式和逻辑结构并可在自动装置上执行. 基本上, 理论程序设计可以在两种计算模型的基础上公式化: 具有存储的顺序程序或操作符程序和递归程序. 两种模型都是在抽象代数系统 $\langle D, \Phi, \Pi\rangle$ 上构造的, 这个代数系统是由对象定义域 $D$, 函数的有限集合 (基调, signature) $\Phi=\{\varphi_1, \cdots, \varphi_m\}$ 和谓词 $\Pi=\{\pi_1, \cdots, \pi_n\}$ 构成的, 具有对每个符号给定的变元数目 (它的元数 (arity)).

程序类的定义由三部分组成: 程序的模式 (即它的语法), 解释和语义. 程序的模式 (scheme of a program) 是一个构造性对象, 它指出程序如何用基调和其他形式符号来构造. 解释 (interpretation) 是具体对象定义域的规格说明和对基调符号的赋值, 赋给它们与对象定义域和符号元数相容的具体函数和谓词 (基本操作). 语义 (semantics) 是把执行结果赋予每个程序的一种方式. 通常, 程序可计算的函数与程序有关. 解释作为语义中的参数出现, 因此, 程序的模式就定义一组程序和由它们计算的函数, 它们能在基本操作族上变化解释时得到.

带存储的程序模式 (scheme of a program with memory), 也称为类 Algol 的 (Algol-like) 或操作符模式 (operator scheme), 能给出一个面向有限自动机的转换图 (transition graph), 通常有一个输入和一个输出顶点, 并有一个 (对于变换器) 和两个 (对于识别器) 输出弧. 使用基调符号和用于变量和常数的可数符号集, 人们用通常的方法构造函数和谓词项的集合. 每个识别器匹配到一些谓词项, 而每个变换器匹配到一个赋值操作符, 形式是 $y:=\tau$, 其中 $y$ 是变量, $\tau$ 是函数项. 在模式中变量的有限集形成它的存储 (memory). 解释补充基本操作的具体化, 把它的扩充定义域归于每个变量, 值归于每个常数. 所谓操作语义 (operational semantics) 对带有存储的程序是最普通的. 它由在存储的给定状态上程序的执行算法所组成. 程序可通过在转换图上移动而执行. 当遇到识别器时, 计算谓词项, 沿着对应于谓词值的弧走下去. 当遇到带有操作符 $y:=\tau$ 的变换器时, 计算 $\tau$ 的值, 并归它到 $y$. 当遇到输出点时, 得到程序的执行结果, 它是当前存储的状态.

递归程序的模式 (scheme of a recursive program) 或递归模式 (recursive scheme), 除了函数项以外, 还使用其他的项, 即所谓条件项 (conditional terms), 它和函数项一起形成可计算项的集合. 条件项通过分情形的方法给出计算, 有形式 $(\pi|\tau_1|\tau_2)$, 其中 $\pi$ 是谓词, $\tau_1, \tau_2$ 是可计算项; 它在 **Algol 语言** (Algol) 中对应到条件语句

$$\text{IF } \pi \text{ THEN } \tau_1 \text{ ELSE } \tau_2.$$

项在初始和形式变量, 常数和定义函数的符号的有限集上构造. 递归模式由一个带有输入变量的主要可计算项和 $f(x_1, \cdots, x_n)=\tau$ 类的递归方程有限族组成, 其中 $f$ 是要确定的函数的符号, $x_1, \cdots, x_n$ 是形式变量, $\tau$ 是带有集合 $\{x_1, \cdots, x_n\}$ 中变量的项, 而要被确定的函数是属于一个方程族. 在基本操作解释的自然假定下, 要被确定的函数中的方程系统常常有一个所谓最小不动点 (least fixed point) (满足这些方程的一组函数, 具有图, 属于这些方程的任何其他解的图). 在主要项中对要被确定的函数代人最小不动点的对应分量, 人们得到一个函数项, 给出输入变量的一个函数, 它也是递归程序可计算的函数. 因为这种方法赋给一个程序以一个可计算函数而并没有给出具体计算算法, 因此定义的语义称为指称的 (denotational).

上述形式化方法指出了程序设计语言的表达工具的层次范围的轮廓: 如果操作符模式接近机器程序的结构, 那么递归模式是接近于要编程的问题的初始语句.

理论程序设计研究具有研究程序模型中使用的一般数学工具的特征. 形式组合方法形成程序模式理论, 它研究在基本操作解释的选择下程序的不变性质. 通过逻辑方法, 人们研究定义程序语义的方法, 也寻找构造程序过程中的规律. 在代数方法中, 从具体程序结构的抽象, 人们注意在考虑程序或程序类时所产生的集合.

理论程序设计的显著分支基本上包括由活动装置执行的顺序计算的模型. 有关组织一组计算机联合动作以解决一个问题或者通过信号传输和信息交换合作的研究, 是属于一个新的学科—— 所谓**并行程序设计** (parallel programming).

**程序模式理论**. 这个理论的基本概念是功能等价性. 两个模式称为功能上等价的 (functionally equivalent), 如果对于任何解释, 对应的程序计算出恒等的函数. 程序的每次执行可被指派为它的协议 (protocol)—— 在影响执行程序次序的基本操作

基调中的一个专门类术语．如果参加在程序中的谓词的真值是已知的，那么协议能从这些值唯一地构造，并且在这个构造中，人们现在不需要对基本操作的解释．如果谓词的真值是任意选择的，那么作为结果，对**程序模式**（program scheme）创建一组形式协议，称为它的行列式（determinant）．模式是形式上等价，如果它们的行列式重合．形式等价是正确的，如果它包含功能的等价．因为行列式是在任意选择一组有限集合基础上用纯组合的方法构造的，它形成由某个自动机接受的形式语言．导致可解行列式的程序模式协议的定义是特别令人感兴趣的．对这种行列式，人们可以提出寻找程序模式的完全的变换系统的问题，变换系统是完全的，如果任何两个形式上等价的模式能由这些变换互相翻译．

程序模式的结构理论可以在 А. А. Лапунов 和 Ю. И. Янов（[5]，[10]）的奠基性工作的基础上发展．后者透彻地研究了具有一位（one-place）操作、只有一个变量进入程序（Янов 模式（Yanov schemes））的操作符模式的最简单模型．Янов 模式的协议是由谓词的值选择的一系列可执行的操作符．人们可以取有限自动机作为接受其行列式的自动机；形式等价性是可解的，进一步，它和功能等价重合．用于 Янов 模式的完全变换系统已经找到．

对于操作符模式的一般模型，功能等价性已被证明是不可解的，但人们已经成功找到一种协议形式——所谓逻辑终结历史（logical-terminal histrory）——它导致可解的行列式．这个协议固定执行序列和模式的谓词的值，对谓词的每个变元它定义一个函数项，在程序执行时，计算给定变元的值．人们可以取两带（two-tape）有限自动机作为接受其行列式的自动机．用于逻辑终结的形式等价的完全变换系统也已经找到．

把程序模式从一个计算模型翻译到另一个的问题在程序模式理论中占有重要位置．操作符模式能有效地翻译成具有相同基调的递归模式，但是逆翻译是不可能的，因为一般来说，递归程序的执行要求任意多的存储单元．

递归模式的行列式可以描述为上下文无关语言（见**上下文无关文法**（grammar，context-free）），但是对应的形式等价的可解性问题还是未解决的（1983）．

程序模式理论也致力于各类程序模式的研究以帮助选出可解等价的情况；它也通过附加的程序设计语言的结构丰富基本计算模型，并进一步研究这种充实的表达能力和可归约性问题．

**程序的逻辑理论**．程序 $A$ 对输入条件 $P$ 和输出条件 $Q$ 是部分正确的（记作 $P\{A\}Q$），如果当 $P$ 对变量的输入值为真，$A$ 终止操作后，$Q$ 对变量的输出值为真．这里，$P$ 称为 $A$ 的前条件（pre-condition），$Q$ 称为 $A$ 的后条件（post-condition）．程序 $A$ 称为完全正确的（totally correct），（记作 $P\langle A\rangle Q$），如果 $A$ 对 $P$ 和 $Q$ 是部分正确的、并且对满足 $P$ 的变量的输入值，$A$ 终止操作．为了证明一个顺序程序是部分正确的，人们常常使用 Floyd 方法（Floyd method），它组成如下．在程序模式中，人们选择控制点，使得循环路径至少通过一点．模式中的输入与输出也看作控制点．每个控制点有一个特定的条件（称为归纳语句（inductive statement）或循环不变量（cycle invariant）），它对通过此点的每个转移都真．与每个输入和输出点有一个相联的输入和输出条件．现在对两个相邻控制点之间的程序路径给一个所谓正确性条件．如果所有这些条件成立，程序必定是部分地正确．在证明部分正确性的过程中，证明程序终止操作的方法在于在程序中引入附加的计数器并对程序的输出建立这些计数器的有界性．

已经建议用有限公理系统（称为 Hoare 逻辑（Hoare logic））来公理地指明程序设计语言的语义，它由公理和推理规则组成，程序中的语句的部分正确性，可作为定理推导．例如，对于赋值操作符，公理模式有形式

$$P(x \leftarrow e)\{x := e\}P,$$

其中 $P(x \leftarrow e)$ 表示在 $P$ 中对所有变量 $x$ 的出现用表达式 $e$ 替换，对于循环类型的操作符 WHILE 的推理规则有形式

$$(P \wedge R)\{A\}P \vdash P\{\text{WHILE } R \text{ DO } A\}(P \wedge \neg R)$$

（$P$ 是一个循环不变量）．

假定人们考虑 Hoare 逻辑，其中一阶算术语言取为写出条件的语言．程序的部分正确性称为可推导的，如果它能由增加有关算术的真值公式进行推广的 Hoare 逻辑所推导，并且称为真的，如果它关于程序的操作（或指称）语义是真的．Hoare 逻辑称为相容的（consistent），如果用它可推导的每个语句也是真的，它称为完全的（complete）（关于算术的），如果每个真语句用它是可推导的．一个相容的和完全的 Hoare 逻辑已被构造，特别是对于这种程序设计语言，它们包括简单变量，赋值操作符、复合和条件操作符，循环和过程（可能是递归的，但有许多限制）．

Hoare 逻辑的一个重要推广称为算法的（algorithmic）（或动态的（dynamic））逻辑．假定 $P\{A\}Q$ 能表示为 $P \supset [A]Q$，其中 $[A]Q$ 是最弱前条件，则"程序 $A$ 对后条件 $Q$ 是部分正确的"这一断言是正确

的．类似地，在完全正确性的情况，假定 $P\langle A\rangle Q$ 能表示为 $P\supset\langle A\rangle Q$．算法逻辑的公式中基本逻辑语言（用于写条件）的公式和程序用 Boole 操作，量词和形如 $[A]Q$，$\langle A\rangle Q$ 的操作构成．有关程序的各种断言，例如它们的等价性，可以用算法逻辑表达．类似于 Hoare 逻辑，人们已经为算法逻辑构造了相容的和完全的有限公理系统，用于也允许不确定程序的程序设计语言．

为了证明有关递归程序的陈述，人们常常使用有关最小不动点的定义的特殊的归纳法．为简单起见，假定递归程序由方式 $f=\tau(f)$ 给出，它的指称语义是最小不动点 $f_{\text{fix}}$．在有关条件 $P$ 的自然假定下，下列归纳原理成立：若公式 $P(\Omega)$ 真且 $P(\tau^i(\Omega))$ 蕴涵 $P(\tau^{i+1}(\Omega))$，则 $P(f_{\text{fix}})$ 是满足的（这里，$\Omega$ 是无处定义的函数）．为了描述高级程序设计语言的指称语义，人们使用数据的定义域的规格说明为所谓完全 Scott 格（complete Scott lattice）．

程序综合的问题可以形式化为构造定理 $\forall x\exists y\,\Pi(x,y)$ 的证明的问题，以及从这个证明中程序的抽取．人们已经构造了一个算法，从直觉主义逻辑证明，给出一个用 Algol-68 语言编写的程序．如果证明使用归纳规则，则形如 FOR … TO … DO … OD 的循环在程序中对应于它．抽取的问题具有可容许复杂性，如果假定人们使用标准（给定的）函数和谓词去构造它，标准函数和谓词的性质用特定形式的公理来描述．

**程序设计的代数理论**．可以取 Глушков 的离散变换等价问题作为代数方法在理论程序设计中的应用的一个例子，其中能自然地包括操作符程序模式．设 $\mathfrak{A}$ 是具有输入字母表 $X$ 和输出字母表 $Y$、并具有给定的初始状态和终止状态的 Mealey 自动机（见**有限自动机**（automaton, finite））．设 $G$ 是具有生成元集 $Y$ 和幺元 $e$ 的半群．考虑具有状态集 $G$、输入集 $Y$、输出集 $X$、初始状态 $e$、输出函数 $\mu(g)$ 和转移函数 $q(g,y)=g\,y$ 的（可能是无限的）Moor 自动机 $G_\mu$．功能上与 $G_\mu$ 相容的自动机 $\mathfrak{A}$ 称为离散变换器（discrete transformer），如果 $\mathfrak{A}$ 接受 $G_\mu$ 的输出作为输入，$G_\mu$ 接受 $\mathfrak{A}$ 的输出作为输入．这里，$\mathfrak{A}$ 的输出是 $G_\mu$ 在 $\mathfrak{A}$ 暂停时的状态．各离散变换器关于半群 $G$ 是等价的，如果对于每个映射 $\mu: G\to X$，它们都不和 $G_\mu$ 一起暂停，或者它们以相同的输出一起暂停．人们已经建立关于左消去半群的离散变换器等价问题的可解性，在左消去半群中幺元是不可分解的，且字（幺元）问题是可解的．人们也描述了关于交换半群的离散变换器等价性的一切可解和不可解情况．

理论程序设计在实践中主要是作为程序设计研究的概念框架，而在技术方面，则是通过形式程序设计语言的理论来表现自己的影响．这里，抽象计算模型的性质用于精化程序设计语言的语义，并为各种程序处理提供基础（见**程序的翻译**（translation of programs）；**程序最优化变换**（program-optimizing transformations））．

**参考文献**


[1] Glushkov, V. M. and Letichevskiĭ, A. A., Theory of algorithms and discrete processors, *Advances Inform. Systems Sci.*, 1 (1969), 1 – 58.

[2] Ершов, А. П., Введение в теоретическое программирование, М., 1977（英译本：Ershov, A. P., Origins of programming: discourses on methodology, Springer, 1990）.

[3] Котов, В. Е., Введение в теорию схем программ, Новосиб, 1978.

[4] Gordon, M. J. C., The denotational description of programming languages, Springer, 1979.

[5] Ляпунов, А. А., 《Проблемы кибернетики》, 1958, в. 1, 46 – 74.

[6] Hayashi, S. and Nakano, H., *PX*: a computational logic, Cambridge Univ. Press, 1988.

[7] Harel, D., First-order dynamic logic, Lecture notes comp. sc., 68, Springer, 1979.

[8] Donahue, J. E., Complementary definitions of programming language semantics, Lecture notes comp. sc., 42, Springer, 1976.

[9] Scott, D. S., Outline of a mathematical theory of computations, in Proc. 4th Annual Princeton Conf. Information Sc. and Systems, Princeton Univ. Press, 1971, 169 – 176.

[10] Янов, Ю. И., 《Проблемы кибернетики》, 1958, в. 1, 75 – 127.

[11] Manna, Z., Mathematical theory of computation, McGraw-Hill, 1974.


А. П. Ершов, В. А. Непомнящий 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Apt, K. R., Ten years of Hoare's logic, a survey, part Ⅰ, *ACM TOPLAS*, 3 (1981), 431 – 483.

[A2] Apt, K. R., Ten years of Hoare's logic, a survey, part Ⅱ: non-determinism, *Theor. Computer Science*, 28 (1984), 83 – 109.

[A3] Bakker, J. W. de, Mathematical proof of program correctness, Princeton-Hall, 1980.

[A4] Harel, D., Dynamic logic, in D. Gabbay and F. Guenthner (eds.): Handbook of Philosophical Logic, Vol. Ⅱ. Reidel, 1984, 497 – 604.

[A5] Stoy, J. E., Denotational semantics: the Scott-Strachey approach to programming language theory, M. I. T. 1977.


程虎 译 刘椿年 校

**形式理论 [theory, formal; теория формальная]**

同形式系统（formal system）．亦见**公理方法**（axiomatic method）．

**曲面理论 [theory of surfaces; поверхностей теория]**

**微分几何学**（differential geometry）中处理曲面的一个分支．在曲面理论中人们观察曲面的形状、曲率、曲面上各种类型曲线的性质、变形，以及具有给定的内在和外在特性的曲面的存在性等．

曲面理论中有两种观点：曲面可看作具有其自身内蕴度量的度量空间（称为内蕴几何学）或看作空间中的图形（称为外在几何学）．曲面理论中（如**等距浸入**（isometric immersion）问题，**等距形变**（deformation, isometric）问题等）大多倾向于研究内蕴与外在几何学之间的联系，对于 $C^2$ 类正则曲面这种联系的研究已相当完善．见**浸入流形的几何学**（geometry of immersed manifolds）．

对曲面上曲线（**渐近线**（asymptotic line）、**测地线**（geodesic line）等）的行为及它们的单参数族的对（称为网，见**网（微分几何学中的）**（net (in differential geometry)））的研究导致了一些特殊的曲面类．例如，**平移曲面**（translation surface）——存在平移网的曲面，**Voss 曲面**（Voss surface）——存在 Voss 网的曲面，**直纹曲面**（ruled surface）——存在半测地渐近网的曲面，等等．网论与曲面到曲面的映射紧密相关．下面是一些最重要的映射类：**等距映射**（isometric mapping），它保持弧长、面积及从一点射出的两个方向之间的夹角不变；**共形映射**（conformal mapping），它保持从一点射出的任意两个方向之间的夹角不变（例如**球极平面投影**（stereographic projection））；**球面映射**（spherical map），该映射将曲面上任一点映为该点的单位法向量在平行移动下对应的单位球面上的点；**测地映射**（geodesic mapping），它将一个曲面上的测地线映为另一个曲面上的测地线；等积映射，它使对应图形的面积之比为一常数．

曲面理论还包括研究各种曲面类，例如**二次曲面**（surface of the second order），**螺旋运动曲面**（surface of screw motion），**螺旋面**（helicoid），**Catalan 曲面**（Catalan surface），**劈锥曲面**（conoid），**回归面**（regression surface），**管道曲面**（canal surface），**Dupin 圆纹曲面**（Dupin cyclide），**Enneper 曲面**（Enneper surface），**Weingarten 曲面**（Weingarten surface），等等．其中**极小曲面**（minimal surface）特别引人注目．涉及到应用方面，大多关注于**三重正交曲面系**（triorthogonal system of surfaces），如共焦二阶曲面．

除了研究曲面在全空间的等距变换下的不变性质（相关于所谓曲面的度量理论（metric theory of surfaces）外，还研究曲面在其他变换群，如仿射群或射影变换群下的不变性质．仿射曲面论考虑曲面在等仿射变换（即保体积的仿射变换）下的不变性，而射影曲面论则研究曲面的射影不变性．亦见**仿射微分几何学**（affine differential geometry）；**共形微分几何学**（conformal differential geometry）；**射影微分几何学**（projective differential geometry）．

曲面论及与曲面相关的几何对象的研究促进了许多方法的发展（如**张量分析**（tensor analysis），**Cartan 外形式法**（Cartan method of exterior forms）），这些方法在数学的其他分支、物理学及力学中有广泛的应用．

19 世纪末的曲面论仅研究具备足够正则性的曲面（或其部分），以便能对它进行微分运算．到 20 世纪初，对可微性的要求不再强求，取而代之以其他条件，如凸性（见**凸曲面**（convex surface））及测地线的局部唯一性，来保证得到有意义的几何结果．同时研究不再限于经典微分几何学中的相当小的部分，而着眼于曲面的整体（称为**大范围几何学**（geometry in the large））．在这里，结合曲面的拓扑结构（如曲面的亏格），（某种意义下的）完全性及这些特性和曲率分布间的关系是十分重要的．

多维空间、椭圆空间、Лобачевский 空间的微分几何学研究已经得到了与这些空间中的曲面论有关的许多几何结果．

**参考文献**

[1] Рашевский, П. К., Курс дифференциальной геометрии, 4 изд., М., 1956.

[2] Blaschke, W., Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie, Elementare Differentialgeometrie, 1, Springer, 1921.

[3] Норден, А. П., Теория поверхностей, М., 1956.

[4] Каган, В. Ф., Основы теории поверхностей в тензорном изложении, г. 1－2, М.-Л., 1947－1948.

[5] Шуликовский, В. И., Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении, М., 1963.

[6] Александров, А. Д., Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, М.-Л., 1948.

[7] Погорелов, А. В., Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, М., 1969.

[8] Darboux, G., Leçons sur la théorie générale des surfaces et ses applications géometriques du calcul infinitesimal, I, Gauthier-Villars, 1887.

[9] Bianchi, L., Lezioni di geometria differenziale, 1－2, Zanichelli, Bologna, 1923－1927.

Ю. А. Аминов 撰

【补注】

**参考文献**

[A1] Pogorelov, A. V., Intrinsic geometry of surfaces,

Amer. Math. Soc., 1973(译自俄文).
[A2] O'Neill, B., Elementary differential geometry, Acad. Press, 1966
[A3] Hilbert, D. and Cohn-Vossen, S., Geometry and the imagination, Chelsea, reprint, 1952(译自德文).
[A4] Guggenheimer, H., Differential geometry, McGraw-Hill, 1963.
[A5] Busemann, H., The geometry of geodesics, Acad. Press, 1955.
[A6] Coxeter, H., Introduction to geometry, Wiley, 1963.
[A7] Do Carmo, M., Differential geometry of curves and surfaces, Prentice-Hall, 1976.
[A8] Berger, M. and Gostiaux, B., Differential geometry: manifold, curves, and surfaces, Springer, 1987(译自法文).
[A9] Spivak, M., Differential geometry, I－V, Publish or Perish, 1970.
[A10] Chen, B. Y., Geometry of submanifolds, M. Dekker, 1973.
[A11] Klingenborg, W., A course in differential geometry, Springer, 1983(译自德文).
沈纯理 译

**热传导方程**[**thermal-conductance equation** 或 heat equation; **теплопроводности уравнение**]

齐次偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}=0.$$

这个方程是**抛物型偏微分方程**(parabolic partial differential equation)的最简单的例子. 当 $n=3$ 时, 它描述固体中热扩散过程. 第一边值问题(圆柱区域中的)和 Cauchy-Dirichlet 问题(半平面上的)是热传导方程的基本适定问题. 特征(Cauchy)问题的解可以用显式给出:

$$u(x,t)=$$

$$=\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\int_{\mathbf{R}^n}\exp\left[-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2t}\right]\varphi(\xi)d\xi,$$

$$t>0,$$

其中 $\varphi(\xi)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的一个给定的连续一致有界函数.

**参考文献**

[1] Бицадзе, А. В., Уравнения математической физики, М., 1976(英译本: Bitsadze, A. V. The equations of mathematical physics, Mir, 1980).
[2] Владимиров, В. С., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1981(英译本: Vladimirov, V. S., Equations of mathematical physics, Mir, 1984).
А. П. Солдатов 撰

【补注】

**参考文献**

[A1] Cannon, J. R., The one-dimensional heat equation, Addison-Wesley, 1984.
[A2] Carslaw, H. S. and Jaeger, J. C., Conduction of heat in solids, Clarendon Press, 1945.
[A3] Cranck, J., The mathmatics of diffusion, Clarendon Press, 1975.
[A4] Friedman, A., Partial differential equations of parabolic type, Prentice-Hall, 1964(中译本: A. 弗里德曼, 抛物型偏微分方程, 科学出版社, 1984).
[A5] Jakob, M., Heat transter, 1-2, Wiley, 1975.
[A6] Ozisik, M. N., Basic heat transter, McGraw-Hill, 1977.
[A7] Widder, D. V., The heat equation, Acad. Press, 1975
杜小杨 张鸿林 译

**热力学势**[**thermodynamic potential**; **термодинамический потенциал**]

宏观(热力学)系统状态集合上所定义的下列四个函数: 内能、焓(或热函)、Helmholtz 自由能和 Gibbs 自由能当中的任一个(有时狭义上将 Gibbs 自由能称为热力学势).

为了形式地构造(单组分)热力学系统的热力学态, 人们用下列热力学参量对 $(S, V)$, $(S, p)$, $(T, V)$, $(T, p)$ 当中的任一对来描述; 其中 $S$ 是系统的熵, $T$ 是其绝对温度, $p$ 是压强, $V$ 是体积. 对这里的每对参量, 方便的是联系一个热力学势: 联系于 $(S, V)$ 的是内能 $U=U(S, V)$, 联系于 $(S, p)$ 的是焓 $H=H(S, p)$, 联系于 $(T, V)$ 的是 Helmholtz 自由能 $F=F(T, V)$, 联系于 $(T, p)$ 的是 Gibbs 自由能 $G=G(T, p)$.

这时, 如果选择某对参量来描述系统, 则另外两个参量可以表达为相应热力学势的偏导数(因而得名). 参量 $S$, $T$ 和 $p$, $V$ 在下述意义上是共轭量, 它们每个可用相对于另一个的偏导数来表达; 例如, 选择参量对 $(S, V)$, 相应热力学势为 $U(S, V)$, 则参量 $T$ 和 $p$ 可分别表达为:

$$T=\frac{\partial U}{\partial S},\ p=-\frac{\partial U}{\partial V}. \qquad (1)$$

从一对参量与其势向另一对参量与其对应势的转换通过应用 **Legendre 变换**(Legendre transform)来完成. 例如, 从对 $(S, V)$ 和势 $U(S, V)$ 转换到对 $(T, V)$ 和势 $F(T, V)$, 这时有

$$F(T,V)=U(S(T,V),V)-S(T,V)T,$$

其中 $S(T, V)$ 是由方程(1)获得的, 即 $F(T, V)$ 与看作 $S$ 的函数的函数 $U(S, V)$ 的 Legendre 变换一致, 只相差符号.

为了应用平衡 Gibbs 系综作出富有意义的热力学诠释, 总可将热力学势表达为某个 Gibbs 系综配分

函数的对数除以体积（及其导数）的**热力学极限**（thermodynamic limit）．例如，Helmholtz 自由能密度由

$$f(T, v) = -vkT\lim_{\substack{V\to\infty\\ N\to\infty\\ V/N\to v}}\frac{1}{V}\ln Z(T, V, N)$$

表达，其中 $k$ 是 Boltzmann 常数，$v$ 是每粒子的体积（$1/v$ 是数密度），而 $Z(T, V, N)$ 是正则系综配分函数（见**统计和**（statistical sum））；正则系综对应于处于固定温度 $T$ 并封闭于体积为 $V$ 的区域内的 $N$ 粒子系统（见[3]）．

**参考文献**

[1] Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М., Статистическая физика, часть 1, 3 изд. М., 1976 (Теоретич. физика, т. 5)(中译本：Л. Д. 朗道，Е. М. 栗弗席兹，统计物理学，人民教育出版社，1964)．

[2] Гельфанд, И. М., Фомин, В. С., Вариационное исчисление, М., 1961 (英译本：Gel'fand, I. M. and Fomin, V. S., Calculus of variations, Prentice-Hall, 1963)．

[3] Ruelle, D., Statistical mechanics: rigorous results, Benjamin, 1974.

Р. А. Минлос 撰 徐锡申 译

## 热力学极限 [thermodynamical limit; термодинамический предельный переход]

统计物理学中的一个基本方法，在于将大（而有限的）系统用某种无限的理想化系统来近似而进行研究．例如，由 $N$ 个粒子（分子）组成的系统充满 $\mathbf{R}^3$ 中有界域 $V$，对于大数 $N$ 和大区域 $V$（与分子的大小相比较而言），可以用充满整个空间的无穷多个这种分子的系统来代替，使得有限系统的性质和特征（动态特性，系综的平衡性质，等等）接近于极限系统的类似性质和特征．

**参考文献**

[1] Ruelle, D., Statistical mechanics; rigorous results, Benjamin, 1974.

[2] Gibbs states in statistical physics, Moscow, 1978.

[3] Минлос, Р. А., 《Успехи матем. наук》, 23 (1968), 133 – 190.

Р. А. Минлос 撰

【补注】

**参考文献**

[A1] Gibbs, J. W., Elementary principles in statistical mechanics, Dover, reprint, 1960.

[A2] Landau, L. D. and Lifshitz, E. M., Statistical physics, Pergamon, 1980（译自俄文）（中译本：Л. Д. 朗道，Е. М. 栗弗席兹，统计物理学，人民教育出版社，1964）．

[A3] Ruelle, D., Thermodynamic formalism, Addison-Wesley, 1978.

徐锡申 译

## 热力学中的数学问题 [thermodynamics, mathematical problems in; термодинамики математические задачи]

处于热力学平衡状态的宏观系统一般性质的研究，以及其平衡状态之间的转变过程的研究，与上述这些研究有关的数学问题．

宏观热力学的数学工具来自所谓热力学定律．根据第零定律，热力学系统必定具有热力学意义上唯一的稳定平衡态，通过固定作用于系统的外界条件而确定．第一定律即能量守恒与转化定律，对于系统的态参量的统计无限小变化（准静态过程，即从一个平衡态到另一个平衡态的充分慢变化），它将这个过程的热效应 $\delta Q$ 与系统内能 $E$ 的变化和系统对外界所作功 $\delta W$ 联系起来．如果作为显明而且相当简单的例子，考虑具有固定粒子数的气体系统，则其状态可由三个参量，例如，温度 $\theta$，体积 $V$ 和粒子数 $N$（其他方案也是可能的）予以确定．于是，与膨胀过程相联系的功是 $\delta W = pdV$，其中 $p$ 是气体的压强，而第一定律确定能量平衡

$$\delta Q = dE + \delta W = dE + pdV. \tag{1}$$

根据准静态过程的热力学第二定律：热力学系统存在熵，它作为热力学态的单值函数具有全微分

$$dS = \frac{1}{\theta}\delta Q, \tag{2}$$

于是得到对于比内能 $\varepsilon = E/Nm$（其中 $m$ 为粒子质量）作为温度 $\theta$ 和比体积 $v = V/Nm$ 的函数的一组方程：

$$\left.\begin{aligned}\left[\frac{\partial\varepsilon}{\partial\theta}\right]_v &= c_v(\theta, v);\\ \left[\frac{\partial\varepsilon}{\partial v}\right]_\theta &= \theta\frac{\partial p(\theta, v)}{\partial\theta} - p(\theta, v),\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

这里 $c_v(\theta, v)$ 为定体比热；它们定义 $\varepsilon$ 到相差一常数 $\varepsilon = \varepsilon(\theta, v) + \varepsilon_0$，而定义总内能到相差一加性常数 $E = Nm\varepsilon(\theta, v) + Nm\varepsilon_0$．对于比熵 $s$ 的一组方程

$$\left[\frac{\partial s}{\partial\theta}\right]_v = \frac{1}{\theta}c_v(\theta, v);\ \left[\frac{\partial s}{\partial v}\right]_\theta = \frac{\partial p(\theta, v)}{\partial\theta} \tag{4}$$

定义 $s = s(\theta, v) + s_0$ 到相差一常数 $s_0$，而定义总熵 $S(\theta, V, N) = Nms(\theta, v) + Nms_0$ 到相差一加性常数 $Nms_0$．

系统的其余热力学特性，**热力学势**（thermodynamic potential），等等，可以通过这些方程的解予以定义，应用的数学运算与微分一样不复杂．

为了求解 (3) 和 (4)，必须给定具体热力学系统．系统的这种具体化涉及给定物态方程（上述简单情况下是单个方程）$p = p(\theta, v)$，和能态方程——比热 $c_v = c_v(\theta, v)$，它们确定系统对于外参量（上述情况是体积）的和对于其温度的变化的宏观反应．常数 $\varepsilon_0$ 必须根据计算能量的参考系统作为原点予以选取．

熵常数为求解一系列具体问题所必需，它可应用热力学第三定律予以确定；第三定律出现在 Planck 的表述中，作为对方程组（4）的一个补充条件：

$$\lim s|_{\theta\to 0}=0. \qquad (5)$$

上面采用的问题的表述可以称为直接的．还有与此相逆的各种可能表述方式．

为了研究低温问题，以及在一系列其他问题中，也可应用不同的表述．根据对于 $\varepsilon$ 和 $s$ 的第一个方程及第三定律，有

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon(\theta,v)&=\varepsilon_0(v)+\int_0^\theta c_v(\theta,v)d\theta,\\ s(\theta,v)&=\int_0^\theta\frac{1}{\theta}c_v(\theta,v)d\theta.\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

为了完成这些计算，必须给出比热方程 $c_v(\theta,v)$ 和系统基态的比能 $\varepsilon_0(v)=E_0/Nm$．这个量通常不能直接予以测量．它可以用任何明确模型进行给定，或者由前面引进的态方程间接获得．

上述方案中也可考虑到存在外场（静电场，磁场，等等）的情况（代价是增加类型（3）和（4）的方程数）．但最简易方式是通过计算，当场从零增加至给定大小时，自由能 $F=E-\theta S$ 中的变化这样来达成，系统对这个增加的反应必须通过相应态方程 $A=A(\theta,a)$ 予以给定，使得系统在场的准静态变化 $da$ 下所作功给出为 $\delta W=A(\theta,a)da$．因而，由（1）和（2）得

$$dF=d(E-\theta S)=-Sd\theta-\delta W, \qquad (7)$$

而所寻求变化量（省略除 $\theta$ 和 $a$ 外的一切参数）为

$$\Delta F=F(\theta,a)-F(\theta,0)=-\int_0^a A(\theta,a')da'. \quad (8)$$

与场 $a$ 的增加相联系的热力学特性中的变化，通过应用（8）的相应微分以及简单代数运算而获得．

鉴于仅对简化模型才可能用合适的 $c_v$, $p$, $A$ 等的公式来描述热力学系统，所以对真实热力学效应的计算（即工程热力学问题的求解）是通过数值方法，特殊辅助用表等等来完成的．

对于临界点附近（或者在二级相变中，考虑到它具有与临界现象的某些类似性）热力学系统的特殊性质，曾经进行过研究．一系列热力学特性邻近临界点的行为，由温度对临界温度的无量纲偏差的某次幂 $(|\theta-\theta_0|/\theta_0)^k$ 表征．参数 $k$ 称为临界指数，而利用宏观热力学的方法（有时借助于平衡统计力学的一般方案）曾经确立对它们的一系列普适关系（通常是以不等式的形式）（[3]）．

转移现象热力学理论的数学问题并不复杂（见[1]，[4]）．它们一般包括对一组线性关系式的研究．这些关系式将流 $\zeta_i$ 与宏观量 $\zeta_i$ 对其平衡值的偏差联系起来．对 $\zeta_i$ 的系数要满足某些对称性条件，并用实际转移系数予以表达．如果将这些方程作为对 $\zeta_i(t)$ 的时间方程处理（以充分大时间尺度），则这个方程组的解（仅在罕见情况可能以一般形式）在半唯象理论中确定系统趋向平衡态的弛豫特性．

**参考文献**


[1] Базаров, И. П., Термодинамика, 3 изд., М., 1983.

[2] Kubo, R., Thermodynamics, North-Holland, 1968（中译本：久保亮五，热力学，人民教育出版社，1982）．

[3] Stanley, H. E., Introduction to phase transitions and critical phenomena, Oxford Univ. Press, 1971.

[4] Groot, S. R. de and Mazur, P. Non-equilibrium thermodynamics, North-Holland, 1962.


И. А. Квасников 撰

**【补注】**

**参考文献**


[A1] Flügge, S. (ed.), Handbuch der Physik, Encyclopedia of Physics, 12. Thermodynamics of gases, Springer, 1958.

[A2] Serrin, J. (ed.), New perspectives in thermodynamics, Springer, 1986.


徐锡申 译

## $\theta$ 函数 [theta-function; тета-функция]

单复变量的 $\theta$ 函数（theta-function of one complex variable）是复变量 $z$ 的拟双周期整函数（entire function），即函数 $\theta(z)$ 除了周期 $\omega$ 外还有一个拟周期（quasi-period）$\omega\tau$, $\mathrm{Im}\,\tau>0$，把拟周期加到自变量上后函数值被乘上某个因子．换句话说，有以下关于 $z$ 的等式：

$$\theta(z+\omega)=\theta(z),\ \theta(z+\omega\tau)=\varphi(z)\theta(z).$$

作为周期整函数，$\theta$ 函数总能用级数表出：

$$\theta(z)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}c_n\exp\left[\frac{2\pi in}{\omega}z\right], \qquad (1)$$

这里的系数 $c_n$ 必须取得能保证收敛性．级数（1）被称为 $\theta$ 级数（theta-series）（由于原始的记号）．$\theta$ 函数也能表示成其他形式，例如无限积．

在应用中通常限于取以下形式的乘子：

$$\varphi(z)=q\exp(-2\pi ikz),$$

这里 $k$ 是自然数，称为 $\theta$ 函数的阶（order）或权（weight），$q$ 是一个数．收敛性可以得到保证，譬如说可取形如

$$c_n=\exp(an^2+2bn+c),\ \mathrm{Re}\,a<0$$

的系数．在许多问题中取满足下列条件：

$$\theta(z+1)=\theta(z),$$
$$\theta(z+\tau)=\exp(-2\pi ikz)\cdot\theta(z)\qquad(2)$$

的 $\theta$ 函数是合适的．具有相同的阶 $k$ 的形如（2）的所有 $\theta$ 函数构成一个 $k$ 维向量空间．这个向量空间的基可写成以下形式

$$\theta_r(z)=\sum_{s\in\mathbf{Z}}\exp[\pi i\tau s(k(s-1)+2r)+$$
$$+2\pi i(ks+r)z],\ r=0,\cdots,k-1.$$

$\theta$ 函数的个别例子已经出现在 J. Bernoulli (1713)，L. Euler 的工作中，在 J. Fourier 的热传导理论中．C. G. J. Jacobi 对 $\theta$ 函数作了系统的研究，并选出了四种特殊的 $\theta$ 函数，构成了他的椭圆函数论的基础（见 **Jacobi 椭圆**函数（Jacobi elliptic functions）．

多复变量的 $\theta$ 函数（theta-functions of several complex variables）是单复变量 $\theta$ 函数的自然推广．它们用下述方式被构造．设 $z=(z_1,\cdots,z_p)$ 是 $p$ 个复变量的行矩阵，$p\geqslant1$，$e_\mu$ 是 $p$ 阶恒等矩阵 $E$ 的第 $\mu$ 行，$n=(n_1,\cdots,n_p)$ 是整数行矩阵，$A=\|a_{\mu\nu}\|$ 是 $p$ 阶对称复矩阵使得矩阵 $\mathrm{Im}\,A=\|\mathrm{Im}\,a_{\mu\nu}\|$ 给出一个正定二次型 $n(\mathrm{Im}\,A)n^T$（这里 $n^T$ 是矩阵 $n$ 的转置）．多重 $\theta$ 级数（multiple theta-series）

$$\theta(z)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}\exp[\pi(nAn^T+2nz^T)]\qquad(3)$$

在 $\mathbf{C}^p$ 内紧集上一致绝对收敛，从而定义了 $p$ 个复变量 $z_1,\cdots,z_p$ 的整超越函数，称为 1 阶 $\theta$ 函数（theta-function of order 1）．矩阵 $A$ 的各个元素被称为 $\theta$ 函数 $\theta(z)$ 的模数（moduli）或参数（parameters）．模数的个数等于 $p(p+1)/2$．一阶 $\theta$ 函数 $\theta(z)$ 满足以下（关于 $z$ 的）基本等式：

$$\left.\begin{aligned}&\theta(z+e_\mu)=\theta(z),\\&\theta(z+e_\mu A)=\exp[-\pi i(a_{\mu\mu}+2z_\mu)]\cdot\theta(z),\\&2(1+\delta_{\mu\nu})\pi\frac{\partial\theta}{\partial a_{\mu\nu}}=\frac{\partial^2\theta}{\partial z_\mu\partial z_\nu},\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

这里 $\mu,\nu=1,\cdots,p$，当 $\mu=\nu$ 时 $\delta_{\mu\nu}=1$，当 $\mu\neq\nu$ 时 $\delta_{\mu\nu}=0$．$(p\times2p)$ 矩阵 $S=(E,A)$ 是 $\theta(z)$ 的模数系（moduli system）或周期与拟周期系（system of periods and quasi-periods）．如果 $m=(m_1,\cdots,m_p)$，$m'=(m'_1,\cdots,m'_p)$ 是任意的整行矩阵，则 $\theta$ 函数的周期性矩阵可以写成更一般的形式：

$$\theta(z+m'+mA)=$$
$$=\exp[-\pi(mAm^T)+2m(z+m')^T]\cdot\theta(z).$$

设 $\gamma=(\gamma_1,\cdots,\gamma_p)$，$\gamma'=(\gamma'_1,\cdots,\gamma'_p)$ 是任意的复行矩阵，$\Gamma$ 是 $(2\times p)$ 矩阵

$$\left\|\begin{matrix}\gamma\\\gamma'\end{matrix}\right\|.$$

则公式

$$\theta_\Gamma(z)=\sum_{n\in\mathbf{Z}^p}\exp[\pi(n+\gamma)A(n+\gamma)^T+$$
$$+2(n+\gamma)(z+\gamma')^T]=$$
$$=\exp[\pi i(\gamma A\gamma^T+2\gamma(z+\gamma')^T)]\cdot\theta(z+\gamma'+\gamma A)$$

定义了具有（一般形式的）特征 $\Gamma$ 的 1 阶 $\theta$ 函数．用这种术语，$\theta$ 函数（3）具有特征 0．矩阵 $\Gamma$ 也称为矩阵 $\gamma'+\gamma A$ 的周期性特征（periodicity characteristic of the matrix）．总有 $\theta_{-\Gamma}(-z)=\theta_\Gamma(z)$．性质（4）可推广到特征 $\Gamma$ 的 $\theta$ 函数：

$$\left.\begin{aligned}&\theta_\Gamma(z+e_\mu)=\exp(2\pi i\gamma_\mu)\cdot\theta_\Gamma(z),\\&\theta_\Gamma(z+e_\mu A)=\\&=\exp[-\pi i(a_{\mu\mu}+2(z_\mu-\gamma'_\mu))]\cdot\theta_\Gamma(z).\end{aligned}\right\}(5)$$

如果 $0\leqslant\gamma_i,\ \gamma'_i<1$ 对 $i=1,\cdots,p$，则称特征是正规的（normal）．

最常用到的是分数特征（fractional characteristics），这里 $\gamma_i$ 和 $\gamma'_i$ 都是有公分母 $\delta$ 的非负真分数．最简单且最重要的是半整特征（semi-integer or half characteristics），这里 $\delta=2$．半整特征

$$H=\left\|\begin{matrix}h\\h'\end{matrix}\right\|$$

可看成是由数 0 和 1 作出来的（通常"$\theta$ 特征"就是用于指这样的特征）．对于具有特征 $H$ 的 $\theta$ 函数，方程（5）取以下形式

$$\theta_H(z+e_\mu)=(-1)^{h_\mu}\cdot\theta_H(z),$$
$$\theta_H(z+e_\mu A)=$$
$$=(-1)^{h'_\mu}\exp[-\pi i(a_{\mu\mu}+2z_\mu)]\theta_H(z).$$

根据 $\theta$ 函数 $\theta_H(z)$ 是偶或奇函数称 $\theta$ 特征 $H$ 为偶的（even）或奇的（odd）的．也就是说，$\theta$ 特征 $H$ 是偶的还是奇的取决于数 $h'h^T$ 是偶的还是奇的，这是因为

$$\theta_H(-z)=(-1)^{h'h^T}\cdot\theta_H(z).$$

共有 $2^{2p}$ 个不同的 $\theta$ 特征，其中 $2^{p-1}(2^p+1)$ 个是偶的，$2^{p-1}(2^p-1)$ 个是奇的．$\theta$ 函数 $\theta_H(z)$ 在这样的点 $(g'+gA)/2$ 处零值，它的 $\theta$ 特征

$$G=\left\|\begin{matrix}g\\g'\end{matrix}\right\|$$

与 $H$ 相加后产生奇的 $\theta$ 特征. Jacobi 在他的椭圆函数论里使用了带半整特征的 $\theta$ 函数, 不过他用的周期是 $\pi i$ 而不是 1.

设 $k$ 是自然数, 称整超越函数 $\theta_\Gamma(z)$ 为具有特征 $\Gamma$ 的 $k$ 阶 $\theta$ 函数, 如果它满足以下等式:

$$\theta_\Gamma(z+e_\mu)=\exp(2\pi i\gamma_\mu)\cdot\theta_\Gamma(z),$$

$$\theta_\Gamma(z+e_\mu A)=$$

$$=\exp[-\pi i(ka_{\mu\mu}+2kz_\mu-2\gamma'_\mu)]\cdot\theta_\Gamma(z).$$

例如 $k$ 个一阶 $\theta$ 函数的积是 $k$ 阶 $\theta$ 函数.

利用带半整特征的一阶 $\theta$ 函数可以构造具有 $2p$ 个周期的亚纯 Abel 函数. $p$ 个复变量的任意 Abel 函数的周期满足 Riemann-Frobenius 关系式, 这就导出了具有相应模系的 $\theta$ 函数的定义级数的收敛性. 按照由 K. Weierstrass 提出被 H. Poincaré 证明的一个定理, Abel 函数可被表示成整 $\theta$ 函数关于相应的模系的商. 为解 Abel 积分的 **Jacobi 反演问题** (Jacobi inversion problem), 构造了特殊的 **Riemann $\theta$ 函数** (Riemann theta-function), 它的自变量是 Riemann 曲面上的点系 $\omega_1, \cdots, \omega_p$.

亦见 $\theta$ **级数** (theta-series).

**参考文献**


[1] Чеботарев, Н. Г., Теория алгебраических функций, М.-Л., 1948, гл. 9.

[2] Hurwitz, A. and Courant, R., Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen, 1. Springer, 1964, Chapt. 8.

[3] Krazer, A., Lehrbuch der Theta-Funktionen, Chelsea, reprint, 1970.

[4] Conforto, F., Abelsche Funktionen und algebraische Geometrie, Springer, 1956.


Е. Д. Солонменцев 撰

【补注】 在构造 $p$ 个变量的 $\theta$ 函数 (3) 里用到的矩阵 $A$ 的条件正是为使 $\mathbf{C}^p/L$ 成为 **Abel 簇** (Abelian variety) 的条件, 这里 $L$ 是矩阵 $(I_p A)$ 在 $\mathbf{C}^p$ 内定义的格. C 上所有的 Abel 簇都可如此得到. 因此任何 Abel 簇均相伴有一个 $\theta$ 函数.

特别地, Riemann 曲面上第一类 **Abel 微分** (Abelian differential) 的典范周期矩阵 (canonical period matrix) 满足此条件, 这样就确定了 Riemann 曲面的 **Jacobi 簇** (Jacobi variety) 以及相伴的 $\theta$ 函数.

对于不必典范的周期矩阵 (period matrix) $(BA)$, 这些关系式是 $A^TB-B^TA=0$ (Riemann 等式 (Riemann equality), 在典范的情形下 $B=I_p$, 从而条件成为 $A$ 是对称阵) 以及 $iB^T\bar{A}-iA^T\bar{B}$ 是正定 Hermite 矩阵 (Riemann 不等式 (Riemann inequality), 在典范的情形下利用 $A$ 的对称性, 条件化为 $A$ 的虚部的正定性) ([A8], p. 27). 这两个关系式联在一起有时被称为 Riemann 双线性关系 (Riemann bilinear relations).

**参考文献**


[A1] Siegel, C. L., Topics in complex function theory, 2, Wiley-Interscience, 1971.

[A2] Griffiths, P. A. and Harris, J., Principles of algebraic geometry, Wiley-Interscience, 1978.

[A3] Mumford, D., Tata lectures on theta, I-2, Birkhäuser, 1983-1984.

[A4] Mumford, D., On the equations defining abelian varieties I, *Invent. Math.*, 1 (1966), 287-354.

[A5] Mumford, D., On the equations defining abelian varieties II-III, *Invent. Math.*, 3 (1967), 71-135, 215-244.

[A6] Mumford, D., Abelian varieties, Oxford Univ. Press, 1985.

[A7] Igusa, J., Theta functions, Springer, 1972

[A8] Gunning, R. C., Riemann surfaces and generalized theta functions, Springer, 1976.

[A9] Fay, J. D., Theta functions on Riemann surfaces, Springer, 1973.


陈志杰 译

$\theta$ **级数** [**theta-series** 或 $\theta$**-series**; **тета-ряд**]

一类函数项级数, 用于表示自守形式及自守函数 (见**自守形式** (automorphic form); **自守函数** (automorphic function)).

设 $D$ 是复空间 $\mathbf{C}^p(p\geqslant 1)$ 中的一个区域, $\Gamma$ 是 $D$ 的离散自同构群. 若 $\Gamma$ 是有限的, 则 $D$ 上的任一亚纯函数 $H(z)$, $z=(z_1, \cdots, z_p)$, 就给出一个自守函数

$$\sum_{\gamma\in\Gamma}H(\gamma(z)).$$

在无限群的情形, 就需要添加收敛乘子以得到 $\theta$ 级数. 相关于群 $\Gamma$ 的 Poincaré 级数是如下形式的级数:

$$\theta_m(z)=\sum_{\gamma\in\Gamma}{}^{*}J_\gamma^m(z)H(\gamma(z)), \qquad (1)$$

其中 $J_\gamma(z)=d\gamma(z)/dz$ 是函数 $z\mapsto\gamma(z)$ 的 Jacobi, $m$ 是一个整数称为权或阶, * 号是表示对在级数中产生不同的项的那些 $\gamma\in\Gamma$ 求和. 在映射 $z\mapsto\alpha(z)$ $(\alpha\in\Gamma)$ 下, 有变换公式

$$\theta_m(\alpha(z))=J_\alpha^{-m}(z)\theta_m(z),$$

因此, $\theta_m(z)$ 是相关于 $\Gamma$ 的权为 $m$ 的自守函数. 两个权相同的 $\theta$ 级数的商是一个自守函数.

$\theta$ 级数

$$E_m(z)=\sum_{\gamma\in\Gamma}{}^{*}J_\gamma^m(z)$$

称为相关于 $\Gamma$ 的 Eisenstein $\theta$ 级数, 或简称为相关于

Γ 的 Eisenstein 级数.

19 世纪 80 年代，H. Poincaré 在其一系列文章中，联系于单复变量的自守函数的研究，发展了 $\theta$ 级数理论. 设 Γ 是由分式线性变换

$$\gamma(z)=\frac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc=1,$$

(它把上半平面 $D=\{z: \operatorname{Im} z>0\}$ 映射到自身之上) 组成的离散 **Fuchs 群** (Fuchsian group). 在这种情形，Poincaré 级数形如

$$\theta_m(z)=\sum_{\gamma\in\Gamma}{}^{*}(cz+d)^{-2m}H\left(\frac{az+b}{cz+d}\right), \quad (2)$$

其中 $H$，例如，是一个 $D$ 上的有界全纯函数. 在这样的假设下：Γ 可自由作用在 $D$ 上，及商空间 $X=D/\Gamma$ 是紧的. 已经证明级数 (2) 当 $m\geqslant 2$ 时在 $D$ 内绝对一致收敛. 在关于 $H$ 和 Γ 的所说条件下，这一结论在 $D$ 是 $\mathbf{C}^p$ 内的有界区域的情形对级数 (1) 也成立. 对某些 Fuchs 群，当 $m=1$ 时级数 (2) 也收敛.

术语"$\theta$ 级数"也被用于 $\theta$ 函数的级数展开式，$\theta$ 函数在椭圆函数的表示 (见 **Jacobi 椭圆函数** (Jacobi elliptic functions)) 及 Abel 函数的表示 (见 **$\theta$ 函数** (theta-function)；**Abel 函数** (Abelian function)) 中有用.

**参考文献**


[1] Ford, L. R., Automorphic functions, Chelsea, reprint, 1951.

[2] Шафаревич, И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972, гл. 9 (英译本：Shafarevich, I. R., Basic algebraic geometry, Springer, 1977).

[3] Fricke, R. and Klein, F., Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen, Teubner, 1926.


Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 设 $\Lambda\subset\mathbf{R}^n$ 是一个格. 格 Λ 的 **θ 级数** (theta-series of the lattice Λ) 是定义为

$$\theta_\Lambda(z)=\sum_{x\in\Lambda}q^{(x,x)}=\sum_{m=1}^{\infty}N_m q^m, \quad q=e^{\pi iz},$$

其中 $N_m$ 是 Λ 中长度平方为 $m$ 的点的个数. 例如，若 Λ 是格 $\mathbf{Z}^4\subset\mathbf{R}^4$，则 $N_m$ 是 $m$ 表为四个整数平方和的表法个数.

对格 $\mathbf{Z}\subset\mathbf{R}$，$\theta$ 级数是

$$\theta_Z(z)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}q^{m^2}=1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+\cdots,$$

这就是 Jacobi $\theta$ 函数 $\theta_3(z)$.

关于格的 $\theta$ 函数的更详细的内容，包括关于许多重要的格 (例如根格和 Leech 格) (的级数) 的公式和表，及应用，可参看 [A2].

**参考文献**


[A1] Weil, A., Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker, Springer, 1976.

[A2] Conway, J. H. and Sloane, N. J. A., Sphere packings, lattices, and groups, Springer, 1993.


潘承彪 译 朱尧辰 校

**薄集** [**thin set**; **тонкое множество**]

区域 $D\subset\mathbf{C}^k$ 的一子集 $A$，使得对每一点 $z\in D$，存在一开多圆盘 $\Delta(z,r)\subset D$ 和一函数 $f$，它是全纯的，不恒等于零，但它在 $A\cap\Delta(z,r)$ 上为零.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 通常，薄表示是一**解析集** (analytic set) 的子集. 亦见**集合的薄度** (thinness of a set).

**参考文献**


[A1] Gunning, R. C. and Rossi, H., Analytic functions of several complex variables, Prentice Hall, 1965, Chapt. 1, Sect. C.

[A2] Range, R. M., Holomorphic functions and integral representations in several complex variables, Springer, 1986, Chapt. 1, Sect. 3.


钟同德 译

**集合 $E\subset\mathbf{R}^n$ 的薄度** [**thinness of a set**; **разреженность множества**]，亦称集合的稀疏性，在点 $y_0\in\mathbf{R}^n$ 上的

判别 $E$ 为**极集** (polar set) 的一个局部准则. 一个非空集合 $E\subset\mathbf{R}^n$ 在下面两种情形下称为在点 $y_0\in\mathbf{R}^n$ 是**薄的** (thin)：

1) $y_0$ 不是 $E$ 的极限点；即 $y_0\notin E'$，这里 $E'$ 是 $E$ 的**导出集** (derived set)；

2) $y_0\in E'$ 且在 $y_0$ 的一个邻域里存在一个**上调和函数** (superharmonic function) $v(x)$，使得

$$\lim_{\substack{x\to y_0\\ x\in E\setminus\{y_0\}}}\inf v(x)>v(y_0).$$

集合 $E$ 是极集，当且仅当 $E$ 在它的每一点是薄的. 对任意集合 $E$，$E$ 在某些点是薄的，$E$ 中这样的点构成的子集是极集. 若一个集合在点 $y_0\in\mathbf{R}^n$ 是薄的，则它的任何非空子集在 $y_0$ 也是薄的. 有限个在点 $y_0\in\mathbf{R}^n$ 薄的集合之并在 $y_0$ 也是薄的.

平面 $\mathbf{R}^n$ 的线段在它的任意点不薄. 若 $E\subset\mathbf{R}^2$ 在点 $y_0$ 是薄集，则存在以 $y_0$ 为中心的任意小的圆周与 $E$ 不交. 极集 $E\subset\mathbf{R}^2$ 是完全不连通的. 然而 $x$ 轴上的 Cantor 集 (它是零测度集) 在它的任意点不薄. 同时，例如，$\mathbf{R}^3$ 中的点集

$$E=\{(x,y,z): V(x,y,z)\geqslant k>1\},$$

在点 (0,0,0) 有一个脊，其中

$$V(x,y,z)=\int_0^1\frac{t\,dt}{\sqrt{(x-t)^2+y^2+z^2}}$$

是区间 $(0\leqslant x\leqslant 1, 0, 0)$ 上具有密度 $t$ 的 **Newton 位**

势(Newton potential),$E$ 在脊 $(0,0,0)\in E'$ 是一薄集(Lebesgue 例子(Lebesgue example)).

**参考文献**

[1] Brelot, M., Eléments de la théorie classique du potentiel, Sorbonne Univ. Centre Doc. Univ., 1969

[2] Ландкоф, Н. С., Основы современной теории потенциала, М, 1966(英译本: Landkof, N. S., Foundations of modern potential theory, Springer, 1972).

E. Д. Соломенцев 撰

【补注】 薄度的另外两个重要性质是: 1) $E$ 在 $x$ 是薄的, 当且仅当在**细拓扑**(fine topology)下 $x$ 不是 $E$ 的极限点; 2) 开集 $U$(若 $U\subset R^2$, 设 $U$ 为有界)的边界点 $x$ 关于 Dirichlet 问题是正则的(regular), 当且仅当 $U$ 的余集在 $x$ 不薄.

薄度的概念以及利用它来定义细拓扑, 在任何一种位势论中都是重要的. 例如, 在与强 **Марков 过程**(Markov process)关联的概率位势论中, 一个 Borel 集 $E$ 在 $x$ 是薄的, 当且仅当从 $x$ 出发, 过程几乎确定一次也不会击中 $E$. 但是一般说来, 一个集合在它的每一点都薄时, 它本身未必是极集; 可数个这种集合的并集称为半极集(semi-polar set), 这是一种例外集(与 **Dirichlet 问题**(Dirichlet problem)相关联), 当某种位势论缺乏对称性(例如, 热传导方程位势论)时, 它可以远远大于极集. 大体上说来, 在概率位势论中, 一个集合 $E$ 是极集(相应地, 半极集), 如果这过程几乎确定不会遇到 $E$(相应地, 遇到 $E$ 至多可数次), 亦见**抽象位势论**(potential theory, abstract).

**参考文献**

[A1] Constantinescu, C. and Cornea, A., Potential theory on harmonic spaces, Springer, 1972.

高琪仁 吴炯圻 译

**第三边值问题[third boundary value problem; третья краевая задача]**

**偏微分方程边值问题**(boundary value problem, partial differential equations)之一. 例如, 设在以 $\Gamma$ 为边界的有界域 $\Omega$ 中, $\Gamma$ 的每个点都有法线, 并在 $\Omega$ 中给定下述二阶椭圆型方程

$$Lu=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i\partial x_j}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}+c(x)u(x)=f(x),\quad (*)$$

其中 $x=(x_1,\cdots,x_n)$, $n\geq 2$; 则对于 $\Omega$ 中方程 $(*)$ 的第三边值问题有如下述: 从 $(*)$ 的所有解的集合中选出这样的解 $u(x)$, 它在 $\Omega$ 的每个边界点处具有沿内法线 $N$ 的导数并满足条件

$$\frac{\partial u(x)}{\partial N}+\alpha(x)u(x)=v(x),\quad x\in\Gamma,$$

其中 $\alpha>0$ 和 $v$ 是定义在 $\Gamma$ 上的连续函数.

А. Б. Иванов 撰

【补注】 第三边值问题有时以 V. G. Robin(1855－1897)的姓氏称为 Robin 问题(Robin problem), 但不要同位势论中冠以同一名称的在 **Robin 问题**(Robin problem)条中讨论的问题相混淆.

第三类边值条件中出现的导数常常不必一定沿内法线方向(例如, 见[A1]), 而可以沿在 $\Gamma$ 上连续变动的任何方向. 如果此方向处处都不与 $\Gamma$ 相切, 则相应的问题称为正则的(regular).

**参考文献**

[A1] Friedman, A., Partial differential equations of parabolic type, Prentice-Hall, 1964.

沈永欢 译

**Thom 突变[Thom catastrophes; Тома катастрофы]**

**可微映射的奇点**(singularities of differentiable mappings), 其分类是 R. Thom([1])宣布的, 按其梯度动力系统及类似的可微函数的余维数 $\leq 4$ 的临界点(critical point)表来进行. Thom 的结果原来的陈述是: 一般的四参数函数族是稳定的, 而在临界点附近, 其性态除相差一个符号和变量变换以外, 是以下七种情况之一(见表).

| 记号 | 余维数 | 余秩 | 芽 | 泛形变 | 名称 |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_2$ | 1 | 1 | $x^3+y^2$ | $ux$ | 折点 |
| $A_3$ | 2 | 1 | $x^4+y^2$ | $ux+vx^2$ | 尖点 |
| $A_4$ | 3 | 1 | $x^5+y^2$ | $ux+vx+ux^3$ | 燕尾 |
| $D_4$ | 3 | 2 | $x^3+xy^2$ | $ux+vx^2+wy$ | 双曲脐点 |
| $D_4^+$ | 3 | 2 | $x^3-xy^2$ | $ux+vx^2+wy$ | 椭圆脐点 |
| $A_5$ | 4 | 2 | $x^6+y^2$ | $ux+vx^2+wx^3+tx^4$ | 蝴蝶 |
| $D_5$ | 4 | 2 | $x^4+xy^2$ | $ux+vx^2+wx^3+ty$ | 抛物脐点 |

相应于 Thom 突变的芽(germ)都是有限决定的(finitely determined)(确切地说, 是 6-决定的, 即在适当的坐标之下, 它们相应于次数 $\leq 6$ 的二元多项式).

余维数 codim 是一个临界点复杂性的尺度. codim $r$ 的函数 $f$ 之任意小扰动都只会得出至多有 $r$ 个复临界点的函数. 奇点(singularity)(即一个芽 $f$ 使得 $f(0)=Df(0)=0$)的余维数(codimension)就是数 $\dim \mathfrak{m}/\langle\partial f\rangle$, 其中 $\mathfrak{m}=\{g:g(0)=0\}$, $\langle\partial f\rangle$ 则是由芽 $\partial f/\partial x^i$ 生成的理想. 例如, 如果 $f=x^N$, 则 $\langle\partial f\rangle=\langle x^{N-1}\rangle$, 而 $x,\cdots,x^{N-2}$ 的剩余类构成 $\mathfrak{m}/\langle\partial f\rangle$ 的一个基, 因此 $\mathrm{codim}=N-2$. 有不等式 $\mathrm{codim} f\geq c(c+1)/2$ 成立, 这里 $c$ 是 Hesse 式 $\partial^2 f/\partial x^i\partial x^j(0)$ 的余秩. 由此特别可知, 若

$r \leqslant 4$，则 $c \leqslant 2$.

芽的有限决定性（或称充分性），粗略地说，就表示，它除了相差光滑的坐标变换外可由它的节（jet）决定. 更准确地说，芽 $f$ 称为 $k$ 决定的（$k$-determined），如果每个与 $f$ 有相同 $k$ 节（即 Taylor 级数直到 $k$ 阶均相同）的芽 $f_1$ 都是右等价（right-equivalent）于 $f$（即 $f_1 = f \circ \varphi$，$\varphi$ 是一个微分同胚在 0 的芽；见[2]）. 一个芽是有限决定的，当且仅当它的余维数为有限. 特别是，若 codim $= r$，则 $f$ 是 $(r+2)$ — 决定的（从而当 $r \leqslant 4$ 时它是 6 — 决定的）.

Thom 突变和**一般位置**（general position）情况相反，是退化奇点（即 Hesse 式在该处退化），它们可以用小扰动除掉，如上面所述. 然而，在许多有实际重要性且理论上也很重要的情况下，人们感兴趣的不仅是单个对象，而是一族含有一些"控制"参数的对象. 对参数的每个个别固定值可以除去的退化奇点，对于这一族对象作为一个整体则可能是不可除去的（也可以在这个意义下考虑 Thom 突变的稳定性）. 然而这时自然的研究对象就不再是奇点本身，而是一个族（即奇点的形变），奇点在其中当参数变动时是不可除去的（而是会分裂，即出现"分岐"）. 但实际情况是，在许多情况下，一切可能的形变之研究可以归结为研究一个单个的形变，它在一定意义下是很大的，而一切其它形变均可由它得出. 这种形变称为通用的（versal）. 而它们反过来，又可以从万有的（universal）（或称仅有的（miniversal））形变得出，后者的特点是其参数空间有最小可能的维数. 这里最重要的结果是 Mather 定理（Mather theorem）：奇点 $f$ 具有泛形变，当且仅当其余维数为有限.

芽 $f(x)$ 的形变 $F(x, u)$，$x \in \mathbf{R}^n$，$u \in \mathbf{R}^r$ 且 $F(x, 0) = f(x)$，可由下式给出

$$F(x, u) = f(x) + b_1 u_1 + \cdots + b_r u_r,$$

其中 $(b_1, \cdots, b_r)$ 是空间 $\mathfrak{m} / \langle \partial f \rangle$ 一个基的任意代表元素. Thom 突变相当于含至多四个参数的形变.

在应用上很重要的是所谓分岐集（bifurcation set）或奇异集（singular set），$D_f = \{(x, u) \in \mathbf{R}^n \times U : d_x f = 0$ 而 $d^2 f$ 为退化的$\}$；它在 $u$ 空间上的投射，即集 $\{u \in U, (x, u) \in D_f$ 对某个 $x \in \mathbf{R}^n$ 成立$\}$，称为突变集（catastrophe set），它位于控制空间中，因而是"可观测量"，而一切"间断"或"突变"均由它而来. 图 1a，1b，1c 描画了相应于 codim 3 的情况.

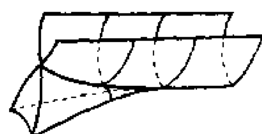


图 1a

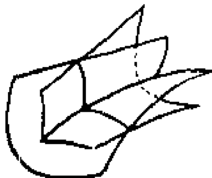


图 1b

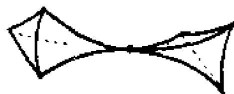


图 1c

**参考文献**


[1] Thom, R., Topological models in biology, *Topology*. **8** (1969), 313 – 335.

[2] Bröcker, P. and Lander, L., Differentiable germs and catastrophes, Cambridge Univ. Press, 1975.

[3] Poston, T. and Stewart, I., Catastrophe theory and its applications, Pitman, 1978.


М. И. Войцеховский 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Thom, R., Structural stability and morphogenesis, Benjamin, 1976（译自法文）.

[A2] Thom, R., Mathematical models of morphogenesis, Wiley, 1983（译自法文）.

[A3] Арнольд, В. И., Теория катастроф, М. 1983.（中译本：Arnold, V. I., 突变理论，高等教育出版社，1990）.

[A4] Zeeman, E. C., Catastrophe theory, Addison-Wesley, 1977.


齐民友 译

## Thom 类［Thom class；Тома класс］

**Thom 空间**（Thom space）的（广义）上同调群中的一个元素，该上同调群作为底空间上同调环上的模由 Thom 类生成. 设 $E^*$ 是一乘性广义上同调论（generalized cohomology theories），记 $1 \in E^0(S^0)$ 在 $n$ 重**纬垂**（suspension）同构 $\widetilde{E}^0(S^0) \cong \widetilde{E}^n(S^n)$ 下的象为 $\gamma_n \in \widetilde{E}^n(S^n)$. 设 $X$ 是道路连通的有限胞腔复形，$\xi$ 为 $X$ 上的 $n$ 维向量丛，$j: S^n \to T(\xi)$ 为相应的到 Thom 空间中的包含映射. 元素 $u \in \widetilde{E}^n(T)$ 称为从 $\xi$ 的一个 Thom 类（Thom class）（或定向（orientation）），如果 $j^* u = \varepsilon \gamma_n$，其中 $\varepsilon$ 为 $\widetilde{E}^0(S^0)$ 中的可逆元. 一个丛不一定会有 Thom 类，如果它确有一个（$E^*$ 中的）Thom 类，这个丛就称为 $E$ 可定向的（$E$-orientable），指定了一个 Thom 类之后这个丛就称为 $E$ 定向的（$E$-oriented）. $X$ 上 $E$ 可定向丛的 Thom 类的个数等于群 $(\widetilde{E}^0(S^0))^* \times \widetilde{E}^0(X)$ 的元素个数. 用 Thom 类作乘法就可以得到 **Thom 同构**（Thom isomorphism）.

Ю. Б. Рудяк 撰

【补注】 对于一个带边或不带边的（拓扑）流形（$M$, $\partial M$），其 Thom 类定义为切丛（或微丛）的 Thom 类. 给定一个 Thom 类 $t \in E^n(M \times M, M \times M \setminus \Delta)$ 之后，就有下面一些同构 $\varphi_r$：$E_r(M \setminus B, M \setminus A) \xrightarrow{\sim} E^{n-r}(A, B)$（Alexander 对偶性（Alexander duality）），$E_r(A, B) \xrightarrow{\sim} E^{n-r}(M \setminus A, M \setminus B)$，$E_r(M, \partial M) \xrightarrow{\sim}$

$E^{n-r}(M)$ (Lefschetz 对偶性 (Lefschetz duality), 以及 $E_r(M) \xrightarrow{\cong} E^{n-r}(M, \partial M)$、$E_r(M) \to E^{n-r}(M)$ (Poincaré 对偶性 (Poincaré duality)), 其中 $(M, \partial M)$ 是可三角剖分的紧流形, $B \subset A \subset M \setminus \partial M$ 为紧子多面体. 细节见[A1]的第 14 章.

一个元素 $z \in E_n(M, \partial M)$ 称为基本类 (fundamental class), 如果对每个 $x \in M \setminus \partial M$, $E_*(M, M \setminus \{x\})$ 作为 $E_*(\mathrm{pt})$ 上的模 $j_*(z) \in E_n(M, M \setminus \{x\})$ $(\cong E_n(U, U \setminus \{x\}) \simeq E_n(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n \setminus \{0\}))$ 是其生成子. (这里 $j$ 是包含映射 $(M, \partial M) \to (M, M \setminus \{x\})$.) 对于通常的同调情形见**基本类** (fundamental class). 基本类与 Thom 类之间的关系如下: 若 $M$ 为具有 Thom 类 $t$ 的可三角剖分的 $n$ 维紧流形, 则存在唯一一个基本类 $z \in E_n(M, \partial M)$ 使得 $\varphi_t: E_n(M, \partial M) \xrightarrow{\cong} E^0(M \setminus \partial M)$ 将 $z$ 映到 1, 参见[A1], 命题 14.17. 利用这一结果, 则用 Thom 类 $t$ 定义的 Lefschetz 对偶性同构与 Poincaré 对偶性同构 (本质上由与 $t$ 作斜积而得) 都可由与 $z$ 作卡积得到.

**参考文献**


[A1] Switzer, R. M., Algebraic topology - homotopy and homology, Springer, 1975.


余建明 译

**Thom 同构 [Thom isomorphism; Тома изоморфизм]**

向量 (球面) 丛 $\xi$ 的底空间的 (广义) (上) 同调群与其 **Thom 空间** (Thom space) $T(\xi)$ 的 (上) 同调群之间的一个同构.

假定 $\xi$ 是有限胞腔复形 $X$ 上的 $n$ 维向量丛, 并且在某个给定的乘性广义上同调论 $E^*$ 中是定向的 (见**广义上同调论** (generalized cohomology theories)), 就是说, 存在 **Thom 类** (Thom class) $u \in \widetilde{E}^*(T\xi)$. 这时, $\widetilde{E}^*(T\xi)$ 就是一个 $E^*(X)$ 模, 而且由乘以 Thom 类给出的同态 $\varphi: E^i(X) \to \widetilde{E}^{i+n}(T\xi)$ 是一个同构, 称为 Thom 同构 (或 Thom - Dold 同构 (Thom - Dold isomorphism)).

用对偶的方式可以定义一个同构 $E_i(X) \to \widetilde{E}_{i+n}(T\xi)$.

[1] 中对于经典上同调论 $H^*$ 给出了 Thom 同构, 而对一般上同调论 $E^*$ 却是在[2]中建立的. 而且, 若 $\xi$ 在整系数上同调论 $H^*$ 中是不定向的, 则有一个同构 $H^k(X) \cong H^{k+n}(T\xi; \{Z\})$, 其中右端是系数在群的局部系统 $\{Z\}$ 中的上同调群. 更一般地说, 若 $\xi$ 在上同调论 $E^*$ 中是不定向的, 则有一个同构, 它既推广了上面介绍的 Thom 同构, 也推广了对 $E^*$ 定向丛的 Thom - Dold 同构 ([3]).

**参考文献**


[1] Thom, R., Quelques propriétés globales des variétés différentiables, *Comm. Math. Helv.*, **28** (1954), 17 – 86.

[2] Dold, A., Relations between ordinary and extraordinary homology, in *Coll. Algebraic Topol.*, Aarhus Univ., 1962, 2 – 9.

[3] Рудяк, Ю. Б., 《Докл. АН СССР》, **255** (1980), 6, 1323 – 1325.

[4] Switzer, R. M., Algebraic topology: homotopy and homology, Springer, 1975.


Ю. Б. Рудяк 撰 余建明 译

**Thom 空间 [Thom space; Тома пространство]**

与一个向量丛 (或者球面丛) 或者球面纤维化相联系的拓扑空间.

设 $X$ 为 CW 复形, $\xi$ 为其上的向量丛. 假定在 $\xi$ 上给定了一个 Riemann 度量, 考虑与 $\xi$ 相应的单位圆盘丛 $D(\xi)$. 单位球面丛 $S(\xi)$ 是 $D(\xi)$ 的子丛; 商空间 $D(\xi)/S(\xi)$ 就是丛 $\xi$ 的 Thom 空间, 记为 $T(\xi)$. 若底空间 $X$ 为紧空间, 则 Thom 空间也可说成是丛 $\xi$ 的全空间的单点紧化. 而且, Thom 空间是投射 $S(\xi) \to X$ 的**锥** (cone). 对任意的球面纤维化, 也可以用这种方式来定义它的 Thom 空间. 当然, 对任何以 $\mathbf{R}^n$ 为纤维的丛也可以定义 Thom 空间.

设 $O_k$ 为空间 $\mathbf{R}^k$ 的正交变换群, 在它的**分类空间** (classifying space) $\mathrm{BO}_k$ 之上有一个与万有 $O_k$ 丛相联的 $k$ 维向量丛 $\gamma_k$. Thom 空间 $T\gamma_k$ 通常记作 $\mathrm{MO}_k$ 或 $\mathrm{TBO}_k$, 并称为群 $O_k$ 的 Thom 空间. 类似地, 可以引进 Thom 空间 $\mathrm{MU}_k$, $\mathrm{MSp}_k$ 等等, 其中 $U_k$ 与 $\mathrm{Sp}_k$ 分别为酉群与辛群.

Thom 空间的作用在于可以将一系列几何问题化成同伦拓扑学中的问题, 由此又化成代数问题. 从而, 计算**下配边** (bordism) 群的问题就化成了计算 Thom 空间 $\mathrm{MO}_k$, $\mathrm{MSO}_k$ 等等的同伦群的问题 (见[1], [2] 以及**配边** (cobordism)). 光滑流形的分类问题化成了研究**法丛** (normal bundle) 的 Thom 空间的同伦性质 (见[3]). 用子流形来实现闭链的问题 (见 **Steenrod 问题** (Steenrod problem)) 化成了研究 Thom 空间 $\mathrm{MSO}_k$ 与 $\mathrm{MO}_k$ 等等的上同调 (亦见**横截映射** (transversal mapping); **管状邻域** (tubular neighbourhood)).

在丛的范畴上, Thom 空间的构造是自然的, 就是说, 每个 (向量) 丛之间的态射 $f: \xi \to \eta$ 都诱导出一连续映射 $T(f): T(\xi) \to T(\eta)$. 特别地, 由于在一个点上 $n$ 维向量丛的 Thom 空间是 $S^n$, 因而对 $X$ 上的任意 $n$ 维丛 $\xi$ 以及任意点 $x \in X$ 都有一包含映射 $j_x: S^n \to T(\xi)$ (由 $x$ 上纤维的包含映射所诱导). 如果 $X$ 是道路连通的, 则所有这样的包含映射都是同伦的, 因此可以有一个在同伦等价意义下是唯一确定的映射 $j: S^n \to T(\xi)$.

对于分别定义在 $X$ 与 $Y$ 上的两个丛 $\xi$ 与 $\eta$, 可

以定义 $X\times Y$ 上的丛 $\xi\times\eta$. 那么 $T(\xi\times\eta)=T(\xi)\wedge T(\eta)$(见[4]). 特别对于平凡丛 $\theta^n$, 有 $T(\xi\oplus\theta^n)=S^nT(\xi)$, 其中 $S$ 为**纬垂**(suspension)算子, 从而 $T(\theta^n)=S^n(X\cup\mathrm{pt})$. 在这种情况下可以构造 Thom 空间的谱, 见 **Thom 谱**(Thom spectrum).

若 $E$ 为乘性**广义上同调论**(generalized cohomology theories), 则有一配对

$$E^*(D(\xi))\otimes E^*(D(\xi),S(\xi))\to E^*(D(\xi),S(\xi)).$$

由此产生一个配对

$$E^*(X)\otimes\widetilde{E}^*(T\xi)\to\widetilde{E}^*(T\xi),$$

从而 $\widetilde{E}^*(T\xi)$ 是一个 $E^*(X)$ 模, 这一事实可用来构造 **Thom 同构**(Thom isomorphism).

下面重要的 Atiyah 对偶性定理(Atiyah duality theorem)经常要用到(见[4], [5]): 若 $M$ 为光滑流形, 有边界 $\partial M$(可能为空集), $\nu$ 是它的法丛, 则 Thom 空间 $T(\nu)$ 与 $M/\partial M$ 是 $S$ 对偶的.

**参考文献**


[1] Thom, R., Quelques propriétés globales des variétés différentiales, *Comm. Math. Helv.*, **28** (1954), 17 – 86.

[2] Stong, R. E., Notes on cobordism theory, Princeton Univ. Press, 1968.

[3] Browder, W., Surgery on simply-connected manifolds, Springer, 1972.

[4] Husemoller, D., Fibre bundles, McGraw-Hill, 1966.

[5] Atiyah, M., Thom complexes, *Proc. London Math. Soc.*, **11** (1961), 291 – 310.


Ю. Б. Рудяк 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Dieudonné, J., A history of algebraic and differential topology: 1900 – 1960, Birkhäuser, 1989.


余建明 译

**Thom 谱 [Thom spectrum; Тома спектр]**

一个**空间的谱**(spectrum of spaces), 它等价于某些结构序列的谱(见 $(B,\varphi)$ **结构**($(B,\varphi)$-structure)).

设 $(B_n,\varphi_n,g_n)$ 为一结构序列, $\xi_n$ 为映射 $\varphi_n$: $B_n\to\mathrm{BO}_n$ 在 $B_n$ 上诱导的丛. 令 $T_n$ 为 $\xi_n$ 的 **Thom 空间**(Thom space). 映射 $g_n$ 诱导出映射 $S_n$: $ST_n\to T_{n+1}$, 其中 $S$ 为**纬垂**(suspension)算子: $ST\xi_n=T(\xi_n\oplus\theta)$($\theta$ 为一维平凡丛). 对于结构序列 $(B_n,\varphi_n,g_n)$, 可以得到一个空间的谱 $\{T\xi_n\}=T(B,\varphi,g)$, 与形如 $T(B,\varphi,g)$ 的谱(同伦)等价的任何谱都称为 Thom 谱. 它代表了 $(B,\varphi)$ 配边理论. 因此, 典型 Lie 群 $O_k$, $\mathrm{SO}_k$, $U_k$ 与 $\mathrm{Sp}_k$ 的序列就导出了 Thom 谱 TBO, TBSO, TBU 以及 TBSp.

设 $\beta_n$ 为有 $n$ 束的 Artin 辫群(见**辫论**(braid theory)). 若 $S_n$ 为对称群, 则同态 $\beta_n\to S_n\subset O_n$ 导出一个映射 $B\beta_n\to\mathrm{BO}_n$, 由此可以得到一结构序列(将 $\beta_n$ 典范地嵌入 $\beta_{n+1}$ 中). 相应的 Thom 谱等价于 Eilenberg-MacLane 谱 $K(\mathbf{Z}/2)=\{K(\mathbf{Z}/2,n)\}$, 因此 $K(\mathbf{Z}/2)$ 是一 Thom 谱(参见[1], [2]). 类似地, 利用球面丛可以说明, $K(\mathbf{Z})$ 是一 Thom 谱(见[3]).

**参考文献**


[1] Mahowold, M., A new infinite family in $2^{\pi_*^s}$, *Topology*, **16** (1977), 249 – 256.

[2] Priddy, S., $K(\mathbf{Z}/2)$ as a Thom spectrum, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **70** (1978), 2, 207 – 208.

[3] Mahowold, M., Ring spectra which are Thom complexes, *Duke Math. J.*, **46** (1979), 3, 549 – 559.


Ю. Б. Рудяк 撰 余建明 译

**Thompson 子群 [Thompson subgroup; Томпсона подгруппа]**

$p$ 群($p$-group)的由所有极大阶的 Abel 子群生成的**特征子群**(characteristic subgroup). 这是 J. G. Thompson([1])所引入的.

**参考文献**


[1] Thompson, J. G., A replacement theorem for $p$-groups and a conjecture, *J. Algebra*, **13** (1969), 149 – 151.

[2] Gorenstein, D., Finite groups, Harper & Row, 1968.


Н. Н. Вильямс 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Doerk, K. and Hawkes, T., Finite soluble groups de Gruyter, 1992, p. 214.


石生明 译 王 杰 校

**脉络 [thread; нить]**, 亦称丝线、线索, 逆谱 $\{X_\alpha, \omega_\alpha^\beta: \alpha\in\mathfrak{A}\}$ 的点 $x_\alpha\in X_\alpha$(每个 $X_\alpha$ 取一点)的一个点系 $x=\{x_\alpha\}$, 即集合 $X_\alpha$ 之积 $\Pi_{\alpha\in\mathfrak{A}}X_\alpha$ 的一个点, 它使 $\beta>\alpha$ 时 $\omega_\alpha^\beta(x_\beta)=x_\alpha$.

Б. А. Пасынков 撰

【补注】 一个逆谱(或投射系, 或反系)的脉络集称为该谱的(投射, 反)极限(见**极限**(limit)的补注).

**参考文献**


[A1] Engelking, R., General topology, Heldermann, 1989.


罗嵩龄 译

**三体问题 [three-body problem; трех тел задача]**

三个可视为质点的物体在 Newton 引力(见 New-

ton 力学定律（Newton laws of mechanics）的相互作用下的运动问题．三体问题的经典例子是太阳-地球-月亮系统的运动．三体问题可归结为求解下面的微分方程组：

$$m_i \frac{d^2 x_i}{\partial t^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad m_i \frac{d^2 y_i}{\partial t^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i},$$

$$m_i \frac{d^2 z_i}{\partial t^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i}, \quad i = 1, 2, 3,$$

这里，$x_i$，$y_i$，$z_i$ 是物体 $M_i$ 在某个具有固定坐标轴的绝对坐标系下的直角坐标，$t$ 为时间，$m_i$ 为物体 $M_i$ 的质量，$U$ 为只依赖于质点之间相互位置的势能．函数 $U$ 可由下式给出：

$$U = f\left[\frac{m_1 m_2}{\Delta_{12}} + \frac{m_2 m_3}{\Delta_{23}} + \frac{m_3 m_1}{\Delta_{13}}\right], f > 0,$$

这里，相互之间的距离 $\Delta_{ij}$，$I$，$j = 1, 2, 3$ 由下式给出：

$$\Delta_{ij} = \Delta_{ji} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}.$$

根据势能的性质，可以导得运动方程式在绝对坐标系下的十个第一积分．其中六个称之为质心运动积分，确定三个物体质心的匀速直线运动．三个是角动量积分，确定三体系统的角动量的值和方向．能量积分确定系统总能量的常值．H．Bruns（1887）证明了：三体问题的运动方程没有其他可以表示为坐标及其导数的代数函数的第一积分．H．Poincaré（1889）进一步证明了：三体问题的运动方程没有可以表示为单值解析函数的超越积分．C．Sundman（1912）求得问题的通解，它表示为每时每刻都收敛的某个正则变量的幂级数．但是证明，由于 Sundman 级数收敛极慢，故对定性研究或实际的数值计算都毫无用处．

三体问题的方程式可以有五个特解，其中三个质点全都处在某个固定的平面上．这里，三体的布局保持固定，共绘出其共同焦点在系统质心上的诸 Kepler 轨道．两个特解相应于三体在任何时刻都形成等边三角形的情况．这是三体问题的所谓三角形解（angular solution）或 Lagrange 解（Lagrange solution）．三个特解相应于三体都在一条直线上的情况，称为直线特解（rectilinear particular solution），或 Euler 解（Euler solution）．

对于三体问题的情况，最终运动即运动在 $t \to +\infty$ 和 $t \to -\infty$ 时的极限性质得到了详细的研究．

三体问题的一种特殊情况是所谓的限制三体问题（restricted three-body problem），它是从一般的三体问题得出的．其时，三体中有一体的质量很小，以至于对另外两体运动的影响可以忽略不计．这时，具有有限质量 $m_1$ 和 $m_2$ 的物体 $M_1$ 和 $M_2$ 在受其相互引力的作用下沿着 Kepler 轨道运动．对于坐标系 $G\xi\eta\zeta$，其原点 $G$ 在物体 $M_1$ 和 $M_2$ 的质心、$\xi$ 轴指向物体 $M_1$ 和 $M_2$ 的联线、$\zeta$ 轴垂直于它们运动的平面，具有小质量的第三个物体 $M_3$ 的运动可用下列微分方程描写：

$$\ddot{\xi} - 2\dot{v}\dot{\eta} - \dot{v}^2\xi - \ddot{v}\eta = \frac{\partial W}{\partial \xi},$$

$$\ddot{\eta} + 2\dot{v}\dot{\xi} - \dot{v}^2\eta + \ddot{v}\xi = \frac{\partial W}{\partial \eta},$$

$$\ddot{\zeta} = \frac{\partial W}{\partial \zeta},$$

这里：

$$W = f\left[\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right].$$

$v$ 是物体 $M_1$ 和 $M_2$ 的 Kepler 运动的真近点距（true anomaly），$r_1$ 和 $r_2$ 分别是物体 $M_3$ 到物体 $M_1$ 和 $M_2$ 的距离．对于圆限制三体问题（circular restricted three-body problem），有：

$$\dot{v} - n = \text{常数}, \ \ddot{v} = 0$$

物体 $M_3$ 的运动方程也有一个第一积分，称为 Jacobi 积分（Jacobi integral），其形式为

$$\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2 = n^2(\xi^2 + \eta^2) + 2f\left[\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right] + C$$

这里 $C$ 为任意常数．对于由方程

$$n^2(\xi^2 + \eta^2) + 2f\left[\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right] + C = 0$$

所确定的曲面称为零速度面，值得注意的是它确定了物体 $M_3$ 相对于物体 $M_1$ 和 $M_2$ 的可能运动的区域．限制三体问题有一些与普遍的三体问题类似的特解．在这些特解中，具有小质量的物体的位置称之为自由点．

对于限制三体问题，已经研究了周期运动的各种类别．

**参考文献**


[1] Дубошин, Г. Н.: Небесная механика, Аналитические и качественные методы, 2 изд., М., 1978.

[2] Субботин, М. Ф.: Введение в теоретическую астрономию, М., 1968.


Е. П. Аксенов 撰

【补注】

对于限制三体问题可应用 KAM 理论．见拟周期运动（quasi-periodic motion）．

**参考文献**


[A1] Arnol'd, V. I., Mathematical methods of classical

mechanics, Springer, 1978 (中译本: В. И. Арнольд, 经典力学的数学方法, 高等教育出版社, 1992).
[A2] Poincare, H. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, 1 - 3, Gauthiers-Villars, 1892 - 1899.
[A3] Arnol'd, V. I. and Avez, A., Ergodic problems of classical mechanics, Benjamin, 1968 (译自俄文).
[A4] Siegel, C. L., Vorlesungen uber Himmelsmechanik, Springer, 1956.
[A5] Siegel, C. L., and Moser, J., Lectures on celestial mechanics, Springer, 1971.
[A6] Abraham, R. and Marsden, J. E., Foundations of mechanics, Benjamin / Cummings, 1978.

王克仁 译　诸德超 校

三维流形 [**three-dimensional manifold; трехмерное многообразие**]

一个**拓扑空间** (topological space), 它的每个点都有一个同胚于三维实空间 $\mathbf{R}^3$ 或闭的半空间 $\mathbf{R}^3_+$ 的邻域. 这个定义通常补充要求三维流形作为拓扑空间是 Hausdorff 和有可数基的. 三维流形的边界, 即只有上面类型中的第二种而不是第一种邻域的那种点的集合, 是一个无边的**二维流形** (two-dimensional manifold). 三维流形的拓扑学的方法是非常特殊的并因而在**流形的拓扑学** (topology of manifold) 中处于一个特殊地位.

例. 三维流形的一些性质在一般情况下对高维的流形不成立, 它们是: 可定向的三维流形总是平行的, 闭三维流形形成某个四维流形的边界; 总可给三维流形引入分片线性和微分构造, 并且在两个三维流形之间的任何同胚总可以用分片线性同胚和可微分同胚逼近.

描述三维流形的最普遍的方法之一是使用 **Heegaard 分解** (Heegaard decomposition) 和与之密切相关的 **Heegaard 图** (Heegaard diagram). 该方法的精髓是, 任何闭定向三维流形 $M$ 可以分解为两个有公共边界的子流形, 其中每个子流形同胚于某个亏格 $n$ 的标准的完全双环面 (或环柄体, 见**环柄理论** (handle theory)) $V$. 换言之, 一个三维流形 $M$ 可以由两个完全的双环面 $V$ 沿着它们的边界用某个同胚粘合而成. 这个事实使得三维流形的拓扑学中的许多问题可以简化到曲面的拓扑学中的问题. 最小的可能数 $n$ 称为三维流形 $M$ 的亏格 (genus of the three-dimensional manifold $M$). 描述三维流形的另一个有用的方法基于三维流形和 $S^3$ 中的连接 (见**纽结理论** (knot theory)) 之间紧密联系的存在性: 任何闭定向三维流形 $M$ 可用形式 $M = \partial W$ 来表示, 其中四维流形 $W$ 是从 4 球 $B^4$ 通过沿 $S^3 = \partial B^4$ 中的某个标架连接 $L$ 的分支粘贴指数 2 的环柄得到. 等价地, 一个三维流形 $M$ 可从球面 $S^3$ 中用球面的**割补术** (surgery) 得到. 此外, 可以要求连接 $L$ 的所有分支有偶数的标架, 并因此, 这样得到的流形 $W$ 是可平行的. 人们经常用到将三维流形作为 $S^3$ 中的分歧覆叠空间的这个表示. 如果 $L$ 是 $S^3$ 中的连接, 则 $S^3/L$ 的任何有限层覆叠空间可以给一个闭三维流形 $M$ 一些圆来紧化. 在 $p^{-1}(L)$ 的外部是局部同胚的自然投影 $p: M \to S^3$ 称为具有沿 $L$ 分歧的 $S^3$ 的分歧覆叠. 任何一个亏格 2 的三维流形是具有沿某个连接的分歧的球面的二层覆叠, 而在任何亏格的三维流形的情形中, 只能保证一个具有沿某个纽结分歧的三层覆叠的存在性. 这个情况就是为什么三维 Poincaré 猜想和球面的算法识别的问题直到目前为止只在亏格 2 的三维流形中有解的主要原因.

三维流形的拓扑学的主要问题是它们的分类问题. 一个三维流形 $M$ 称为简单的 (simple), 如果 $M = M_1 \# M_2$ 蕴涵着流形 $M_1, M_2$ 中恰有一个是球面. 每一个紧三维流形分解成有限数目的简单三维流形的连通和. 这个分解在可定向的情形是唯一的, 而在不可定向的情形差一个由 $S^2 \tilde{\times} S^1$ 的直积的替代是唯一的. 代替简单三维流形的概念, 用不可约的三维流形的概念经常更有用, 即这个三维流形中的每一个 2 球面形成一个球的边界. 不可约的三维流形类与简单的三维流形不同, 正好差三个流形: $S^3$, $S^2 \times S^1$ 和 $S^2 \tilde{\times} S^1$. 这里, 流形 $S^3$ 是不可约的, 但通常不认为是简单的, 而流形 $S^2 \times S^1$ 和 $S^2 \tilde{\times} S^1$ 是简单的但不是不可约的. 带边不可约三维流形已相当好地被研究过了. 例如偶对的任何同伦等价 $f: (M, \partial M) \to (N, \partial N)$ 可以形变成一个同胚, 其中, $M, N$ 是带边的紧定向不可约的三维流形. 在闭的情形下, 附加三维流形 $M$ 充分地大 (即它包含某个二边不可压缩的曲面) 就足够了. 这里, 一个曲面 $F \subset M$, $F \neq S^2$ 称作是不可压缩的 (incompressible), 如果从 $\pi_1(F)$ 到 $\pi_1(M)$ 中的由嵌入诱导的群同态是单射的. 如果一个紧不可约三维流形的第一同调群是无限的, 那么, 这样的曲面一定存在. 任何紧定向不可约足够大的三维流形, 它的基本群含有一个无限循环的正规子群, 则该三维流形是一个 **Seifert 流形** (Seifert manifold).

**参考文献**

[1] Hempel, J., 3-manifolds, Princeton Univ. Press, 1976
[2] Waldhausen, F., On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large. *Ann. of Math.*, 87 (1968), 56 - 88.
[3] Jaco, W., Lectures on three-manifold topology, Amer. Math. Soc., 1980.

C. B. Матвеев 撰

**【补注】**

**参考文献**

[A1] Moise, E. E., Geometric topology in dimensions 2 and 3, Springer, 1977.

徐森林 译

**三级数定理** [**three-series theorem**; **трех рядов теорема**], Колмогоров 三级数定理 (Kolmogorov three-series theorem), 三级数准则 (three-series criterion)

【补注】 对于每个 $s>0$, 设 $\tau_s$ 是截断函数

$$\tau_s(x)=\begin{cases} s, & 当\ x\geqslant s\ 时, \\ x, & 当\ |x|\leqslant s\ 时, \\ -s, & 当\ x\leqslant -s\ 时. \end{cases}$$

设 $X_1, X_2, \cdots$ 是一些独立随机变量, 其分布分别为 $F_1, F_2, \cdots$. 考虑和 $S_n=X_1+\cdots+X_n$, 其分布为 $F_1 \star \cdots \star F_n$. 为使这些卷积 $F_1 \star \cdots \star F_n$ 当 $n\to\infty$ 时趋于正常极限分布, 其必要充分条件是: 对于一切 $s>0$, 有

$$\sum_k \mathsf{P}\{|X_k|>s\}<\infty, \qquad (A1)$$

$$\sum \mathrm{Var}(X_k')<\infty, \qquad (A2)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}(X_k')\to m, \qquad (A3)$$

其中 $X_k'=\tau_s(X_k)$.

这一事实可以重述为 Колмогоров 三级数定理 (Kolmogorov three-series theorem): 如果 (A1) - (A3) 成立, 则级数 $\sum X_k$ 以概率 1 收敛, 否则, 它以概率 0 收敛.

**参考文献**


[A1] Loève, M., Probability theory, Princeton Univ. Press, 1963.

[A2] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, 2, Wiley, 1971 (中译本: W. 费勒, 概率论及其应用, 上册, 下册, 科学出版社, 1979).


杜小杨 译

**"3σ" 法则** [**'three-sigma' rule**; **'трех сигм' правило**]

一种经验法则. 根据这种法则, 在概率论和数理统计中, 把"**正态分布** (normal distribution) 随机变量的值对其**数学期望** (mathematical expectation) 的偏差不大于 3 倍**标准差** (standard deviation)"视为实际不可能事件.

设 $X$ 是服从正态分布 $N(a,\sigma^2)$ 的随机变量; 对于任意 $k>0$, 有

$$\mathsf{P}\{|X-a|<k\sigma\}=2\Phi(k)-1,$$

其中 $\Phi(\cdot)$ 是标准正态分布函数; 特别地, 对于 $k=3$, 有

$$\mathsf{P}\{a-3\sigma<X<a+3\sigma\}=0.99730.$$

该式表明, 随机变量 $X$ 的值偏离其数学期望 $a$ 的距离超过 $3\sigma$ 的情形, 在 1000 次试验中平均不多于 3 次. 试验者有时正是基于这一事实, 在某些概率论与数理统计问题中, 把事件 $\{|X-a|\geqslant 3\sigma\}$ 视为实际不可能的, 从而把事件 $\{|X-a|<3\sigma\}$ 视为实际必然的. 在这种情形下, 称试验者遵循"$3\sigma$"法则.

**参考文献**


[1] Смирнов, Н. В., Дунин-Барковский, И. В., Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений, 3 изд., М. 1969.


М. С. Никулин 撰 周概容 译

**Thue 法** [**Thue method**; **Туэ метод**]

A. Thue ([1]) 在解决下述用有理数逼近**代数数** (algebraic number) 的问题时创立的 **Diophantus 逼近** (Diophantine approximation) 论中的一个方法: 求数 $\nu=\nu(n)$, 使得对于每个 $n$ 次代数数 $\alpha$, 不等式

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^{\nu+\varepsilon}} \qquad (1)$$

对任何 $\varepsilon>0$ 有有限多组有理整数解 $p$ 和 $q\ (q>0)$, 而对任何 $\varepsilon<0$ 有无穷多组解.

Thue 证明了 $\nu\leqslant n/2+1$. Thue 的方法是基于特殊的二变量 $x, y$ 的整系数多项式 $f(x,y)$ 的性质以及对于 $\nu\leqslant n/2+1$ 和充分大的 $q$ 存在 (1) 的两组解的假设. Thue 定理 (Thue theorem) 在数论中有许多重要应用. 特别, 它蕴含了 Diophantus 方程

$$F(x,y)=m \qquad (2)$$

不可能有多于有限多个整数解 $x$ 和 $y$, 此处 $F(x,y)$ 是变量 $x, y$ 的次数 $n\leqslant 3$ 的整系数不可约型, $m$ 是一个整数.

(1) 中 $\nu$ 的最好可能的估值是 K. F. Roth([2]) 得到的, 他把 Thue 方法推广到与多项式 $f(x,y)$ 类似的具有任意多个变量的多项式的情形, 并且用到 (1) 的大的解数. 其结果是对于任何 $n\geqslant 2$ 有 $\nu=2$, 它称之为 Thue-Siegel-Roth 定理 (Thue-Siegel-Roth theorem). Thue 法还被推广到用代数数逼近代数数的情形. Thue 方法是用来证明一类广泛的代数簇上的曲线上整点个数有限性的一般性方法 (见 **Diophantus 几何** (Diophantine geometry); **Diophantus 集** (Diophantine set)). 另外, Thue 方法有一个本质性的缺陷, 它在下列意义下是非有效性方法: 它不能对于在证明中被用到的不等式 (1) 或相应的方程 (2) 的那些解是否事实上存在的问题提供答案. 因此, Thue 方法在解决方程 (2) 的解数的有限性问题时, 没有提供确定一个这种类型的具体的方程是否可解以及给出这些解 $x, y$ 的值的估计与 $F$ 的相依关系的可能性.

亦见**有效的 Diophantus 逼近问题** (Diophantine approximation, problems of effective).

参考文献

[1] Thue, A., Ueber Annäherungswerte algebraischer Zahlen, *J. Reine Angew. Math.*, **135** (1909), 284 – 305.

[2] Roth, K. F., Rational approximation to algebraic numbers, *Mathematika*, **2** (1955), 1, 1 – 20.

[3] Проблемы теории диофантовых приближений, М., 1974.

А. Ф. Лаврик 撰

【补注】 Thue 方法被 C. L. Siegel 推广而得到 $\nu < 2\sqrt{n}$. 一个很好的阐述可见 [A1]. 这个方法称做 Thue-Siegel 方法 (Thue-Siegel method). 最近 P. Vojta ([A2]) 指出如何应用它给出 **Mordell 猜想** (Mordell conjecture) 的新证明, 这个方法得到令人注目的成功. E. Bombieri 给出了这个证明的值得注意且易于理解的简化. 对于其他的推广, 见 **Thue-Siegel-Roth 定理** (Thue-Siegel-Roth theorem).

参考文献

[A1] Landau, E., Vorlesungen über Zahlentheorie, Chelsea, 1969.

[A2] Vojta, P., Siegel's theorem in the compact case, *Ann. of Math.*, **133** (1991), 3, 509 – 548.

朱尧辰 译 戚鸣皋 校

半 **Thue 系统** [**Thue semi-system** 或 semi-Thue system; **полу-Туэ система**], 替换系统 (system of substitutions)

见 **Thue 系统** (Thue system).

**Thue-Siegel-Roth 定理** [**Thue-Siegel-Roth theorem**; **Туэ-Зигеля-Рота теорема**]

如果 $\alpha$ 是代数无理数 (见**代数数** (algebraic number)), 而 $\delta > 0$ 任意小, 那么不等式

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{2+\delta}}$$

只有有限多组整数解 $p$ 和 $q > 0$ ($p$ 和 $q$ 互素).

这个定理在这种类型的定理中是最好可能的; 指数中的数 2 不能再减小. Thue-Siegel-Roth 定理是 Liouville 定理的强化 (见 **Liouville 数** (Liouville number)). Liouville 的结果被 A. Thue ([1]), C. L. Siegel ([2]), 及最后被 K. F. Roth ([3]) 逐次加强. Thue 证明了, 如果 $\alpha$ 是次数 $n \geqslant 3$ 的代数数, 那么不等式

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{\nu}}$$

当 $\nu > (n/2) + 1$ 时仅有有限多组整数解 $p$ 和 $q > 0$ ($p$ 和 $q$ 互素). Siegel 证明了 Thue 定理当 $\nu > 2\sqrt{n}$ 时正确. 上面叙述的这个定理的最终的形式是 Roth 得到的. Thue-Siegel-Roth 定理有一个 $p$ 进类似. 上面所列出的那些结果都是用非有效性方法证明的 (见**有效的 Diophantus 逼近问题** (Diophantine approximation, problems of effective)).

参考文献

[1] Thue, A., Bemerkungen über gewisse Annäherungsbrüche algebraischer Zahlen, *Norske Vidensk. Selsk. Skrifter.*, **3** (1908), 1 – 34.

[2] Siegel, C. L., Approximation algebraischer Zahlen, *Math. Z.*, **10** (1921), 173 – 213.

[3] Roth, K. F., Rational approximation to algebraic numbers, *Mathematika*, **2** (1955), 1, 1 – 20.

[4] Mahler, K., Lectures on diophantine approximations, I, Univ. Notre Dame, 1961.

[5] Ridout, D., The $p$-adic generalization of the Thue-Siegel-Roth theorem, *Mathematika*, **5** (1958), 40 – 48.

[6] Гельфонд, А. О., Трансцендентные и алгебраические числа, М., 1952. (英译本: Gel'fond, A. O., Transcendental and algebraic numbers, Dover, 1960).

С. В. Котов 撰

【补注】 1971 年 W. M. Schmidt ([A1]) 把 Roth 定理推广到几个代数数的联立逼近问题. 他的结果被 H. P. Schlickewei ([A2]) 加以扩充, 使包括了 $p$ 进赋值的情形. 后一工作在指数 Diophantus 方程理论 ($S$ 单位方程) 中有一些深刻的推论 (见 [A3]).

在一个完全不同但引人注目的方向上, G. Faltings ([A4]) 把 Roth 定理扩充到 Abel 簇的乘积上并证明了 S. Lang 关于 Abel 簇的子簇上的有理点的一个值得注意的猜想. 这个证明还可以看作 **Mordell 猜想** (Mordell conjecture) 的 Vojta 证明的推广 (亦见 **Thue 定理** (Thue theorem)).

参考文献

[A1] Schmidt, W. M., Diophantine approximation, Lecture Notes in Math., 785, Springer, 1980.

[A2] Schlickwei, H. P., The $p$-adic Thue-Siegel-Roth-Schmidt theorem, *Arch. Math.*, **29** (1977), 267 – 270.

[A3] Evertse, J. H., On sums of $S$-units and linear recurrences, *Compos. Math.*, **53** (1984), 225 – 244.

[A4] Faltings, G., Diophantine approximation on abelian varieties, *Ann. of Math.*, **133** (1991), 3, 549 – 576.

朱尧辰 译 戚鸣皋 校

**Thue 系统** [**Thue system**; **Туэ система**]

一种以 A. Thue 的姓氏命名的**结合演算** (associative calculus). A. Thue 第一个形式的表述了结合系统中识别字的相等问题 (Thue 问题 (Thue problem), 见 [1]). 如果在一个给定的系统中, 容许的替换仅仅是关系的右手边到左手边的替换 (即倒换替换不许使用), 那么得到一个半 Thue 系统 (Thue semi-system 或 semi-Thue system). 这些系统实际上与局部典范

的 Post 系统相同. 每一个 Thue 系统可以视为一个半 Thue 系统, 但反之不真.

**参考文献**


[1] Thue, A., Probleme über Veränderungen von Zeichenreihen nach gegebener Regeln, *Kra. Vidensk. Selsk. Skrifter.*, 10 (1914).

[2] Мальцев, А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965 (英译本: Mal'tsev, A. I., Algorithms and recursive functions, Wolters-Noordhoff, 1970).


С. И. Адян 撰 卢景波 译 罗里波 校

**结 [tie; совпадение]**

样本中取同一值的观测值组. 设 $X_1, \cdots, X_n$ 是独立服从同一绝对连续型概率律的随机变量, 其密度为 $p(x)$. 那么, 观测值 $X_1, \cdots, X_n$ 以概率 1 两两不等: 若 $i \neq j$, 则 $X_i \neq X_j$, 并且基于样本 $X_1, \cdots, X_n$ 的**顺序统计量** (order statistic)

$$X_{(1)} < \cdots < X_{(n)} \qquad (*)$$

的每一项 $X_{(i)}$ 都严格大于其前一项 $X_{(i-1)}$.

不过, 实际中计量随机变量 $X_1, \cdots, X_n$ 时, 由于舍入误差可能出现若干组观测值, 其中每组内的观测值两两相等. 每一个这样的等观测值组称为结 (tie). 这样, 在一般情形下, 试验者观测到的不是 $(*)$, 而是顺序统计量

$$X_{(1)} = \cdots = X_{(\tau_1)} < X_{(\tau_1+1)} = \cdots = X_{(\tau_1+\tau_2)} < \cdots$$
$$\cdots < X_{(\tau_1+\cdots+\tau_{k-1}+1)} = \cdots = X_{(\tau_1+\cdots+\tau_k)},$$

其中所有 $\tau_i \geqslant 1$, 而 $\tau_1 + \cdots + \tau_k = n$. 于是, 如果出现结, 即如果存在 $\tau_j \geqslant 2$, 则在确定秩向量时产生困难, 然而在构造**秩统计量** (rank statistic) 时秩向量起基础的作用. 对于如何确定等观测值的秩尚无定论. 该问题的如下两种解法应用最为广泛.

第一种是**随机化法**. 按这种方法, 构成第 $j$ 组的元素

$$X_{(\tau_1+\cdots+\tau_{j-1}+1)} = \cdots = X_{(\tau_1+\cdots+\tau_j)}$$

的秩, 以概率 $1/\tau_j!$ 可以取 $\tau_j$ 个数

$$\tau_1 + \cdots + \tau_{j-1} + 1, \quad \tau_1 + \cdots + \tau_{j-1} + 2, \cdots,$$
$$\cdots, \tau_1 + \cdots + \tau_j$$

的任何一种排列. 随机化法的优点是简便, 但是在关于随机变量 $X_i$ 的分布律有几种选择的情形下, 实际运用随机化可能影响统计推断的结果.

第二种方法赋予构成第 $j$ 组的等观测值

$$X_{(\tau_1+\cdots+\tau_{j-1}+1)} = \cdots = X_{(\tau_1+\cdots+\tau_j)}$$

相同的秩, 称之为平均秩 (midrank):

$$\tau_j = \tau_1 + \cdots + \tau_{j-1} + \frac{\tau_j + 1}{2},$$

等于数

$$\tau_1 + \cdots + \tau_{j-1} + 1, \quad \tau_1 + \cdots + \tau_{j-1} + 2, \cdots,$$
$$\cdots, \tau_1 + \cdots + \tau_j$$

的算术平均值. 自然, 这种方法也影响秩统计量的性质, 这在实际中需要考虑到. 例如, 在存在结的情形下, 构造 **Wilcoxon 检验** (Wilcoxon test) 的统计量 $W$ 时, 恰好应该选用平均秩, 这时统计量 $W$ 的数学期望 $\mathrm{E}W$ 与无结的情形一样, 而方差 $\mathrm{D}W$ 由于秩的平均而减小, 等于

$$\mathrm{D}W = \frac{mn(m+n-1)}{2} \times$$
$$\times \left\{1 - \frac{1}{(m+n)[(m+n)^2-1]} \sum_{j=1}^{k} \tau_j(\tau_j^2 - 1)\right\}.$$

在统计量 $W$ 的标准化时应注意到这一点.

**参考文献**


[1] Hájek, J., Theory of rank test, Academia, 1967.

[2] Большев, Л. Н., Смирнов, Н. В., Таблицы математической статистики, М., 1983.


М. С. Никулин 撰

**【译注】**

**参考文献**


[B1] 陈希孺, 柴根象, 非参数统计教程, 第四章, 华东师范大学出版社, 1993.


周概容, 王健 译

**胎紧浸入和套紧浸入 [tight and taut immersions; тесное и напряжённое погружения]**

**【补注】** $N$ 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^N$ 中闭连通 $n$ 维流形 $M$ 的 $C^k(k \geqslant 2)$ 可微浸入 $f: M \to \mathbf{R}^N$ 的全绝对曲率 (total absolute curvature of an immersion) $\tau_a(f) \leqslant \infty$ (见**流形的浸入** (immersion of a manifold)) 可由局部不变量表为积分 (A2). 它满足

$$\tau_a(f) \geqslant \gamma \geqslant \beta = \sum \beta_i. \qquad \text{(A1)}$$

这里 $\gamma$ 是取遍所有从 $M$ 到 Euclid 空间的浸入或某类特殊的浸入 (例如光滑嵌入的空间的某个分支) 时, $\tau_a(f)$ 的极小值, $\beta_i = \operatorname{rank} H_i(M; \mathbf{Z}_2)$ 是以 $\mathbf{Z}_2$ 为系数的 Čech 同调的第 $i$ 个 **Betti 数** (Betti number) (见 **Čech 上同调** (Čech cohomology)).

对于一条闭曲线 (curve), $\tau_a(f) = \int |\rho ds| / \pi \geqslant \beta = 2$, 其中 $\rho$ 是曲率, $s$ 是弧长. 对 $\mathbf{R}^3$ 中的一个 $C^2$ 曲面 (surface) $M$, $\tau_a(f) = \int |K d\sigma| / 2\pi \geqslant \gamma = \beta = 4 - \chi$, 这里 $K$ 是 **Gauss 曲率** (Gaussian curvature), $d\sigma$ 是面积形式, $\chi$ 是 $M$ 的 **Euler 示性数** (Euler characteristic). 一个浸入 $f$ 称为胎紧的 (tight), 如果 $\gamma = \beta$, 而且 $f$ 具有最小全绝对曲率 $\tau_a(f) = \beta$,

即达到下界．进而，如果 $f(M)$ 位于单位球面 $S^{N-1}=\{z\in\mathbf{R}^N:|z|=1\}$ 之中，那么从 $M$ 到 $S^{N-1}$ 的浸入 $f$ 称为套紧的（taut）．一个套紧浸入总是一个嵌入．

$\tau_a$ 的一般定义如下：

$$\tau_a(f)=\frac{\int_Q|\nu^*(\omega)|}{\mathrm{vol}(S^{N-1})}=\int_M\tau_m|d\sigma_m|.\quad\text{(A2)}$$

这里 $Q$ 是 $(N-1)$ 维流形，它是在 $f(m)$ 处的单位法向量丛，其中 $m\in M$，$\nu$ 为由从 $Q$ 到 $S^{N-1}$ 上的 Gauss 映射所给出的自然投影，体积元 $\omega$ 为 $S^{N-1}$ 上的一个 $(N-1)$ 形式，$\nu^*(\omega)$ 是 $\omega$ 在 $Q$ 上的拉回，$d\sigma_m$ 为 $M$ 上的由到 Euclid 空间的浸入所诱导的体积元．称形式 $\nu^*(\omega)$ 为 Lipschitz-Killing 形式（Lipschitz-Killing form），合理定义的密度 $\tau_m\geqslant 0$ 是 $M$ 上的绝对 Lipschitz-Killing 密度（absolute Lipschitz-Killing density）．对于（$\mathbf{R}^3$ 中的）曲面，$\tau_m=|K|/2\pi$．一般地，$\tau_a(f)$ 量度了在方向的单位球面上由法向量所扫过的面积．许多齐性空间，诸如 $\mathrm{SO}(n)\subset\mathbf{R}^{n^2}$，所有的射影空间和齐性 Kähler 流形都具有由它们的在 $\mathbf{R}^N$（对于某 $N$）中的标准模型所给出的胎紧（甚至套紧）嵌入．（见下面．）

主要的问题是存在性．人们也对给定流形 $M$ 的胎紧浸入的一些特殊性质感兴趣．

下面的概率定义是很重要的：

$$\tau(f)=\mathrm{E}_z\mu_z\leqslant\infty,\ \mu_z=\mu(h_z).\qquad\text{(A3)}$$

这里 $z\in S^{N-1}$ 是一个单位向量，它是 $\mathbf{R}^N$ 上满足 $z^*(z)=1$ 的线性函数 $z^*$ 的梯度，$h_z=z^*\circ f$ 是 $M$ 上的一个"高度函数"，$\mu_z$ 是 $h_z$ 的非退化临界点的个数，$\mathrm{E}_z$ 是 $z\in S^{N-1}$ 关于 $S^{N-1}$ 的标准不变度量下的期望（或平均）值．

对于光滑浸入，有

$$\tau=\tau_a.\qquad\text{(A4)}$$

性质 $\tau(f)=\beta$，即胎紧的另一个定义使得能够应用 **Morse 理论**（Morse theory）．特别地，不等式 (A1) 是 Morse 不等式 $\mu_z\geqslant\beta$ 的推论，后者对于几乎所有 $z\in S^{N-1}$ 成立，因为 $h_z$ 对几乎所有 $z$ 是非退化的．由此得出，如果每一个非退化高度函数有 $\beta$ 个临界点，则所给浸入是胎紧的．见图 3 和图 4．

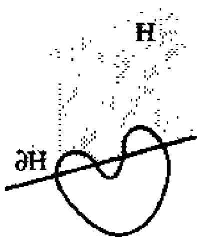



图 1

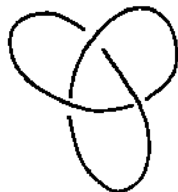


图 2



图 3

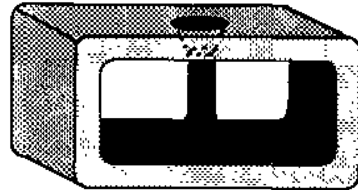


图 4

称空间 $A\subset B$ 的嵌入在 $\mathbf{Z}_2$ 同调中为单射的（injective），如果对于 $i\geqslant 0$，诱导同态 $H_i(A,\mathbf{Z}_2)\to H_i(B,\mathbf{Z}_2)$ 是单的．令 $H\subset\mathbf{R}^N$ 是 $\mathbf{R}^N$ 中带有超平面边界 $\partial H$ 的半空间．例如，

$$H=H_z(t)=\{x\in\mathbf{R}^N:z^*(x)\leqslant t\}.$$

如果 $f$ 是一个胎紧浸入，$h_z$ 是一个非退化的高度函数，那么由 Morse 理论得到 $f^{-1}(H_z(t))\subset M$ 在 $Z_2$ 同调中是单的．于是由连续性，对任一半空间 $H$ 这种单性都成立．对于闭流形的光滑浸入，这种半空间性质等价于胎紧性．然而，这种半空间定义也能应用于更大范围的从流形和其他紧拓扑空间到 $\mathbf{R}^N$ 中的连续浸入或甚至是映射中去．一个例子是胎紧的"瑞士干酪"，它是一个带边的嵌入曲面，见图 5．一个到 $\mathbf{R}$ 中的胎紧映射也称为一个完满函数（perfect function）．

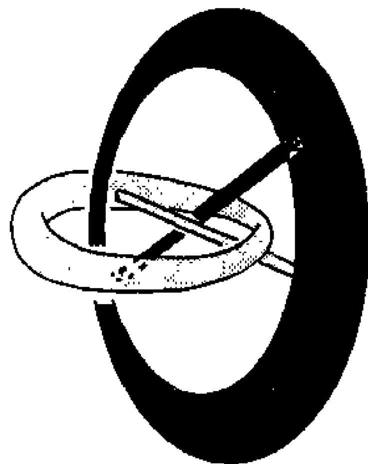


图 5

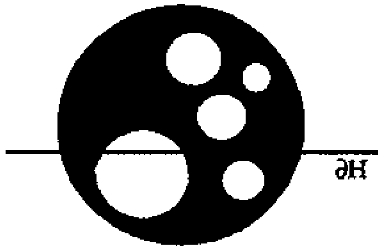



图 6

对于曲线和闭曲面，半空间性质可导出对任一半空间 $H$, $f^{-1}(H)$ 是连通的．它等价于 Banchoff 两片性质（Banchoff two-piece property），即 $\mathbf{R}^N$ 中的任一超平面 $\partial H$ 将 $M$ 至多分割成两个连通的片．见图 3 和图 4 中的胎紧曲面和图 2 中的非胎紧曲线．

半空间定义将胎紧性置于经典几何学和凸性理论之中．由于胎紧性在 $\mathbf{R}^N$ 中的任意将凸包 $\mathscr{H}(f(M))$ 映到 $\mathbf{R}^N$ 内的射影变换下是不变的，因此胎紧性是一个射影性质（见**射影几何学**（projective geometry））．上述定义的套紧性是一个共形性质（见**共形几何学**（conformal geometry））．在任意从 $S^{N-1}$ 到 $S^{N-1}$ 上的共形（Möbius）变换下，套紧性是不变的．反过来，套紧性由 $\mathbf{R}^N$ 中的将 $\mathscr{H}(S^{N-1})$ 映到 $\mathscr{H}(S^{N-1})$ 上的唯一的射影变换所确定．

在证明中，Kuiper 基本定理（Kuiper fundamental theorem）起着重要作用．关于嵌入，该定理说胎紧嵌入空间的顶集是胎紧的．一个顶集（top set）是空间与 $\mathbf{R}^N$ 中的支撑半空间或支撑超平面的交．

下面是（主要对曲面面言的）各种各样的表示定理．

**曲线**．$\mathbf{R}^N$ 中的胎紧闭曲线是平面凸闭曲线（W. Fenchel, 1929）．由任何一个定义可知，图 1 中的平面曲线不是胎紧曲线．$\mathbf{R}^3$ 中形如图 2 的三叶形纽结的打结曲线满足 $\tau(f) > 2b(M)$．下确界 $2b(M)$ 达不到（J. Milnor, 1950）．这里 $b(M)$ 是纽结 $M$ 的桥指标（bridge index），它是容有纽结同痕的纽结 $M$ 上一个高度函数所能有的极大值的最小个数（见**纽结理论**（knot theory））．对图 2 中的三叶形纽结，$b(M)=2$．在此纽结上，每一个高度函数至少有两个极大值，但是极据上面的 Milnor 界限，某些高度函数必有至少三个极大值．

陈省身和 J. Lashof (1957) 给出了第一个高维定理：闭 $n$ 流形的一个满足 $\tau_a(f)=2$ 的 $C^\infty$ 类可微实质的（substantial）（即不在一个超平面中的）浸入 $f: M^n \to \mathbf{R}^N (n \geq 1)$ 是到凸超曲面上的胎紧嵌入，且 $N=n+1$．适当定义 $\tau(f)=2$，对连续浸入也有相同的结论．

**曲面**．如果 $M$ 是一个 Euler 数为 $\chi$ 的不可定向闭曲面，则对 $\chi=1$（**射影平面**（projective plane））和 $\chi=0$（Klein 瓶，见 **Klein 曲面**（Klein surface）），不存在到 $\mathbf{R}^3$ 中的胎紧浸入，即便是连续浸入也不存在．对 $\chi=-1$（带有一个环柄的射影平面）的情形，从 1960 年起就一直是一个悬而未决的问题．F. Haab (1990) 证明了这个曲面实际上没有到 Euclid 空间 $\mathbf{R}^3$ 中的胎紧光滑浸入．因此，对于任何光滑浸入都存在一平面，把它分割成至少三块．所有其他曲面都有到 $\mathbf{R}^3$ 中的胎紧浸入．图 3 描绘了一个胎紧环面（$\beta=4$）．图 4 描绘了一个 $\chi=-2$, $\beta=6$ 的不可定向胎紧曲面．下面的一些定理表明更高的余维数和解析性强烈地制约着胎紧浸入的可能性及其性质．与连续浸入或分段线性浸入相比较，可微性也造成约束．

$\mathbf{R}^N (N \geq 5)$ 中的一个实质的光滑胎紧闭曲面必然是 $\mathbf{R}^5$ 中的一个（代数）Veronese 曲面（拓扑上它是一个实射影平面，亦见 **Veronese 映射**（Veronese mapping）），且不计 $\mathbf{R}^5$ 中的射影变换时是唯一确定的（N. H. Kuiper, 1960）．

由 T. Banchoff (1965) 提出，后由 W. Kühnel (1980, 见 [A3]) 证明，除了 Klein 瓶外，$\mathbf{R}^N$ 中恰好存在一个胎紧的实质多面体曲面，这里 $N+1 \leq (7+\sqrt{49-24\chi})/2$．这个数是地图着色定理中的 Heawood 色数（Heawood chromatic number）．同样的上界似乎对于连续胎紧浸入也是成立的．

这里还有另一个值得注意的定理．从实射影平面到 $\mathbf{R}^N (N \geq 5)$ 中的一个实质的胎紧连续浸入必须是到 $\mathbf{R}^5$ 中的代数 Veronese 曲面上或到 Banchoff 的六顶点多面体曲面上的一个嵌入（[A11]）．满足 $\chi=2$ 或 $\chi<-9$ 的曲面到 $\mathbf{R}^3$ 中的任一光滑浸入必正则同痕于一个胎紧的浸入（U. Pinkall, [A15]）．对于其他曲面，结果还不完整．满足 $\chi \leq 0$ 的任意可定向曲面都存在到 $\mathbf{R}^4$ 中的光滑实质胎紧嵌入，但是除了环面情形，这类嵌入都不是解析的（G. Thorbergsson, [A19]）．$\mathbf{R}^3$ 中的任一光滑嵌入纽结可定向曲面的全绝对曲率 $\geq \beta+4=8-\chi=6+2g$，而且如果亏格 $g=1$ 或 2，则等号不能成立．但当亏格 $g \geq 3$ 时，Kuiper 和 W. F. Meeks ([A10]) 证明了存在着满足 $\tau(f)=\beta+4$ 的"同痕 - 胎紧"纽结曲面．图 5 描绘了一个亏格为 3, $\tau(f)=12$ 的纽结曲面的例子，它由两个具有非正 Gauss 曲率 $K$ 的环柄与两个环绕的胎紧环面连接起来而得到．对这个曲面，每一个非退化的高度函数有 12 个临界点．

$\mathbf{R}^3$ 中曲面的光滑浸入形成光滑稳定映射 $f: M \to \mathbf{R}^3$ 的一个子类．在这个类中每个曲面有一个到 $\mathbf{R}^3$ 中的胎紧稳定映射，因此，具有全绝对曲率

$$\tau(f)=\beta=4-\chi(M)=\int|Kd\sigma|/2\pi.$$

$\mathbf{R}^3$ 中的胎紧解析曲面在解析曲面类中是等距刚性的（А. Д. Александров, 1938；见[A3]，81 页，和**刚性**（rigidity））．关于 $\mathbf{R}^3$ 中非凸光滑闭曲面的 $C^2$ 刚性，现在几乎一无所知．但是由 Kuiper 定理（1955），$\mathbf{R}^3$ 中没有 $C^1$ 等距刚性的光滑闭曲面．$\mathbf{R}^8$ 中的一个令人惊奇的胎紧四维流形是复射影平面 $M^4=P(\mathbf{C},2)$ 到 $\mathbf{R}^8$ 中一个单形的四维骨架中的 Kühnel 拓扑嵌入（Kühnel topological imbedding）（[A9]）．它的象是具有 9 个顶点的 $M$ 的三角剖分．

套紧嵌入（taut imbeddings）值得单独讨论．设 $M$ 是一紧连通空间，对在 $n$ 维球面 $S^n$ 中的 $M\subset S^n\subset\mathbf{R}^{n+1}$ 所给出的套紧性的外在定义（即 $M$ 在 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中是胎紧的）明显地决定了（利用胎紧的半空间定义）下述的内蕴定义：子空间 $M\subset S^n$ 在 $S^n$ 中是套紧的，如果对 $S^n$ 中的任一（闭）球 $B_r$，包含映射 $B_r\cap M\subset M$ 在 $\mathbf{Z}_2$ 同调下是单射．利用从点 $z\in S^n\setminus M$ 到正交于向量 $z$ 的 Euclid $n$ 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中的球极投影，可以得到 $\mathbf{R}^n$ 中套紧性的下述定义：紧子空间 $M\subset\mathbf{R}^n$ 是套紧的，当且仅当 $M$ 不包含 $\mathbf{R}^n$ 的开集，并且嵌入 $B\cap M\subset M$ 在 $Z_2$ 同调下是单射，这里 $B$ 是一个圆球或是 $\mathbf{R}^n$ 中一个圆球的补．因此套紧性蕴含胎紧性．平面的套紧子空间是一个圆或一个圆盘去掉由处处稠密的不相交开圆盘的并集（一个"极限的瑞士干酪"）．图 6 中，Banchoff 所给出的平面瑞士干酪是胎紧的，但不是套紧的，虽然每一个圆都把干酪分割成至多两块，但其中一块在同调下不是单射的．当利用 ANR 假设排除掉怪例后，可以猜测：$\mathbf{R}^n$ 中任何紧的套紧的绝对邻域收缩核（亦见，**正规空间的绝对收缩核**（absolute retract for normal spaces）；**拓扑空间的收缩核**（retract of a topological space））是一个光滑流形．对于 $n=3$ 的情况，这是已知的，见[A8]．

$\mathbf{R}^N$ 中一个光滑套紧流形 $M$ 的通常定义如下：a）任一非退化距离函数 $h_x$ 有 $\beta(M)$ 个临界点；及 b）$\mathbf{R}^N$ 中任一圆球与 $M$ 相交于 $M$ 中的一个在 $\mathbf{Z}_2$ 同调下为单射的子集．这些定义对于 $\mathbf{R}^N$ 中的那些非紧的正常子流形也有意义并常被使用（见[A3]）．但此时胎紧性没有定义，因而胎紧性不是它的推论．

对于 $\mathbf{R}^N$ 中的一个光滑的正常子流形 $M$，通常套紧性的要求是一个非常强的条件．$\mathbf{R}^N$ 中仅有下列的套紧闭曲面（至多差一个 Möbius 变换）：齐性空间，圆球面 $S^2$，标准环面 $S_a^1\times S_b^1\subset\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2=\mathbf{R}^4$（$a$ 和 $b$ 是半径），以及在 $S^4\subset\mathbf{R}^5$ 中的标准 Veronese **曲面**（射影平面）．这些模型中的每一个都是由 $\mathbf{R}^n$ 中运动所得出的齐性空间．$\mathbf{R}^3$ 中的套紧环面是 **Dupin 圆纹曲面**（Dupin cyclide）．[A17] 中，给出了 Euclid 空间中所有套紧 3 维流形的微分同胚类．

小沢（[A14]）证明了一个闭套紧流形 $M$ 上的距离函数 $h_x$ 或 $h_z$ 的每一连通的临界点集本身也是一个套紧子流形．因此，流形 $M$ 含有许多低维的套紧子流形，如圆，基于这个缘故，研究趋于特殊化．在下列类型空间**微分几何学**（differential geometry）的研究中，套紧性起着重要作用．

1．对称空间迷向表示的轨道，也称为 $R$ 空间（$R$-spaces）（小林－竹内），是套紧子流形．它们自然是齐性空间，在 R. Bott 和 H. Samelson 的经典文献[A1]中，利用（退化的）胎紧高度函数计算了它们的上同调．

2．闭等参数子流形．一个紧子流形 $M^n\subset\mathbf{R}^N$ 称为等参的（isoparametric），如果它的法丛平坦，并且在任意平行法向量场方向的主曲率都是常数．由此，$M^n$ 落在一个球面 $S^{N-1}$ 内，但当余维数 $N-n=2$ 时，$M$ 不必是齐性的（[A5]）．如果 $M$ 是不可约的，且具有余维数 $N-n\geqslant 3$，则 $M$ 是一个 $R$ 空间（[A20]）．等参子流形是套紧的．它们形成 $R$ 空间的一种推广．并且它们的上同调也可同样地由与它们相伴的标号 Dynkin 图计算出来（[A6]）．在文[A16]中，套紧嵌入和等参子流形的概念已推广到 Hilbert 空间，例如无穷维的旗流形．最后，由 H.-F. Münzner（[A12]）所给出的一个著名的结果是：对球面 $S^{n+1}$ 中的等参超曲面 $M^n$，不同主曲率的数目必是 1，2，3，4 或 6．

3．$\mathbf{R}^N$ 中的子流形 $M$ 称为全焦的（totally focal），如果在 $M$ 上每一个距离函数 $h_x(x\in\mathbf{R}^N)$ 的所有临界点都是非退化的或者都是退化的．结合 T. E. Cecil 和 P. J. Ryan，S. Carter 和 A. West（[A4]）的近年成果，后者最后得到了闭全焦流形实际上就是闭等参子流形这样的结果．

正如上面所提到的那样，可注意到：一个套紧子流形的任何 Möbius 变换，球极平面投影，或其管状 $\varepsilon$ 邻域边界是套紧的．套紧性在以 Möbius 群作为子群的 Lie 球变换群下也是不变的（[A2]）．两个套紧嵌入的积是套紧的，由套紧嵌入所构造的柱面和旋转曲面是套紧的（见[A3]和[A15]）．所有已知的（到 1990 年）闭套紧子流形都是由这些和一些别的新构造而得出的（见[A18]和[A13]）．也许这些子流形已经穷尽了所有可能的情形．大量的其他的结果和推广见参考文献．

**参考文献**


[A1] Bott, R. and Samelson, H., Applications of the theory of Morse to symmetric spaces, *Amer. J. Math.*, **80** (1958), 964 – 1029.

[A2] Cecil, T. E. and Chern, S. S., Tautness and Lie

sphere geometry, *Math. Ann.*, **278** (1987), 381 – 399.

[A3] Cecil, T. E. and Ryan, P. J., Tight and taut immersions of manifolds, Pitman, 1985.

[A4] Carter, S. and West, A., Isoparametric and totally focal submanifolds, *Proc. London Math. Soc.*, **60** (1990), 609 – 624.

[A5] Ferus, D., Karcher, H. and Münzner, H. F., Clifford Algebren und neue isoparametrische Hyperflächen, *Math. Z.*, **177** (1981), 479 – 502.

[A6] Hsiang, W. Y., Palais, R. S. and Terng, C. L., The topology of isoparametric submanifolds, *J. Diff. Geom.*, **27** (1988), 423 – 460.

[A7] Kuiper, N. H., Tight embeddings and maps, in W. Y. Haiang, et al. (ed.): The Chern Symposium (1979), Springer, 1980, 97 – 145.

[A8] Kuiper, N. H., Taut sets in three-space are very special, *Topology*, **23** (1984), 323 – 336.

[A9] Kuhnel, W. and Banchoff, T., The 9-vertex complex projective plane, *The Math. Intelligencer*, 5(1983), 3, 11 – 22.

[A10] Kuiper, N. H. and Meeks, W. F., Ⅲ, Total curvature for knotted surfaces, *Invent. Math.*, **77**(1984), 25 – 69.

[A11] Kuiper, N. H. and Pohl, W. F., Tight topological embedding of the real projective plane in $E^5$, *Invent. Math.*, **42** (1977), 177 – 199.

[A12] Münzner, H.-F., Isoparametrische Hyperflächen in Sphären Ⅱ, *Math. Ann.*, **256** (1981), 215 – 232.

[A13] Miyaoka, R. and Ozawa, T., Construction of taut embeddings and the Cecil-Ryan conjecture, in Proc. 1988 Symp. Differential Geometry, Acad. Press, 1990.

[A14] Ozawa, T., On critical sets of distance functions to a taut submanifold, *Math. Ann.*, **276** (1986), 91 – 96.

[A15] Pinkall, U., Tight surfaces and regular homotopy, *Topology*, **25** (1986), 475 – 481.

[A16] Palais, R. S. and Terng, C. L., Critical point theory and submanifold geometry, Lecture notes in math., **1353**, Springer, 1988.

[A17] Pinkall, U. and Thorbergsson, G., Taut 3-manifolds, *Topology*, **28**(1989), 389 – 402.

[A18] Pinkall, U. and Thorbergsson, G., Deformations of Dupin hypersurfaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **107** (1989), 1037 – 1043.

[A19] Thorbergsson, G., Tight analytic surfaces, *Topology* (Forthcoming).

[A20] Thorbergsson, G., Isoparametric foliations and their buildings, *Ann. of Math.*, **31** (1991), 429 – 446.

N. H. Kuiper 撰 沈纯理 译

**胎紧测度 [tight measure; плотная мира]**

【补注】 设 $X$ 是一个拓扑空间, $\mathscr{A}(X)$ 是其开集生成的 Borel $\sigma$ 域 (Borel $\sigma$-field), $\mathscr{K}(X)$ 是其所有紧集的铺砌(即子集族). $\mathscr{A}(X)$ 上的一个测度 $\mu$ 是胎紧的, 如果

$$\mu(B)=\sup\{\mu(K): K\subseteq B, K\in\mathscr{K}(X)\}.$$

$X$ 上的一个有限胎紧测度是一个 **Radon 测度** (Radon measure). 如果 $X$ 是可分的完全度量空间, 那么 $X$ 上每个概率测度都是胎紧的 (Ulam 胎紧性定理 (Ulam tightness theorem)), [A2]. "胎紧" 这一术语是 L. LeCam 引入的, [A5].

更一般地说, 设 $\mathscr{A}\supset\mathscr{K}$ 是集合 $X$ 上的两个铺砌, $\beta$ 是定义在 $\mathscr{A}$ 上的一个集函数. 如果

$$\sup\{\beta A: A\subset A_1\setminus A_2, A\in\mathscr{K}\}=\beta A_1-\beta A_2,$$

那么 $\beta$ 关于 $\mathscr{K}$ 是胎紧的.

**参考文献**

[A1] Billingsley, P., Convergence of probability measures, Wiley, 1968, 9ff.

[A2] Topse, F., Topology and measure, Springer, 1970, Xii.

[A3] Bichteler, K., Integration theory, Springer, 1973, § 24.

[A4] Oxtoby, J. C. and Ulam, S., On the existence of a measure invariant under a transformation, *Ann. of Math.*, **40**, 1939, 560 – 566.

[A5] LeCam, L., Convergence in distribution of probability processes, *Univ. of Calif. Publ. Stat.*, **2** (1957), 11, 207 – 236.

周民强 译

**Тихонов 立方体 [Tikhonov cube; Тихоновский куб]**

实直线上单位区间 $I$ 的 $\tau$ 重拓扑积, 记作 $I^\tau$, 其中 $\tau$ 为任意基数 (cardinal number). Тихонов 立方体是 A. H. Тихонов 在 1929 年引进的. 若 $\tau=n$ 为自然数, 则 Тихонов 立方体 $I^\tau$ 是 $n$ 维 Euclid 空间中单位立方体, 且其拓扑由标量积度量给出. 若 $\tau=\aleph_0$ 是自然数的基数, 则立方体 $I^\tau$ 同胚于 **Hilbert 立方体** (Hilbert cube). 若 $\tau_1\neq\tau_2$, Тихонов 立方体 $I^{\tau_1}$ 与 $I^{\tau_2}$ 不同胚; 若 $\tau$ 是无穷基数, 则 $\tau$ 是 $I^\tau$ 的权 (见**拓扑空间的权** (weight of a topological space)), 若 $\tau=n$ 是自然数, 则 $n$ 是 $I^\tau$ 的维数. Тихонов 立方体有两个特别重要的性质, 即与 $\tau$ 无关的紧性以及关于权不大于 $\tau$ 的完全正则 $T_1$ 空间的万有性, 后者指每个这样的空间同胚于 $I^\tau$ 的某子空间. 权不大于 $\tau$ 的紧 Hausdorff 空间同胚于 Тихонов 立方体 $I^\tau$ 的闭子空间. 因此, 使用取拓扑积及过渡到闭子空间这两种运算, 就足以由特别简单的单一的标准空间 (区间) 得到任何紧空间. Тихонов 立方体紧性的一个值得注意的推论是配备弱拓扑的 Banach 空间中单位球

的紧性. Тихонов 立方体的万有性及定义的简捷性, 使它成为一般拓扑学中重要的标准研究对象. 但是, Тихонов 立方体的拓扑结构决不是平凡的. 特别地, 若 c 为连续统的势, 立方体 $I^c$ 可分, 尽管它含有 $2^c$ 个点; 它的权为 c. 令人意外的是, 每个 Тихонов 立方体 $I^\tau$ 的 Суслин 数都可数, 且与 $\tau$ 无关, 即 $I^\tau$ 中任何两两不交的开集族都可数. 虽然, Тихонов 立方体含有许多收敛序列, 但要直接描述 Тихонов 立方体中的闭包运算仍是不够的. А. В. Архангельский 撰

【补注】 参考文献见 **Тихонов 定理** (Tikhonov theorem).

罗嵩龄 译

**Тихонов 积 [Tikhonov product; Тихоновское произведение]**, 拓扑空间族的

与该族的**拓扑积** (topological product) 相同. Тихонов 积的概念是 А. Н. Тихонов 于 1929 年引进的.

罗嵩龄 译

**Тихонов 空间 [Tikhonov space; Тихоновское пространство]**

一个拓扑空间 (topological space), 其中任何有限集是闭的, 且对任何闭集 $P$ 及不在 $P$ 中的任意点 $x$, 存在这个空间上的一个连续实值函数 $f$, 它在 $x$ 取值 0, 在 $P$ 的任意点取值 1. Тихонов 空间类与完全正则 $T_1$ 空间类 (见**完全正则空间** (completely-regular space)) 一致. 在 Тихонов 空间中, 任意两个不同点可用不相交的邻域分开 (换言之, 满足 Hausdorff 分离公理), 但并不是所有 Тихонов 空间都正规 (见**正规空间** (normal space)). А. Н. Тихонов (1929) 用紧 Hausdorff 空间的子空间刻画 Тихонов 空间.

**参考文献**


[1] Александров, П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977.

[2] Архангельский, А. В., Пономарев, В. П., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974 (英译本: Arkhangel'skiĭ, A. V. and Ponomarev, V. I., Fundamentals of general topology: problems and exercises, Reidel, 1984).


А. В. Архангельский 撰 罗嵩龄 译

**Тихонов 定理 [Tikhonov theorem; Тихонова теорема]**, 关于积的紧性的

任意多个**紧空间** (compact space) 的拓扑积是紧的. 这是一般拓扑学的基本定理之一. 它是 А. Н. Тихонов 在 1929 年得到的. 该定理在构建一般拓扑学的所有分支以及许多应用中, 起着十分重要乃至关键性的作用. 特别地, 对完全正则 $T_1$ 空间 (即 Тихонов 空间 (Tikhonov space)) **紧化** (compactification) 结构有基本的重要性. 利用它可以构造任意 Тихонов 空间的 Stone-Čech 紧化. Тихонов 定理展示了标准的紧空间——广义 Cantor 不连续统 $D^\tau$ (它是以 $\tau$ 为指标的离散两点集之积) 及 **Тихонов 立方体** (Tikhonov cube) $I^\tau$ (它是 $\tau$ 个实直线上单位区间之积), 这里 $\tau$ 可取任何基数. 再者, 广义 Cantor 集 $D^\tau$ 和 Тихонов 立方体 $I^\tau$ 的重要性, 在于它们作为通用的联系对象: 每个零维 $T_2$ 紧统同胚于某 $D^\tau$ 的一个闭子空间, 每个 $T_2$ 紧统同胚于某 $I^\tau$ 的一个闭子空间.

Тихонов 定理可以用来证明紧空间逆向极限的非空性, 用于构建绝对形的理论, 以及用于紧群的理论. 若考虑它的间接应用, 则一般拓扑学的几乎所有部分都受到这个定理的影响. 罗列此定理对于数学其他分支的直接或间接应用相当困难. 它们实际上出现在紧性概念起重要作用的每个地方, 特别是在泛函分析 (具有弱拓扑的 Banach 空间, 拓扑空间的测度) 中, 在最优控制的一般理论中等等.

**参考文献**


[1] Kelley, J. L., General topology, Springer, 1975 (中译本: J. L. 凯莱, 一般拓扑学, 科学出版社, 1982).

[2] Архангельский, А. В., Пономарев, В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974 (英译本: Arkhangel'skiĭ, A. V. and Ponomarev, V. I., Fundamentals of general topology: problems and exercises, Reidel, 1984).


【补注】

**参考文献**


[A1] Engelking, R., General topology, Heldermann, 1989.

[A2] Tikhonov, A. N., Über die topologische Erweiterung von Räumen, *Math. Ann.*, 102 (1930), 544 – 561.


罗嵩龄 译

**时间最优控制问题 [time-optimal control problem; оптимального быстродействия задача]**

**最优控制的数学理论** (optimal control, mathematical theory of) 中的问题之一, 在于确定极小时间

$$J(u) = t_1, \tag{1}$$

其中其运动由常微分方程组

$$\dot{x} = f(x, u), \; u \in U, \; f: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^n$$

描述的控制对象可以从给定的初始位置 $x(0) = x_0$ 转移到最终位置 $x(t_1) = x_1$. 这里, $x = x(t)$ 是 $n$ 维相坐标向量, 而 $u = u(t)$ 是 $p$ 维控制参数向量 (控制), 对任何 $t$ 它属于一个给定的闭的容许控制区域 $U$.

要求的极小时间 $t_1$ 是依赖于所选取的控制 $u(t)$ 的泛函 (1). 作为在其中找时间最优控制的容许控制

类. 对大多数应用而言, 只需要考察分段连续控制 $u(t)$, 即对所有被考虑的值 $t$, 除了在有限多个时间瞬间可以有第一类间断点以外, 是连续的函数. 在理论上, 严格地说, 应考虑更一般的 Lebesgue 可测函数 $u(t)$ $(0 \leq t \leq t_1)$ 的类.

时间最优控制问题可以作为变分法中 **Bolza 问题** (Bolza problem) 或 **Mayer 问题** (Mayer problem) 的特殊情形来考虑, 且从这些问题中由被优化函数的特殊形式得到. 时间最优控制 $u(t)$必定满足 **Понтрягин 最大值原理** (Pontryagin maximum principle), 它是一个必要条件, 推广了用于经典变分法的 Euler, Clebsch 和 Weierstrass 的必要条件.

对线性时间最优控制问题, 某些结果可以从关于最优控制的定性结构的必要条件引出. 满足以下三条件的问题称为线性时间最优控制问题 (linear time-optimal control problems) ([1], [2]):

1) 对象的运动的控制关于 $x$ 和 $u$ 是线性的:

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

其中 $A$ 和 $B$ 分别是 $(n \times n)$ 和 $(n \times p)$ 常数矩阵;

2) 最终位置 $x_1$ 与坐标原点一致, 如果 $u = 0$, 则它是该对象的一个平衡点;

3) 控制区域 $U$ 是一个 $p$ 维凸多面体, 使得 $u$ 空间的坐标原点属于 $U$ 但不是它的一个顶点.

设一般位置条件被满足, 即向量组

$$Bw, ABw, \cdots, A^{n-1}Bw$$

线性无关, 其中 $w$ 是平行于多面体 $U$ 的一条边的任意 $p$ 维向量. 则把对象从一给定初始位置 $x_0$ 转移到一个平衡位置 ($x$ 空间的坐标原点) 的一个控制 $u(t)$ $(0 \leq t \leq t_1)$ 是时间最优控制, 当且仅当 Понтрягин 最大值原理对它成立. 此外, 线性时间最优控制问题中的最优控制 $u(t)$ 是分段常函数, 且多面体 $U$ 的顶点是它的仅有的值.

一般地, $u(t)$ 的跳跃数虽然是有限的, 却可以是任意的. 在以下的重要情形, 跳跃数有个上界.

如果多面体 $U$ 是 $p$ 维平行多面体

$$a^s \leq u^s \leq b^s, \ s = 1, \cdots, p,$$

且矩阵 $A$ 的所有本征值是实的, 则最优控制 $u(t)$ 的每一个分量 $u^s(t)$, $s = 1, \cdots, p$, 是分段常函数, 仅取值 $a^s$ 和 $b^s$ 且最多有 $n-1$ 个跳跃, 即最多有 $n$ 个常值区间.

对非自治系统也可以研究时间最优控制问题, 即对其右端 $f$ 依赖于时间 $t$ 的系统.

在那些能成功的情形, 不但按上面描述的规划提法, 而且以综合问题形式按位置的提法 (见**最优综合控制** (optimal synthesis control)) 研究时间最优控制问题是有效的. 这综合问题的解提供了把该系统从初始出发点 $x_0$ 的邻域内任一点转移到给定最终点 $x_1$ 的时间最优控制的结构的一个定性表示.

**参考文献**

[1] Понтрягин, Л. С., Болтянский, В. Г., Гамкрелидзе, Р. В., Мищенко, Е. Ф., Математическая теория оптимальных процессов, 3 изд., М., 1976 (英译本: Pontryagin, L. S., Boltyanskiĭ, V. G., Gamkrelidze, R. V. and Mishchenko, E. F., The mathematical theory of optimal processes, Wiley, 1962).

[2] Болтянский, В. Г., Математические методы оптимального уравления, М., 1966 (英译本: Boltyanskiĭ, V. G., Mathematical methods of optimal control, Holt, Rinehart & Winston, 1971).

И. Б. Вапнярский 撰

【补注】 可达集 (reachable set) 的概念是使最优控制性质直观化的有用的辅助手段. 可达集是一个时间的函数, $R(t)$, 由从 $x_0$ 出发且仅用容许控制可在时间 $t$ 到达的所有点组成. 对线性时间最优控制问题对任意 $t$ 这集合是紧和凸的. 极小时间 $t_1$ 显然满足 $t_1 = \min\{t: x_1 \in R(t)\}$. 关于跳跃 (开关 (switches)) 数的更多信息见[A2].

**参考文献**

[A1] Hermes, H. and LaSalle, J. P., Functional analysis and time optimal control, Acad. Press, 1969.

[A2] Olsder, G. J., Time-optimal control of multivariable systems near the origin, *J. Optim. Theory & Appl.*, **15** (1975), 497 - 517.

葛显良 译 吴绍平 校

**时间序列 [time series; временной ряд]**

统计文献中最初指一系列不同时刻的观测值 (例如, 经济时间序列, 气象时间序列). 在社会经济统计的文献中, 与术语"时间序列"一起还使用术语动态序列 (dynamic series). 在 20 世纪中叶, 时间序列这一术语常表示对随机过程的观测实现; 时间序列分析是指随机过程的统计分析 (见**随机过论中的统计问题** (statistical problems in the theory of stochastic processes)).

И. А. Ибрагимов 撰

【补注】

**参考文献**

[A1] Brillinger, D. R., Time series: data analysis and theory, Holt, Rinehart & Winston, 1974.

[A2] Anderson, T. W., The statistical analysis of time series, Wiley, 1971.

[A3] Priestley, M. B., Spectral analysis and time series, Acad. Press, 1981.

周概容 译

**Titchmarsh 问题**[**Titchmarsh problem**; **Титчмарша проблема**]

求

$$Q(n)=\sum_{p\leqslant n}\tau(p-l) \tag{1}$$

的渐近表示的问题，这里 $\tau(m)$ 为 $m$ 的因子个数(见**除数问题**(divisor problems))，$l$ 是一个固定的不为零的数，而 $p$ 取遍所有的素数．与此类似的问题是寻求

$$S(n)=\sum_{p\leqslant n-1}\tau(n-p) \tag{2}$$

的渐近表示．

这个问题由 E．Titchmarsh 于 1930 年提出，并由他([1])在 **Riemann 假设**(Riemann hypotheses)为真的假设下予以解决．

由 Ю．В．Линник 所创立的**离差法**(dispersion method)使得可以求出(1)与(2)的渐近公式：

$$Q(n)=$$

$$=\frac{315\zeta(3)}{2\pi^4}\prod_{p\mid l}\frac{(p-1)^2}{p^2-p+1}\,n+O(n(\ln n)^{-1+\varepsilon});$$

对 $S(n)$ 有类似的公式．

关于算术级数中素数平均分布(见**素数分布**(distribution of prime numbers))的 Виноградов-Bombieri 定理也可导出 Titchmarsh 问题的解．在此，Riemann 猜想为真的假设实际上被一个**大筛法**(large sieve)型的定理所代替．

**参考文献**


[1] Линник, Ю. В., Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах, [Л.], 1961 (英译本：Linnik, Yu. V., The dispersion method in binary additive problems, Amer. Math. Soc., 1963).

[2] Бредихин, Б. М., 《Успехи матем. наук》, 20 (1965), 2, 89－130.

[3] Prachar, K., Primzahlverteilung, Springer, 1957.


Б．М．Бредихин 撰　张明尧 译　戚鸣皋 校

**Tits 厦**[**Tits building**; **Титса здание**]

【补注】 厦(building)是由单**复形**(complex) Δ 及子复形 Σ(寓(appartment))的族 $\mathscr{A}$ 组成的对 $(\Delta,\mathscr{A})$，它要满足下述条件：i) Δ 或任一寓 Σ 中的每个单形要包含在某极大单形(房(chamber))中，Δ 或 Σ 的每个房有相同的有限维数 $l$(厦的秩(rank))；ii) 每个寓 Σ 是连通的，连通的意义如下，对 Σ 的任何两个房 $C, D$，有 Σ 的房的一个序列，从 $C$ 开始，终结于 $D$，且序列中任两个相继的成员的交是 $(l-1)$ 单形；iii) Δ的任何 $(l-1)$ 单形(分别地，任何寓 Σ 的 $(l-1)$ 单形)被包含在 Δ 的多于两个房中(分别地，Σ 的恰好两个房中)；iv) Δ 的任何两个房 $C, D$ 含在某个寓中；及 v) 若 Δ 的两个单形 $A$，$B$ 含于两个寓 Σ、Σ′ 中，则有从 Σ 到 Σ′ 上的一个同构，它固定 $A$ 及 $B$ 的每个点．

例 1．令 $V$ 是向量空间，Δ 由 $V$ 的非零子空间的所有的链(按包含关系排序)组成，而每个寓是由具有下述性质的所有的链组成，这种链中的子空间可由 $V$ 的某基的非空子集生成．于是 Δ 连同这些子复形就是一个厦．

例 2．更一般地，令 $G$ 是具有 **Tits 系统**(Tits system)$(G, B, N, S)$ 的群，令 Δ 是所有陪集 $Pg$，$B\leqslant P<G$，$g\in G$，的无交并，按反包含关系排序，又令寓集是所有集合 $\{P^n \mid B\leqslant P<G, n\in\mathbf{N}\}g$，$g\in G$．则 Δ 在装备了这些寓以后是一个厦，它的秩即 Tits 系统的秩．而且这时 $G$ 在所有由一个寓及这个寓中的一个房所组成的对的集合上是传递的．

若 $(\Delta,\mathscr{A})$ 是厦，则所有寓皆同构于由 **Coxeter 群**(Coxeter group)$(W, S)$(厦的 Weyl 群(Weyl group))，唯一到同构)，所决定的单复形．它是如下构造的：单形是由 $S$ 的非空子集生成的子群的右陪集，这些陪集仍按反包含关系排序．例 2 中这个 Weyl 群与 Tits 系统的 Weyl 群相同．厦称为球面的(spherical)或仿射的(affine)，若它的 Weyl 群是这样的．秩 2 的仿射厦恰是树，且它的每个顶点至少与三个其他顶点邻接．

厦是 Tits 系统的几何的或组合的说法．最重要的厦产生于与**代数群**(algebraic group)相关的 Tits系统，虽然不是所有的厦都这样．涉及厦的两个主要定理是分类定理，都属于 J. Tits([A4],[A5])：1) 任何秩 $l\geqslant 3$ 的具有不可分解 Weyl 群的球面厦皆同构于由单代数群的 Tits 系统决定的厦；2) 若 $(\Delta,\mathscr{A})$ 是秩 $l\geqslant 4$ 的有不可分解 Weyl 群的仿射厦且每个 $(l-1)$ 单形包含在有限个房中，则 Δ 同构于完全局部域上单代数群的仿射 Tits 系统所决定的复形．这些结果皆源于以下事实：大量的几何信息编入到厦的公理中．实际上，1) 能看成下述经典结果的巨大的推广：**射影空间**(projective space)概念的适当公理化导致用标准的向量空间模型来分类(见例 1)．与此对照，秩为 2 的球面厦及秩 3 的仿射厦是太杂乱无序而难于分类：有许多的结构，包括自由的结构．而且秩为 2 的球面厦若以三个文字的对称群作为 Weyl 群就自然地对应于射影平面(平面的关联点-线偶对应于房，亦见**射影平面**(projective plane))．

厦对于内蕴结构、表示论及单代数群的几何学的研究都是重要的．在有限单群、有限几何以及各种上同调问题的研究中它们也起重要作用．

**参考文献**


[A1] Bruhat, F. and Tits, J., Groupes réductifs sur un corps local, 1. Données radicielles valuées, *Publ.*

*Math. IHES*, 41 (1972), 5 – 251.

[A2] Kantor, W. M., Generalized polygons, SCABs and GABs', in L. A. Rosati (ed.): Buildings and the Geometry of Diagrams (Proc. C. I. M. E. Session, Como 1984), Lecture notes in math., Vol. 1181. Springer, 1986, 79 – 158.

[A3] Ronan. M. A., Buildings: main ideas and applications, *Bull. London. Math. Soc.* (To appear).

[A4] Tits. J., Buildings of spherical type and finite *BN*-pairs, Lecture notes in math., 286, Springer, 1986.

[A5] Tits. J., Immeubles de type affine. in L. A. Rosati (ed.): Buildings and Geometry of Diagrams (CIME Session, Como 1984), Lecture notes in math., Vol. 1181, Springer, 1986, 159 – 190.

W. M. Kantor 撰　石生明 译　王　杰 校

**Tits 丛 [Tits bundle; Титса расслоение]**

齐性射影有理簇 $D$ 上紧连通齐性复空间 $X$ 的全纯纤维化，它在所有这样的纤维化的类里是普遍的．这种情形里的普遍性意味着这个类里任意纤维化的射影 $\pi': X \to D'$ 可以表示为 $\pi' = \varphi \circ \pi$，这里 $\pi: X \to D$ 是 Tits 丛的射影，$\varphi: D \to D'$ 是某个全纯的纤维映射．

Tits 丛的显式构造可如下进行．设 $G$ 是全纯可迁地作用在 $X$ 上的连通复 Lie 群，$U$ 是 $X$ 内某个点的迷向子群．$U$ 的单位连通分支的正规化子 $P$ 是 $G$ 的抛物子群，即 $P$ 含有一个极大连通可解子群（见[1]，[2]）．Tits 丛的基空间 $D$ 被定义为商空间 $D = G/P$，射影 $\pi: X \to D$ 由子群的包含 $U \subset P$ 所诱导．这个构造法属于 J. Tits([1])，他也证明了这个丛的普遍性．

Tits 丛的纤维是复可平行化的．如果空间 $X$ 是单连通的，则这个纤维是复环面．如果 $X$ 容许一个可迁群 $G$，$G$ 又等于它自己的换位子群，则 Tits 丛与亚纯约化丛重合（见[3]），这意味着 $X$ 上所有亚纯函数在 Tits 丛的纤维上取常值．当紧复齐性空间 $X$ 是 Kähler 时，Tits 丛的纤维是复环面（就是 $X$ 的 **Albanese 簇**（Albanese variety）），并且这个丛本身是解析平凡的（[2]）．从而紧 Kähler 齐性空间是射影有理齐性簇与复环面的积．

**参考文献**

[1] Tits, J., Espaces homogènes complexes compacts, *Comment. Math. Helv.*, 37 (1962), 111 – 120.

[2] Borel, A. and Remmert, R., Ueber kompakte homogene Kählerische Mannigfaltigkeiten, *Math. Ann.*, 145 (1962), 429 – 439.

[3] Grauert, H and Remmert, R., Über Kompakte homogene komplexe Mannigfaltigkeiten, *Arch. Math.*, 13 (1962), 498 – 507.

Д. Н. Ахиезер 撰　陈志杰 译

**Tits 系统 [Tits system; Титса система]**

集合 $(G, B, N, S)$，其中 $G$ 是群，$B$ 和 $N$ 是子群而 $S$ 是 $N/(B \cap N)$ 的子集，满足下列条件：1) 集合 $B \cup N$ 生成群 $G$；2) $T = B \cap N$ 是 $N$ 的正规子群；3) 集合 $S$ 生成群 $W = N/T$ 且由二阶元素组成；4) $sBw \subset BwB \cup BswB$，对所有 $s \in S$，$w \in W$；及 5) $sBs \not\subset B$，对 $s \in S$．群 $W$ 对于生成系 $S$ 是 **Coxeter 群**（Coxeter group），称为 Tits 系统 $(G, B, N, S)$ 的 Weyl 群（Weyl group of the Tits system）．对应 $w \mapsto BwB$ 是 $W$ 到 $B$ 在 $G$ 中的双陪集的集合上的一一映射．

例．a) $G = \mathrm{GL}_n(k)$，$k$ 是任一域，$B$ 是上三角形矩阵的子群，$N$ 是**单项矩阵**（monomial matrix）的子群（故 $T$ 是对角矩阵的子群及 $W = S_n$），而 $S$ 是对换 $(i, i+1)$，$i = 1, \cdots, n-1$，的集合．

b) 更一般地，令 $G$ 是 $k$ 上连通的约化代数群，$T$ 是 $G$ 上极大环面，它在 $k$ 上可对角化，$N$ 是它的正规化子，$Z$ 是它的中心化子，令 $R$ 是 $G$ 的对于 $T$ 的根系，$W = N/Z$ 是它的 Weyl 群，而 $S$ 是对应于单根的反射的集合．再令 $U$ 是对应于正根的根子群在 $G$ 中生成的幂幺子群，令 $P = UZ$．则四元集 $(G(k), P(k), N(k), S)$ 是 Tits 系统．

c) 令 $G = \mathrm{GL}_n(\mathbf{Q}_p)$，其中 $Q_p$ 是 $p$ 进数域，令 $B$ 是由矩阵 $(a_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{Z}_p)$（这里 $\mathbf{Z}_p$ 是 $p$ 进整数环）组成的子群，当 $i > j$ 时，满足 $a_{ij} \in p\mathbf{Z}_p$，又令 $N$ 是单项矩阵的子群．则存在子集 $S \subset W = N/(B \cap N)$ 使得四元组 $(G, B, N, S)$ 是 Tits 系统．这里群 $W$ 是型 $\widetilde{A}_{n-1}$ 的无限 Coxeter 群．类似地能定义对应于局部域上别的连通的约化群的具有仿射型 Weyl 群的 Tits 系统．

在某些条件下可断言，容许 Tits 系统的群是单群．例如下面的条件对此是充分的：$\alpha$) $B$ 是可解群且不包含在 $G$ 的任何真正规子群中；$\beta$) $G$ 等于它自己的换位子群；$\gamma$) Coxeter 群 $W$ 是不可分解的；或 $\delta$) 群 $B$ 不含 $G$ 的任何非平凡正规子群．用这种方法可证明 **Chevalley 群**（Chevalley group）特别是有限 Chevalley 群的单性．

**参考文献**

[1] Tits, J., Buildings of spherical type and finite *BN*-pairs, Springer, 1974.

[2] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Lie groups and Lie algebras, Addison-Wesley, 1975, Chapt. 4（译自法文）.

Э. Б. Винберг 撰

【补注】 Tits 系统也称为具有 *BN* 对的群（group with a *BN*-pair）．

令 $G$ 是集合 $\Omega = \{1, 2, \cdots\}$ 上的 2 传递置换群；则 $S = \{s\}$ 及 $W = \{1, s\}$，其中 $s$ 是 $G$ 中交换 1 和 2 的一个置换，$B = G_1$ 及 $N = G_{\{1,2\}}$．这就给出

了型 $A_1$ 的一个 Tits 系统.

**参考文献**

[A1] Ronan, M. A., Lectures on buildings, Acad. Press, 1989.

石生明 译 王杰 校

**Todd 类 [Todd class; Тодда класс]**

由

$$\sum_{j=0}^{\infty} T_j(c_1, \cdots, c_j)$$

定义的复丛 $\xi$ 的**示性类**(characteristic class), 其中 $\{T_j\}$ 为相应于幂级数 $t/(1-e^{-t})$ 的乘法序列, $c_i$ 为**陈(省身)类**(Chern class).

由 J. Todd ([1])引进.

**参考文献**

[1] Todd, J., The arithmetical theory of algebraic loci, *Proc. London Math. Soc.*, **43** (1937), 190 – 225.

[2] Hirzebruch, F., Topological methods in algebraic geometry, Springer, 1978(译自德文).

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 关于乘法序列, 见**示性类**.

李贯松 译 潘建中 校

**Toeplitz 型(不定的) [Toeplitz form, indefinite; Тёплицева форма индефинитная]**

在有有限支集的无穷序列 $x=\{\xi_p\}_{-\infty}^{\infty}$ 的空间 $\Phi$ 上用表达式

$$(x, x)=\sum_{-\infty}^{+\infty} c_{p-q}\xi_p\overline{\xi}_q$$

定义的一种二次型, 其中序列 $c=\{c_p\}_{-\infty}^{\infty}$, $c_0=\overline{c}_0$, 是这样的, 从某个维数 $N$ 以后, 型 $(x, x)$ 在每个子空间

$$\Phi^N \subset \Phi,\ \Phi^N=\{\xi_p: \xi_p=0, |p|>N\}$$

上化成含有 $\kappa$ 个平方和的典范形式. 借助于 Toeplitz 型可在 $\Phi$ 上引进一个不定标量积; 按迷向子空间因子化和完全化后 $\Phi$ 成为一个 **Понтрягин 空间**(Pontryagin space).

Н. К. Никольский, Б. С. Павлов 撰

葛显良 译 吴绍平 校

**Toeplitz 矩阵 [Toeplitz matrix; Тёплица матрица], $T$ 矩阵(T-matrix)**

满足以下诸条件的一个无穷矩阵 $(a_{nk})_{n,k=1,2,\cdots}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}|\leqslant M,\ n=1, 2, \cdots,$$

其中 $M$ 不依赖于 $n$;

$$\lim_{n\to\infty} a_{nk}=0,\ k=1, 2, \cdots;$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}=1.$$

这些条件对于由把一个序列 $\{s_n\}$ 通过矩阵 $(a_{nk})$ 变换成序列 $\{\sigma_n\}$:

$$\sigma_n=\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}s_k$$

而定义的**矩阵求和法**(matrix summation method)的正则性(见**正则求和法**(regular summation methods))是必要充分的. 这些条件对正则性的必要性和充分性在三角形矩阵的情形是由 O. Toeplitz 所证明的.

**参考文献**

[1] Toeplitz, O., *Prace Mat. Fiz.*, **22** (1911), 113 – 119.

[2] Hardy, G. H., Divergent series, Clarendon, 1949.

[3] Cooke, R. G., Infinite matrices and sequence spaces, MacMillan, 1950.

И. И. Волков 撰

【补注】 在文献中术语"Toeplitz 矩阵"也用于具有性质: $a_{jk}$ 仅依赖差 $j-k$, 即对所有 $j$ 和 $k$, $a_{jk}=\alpha_{j-k}$ 的(有限或无限)矩阵 $(a_{jk})$. 以下资料是关于这意义下 Toeplitz 矩阵的.

有限 Toeplitz 矩阵在统计学、信号处理与系统理论中有重要应用. 对这样的矩阵有不同的求逆算法(N. Levinson, I. Schur 和其他人). 一个有限 Toeplitz 矩阵 $A=(\alpha_{j-k})_{j,k=1}^{n}$ 的逆不是 Toeplitz 的, 但是它有以下形式:

$$A^{-1}= \tag{A1}$$

$$=x_0^{-1}\left\{\begin{bmatrix} x_0 & 0 & \cdots & 0\\ x_1 & x_0 & \cdots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdots\\ x_n & x_{n-1} & \cdots & x_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_0 & y_{-1} & \cdots & y_{-n}\\ 0 & y_0 & \cdots & y_{-n+1}\\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ 0 & 0 & \cdots & y_0\end{bmatrix}+\right.$$

$$\left.-\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ y_{-n} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ y_{-n+1} & y_{-n} & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot\\ y_{-1} & y_{-2} & y_{-3} & \cdots & y_{-n} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & x_n & x_{n-1} & \cdots & x_1\\ 0 & 0 & x_n & \cdots & x_2\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\right\},$$

其中假定 $x_0\neq 0$, 且 $x_0, \cdots, x_n$ 和 $y_{-n}, \cdots, y_0$ 是以下方程的解:

$$\sum_{k=0}^{n}\alpha_{j-k}x_k=\delta_{j0},\ \sum_{k=0}^{n}\alpha_{j-k}y_{k-n}=\delta_{jn}(j=0, \cdots, n).$$

这里 $\delta_{ik}$ 是 Kronecker 符号. 公式(A1)称为 Гохберг-Semencul 公式(Gohberg-Semencul formula))(见[A4]). 关于这方向的进一步发展见[A5], [A6].

无穷 Toeplitz 矩阵 $(\alpha_{j-k})_{j,k=1}^{\infty}$ 在 Hilbert 空间 $l_2$ 上定义了一个重要的算子类, 可以借助于它们的象征 $\sum_{j=-\infty}^{\infty}\alpha_j\lambda^j$, $|\lambda|=1$ 来分析. 这些算子的理论是

丰富的且包含反演定理（基于象征的因子分解），Fredholm 定理，用象征的卷绕数来表示的指标的显式公式，对其有限部分的行列式的渐近公式，等等．事实上，无穷 Toeplitz 矩阵构成了显式反演公式已知的很少的几类算子之一，且它们提供了现代指标理论的第一批例子之一．关于最近文献见[A2]，[A3]，[A7]．其矩阵元素的象征是有理的无穷 Toeplitz 矩阵是特别令人感兴趣的，且对应的算子可借助于数学系统理论中的方法来分析（见[A1]）．

**参考文献**

[A1] Bart, H., Gohberg, I. and Kaashoek, M. A., Wiener-Hopf integral equations, Toeplitz matrices and linear systems, in I. Gohberg (ed.): Toeplitz Centennial, Birkhaüser, 1982, 85 – 135.

[A2] Böttcher, A. and Silbermann, B., Analysis of Toeplitz operators, Springer, 1990.

[A3] Gohberg, I. and Fel'dman, I. A., Convolution equations and projection methods for their solution, Amer. Math. Soc., 1974（译自俄文）.

[A4] Gohberg, I. and Semencul, A. A., On inversion of finite-section Toeplitz matrices and their continuous analogues, *Mat. Issled. Kishinev*, 7 (1972), 2, 201 – 224（俄文）.

[A5] Heinig, G. and Rost, K., Algebraic methods for Toeplitz-like matrices and operators, Akad. Verlag, 1984.

[A6] Kailath, T. and Chun, J., Generalized Gohberg-Semencul formulas for matrix inversion, in H. Dym, S. Goldberg, M. A. Kaashoek and P. Lancaster (eds.): The Gohberg Anniversary Collection, Vol. I, Birkhaüser, 1989, 231 – 246.

[A7] Nikolskiĭ, N. K. (ed.), Toeplitz operators and spectral function theory, Birkhäuser, 1989（译自俄文）.

葛显良 译 吴绍平 校

**容许（关系）[tolerance; толерантность]**

集合 $A$ 上的具有自反性和对称性的二元关系 $R \subseteq A \times A$，即 $R$ 满足对所有 $a \in A$ 有 $aRa$，且对所有 $b \in A$ 有 $aRb$ 蕴涵 $bRa$．称**泛代数**（universal algebra）$A = \{A, \Omega\}$ 上的容许关系 $R$ 是**相容的**（compatible）如果它是正方形 $A \times A$ 的子代数，也就是说，对任意 $n$ 元运算 $\omega$，条件 $a_i R b_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ 蕴涵 $(a_1, \cdots, a_n \omega)$ $R(b_1, \cdots, b_n \omega)$．于是，容许关系是**等价**（equivalence）关系的自然推广，而相容的容许关系是**合同**（congruence）关系的推广．相对有补格上的任一相容容许关系是合同关系（[1]）．泛代数 $A$ 上的所有相容容许关系组成的集合 LT$(A)$ 在包含关系下是以格 Con$(A)$ 为子集（但未必是子格）的代数格，其中 Con$(A)$ 是 $A$ 上的所有合同关系组成的格．关于 LT$(A)$ 和 Con$(A)$ 的性质见[2]，[3]．

**参考文献**

[1] Chajda, I., Niederle, J., Zelinka, B., On existence conditions for compatible tolerances, *Czechoslovak. Math. J.*, **26** (1976), 2, 304 – 311.

[2] Schmidt, E. T., Kongruenzrelationen algebraischer Strukturen, Deutsch, Verlag Wissenschaft, 1969.

[3] Grätzer, G., General lattice theory, Birkhäuser, 1978.

Т. С. Фофанова 撰

【补注】 设 $(M, d)$ 为一距离空间，则 $R = \{(x, y): d(x, y) \leqslant \varepsilon\}$ 定义了 $M$ 上的一个容许关系．这种类型的容许关系（及其推广）已应用于如统计学，力学，机器人学和动力系统中．还有涉及动力系统关于某容许关系的结构稳定性的研究，如 Zeeman **容许稳定性猜想**（Zeeman tolerance stability conjecture）（[A1]，[A2]）．

**参考文献**

[A1] Takens, F., Tolerance stability, in A. Manning (ed.): Dynamical Systems, Warwick 1974, Springer, 1975, 293 – 304.

[A2] Takens, F., On Zeeman's tolerance stability conjecture, in N. H. Kuiper (ed.): Manifolds, Amsterdam 1970, Springer, 1971, 209 – 219.

赵希顺 译

**容忍区间[tolerance intervals; толерантный интервал]**

根据独立同分布随机变量建立的随机区间，它以给定概率 $\gamma$ 至少包含概率测度 $dF$ 的 $100p\%$ $(0 < p < 1)$，其中 $F(x)$ 是随机变量的未知分布函数．

设 $X_1, \cdots, X_n$ 是独立同分布随机变量，其分布函数 $F(x)$ 未知；$T_1 = T_1(X_1, \cdots, X_n)$ 和 $T_2 = T_2(X_1, \cdots, X_n)$ 是两个统计量，满足条件：对于事先给定的数 $p (0 < p < 1)$，事件 $\{F(T_2) - F(T_1) \geqslant p\}$ 有给定的概率 $\gamma$，即

$$\mathsf{P}\left\{\int_{T_1}^{T_2} dF(x) \geqslant p\right\} = \gamma. \qquad (1)$$

这时，随机区间 $(T_1, T_2)$ 称为分布函数 $F(x)$ 的 $\gamma$ **容忍区间**（$\gamma$-tolerance interval），其端点 $T_1$ 和 $T_2$ 称为**容忍界限**（tolerance bounds），而概率 $\gamma$ 称为**容忍系数**（tolerance coefficient）．由（1）可见，单侧容忍界限 $T_1$ 和 $T_2$（即 $T_2 = +\infty$ 和相应地 $T_1 = -\infty$）分别是分位数 $x_{1-p} = F^{-1}(1-p)$ 和 $x_p = F^{-1}(p)$ 的置信系数为 $\gamma$ 的普通单侧置信界限，即

$$\mathsf{P}\{x_{1-p} \in [T_1, +\infty)\} = \gamma,$$

$$\mathsf{P}\{x_p \in (-\infty, T_2]\} = \gamma.$$

**例**．设 $X_1, \cdots, X_n$ 是独立同正态分布 $N(a, \sigma^2)$ 随机变量，其中参数 $a$ 和 $\sigma^2$ 未知．在这种情形下，自然取充分统计量 $(\bar{X}, S^2)$ 的函数作容忍界限 $T_1$ 和

$T_2$，其中

$$\bar{X}=\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}, \quad S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2.$$

具体地，取 $T_1=\bar{X}-kS$ 和 $T_2=\bar{X}+kS$，其中常数 $k$ 称为容忍乘数，它是如下方程的解：

$$\mathrm{P}\left\{\Phi\left(\frac{\bar{X}+kS-a}{\sigma}\right)+\right.$$

$$\left.-\Phi\left(\frac{\bar{X}-kS-a}{\sigma}\right)\geqslant p\right\}=\gamma,$$

而 $\Phi(x)$ 是标准正态律的分布函数，而且这里 $k=k(n,\gamma,p)$ 与 $a$ 和 $\sigma^2$ 无关．这样建立的容忍区间有如下性质：区间 $(\bar{X}-kS,\bar{X}+kS)$ 以置信概率 $\gamma$ 至少包含变量 $X_1,\cdots,X_n$ 的正态分布的概率质量的 $100p\%$．

在存在概率密度 $f(x)=F'(x)$ 的条件下，事件 $\{F(T_2)-F(T_1)\geqslant p\}$ 的概率不依赖于 $F(x)$，当且仅当容忍界限是**顺序统计量**（order statistic）．正是这一事实，是建立非参数（亦称分布自由）容忍区间的一般方法的基础．设 $X^{(\cdot)}=(X_{(n1)},\cdots,X_{(nn)})$ 根据样本 $X_1,\cdots,X_n$ 建立的顺序统计量向量，而

$$T_1=X_{(nr)},\quad T_2=X_{(ns)},\quad 1\leqslant r<s\leqslant n.$$

由于随机变量 $F(X_{(ns)})-F(X_{(nr)})$ 服从参数为 $s-r$ 和 $n-s+r+1$ 的 B 分布，可见事件 $\{F(X_{(ns)})-F(X_{(nr)})\geqslant p\}$ 的概率通过积分 $I_{1-p}(n-s+t+1,s-r)$ 表示，其中 $I_x(a,b)$ 是不完全 B 函数．从而，在此情形下，(1) 换成

$$I_{1-p}(n-s+r+1,s-r)=\gamma. \tag{2}$$

由 (2) 式即可根据给定的 $\gamma$，$p$ 和 $n$，决定（作为所求容忍区间之容忍限的）顺序统计量 $X_{(nr)}$ 和 $X_{(ns)}$ 的序号 $r$ 和 $s$．此外，根据给定的 $\gamma$，$p$，$r$ 和 $s$，由 (2) 式可以确定满足 (2) 所必须的样本 $X_1,\cdots,X_n$ 的容量 $n$．在解类似问题时要利用统计数值表．

**参考文献**

[1] Большев, Л. Н., Смирнов, Н. В., Таблицы математической статистики, М., 1983.

[2] Wilks, S. S., Mathematical statistics, Wiley, 1962.

[3] David, H. H., Order statistics, Wiley, 1981.

[4] Murphy, R. B., Non-parametric tolerance limits, *Ann. Math. Stat.*, **19** (1948), 581 – 589.

[5] Somerville, P. N., Tables for obtaining non-parametric tolerance limits, *Ann. Math. Stat.*, **29** (1958), 599 – 601.

[6] Scheffé, H. and Tukey, J. W., Non-parametric estimation 1. Validation of order statistics, *Ann. Math. Stat.*, **16** (1954), 187 – 192.

[7] Fraser, D. A. S.. Nonparametric methods in statistics, Wiley, 1957.

[8] Wald, A. and Wolfowitz, J., Tolerance limits for a normal distribution, *Ann. Math. Stat.*, **17** (1946), 208 – 215.

[9] Robbins, H., On distribution-free tolerance limits in random sampling, *Ann. Math. Stat.*, **5** (1944), 214 – 216.

М. С. Никулин 撰　周概容 译

**断层照相法**［**tomography**；**томография**］，亦称层析 X 射线照相法

【补注】根据投影重新构造图形，即由函数的线积分或（超）平面积分恢复函数．一些重要的研究课题是：反演过程的存在性、唯一性和稳定性以及建立有效的数值算法．在断层照相法中起基本作用的是 Euclid 空间上的 **Radon 变换**（Radon transform）．设 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 是实变量 $x_i\in\mathbf{R}^1(i=1,\cdots,n)$ 的连续函数且在无穷远处充分快地下降，$n=1,2,\cdots$．设 $\theta=(\theta_1,\cdots,\theta_n)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的单位向量，$s$ 是实数，$\Gamma=\{x\in\mathbf{R}^n:<x,\theta>=s\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的超平面，其中的 $<,>$ 表示 Euclid 内积．$f$ 在超平面 $\Gamma$ 上的积分

$$F(\theta,s)=\int_{\Gamma}f(x)dm(r) \tag{A1}$$

（$dm$ 是 $\Gamma$ 上的 Euclid 测度）称为函数 $f$ 的 Radon 变换．Radon 算子（Radon operator）$\mathscr{R}:f\to F$ 将 $\mathbf{R}^n$ 上的速降 $C^\infty$ 函数空间 $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ 映射到 $\mathbf{Z}^n$ 上的速降 $C^\infty$ 函数空间 $\mathscr{S}(Z^n)$，这里的 $Z^n=S^{n-1}\times\mathbf{R}$ 是 $\mathbf{R}^{n-1}$ 中的单位柱面，$S^{n-1}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的单位球面．固定 $\theta$ 和 $s$，积分 $F(\theta,s)$ 称为投影（projection）．Radon 变换与 **Fourier 变换**（Fourier transform）之间的联系是中心薄片定理（central slice theorem）：

$$\tilde{f}(\alpha\theta)=\int_{-\infty}^{\infty}F(\theta,s)e^{-i\alpha s}ds,\ \alpha\in\mathbf{R}, \tag{A2}$$

其中，$\tilde{f}(\xi)=\int_{\mathbf{R}^n}e^{-i<x,\xi>}f(x)dx$ 是 $f$ 的 $n$ 维 Fourier 变换，与 Radon 算子相关的算子是对偶算子（dual operator）或反投影算子（backprojection operator）$\mathscr{R}^{\#}:\mathscr{S}(Z^n)\to\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$：

$$(\mathscr{R}^{\#}g)(x)=\int_{S^{n-1}}g(\theta,<x,\theta>)d\theta,\quad g\in\mathscr{S}(Z^n). \tag{A3}$$

与 $\mathscr{R}$ 是关于超平面上所有的点积分不同，$\mathscr{R}^{\#}$ 是关于经过一个点的所有超平面积分的．因此，$\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{R}^{\#}$ 组成了**积分几何学**（integral geometry）意义下的对偶耦（见［A1］，［A8］及［A9］）．与之有关的变换是 $k$ 平面变换（$k$-plane transform）和发散束变换（divergent

beam transform)，前者是在 $k$ 维子空间上积分（$k=1$ 时称为 $X$ 射线变换（X-ray transform），$k=n-1$ 时即为 Radon 变换），而后者是在半直线上积分．

反演．Radon 变换的反演公式有两种不同的形式，视空间维数的奇偶而定（[A12]，[A17]）：

$$f(x)=\frac{1}{2}(2\pi)^{1-n}\times$$

$$\times\begin{cases}(-1)^{n/2}\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbf{R}}\frac{1}{q}\int\limits_{S^{n-1}}F^{(n-1)}(\theta,<x,\theta>+q)d\theta dq, & n\text{ 是偶数},\\ (-1)^{(n-1)/2}\int\limits_{S^{n-1}}F^{(n-1)}(\theta,<x,\theta>)d\theta, & n\text{ 是奇数}.\end{cases}$$

其中的 $F^{(n-1)}$ 是 $F$ 关于其最后一个（标量）变量的 $(n-1)$ 阶导数．因此，当 $n$ 是奇数时，只需要了解 $x$ 点的一个邻域内的局部信息；但当 $n$ 是偶数时，则需要知道在与函数的支集相交的所有超平面上的积分．在 1917 年的一篇文章（[A17]）中，J. Radon 还讨论了这样一个问题：根据函数在所有测地线上的积分确定双曲平面上的函数．先前，类似的方法曾被 P. Funk（[A5]）用于椭圆的情形：根据函数在大圆上的积分重构球面上的偶函数．奇数 $n$ 和偶数 $n$ 的反演公式的统一形式是

$$f=c^{-1}L_x^{(n-1)/2}(\mathscr{R}^{\#}F),\quad F=\mathscr{R}f,\qquad(A4)$$

其中的常数 $c=(-4\pi)^{n-1/2}\Gamma(n/2)\Gamma(1/2)$（$\Gamma(\cdot)$ 是 $\Gamma$ 函数），$L_x$ 是（作用在 $x$ 上的）**Laplace 算子**（Laplace operator）（见 [A8]）．关于对偶变换存在类似的表达式．发散束变换和 $X$ 射线变换的反演公式也类似于 $\mathscr{R}$ 的反演公式．用解析级数展开法得到了 Radon 变换的其他反演公式，见 [A3]．

由反演公式推得：$f\in\varphi(\mathbf{R}^n)$ 由 $\mathscr{R}f$ 唯一确定．但若只知道变换在区域的某个子集上的情形，则这一结论可能不再成立．下面列出其中的一些，称为不完全数据问题（incomplete date problems）（见**位势论中的反问题**（potential theory, inverse problems in））．i）外部问题（exterior problem），即根据函数在某个球的外部的线或平面上的积分恢复在该球外部的函数．如果 $f$ 在无穷远处足够快地衰减，则这个问题可解而且解是唯一的．ii）内部问题（interior problem），即根据函数在某个球内部的积分恢复在该球内部的函数．这个问题仅对维数是奇数的情形存在唯一解．iii）有限角问题（limited angle problem），此时只对半球面上的一个子集中的 $\theta$ 给出 $\mathscr{R}f(\theta,s)$．只要任意非平凡的齐次多项式在这个方向集上不恒为零，则问题有唯一解．iv）有限个方向的问题．问题的解在很大程度上是不唯一的．实际上，对任意有限方向集、任意函数 $f\in C_0^{\infty}(K)$（$K$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的紧集）以及在 $K$ 的内部中的任意紧子集 $K_0$，都可以找到函数 $f_0\in C_0^{\infty}(K)$，它在 $K_0$ 上等于 $f$ 但沿给定方向的所有线积分都等于零（见 [A20]）．这种（高度振荡）函数 $f_0$ 有时称为"幻影"（ghosts），它们构成了具有有限多个投影的变换的零空间．为了解决这一问题的不确定性，必须对函数 $f$ 的变差加以限制．另外，利用增加投影的数目，可以找到未知函数的任意好的近似．

**重构算法**．等式 $f*(\mathscr{R}^{\#}g)=\mathscr{R}^{\#}(g*\mathscr{R}f)$（$*$ 表示**卷积**（convolution））是滤过反投影（filtered backprojection）的基础．选取 $g$ 使得 $\mathscr{R}^{\#}g$ 是近似于 $\delta$ 分布的低通滤过，从而 $f$ 由与反投影的卷积（反投影在符号 $*$ 的右面）而被恢复（两种运算都适当地离散化）．如果反投影在滤过程序之前执行则会有变化．中心薄片定理是 Fourier 重构（Fourier reconstruction）的基础．这时的投影 $F(\theta,s)$ 是关于最后一个变量的 Fourier 变换，由 $n$ 维 Fourier 逆变换这是容许的．为了应用快速 Fourier 变换（见**离散 Fourier 变换**（Fourier transform, discrete）），首先必须从极网格改变到 Descartes 网格．解析级数展开法（analytic series expansion method）建立在将未知函数的单个展开系数的反演公式离散化的基础上．代数重构技术（algebraic reconstruction techniques）使用数值线性代数中的**迭代法**（iteration methods），应用于将 Radon 积分方程完全离散化后得到的线性方程组．

计算机化断层照相法的问题是不适定的（见**不适定问题**（ill-posed problems））．它们可以是无解的（如果数据不在变换的范围内）或者解可能不唯一，但这些是可以用广义反演的概念克服的问题．另外，将变换映射到解的算子可能是不连续的．这时要应用正则化程序（regularization procedures），例如 Тихонов-Phillips 正则化、配备合适终止准则的迭代法或者截断的奇异值分解等（[A4]，[A15]）．有限数据问题尤其严重的不适定．在这种情形时也可以应用带或不带先验信息的统计估计程序，最终经常导致迭代算法．

**推广**．可以定义广义的 Radon 变换，将其中的积分推广为在子空间上，或更一般地在流形上的积分（[A6]，[A8]，[A12]）．与这种空间有关的一个问题是轨道积分问题（orbital integral problem），即，根据函数在（广义）球面上的积分恢复该函数．作为逆散射问题的特例，在声学和衍射的断层照相法中，$f$ 可以由在经过原点的半圆上的数据得以恢复（见 [A14]、[A18] 和 [A21]）．Radon 变换的另一种变化是衰减 Radon 变换（attenuated Radon transform），两者之间的差别在于后者的积分号下多了一个指数权因

子．有关 Radon 变换在偏微分方程领域中的应用，见[A8]和[A13]. Radon 问题的另一个推广是根据测度的投影，即由某个可测映射诱导的低维测度重构该测度．复域上的 Random 变换见[A6]．有限 Radon 变换（finite Radon transform）也已有研究．

**应用**．断层照相法是一种广泛应用于重构研究对象内部结构的截面的方法，而且不用切割或损害研究对象．正因为如此，经常提及的是计算机化（计算的、计算机辅助的）断层照相法（computerized（computed，computer assisted）tomography），因为在实际工作中需要用数值计算机来具体实施重构．通过物理中介或"探针"——从 $X$ 射线、$\gamma$ 射线、可见光、电子、中子、超声波发展到核磁共振信号——与研究对象的交互作用，得到需要重构的内部分布的线积分或平面积分．计算机化断层照相法的一个最著名的例子是在诊断医学中，人们使用这一方法绘出了人体器官内部的图象．在工业中这一方法应用于非破坏性试验．它的应用还出现在放射天文学、雷达理论、电子显微镜、空气动力学、地球物理学以及海洋学中，参见[A3]，[A10]和[A14]．有限 Radon 变换也在多个不同的领域中得到应用，例如纠错码和格论等．

**参考文献**


[A1] Bryant, R. L., Guillemin, V., Helgason, S. and Wells, R. O., Jr. (eds.), Integral geometry, *Amer. Math. Soc.*, 1987.

[A2] Censor, Y., Elfving, T. and Herman, G. T. (eds.), Linear algebra in image reconstruction from projections, *Lin. Alg. Appl.*, **130** (1990), 1 - 305. special issue.

[A3] Deans, S. R., The Radon transform and some of its applications, Wiley, 1983.

[A4] Engl, H. W. and Groetsch, C. W., Inverse and ill-posed problems, Acad. Press, 1987.

[A5] Funk, P., Über Flächen mit lauter geschlossenen geodätischen Linien, *Math. Ann.*, **74** (1913), 287 - 300.

[A6] Gel'fand, I. M., Graev, M. I. and Vilenkin, N. Ya., Generalized functions, 5. Integral geometry and representation theory, Acad. Press, 1966（译自俄文）.

[A7A] Goncharev, A. B., Integral geometry and three-dimensional reconstruction of randomly oriented identical particles from their electron microphotos, *Acta Appl Math.*, 11 (1988), 199 - 211.

[A7B] Goncharev, A. B., Methods of integral geometry and recovering a function with compact support from its projections in unknown directions, *Acta Appl. Math.*, **11** (1988), 213 - 222.

[A8] Helgason, S., The Radon transform, Birkhäuser, 1980.

[A9] Helgason, S., Groups and geometric analysis, Acad. Press, 1984.

[A10] Herman, G. T., Image reconstruction from projections, the fundamentals of computerized tomography, Acad, Press, 1980.

[A11] Herman, G. T. and Natterer, F., Mathematical aspects of computerized tomography, Proc. Oberwolfach 1980, Springer, 1981.

[A12] John, F., Bestimmung einer Funktion aus ihren Integralen über gewisse Mannigfaltigkeiten, *Math. Ann.*, **109** (1934), 488 - 520.

[A13] John, F., Plane waves and spherical means applied to partial differential equations, Interscience, 1955.

[A14] Kak, A. C. and Slaney, A. M., Principles of computerized tomography imaging, IEEE Press, 1988.

[A15] Louis, A. K., Inverse und Schlecht Gestellte Probleme, Teubner, 1989.

[A16] Natterer, F., The mathematics of computerized tomography, Teubner & Wiley, 1986.

[A17] Radon, J., Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten, *Ber. Sachs. Akad. Wissenschaft. Leipzig Math. Phys. Kl.*, **69** (1917), 262 - 267.

[A18] Sabatier, P. C., Basic methods of tomography and inverse problems, A. Hilger, 1987.

[A19] Shepp, L. A. (ed.), Computed tomography, Proc. Symp. Applied Math., 27, Amer. Math. Soc., 1983.

[A20] Smith, K. T., Solmon, D. C. and Wagner, S. L., Practical and mathematical aspects of the problem of reconstructing a function from radiographys, *Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.)*, **83** (1977), 1227 - 1270.

[A21] Stark, H., Image recovery: theory and application, Acad. Press, 1987.


J. B. T. M. Roerdink 撰　朱学贤 译　程民德 校

**Tonelli 平面变差 [Tonelli plane variation; Тонелли плоская вариация]**

二元函数的一种数字特征，它可以用来定义依 Tonelli 意义的有界变差函数类．设 $f$ 是矩形 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上给定的函数，又设函数

$$V_f^1(x)=\operatorname*{Var}_{c\leqslant y\leqslant d} f(x,y)$$

和

$$V_f^2(y)=\operatorname*{Var}_{a\leqslant x\leqslant b} f(x,y)$$

为 Lebesgue 可测（前者在区间 $[a,b]$ 上，后者在 $[c,d]$ 上）．如果

$$T(f,D)=\int_a^b V_f^1(x)dx+\int_c^d V_f^2(y)dy<\infty,$$

则称函数 $f$ 在矩形 $D$ 上有有界（有限）的 Tonelli 平面变差（Tonelli plane variation），并记这类函数为 $\dot{T}(\dot{D})$. 这定义由 L. Tonelli（见[1]，[2]）引入．但是对连续函数，类 $T(D)$ 的另外一种刻画（通过 **Banach 指标**（Banach indicatrix））可在 S. Banach 更早的文献[4]中找到．如果函数 $f$ 在矩形 $D$ 上连续，那么曲面 $z=f(x,y)$ 有有限面积的充分必要条件是 $f$ 属于 $T(D)$（见 **Tonelli 定理**（Tonelli theorem））.

**参考文献**


[1] Tonelli, L., Sur la quadrature des surfaces, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **182**(1926), 1198 – 1200.

[2] Tonelli, L., Sulla quadratura delle superficie, *Atti Accad. Naz. Lincei*, 3(1926), 357 – 363; 445 – 450; 633 – 658.

[3] Витушкин, А. Г., О многомерных вариациях, М., 1955, с. 13.

[4] Banach, S., Sur les lignes rectifiables et les surfaces dont l'aire est finie. *Fund. Math.*, 7(1925), 225 – 236.

[5] Saks, S., Theory of the integral, Hafner, 1952, p. 169（译自波兰文）.


Б. И. Голубов 撰 王斯雷 译

**Tonelli 定理** [**Tonelli theorem**; **Тонелли теорема**]，关于由显示方程给出的连续曲面面积有限性的

设 $f$ 是定义在矩形 $D_0=[a,b]\times[c,d]$ 上的实值函数；那么

a）连续曲面 $z=f(x,y),(x,y)\in D_0$ 有有限面积 $S(f,D_0)$ 的充分必要条件是，$f$ 在 $D_0$ 上有有限的 **Tonelli 平面变差**（Tonelli plane variation）；

b）若 a）成立，则

$$S(f,D_0)\geqslant$$

$$\geqslant\iint_{D_0}\left(1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right)^{1/2}dx\,dy\equiv L(f,D_0),$$

其中面积

$$S(D)\equiv S(f,D),\ D=[\alpha,\beta]\times[\gamma,\delta]\subseteq D_0$$

为矩形 $D\subseteq D_0$ 的连续加性函数，且对几乎处处的点 $(x,y)\in D_0$，成立等式

$$S'(x,y)\equiv\left[1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]^{1/2};$$

c）等式 $S(f,D_0)=L(f,D_0)$ 成立的充分必要条件是，$f$ 在 $D_0$ 上绝对连续，后者成立当且仅当面积 $S(f,D)$ 是矩形 $D\subseteq D_0$ 上的绝对连续函数．

这定理是由 L. Tonelli 证明的（见 [1]－[3]以及[4]），虽然命题 a）对一切用参数定义的曲面是由 S. Banach（[5]）（用不相同的术语）建立的．

**参考文献**


[1] Tonelli, L., Sur la quadrature des surfaces, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **182**(1926), 1198 – 2000.

[2] Tonelli, L., Sur quadratura delle superficie, *Atti Accad. Naz. Lincei*, 3(1926), 357 – 363; 445 – 450; 633 – 658

[3] Tonelli, L., Su un polinomio d'approssimazione e l'area di una superficie, *Atti Accad Naz. Lincei*, **5**(1927), 313 – 318.

[4] Saks, S., Theory of the integral, Hafner, 1952（译自波兰文）.

[5] Banach, S., Sur les lignes rectifiables et les surfaces dont l'aire est finie, *Fund. Math.*, 7(1925), 225 – 236.


Б. И. Голубов 撰

【补注】 曲面 $z=f(x,y)$ 称为连续的，是指 $f$ 连续；面积 $S(f,D_0)$ 为 Lebesgue 面积（Lebesgue area）（见**面积**（area）），即大致地说，是曲面内接多边形的面积之值当多边形一致趋于曲面时的下极限．当偏导数几乎处处有定义时，$L(f,D_0)$ 的定义（**曲面积分**（surface integral））有意义；当 $f$ 为绝对连续时，就是这种情形．如同对长度概念那样，Tonelli 定理是人们企图弄清面积这一概念的 19 世纪风格的顶峰．至于这方面的近代工作，可见**面积**．

王斯雷 译

**拓扑代数** [**topological algebra**; **топологическая алгебра**]

1）同时是拓扑空间且代数运算是连续的一种泛**代数**（universal algebra）.

2）同时是拓扑空间的拓扑域或交换环 $R$ 上的一种代数（在**含算子环**（ring with operators）的意义下）$A$，且其中加法和乘法运算以及映射 $R\times A\to A$（$(r,a)\mapsto ra$）都是连续的．**Banach 代数**（Banach algebra）是复数域上拓扑代数的一个例子．

3）拓扑代数学是代数学的一个分支，它研究拓扑代数结构，即群，半群，环，格，向量空间，模，以及其他，其中装备着拓扑使所考虑的代数运算是连续的．

拓扑群（topological group）的概念是与连续变换群的研究相联系而产生的．譬如说，在 19 世纪后半期，S. Lie 和他的学派发展了重要的一类拓扑群（从一流形到其自身中的可微变换群）的理论，这些群随后被称为 **Lie 群**（Lie group）．一般拓扑群的研究开始于 20 世纪 20 年代（见[1]，[2]）．20 世纪 30 年初，拓扑群、环和域被系统地进行了研究．

А. Н. Колмогоров（[3]）开创了研究拓扑射影几何学的公理化方法．其分类本质上依赖于**局部紧除环**（locally compact skew-field）的描述．连通局部紧除环的一个完全的描述由 Л. С. Понтрягин 于 1932 年给出（见[4]，第 4 章）．

分析中的大量问题引向 **Banach 空间** (Banach space) (亦见[5]) 的一般定义，这激发了对拓扑环上拓扑模和 Banach 代数的系统研究 (见[6]，[7]).

现在拓扑代数学的基本分支是：**拓扑群** (topological group) 及其推广 (特别是拓扑半群和拟群)；**拓扑环** (topological ring) (特别是拓扑域和除环) 和其上的**拓扑模** (topological module) (特别是**拓扑向量空间** (topological vector space)；拓扑格 (特别是拓扑射影平面)；以及拓扑泛代数 (见[5]，[8]，[10]，[11]).

在拓扑代数学中可分出以下的研究方向：代数系统 (群、环及其他) 中拓扑的存在性，变换它们到具有特殊性质的拓扑代数系统中；关于扩张拓扑到代数系统的扩张中和关于把它们嵌入到特殊类别的拓扑代数系统中的可能性等问题；拓扑代数系统的拓扑性质，特别是用度量或范数来确定该拓扑的可能性；不同类别拓扑代数系统的构造 (包括拓扑代数系统的根理论)；自由拓扑代数系统；和拓扑代数系统的对偶性问题.

**参考文献**


[1] Schreier, O., Abstrakte kontinuierliche Gruppen, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **4** (1926), 15 – 32.

[2] Leja, F., Sur la notion du groupe topologique, *Fund. Math.*, **9** (1927), 37 – 44.

[3] Kolmogorov, A. N., Zur Begründung der projektiven Geometre, *Ann. of Math.*, **33** (1932), 175 – 176.

[4] Понтрягин, Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973 (中译本：Л. С. 邦德列雅金，连续群，上、下册，科学出版社，1957 – 1958).

[5] Bourbaki, N., Topological vector spaces, Springer, 1987 (译自法文).

[6] Гельфанд, И. М., Райков, Д. А., Шилов, Г. Е., Коммутативные нормированные кольца, М., 1960 (英译本：Gel'fand, I. M., Raĭkov, D. A. and Shilov, G. E., Commutative normed rings, Chelsea, 1964).

[7] Наймарк, М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968 (英译本：Naimark, M. A., Normed rings, Reidel, 1984).

[8] Арнаутов, В. И., Водинчар М. И., Михалев, А. В., Введение в теорию топологических колец и модулей, Киш., 1981.

[9] Глушков, В. М., 《Успехи матем. наук》, **12** (1957), 2, 3 – 41.

[10] Скорняков, Л. А., 《Труды Московского математического об-ва》, **3** (1954), 347 – 373.

[11] Мальцев, А. И., Избранные труды, т. 1 – 2, М., 1976 (英译本：Mal'tsev, A. I., The metamathematics of algebraic systems, Collected paper 1936 – 1967, North – Holland, 1971).


В. И. Арнаутов, А. В. Михалёв 撰

【补注】 **拓扑半群** (topological semi-group) 的概念自 1950 年以来在泛函分析和拓扑代数学 (按上面 3) 的意义) 中已经作了研究. 见[A4] – [A7].

拓扑代数学的一个重要方面是同一集合上拓扑和代数结构之间的相互作用；特别是，在其他方面不等价的拓扑性质由于相容代数结构的存在而使之成为等价的方法，以及反之. 例如，如果一个拓扑群的底拓扑空间满足 $T_0$ 分离性公理，则它自动地是 Hausdorff 空间 (且其至是完全正则的). 类似地，如果一个拓扑环 (具有 1) 的底空间是紧和 Hausdorff 的，则它也是零维的. 在另一方向，如果一个格容许有一个紧 Hausdorff 拓扑与其格结构相容，则它必须是完全的 (即有任意子集的上确界和下确界). 在这种情形 (且即使对拓扑半格)，该拓扑是由代数结构唯一决定的 (加上要求它应是紧和 Hausdorff 的). 关于拓扑格的更多信息，见[A1]，[A2].

**参考文献**


[A1] Gierz, G, Hofmann, K. H., Keimel, K., Lawson, J. D., Mislove, M. and Scott, D. S., A compendium of continuous lattices, Springer, 1980.

[A2] Johnstone, P. T., Stone spaces, Cambridge Univ. Press, 1982.

[A3] Hofmann, K. H. and Mostert, P. S., Elements of compact semigroups, Merrill, 1966.

[A4] Hille, E. and Phillips, R. S., Functional analysis and semigroups, Amer. Math. Soc., 1957 (中译本：希尔，菲列浦斯，泛函分析与半群，上海科学技术出版社，1964).

[A5] Goldstein, J., Semigroups of linear operators and applications, Oxford Univ. Press, 1985.

[A6] Hofmann, K. H., Topological semigroups, history, theory, applications, *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein*, **78** (1976), 9 – 59.

[A7] Hofmann, K. H. and Lawson, J. D., The analytical and topological theory of semigroups, de Gruyter, 1990.

[A8] Guichardet, A., Special topics in topological algebras, Gordon & Breach, 1968.


葛显良 译 鲁世杰 校

## 拓扑动力系统 [topological dynamical system; топологическая динамическая система]

一个三元组 $(W, G, F)$，其中 $W$ 为拓扑空间，$G$ 为拓扑群，$F$ 为定义在 $G$ 左乘 $W$ 上的连续函数 $G\times W\to W$：若 $w\in W$，$e$ 为 $G$ 的单位元，且 $g, h\in G$，则 (利用 $G$ 中运算的乘法概念) $F(e, w)$

$= w$ 且

$$F(gh, w) = F(g, F(h, w)). \quad (1)$$

(换言之，若用 $T_g$ 表示变换 $w \to F(g, w)$，则 $T_{gh} = T_g T_h$)．研究时常用右乘代替左乘．这时 $F$ 的自变量常用另外的次序（$F$ 用映射 $W \times G \to W$ 表示），且（1）换成如下条件

$$F(w, gh) = F(F(w, g), h). \quad (2)$$

$F(g, w)$ 或 $F(w, g)$ 常常简写成 $gw$ 或 $wg$，则（1）和（2）写成形式

$$(gh)w = g(hw),\ w(gh) = (wg)h.$$

若 $G$ 是交换群，则左乘与右乘没有本质区别．最重要的情形是 $G = \mathbf{Z}$（具有离散拓扑的整数加群；这时就称之为（拓扑）瀑布（cascade），还有 $G = \mathbf{R}$（这时就称之为（拓扑）流（flow）．在狭义上拓扑动力系统才用到这两种情形．有时 $G$ 不是群而是半群．然而基本上只研究非负整数的半群（换言之，考虑某连续映射 $T: W \to W$ 的迭代）或者是（很罕见的）非负实数的半群．

"拓扑动力系统"这个词（通常去掉第一个形容词）属于**拓扑动力学**（topological dynamics），而在拓扑学中，同样的对象称为连续变换群．这两种不同术语的出现，归因于两种学科研究对象的不同性质，以及所附加的不同限制．拓扑学中许多结果与紧群 $G$ 有关，但在拓扑动力学中 $G$ 常取局部紧群，而决不是紧群，并且对 $g \to \infty$ 时轨道 $F(g, w)$ 的极限性态（即在 $G$ 的任意大的紧范围之外）感兴趣，它即使在分析中也可能相当复杂．在**变换的代数群**（algebraic group of transformations）的理论中，并不假定 $G$ 的紧性，而另一方面却对代数簇之间的映射 $F$ 有很强的正则性要求（代数簇的基域往往假定为代数闭域，所以经典情形是"在整个复数域上"谈论正则性）．结合 $G$ 的连通性（往往还有可约性），就能象在紧群的情形一样得到关于相互伴随轨道（见**轨道**（orbit））可能类型的有意义的信息，特别是排除了与轨道的复杂极限性态有关的许多现象．

"拓扑动力系统"这个词优于通常使用的"连续动力系统（流，瀑布）"，因为"连续"也可能意味着：a）度量连续，见**连续流**（continuous flow）的 1）；b）$G = \mathbf{R}$（在狭义地谈论拓扑动力系统的时候，就说流是时间连续的情形，瀑布是时间离散的情形，有时分别称之为**连续动力系统**和**离散动力系统**．）

Д. В. Аносов 撰

【补注】 亦见**拓扑动力学**（topological dynamics）的参考文献．

**参考文献**


[A1] Vries, J. de, Topological transformation groups, I, Math. Centre Amsterdam, 1975.

[A2] Ellis, R., Lectures on topological dynamics, Benjamin, 1969.

[A3] Bronštein, I. U., Extensions of minimal transformation groups, Sijthoff & Noordhoff, 1979（译自俄文）.


罗嵩龄 译

**拓扑动力学** [topological dynamics; топологическая динамика]

动力系统理论中研究拓扑动力系统的分支（见**动力系统**（dynamical system）；**拓扑动力系统**（topological dynamical system））．基本的情形是**相空间**（phase space）为度量紧化，而时间遍历 $\mathbf{R}$，$\mathbf{Z}$ 或 $\mathbf{N}$（以下均作此假定）．

拓扑动力学的起源（1920－1930）涉及到与轨道极限性态相关的一系列概念（例如，拓扑动力系统的**极限集**（limit set）和**中心**（centre））．在拓扑动力学基本内容中讨论运动的"可重复性"颇为有益，尽管这些概念本身是在研究更加具体的对象——微分动力系统时提出的．各种"可重复性"（按照普遍性程度的顺序）有：周期性，（Bohr）意义下殆周期性，（Birkhoff 意义下，见**极小集**（minimal set）的 2））递归性，**Poisson 稳定性**（Poisson stability），非游荡性（见**游荡点**（wandering point））及**链循环**（chain recurrence）．随着时间的推移，任意轨道逼近"可重复"轨道生成的集合；依此观点，特别注意后者是合情合理的．

在 60 年代，极小集及其扩张的研究，使拓扑动力学作为一门独立学科得到较大发展（它最初与远离动力系统有关，见**远离动力系统**（distal dynamical system））．然而，必须记住，对于轨道极限性态的研究，不能简单地化为对极小集的研究．

直到 60 年代末，拓扑动力学主要处理上述问题（亦见下述段落和**动力系统**（dynamical system）中参考文献[1]，[6]，[11]，[13]－[15]）．但是，许多情况下还必须考虑"不可重复"轨道（因而往往对分界线感兴趣）．特别地，它们可以描述某种特殊类型的波，这与它们是不是链循环无关．与具有非退化临界点的函数对应的**梯度动力系统**（gradient dynamical system）被用于流形的研究；但是，在这时，"可重复"轨道的集合有一个平凡结构．因此后来也研究了除"可重复"运动之外的轨道性态，以及孤立的（isolated）或者局部极大的（在集合的某邻域 $U$ 中，不存在更大的不变集）紧不变集．在这种集合的轨道中，可能有"不可重复"的．对这种集合可引入类似于 **Morse 指数**（Morse index）的指标（它不再是数，而是更复杂的对象），并且建立一种关系，以推广 **Morse** 不

**等式**(Morse inequalities)(恰与 **Morse-Smale 系统**(Morse-Smale system)的结果对应). 也讨论系统中这些集合在连续变化下的性态. (因为没有兴趣研究轨道离开 $U$ 之后的性质之类的问题, 所以有可能(有时甚至必须)研究"局部动力系统", 在该系统中, 点的"运动"不必对所有时间值定义. 精确的描述颇为费力. 见[1], [10]).

与拓扑动力学有关的问题是**不变测度**(invariant measure); 拓扑熵; 渐近循环(见[2], [3]); 或在**描述集合论**(descriptive set theory)意义下, 由其性质自然确定的相空间的某子集或其他部分, 属于哪一类的问题(见[4], [5]). 在拓扑动力学中(一般地, 在动力系统理论中), 人们提出与动力系统在某种"脱殊的"意义下的那些性质有关的问题(见**一般位置**(general position)的参考文献[9], [10], **链循环**(chain recurrence)的参考文献[3], [6], [7]). (事实上, 拓扑动力学仅与 $C^0$ 拓扑中的"脱殊性"有关, 对于微分动力系统, 在系统的一相对小的集合上, $C^r(r \geqslant 1)$ 拓扑更合适.)在拓扑动力学的框架中, 可以讨论 **Ляпунов 稳定性**(Lyapunov stability)与各种相关概念之间的关系.

拓扑动力学对于具体的动力系统或各动力系统类的应用中, 大量涉及到拓扑动力学的概念及结果对微分动力系统理论(有时也涉及**遍历理论**(ergodic theory))的应用. 在拓扑动力学的这些应用中, 常常要考虑在其中相空间不是流形的系统(当拓扑动力学应用在非流形的不变集上的限制, 或者应用于**符号动力学**(symbolic dynamics), 或者兼而有之时, 就出现此情形.)从 60 年代中叶起, 特别是到了 80 年代, 在区间或圆的连续映射 $S$ 迭代所得的瀑布上, 有了许多成果. 它们大部分不依赖于 $S$ 的光滑性, 且与不变测度无关, 只与"纯"拓扑动力学有关.

拓扑动力学对统一研究数论中的一系列结果有用武之地(见[8], [11])(虽然其中最深奥的部分与遍历理论有关). 最后, 尽管拓扑流的定义用到了常微分方程**自治系统**(autonomous system)的许多性质, 拓扑动力学有时也可以间接用于研究非自治系统(这里, 此系统是和经某极限过程所得另一系统的连续统在一起研究的, 并且提供了类似于**斜积**(skew product)条中 2)的构造. 见[9]).

**参考文献**


[1] Conley, C., Isolated invariant sets and the Morse index, Amer. Math. Soc., 1978.

[2] Schwartzman, S., Asymptotic cycles, *Ann. of Math.*, **66** (1957), 270 – 284.

[3] Rhodes, F., Asymptotic cycles for continuous curves on geodesic spaces, *J. London Math. Soc.*, **6** (1973), 247 – 255.

[4] Шарковский, А. Н., 《Укр. Матем. ж.》, **17** (1965), 3, 104 – 111, 5, 80 – 95; **18** (1966), 2, 60 – 83, **20** (1968), 2, 136 – 142.

[5] Шарковский, А. Н., 《Доповiдi АН УРСР》, 1966, 7, 866 – 870.

[6] Добрынский, В. А., в кн: Динамические системы и вопросы устойчивости решений дифференциальных уравнений, К., 1973, 43 – 53.

[7] Palis, J., Pugh, C., Shub, M. and Sullivan, D., Genericity theorems in topological dynamics, in A. Manning (ed.), Dynamical Systems Warwick, 1974, Lecture notes in math., Vol. 468, Springer, 1975, 241 – 250.

[8] Furstenberg, H., Poincaré recurrence and number theory, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **5** (1981), 3, 211 – 234.

[9] Millionshchikov, V. M., Les systèms linéaires d'équations différentielles ordinaires, in Internat. Congress Mathematicians Nice, 1970, Gauthier-Villars, 1971, 915 – 920.

[10] Salamon, D., Connected simple systems and the Conley index of isolated invariant sets, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **291** (1985), 1, 1 – 41.

[11] Furstenberg, H., Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory, Princeton Univ. Press, 1981.


Д. В. Аносов 撰

【补注】 极小集及其扩张的研究也可以在相空间不可度量(但保持紧)及"时间"遍历任意拓扑群时进行; 亦见[A1]. 对于通过迭代区间或圆的连续映射所得的瀑布, 例如见[A2]–[A4], [A6].

对于非自治系统, 亦见[A5]及**动力系统**(dynamical system)中参考文献[13]的第 IV 章.

**参考文献**


[A1] Auslander, J., Minimal flows and their extensions, North-Holland, 1988.

[A2] Bowen, R. and Franks, J., The periodic points of maps of the disk and the interval, *Topology*, **15** (1976), 337 – 342.

[A3] Martens, M., Strien, S. van and Melo, W. de, Julia-Fatou-Sullivan theory for real one-dimensional dynamics, *Acta Math.* (待出版).

[A4] Milnor, J. and Thurston, B., On iterated maps of the interval., in J. C. Alexander (ed.), Dynamical Systems. Lecture notes in math., Vol. 1342, Springer, 1988, 465 – 563.

[A5] Sell, G. R., Topological dynamics and ordinary differential equations, v. Nostrand, 1971.

[A6] Sharkovskiĭ, A. N., Coexistence of cycles of continuous maps of a line into itself, *Ukrain Mat. Zh.*, **16** (1964), 61 – 71 (俄文).

[A7] Gottschalk, W. H. and Hecklund, G. A., Topological dynamics, Amer. Math. Soc., 1955.

[A8] Smale, S., The mathematics of time, Springer, 1980.

罗嵩龄 译

拓扑熵 [**topological entropy**; **топологическая энтропия**]

在**拓扑动力学** (topological dynamics) 和**遍历理论** (ergodic theory) 中，与动力系统的**度量熵** (metric entropy) ([1] 中引入) 相类似的一个概念. 对于紧统 $X$ 的一个开覆盖 $\mathfrak{A}$，设 $H(\mathfrak{A})$ 表示能够覆盖 $X$ 的覆盖元素最少个数的对数 (常以 2 为底). 若 $S: X \to X$ 是连续映射，则极限

$$h(S, \mathfrak{A}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\mathfrak{A} \vee S^{-1}\mathfrak{A} \vee \cdots \vee S^{-n+1}\mathfrak{A})$$

存在，其中 $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ 是一个覆盖，其元素由 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 中元素的所有非空交组成. 拓扑熵 $h_{\mathrm{top}}(S)$ 定义为 $h(S, \mathfrak{A})$ 在所有可能的 $\mathfrak{A}$ 上的上确界. 在度量情形下有一个等价定义: 对度量 $\rho$，设 $K_\varepsilon(X, \rho)$ 表示 $X$ 中两两距离大于 $\varepsilon$ 的点的最大数. 那么

$$h_{\mathrm{top}}(S) = \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log K_\varepsilon(X, \rho_n),$$

其中 $\rho_n(x, y) = \max_{0\leqslant i\leqslant n} \rho(S^i x, S^i y)$ (见 [2]-[4]). 这就得到

$$h_{\mathrm{top}}(S^n) = n\, h_{\mathrm{top}}(S).$$

且当 $S$ 是同胚时，$h_{\mathrm{top}}(S^{-1}) = h_{\mathrm{top}}(S)$. 因此，**瀑布** (cascade) $\{S^n\}$ 的拓扑熵自然取作 $h_{\mathrm{top}}(S)$. 对于**拓扑流** (**连续时间动力系统** (flow (continuous-time dynamical system))) $\{S_t\}$，就得到

$$h_{\mathrm{top}}(S_t) = |t|\, h_{\mathrm{top}}(S_1).$$

于是，流的拓扑熵自然取作 $h_{\mathrm{top}}(S_1)$. 可以用不同的方法定义其他变换群的拓扑熵 (它不能够再简化成群的元素之一的拓扑熵; 见 [7]).

拓扑熵 $h_{\mathrm{top}}(S)$ 与在所有正规化不变 Borel 测度 $\mu$ 上度量熵 $h_\mu(S)$ 的上确界一致 (见 [2], [5]-[7]; $\max h_\mu$ 的存在性及 $S$ 上 $h_{\mathrm{top}}(S)$ 对 $S$ 的依赖性见 [18]). 这是变分原理 (variational principle) 的一种特殊情形. 对于固定连续函数 $f$, 变分原理给出了值

$$\sup_\mu \left[ h_\mu(s) + \int f\, d\mu \right]$$

的拓扑解释 (见 [4], [8], [9]). 拓扑熵给出了动力系统中运动的 "复杂性" 或 "相异性" 的特征 (见 [10], [3], [4]). 一定情况下, 它也与周期轨道数 (周期 $\leqslant T$ 的轨道; 见**周期轨道** (periodic trajectory) 及 [3], [4], [11]-[13])) 的渐近性态有关 (当 $T\to\infty$ 时). "熵猜想" 断言, 闭流形 $W$ 的微分同胚 $S$ 的拓扑熵, 不小于由 $S$ 在同调空间 $H_*(W, \mathbf{R})$ 上导出的线性变换的**谱半径** (spectral radius) 的对数 (见 [14], [15]). 在 $C^\infty$ 情形下已获证明 ([17]).

**参考文献**

[1] Adler, R. L., Konheim, A. G. and McAndrew, M. H., Topological entropy, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **114** (1965), 309-319.
[2] Динабург, Е. И., 《Изв. АН СССР Сер. матем.》, **35** (1971), 2, 324-366.
[3] Алексеев, М., Символическая динамика, в кн.: Одиннадцатая математическая школа, К., 1976.
[4] Боуэн, Р., Методы символической динамики, М., 1979 (译自英文).
[5] Goodman, T. N. T., Relating topological entropy and measure entropy, *Bull. London Math. Soc.*, **3** (1971), 176-180.
[6] Goodwyn, L. W., Comparing topological entropy with measure-theoretic entropy, *Amer. J. Math.*, **94** (1972), 366-368.
[7] Таги-заде, А. Т., 《Докл. АН Азерб. ССР》, **34** (1978), 6, 18-22; 8, 11-14.
[8] Степин, А. М., Таги-заде, А. Т., 《Докл. АН СССР》, **254** (1980), 3, 545-549.
[9] Moulin Ollagnier, J. and Pinchon, D., The variational principle, *Studia Math.*, **72** (1982), 151-159.
[10] Брудно, А. А., 《Тр. Моск. матем. об-ва》, **44** (1982), 124-149.
[11] Кушниренко, А. Г., Каток, А. Б., Алексеев, В. М., в кн.: Девятая летняя математическая школа, 2 изд., К., 1976, 50-341.
[12] Каток, А. Б., Синай, Я. Г., Степин, А. М., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Математический анализ, т. 13, М., 1975, 129-262.
[13] Katok, A. B., Lyapunov exponents entropy and periodic orbits for diffeomorphisms, *Publ. Math. IHES*, **51** (1980), 137-173.
[14A] Katok, A. B., The entropy conjecture, in D. V. Anosov (ed.): Smooth Dynamical Systems, Moscow, 1977, 181-203.
[14B] Shub, M., Dynamical systems, filtrations and entropy, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **80** (1974), 27-41.
[15] Fried, D. and Shub, M., Entropy, linearity and chain-recurrence, *Publ. Math. IHES*, **50** (1979), 203-214.
[16] Denker, M., Grillenberger, C. and Sigmund, K., Ergodic theory on compact spaces, Springer, 1976.

Д. В. Аносов 撰

【补注】 代替译文 [4], 可以参考 [A2].

依上所述, $h_\mu(S)$ 表示 $S$ 关于正规化不变 Borel 测度 $\mu$ 的熵 (见**动力系统的熵理论** (entropy theory of a dynamical system)). 若 $\mu$ 遍取所有正规化不变 Borel 测度的集合, 则值 $P_S(f) = \sup_\mu [h_\mu(S) + \int f\, d\mu]$

称为 $f$（关于 $S$）的压力（pressure）. 若 $\mu$ 满足 $h_\mu(S)+\int f d\mu=P_S(f)$（即上确界是极大值），则 $\mu$ 称为 $f$（关于 $S$）的平衡态（equilibrium state）或 Gibbs 测度（Gibbs measure）. 关于存在性及唯一性的结论也见[A2].

有关拓扑熵估计的最新结果，见[A1]及其参考文献.

**参考文献**


[A1] Newhouse, S. E., Entropy and volume, *Ergod. Th. & Dynam. Syst.*, 8 (1988), 283 – 299.

[A2] Bowen, R., Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms, Springer, 1975.


罗嵩龄 译

## 拓扑等价 [topological equivalence; топологическая эквивалентность]

拓扑空间之间的一种关系. 两个拓扑空间 $X$ 与 $Y$ 称为拓扑等价，如果它们同胚，即存在从空间 $X$ 到 $Y$ 上的一个**同胚**（homeomorphism）. 在所有拓扑空间组成的类中，拓扑等价是自反的、对称的、可传递的二元关系. 所有拓扑空间的总体，分划成为两两不交拓扑等价类. 拓扑空间在拓扑等价下，即在任意同胚下保持不变的性质，称为拓扑不变量（topological invariants）. 例如，直线与（不含端点的）区间拓扑等价；直线和闭区间不拓扑等价. 任意两个三角形拓扑等价，然而它们并不是属于这个拓扑等价类的全部拓扑空间，比如这个类还包含所有圆. 拓扑等价概念的一个重要扩张是同伦等价（见**同伦型**（homotopy type））.

**参考文献**


[1] Александров, П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, М.-Л., 1948 (中译本: П. С. 亚历山大罗夫, 集与函数泛论初阶, 上册, 商务印书馆, 1954; 下册, 高等教育出版社, 1955).


А. В. Архангельский 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Engelking, R., General topology, Heldermann, 1989.


罗嵩龄 译

## 拓扑域 [topological field; топологическое поле]

一拓扑环（topological ring）$K$，同时是**域**（field），即加上在 $K\setminus\{0\}$ 上逆映射 $a\mapsto a^{-1}$ 是连续这一要求. 拓扑域 $K$ 的任一子域 $P$，及 $P$ 的闭包 $\overline{P}$ 都是拓扑域.

仅有的连通局部紧拓扑域是 **R** 和 **C**（也见**局部紧除环**（locally compact skew-field））. 每个赋范域相对于由范数诱导出的拓扑是一个拓扑域（见**范数**（norm）；**域上的范数**（norm on a field））. 如在域 $P$ 上存在两个实值范数 $u$ 和 $v$，每个都使 $P$ 成为完全的拓扑域，且由 $u$ 与 $v$ 诱导出的拓扑 $\tau_u$ 和 $\tau_v$ 不同，则域 $P$ 是代数闭域. 域 **C** 是域 **R** 的唯一的实范数扩张.

对每个无限基数为 $\tau$ 的域，存在着 $2^{2^\tau}$ 个不同的拓扑使之成为一个拓扑域. 拓扑域的拓扑或是反离散的（anti-discrete）或是完全正则的. 具非范数拓扑的拓扑域，以及有范数但不具有传统范数赋予的拓扑的拓扑域正被构造出来. 拓扑域或是连通的或是完全不连通的. 存在着具有任意有限特征的连通拓扑域. 现不知是否每个拓扑域可作为子域嵌入一个连通拓扑域. 对照于拓扑环和线性拓扑空间，不是每个完全正则的拓扑空间可嵌入到一拓扑域中作为一个子空间. 例如，拓扑域的拟紧的（特别地，紧的）子空间总是可测的. 但是，每个完全正则且有一个到一可测空间之上的连续的一一映射的空间可嵌入到某个拓扑域中成为一个子空间. 如果拓扑域 $P$ 至少包含一个可数的非闭子集，则在 $P$ 上存在一个最弱的可测拓扑使 $P$ 成为一个拓扑域.

对于一个拓扑域 $K$，可定义完全化 $\widetilde{K}$，它是一个完全拓扑环，$K$ 作为一个处处稠密的子域嵌入其中. 环 $\widetilde{K}$ 可能有零因子. 但是，每个实范数拓扑域的完全化仍是一个实范数拓扑域.

**参考文献**


[1] Понтрягин, Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973 (英译本: Pontryagin, L. S., Topological groups, Princeton Univ. Press, 1958).

[2] Wieslaw, W., Topological fields, M. Dekker, 1988.

[3] Шахматов, Д. Б., 《Докл. АН СССР》, **271** (1983), 6, 1332 – 1336.


Д. Б. Шахматов 撰 冯绪宁 译

## 拓扑群 [topological group; топологическая группа]

一个集合 $G$，在其上给予两个结构——一个群结构和一个拓扑，使得群运算是连续的. 确切地说，由直积 $G\times G$ 到 $G$ 内的映射 $(a,b)\mapsto ab^{-1}$ 必须是连续的. 拓扑群 $G$ 的一个子群在诱导拓扑内是一个拓扑群. 陪集的商空间 $G/H$ 关于 $G$ 到 $G/H$ 上的典范同态来说被赋予商拓扑. 如果 $H$ 是 $G$ 的一个正规子群，则 $G/H$（$G$ 对 $H$ 的商群）是一个拓扑群.

拓扑群的例. 向量空间 $\mathbf{R}^n$ 是关于自然拓扑的实数加法群 **R** 的 $n$ 个拷贝的直积；圆 $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ 是 **R** 对整数子群 **Z** 的商群；每一个 **Lie 群**（Lie group）；任意抽象群带有离散拓扑；任意**拓扑向量空间**（topological vector space）.

通常一个拓扑群的底空间都被假定为 Hausdorff 空间. 商空间 $G/H$ 是 Hausdorff 的，当且仅当子群

$H$ 在 $G$ 中是闭的（从现在起所有被考虑的子群都假定是闭的）．陪集的商空间 $G/H$ 是正则的．存在具有非正规底空间的拓扑群（见[7]）．

一个拓扑群称为连通的（connected），全不连通的（totally disconnected），紧的（compact），局部紧的（locally compact）等等，如果它的底拓扑空间具有相应的性质．单位元的连通分支 $G^0$ 是 $G$ 的最大连通闭子群．商空间 $G/G^0$ 是全不连通的．一个局部紧的全不连通群有一个开的紧子群．如果 $G$ 是一个紧的全不连通群，则单位元的每一个邻域都包含 $G$ 的一个开正规子群．因此，紧的全不连通群类与**射影有限群**（profinite group）类重合．它们在 Galois 理论中扮演重要的角色，在那里，带有 Krull 拓扑，它们作为无限可分域的 Galois 群而出现．

每一个拓扑群在自然方式下都是一个**一致空间**（uniform space）．特别地，一个拓扑群 $G$ 上一个左一致群结构由集合

$$L(U)=\{(x,\ y)\in G\times G:\ x^{-1}y\in U\}$$

的全体所定义，这里 $U$ 遍历 $G$ 的单位元的一组邻域；右一致结构可通过对称定义．由一致结构所产生的拓扑与群上原有的拓扑一样．在一个拓扑群上一致结构的存在使得可以引入并且应用一致连续（例如，拓扑群上的实值函数），Cauchy 序列，完全性和完全化等概念．一个局部紧的拓扑群在它的一致结构内是完全的．这一事实的直接结果是一个 Hausdorff 拓扑群的任意局部紧子群都是闭的．然而，也存在这样的拓扑群，它们甚至不能嵌入完全群．

在每一个局部紧拓扑群 $G$ 上存在一个非平凡测度 $\mu$，它在左平移之下是不变的（就是说，对于任意 $\mu$ 可测子集 $A\subseteq G$ 和每一个元素 $x\in G$ 来说，子集 $xA$ 是可测的，并且 $\mu(xA)=\mu(A)$）．这样一个测度称为一个 **Haar 测度**（Haar measure）．除去乘以一个常数外它是唯一的．

如果拓扑群 $G$ 是紧的，则 Haar 测度也在右平移之下不变．而且，在这一情形下，可以如此选取常数因子使得 $\mu(G)=1$．这就使得能够考虑积分 $\int f(x)d\mu(x)$ 作为函数 $f(x)$ 在 $G$ 上的平均值．Haar 测度的最重要的应用在于与连续表示论的联系．关于一个 Haar 测度的积分，使得可以将有限群的表示论中有重要意义的部分转移到紧群上来（例如，特征标的正交关系，或者关于矩阵元素的正交关系），还有 **Peter-Weyl 定理**（Peter-Weyl theorem），它首先是对 Lie 群得到的．这个定理的一个直接推论是每一个紧群都容有一个有限维酉表示的完全系（换言之，对于每一个非平凡元素 $x\in G$ 存在一个表示 $\rho$，使得 $\rho(x)\neq E$）．存在没有非平凡有限维表示的局部紧群．

在本质上，关于拓扑群结构的有意义的结果只对于局部紧群才知道．对于局部紧 Abel 群来说，有以下的基本结构定理（fundamental structure theorem）：每一个局部紧 Abel 群 $G$ 可以表示为直积 $G=\mathbf{R}^n\times H$，这里 $H$ 是一个具有一个开紧子群 $K$ 的群．这个结果是关于局部紧 Abel 群对偶理论的一个推论（见 **Понтрягин 对偶性**（Pontryagin duality））．这个定理将 $G$ 的结构的研究归结为关于离散群 $H/K$ 和 $\hat{K}$ 的问题，这里 $\hat{K}$ 是 $K$ 的特征标群，换句话说，归结为抽象群论的问题．

在拓扑群论的发展中起决定性作用的是 Hilbert 第五问题（Hilbert fifth problem）．它是在 1900 年作为关于局部变换群的问题而陈述的，而对于拓扑群论的发展来说是本质的．以下就是一般公认的陈述：是否每一个局部 Euclid 拓扑群都是一个 Lie 群？（一个拓扑群称为局部 Euclid 的（locally Euclidean），如果它有单位元的一个邻域与 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 同胚，即如果它是一个拓扑流形）．Hilbert 第五问题已于 1952 年解决（见[6]）．主要的一步是证明以下的 Lie 型群的判别准则：一个局部紧群 $G$ 是 Lie 群，当且仅当它是一个无小子群的群（group without small subgroups）（就是说，如果存在单位元的一个邻域不包含一个非平凡子群）．还证明了，一个局部紧群 $G$ 如果具有紧商群 $G/G^0$，则是 Lie 群的射影极限（或者等价的提法是，$G$ 中单位元的每一个邻域都包含一个正规子群 $N$，使得 $G/N$ 是一个 Lie 群）．在任意局部紧群内，单位元的每一个邻域都包含一个形如 $K\times L$ 的开集，这里 $K$ 是一个紧子群而 $L$ 是一个连通局部 Lie 群．

具有紧商群 $G/G^0$ 的局部紧群是 Lie 群的射影极限这一事实，使得可以将以前对于 Lie 群已知的许多结果转移到这个群类上（见[8]）．例如，$G$ 的每一个紧子群都被包含在一个极大紧子群内，并且 $G$ 的任意两个极大紧子群都是共轭的．再者，如果 $K$ 是 $G$ 的一个极大紧子群，则存在一组单参数子群 $L_i\cong\mathbf{R}\,(i=1,\cdots,n)$，使得将 $(k,l_1,\cdots,l_n)$，$k\in K$，$l_i\in L_i$，$i=1,\cdots,n$，映成乘积 $kl_1\cdots l_n$ 的映射是群 $K\times L_1\times\cdots\times L_n$ 到 $G$ 上的一个同胚映射．

解决了 Hilbert 第五问题之后，主要问题是更为详细地研究满足这样或那样附加条件的局部紧群的结构．满足某些有限性条件的群类已被研究过；例如，特殊秩的有限性条件，各种各样关于子群的极大极小条件，等等（见[5]）．局部幂零，局部紧群的理论已经产生．这些所得到的结果很大一部分稍后已推广到局部剩余幂零群类上（[9]）．

**参考文献**

[1] Bourbaki, N., Elements of mathematics, General topology, Addison-Wisley, 1966（译自法文）．

[2] Weil, A., l'Intégration dans les groupes topologiques et ses applications, Hermann, 1940.
[3] Понтрягин, Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973 (中译本: Л. С. 邦德列雅金, 连续群 (上, 下册), 科学出版社, 1978)
[4] Hewitt, E. and Ross, K., Abstract harmonic analysis, I, Springer, 1979.
[5] 《Итоги науки. Алгебра》, 1964, М., 1966, 123 – 160.
[6] Глушков, В. М., 《Успехи матем. наук》, 12 (1957), 2, 3 – 41.
[7] Граев, М. И., 《Успехи матем. наук》, 5(1950), 2, 3 – 56.
[8] Платонов, В. П., 《Сибирский матем. ж.》, 7(1966), 4, 854 – 877.
[9] Платонов, В. П., 《Матем. сб.》, 72(1967), 1, 38 – 58.
О. В. Мельников 撰

【补注】 也有双边一致性结构，左结构与右结构的联合，这在操作上多少有些不便，然而却有其优越性，每一个拓扑群都容有一个完全化([A10]).

在 L. E. J. Brouwer 对于维数 ≤2 的局部 Euclid 群，J. von Neumann 和 L. S. Pontryagin 对于交换局部 Euclid 群所作的部分早期解答之后，Hilbert 第五问题被 A. Gleason, D. Montgomery 和 L. Zippin 完全解决([A1], [A2]). 详细的阐述见[6], [A3], [A4]. 关于每一个局部紧子群都有一个开子群是子群的射影极限这一结果属于 Yamabe([A5]). Hilbert 的原始问题是："连续变换群的 Lie 概念如何推广才能使我们的研究在没有函数可微性的假设下也可以进行"("inwieweit der Liesche Begriff der Kontinuierlichen Transformationsgruppe auch ohne Annahme der Differenzierbarkeit der Funktionen unserer Untersuchung zugänglich ist"). 于是就导致提出这样的问题([A6]): 如果 $G$ 是一个局部紧群，它作为一个拓扑变换群有效地作用在一个流形 $M$ 上，试问 $G$ 是不是 Lie 群？这方面的一个正面结果是，当 $M$ 是可微分流形而 $G$ 通过可微分变换作用于其上时($x \mapsto gx$ 是可微分的)([A7]). 另一个正面结果是说，如果 $G$ 是一个挠群，有效地作用在一个流形上，则 $G$ 是有限群([A8]).

**参考文献**

[A1] Gleason, A., Groups without small subgroups, *Ann. of Math.*, **56**(1952), 193 – 212.
[A2] Montgomery, D. and Zippin L., Small groups of finite dimensional groups, *Ann. of Math.*, **56**(1952), 213 – 241
[A3] Kaplansky, J., Lie algebras and locally compact groups, Chicago Univ. Press, 1971.
[A4] Montgomery, D. and Zippin, L., Topological transformation groups, Interscience, 1955.
[A5] Yamabe, H., On the conjecture of Iwasawa and Gleason, *Ann. of Math.*, **58**(1953), 48 – 54.
[A6] Young, C. T., "Hilbert's fifth problem and related problems on transformation groups", in F. E. Browder (ed.): Mathematical Developments Arising from Hilberts Problem, Amer. Math. Soc., 1976, 142 – 146.
[A7] Montgomery, D., Topological groups of differentiable transformations, *Ann. of Math.*, **46** (1945), 382 – 387.
[A8] Newman, M. H. A., A theorem of periodic transformations of spaces, *Quart. J. Math.*, **2** (1931), 1 – 8
[A9] Skljarenko, E. G., "Zum fünften Hilbertschen Probleme" in P. S. Aleksandrov (ed.), Die Hilbertschen Probleme, Geest & Portig, 1979, 126 – 144 (译自俄文).
[A10] Райков, Д. А., 《Акад. наук СССР》, **10** (1946), 513 – 528.
[A11] Comfort, W. W., "Topological groups" in K. Kunen and J. E. Vaughan (eds.), Handbook of Set-Theoretic Topology, North-Holland, 1984, 1433 – 1463.
[A12] Hofmann, K. H. and Morris, S. A., Free compact groups I, *Topology Appl.*, **23**(1986), 43 – 49.
[A13] Hofmann, K. H. and Morris, S. A., Free compact groups II, *Topology Appl.*, **28**(1988), 215 – 231.
郝钢新 译

**拓扑不变量**[**topological invariant**; **топологический инвариант**]

**拓扑空间**(topological space)的一些性质(即在同胚下的不变量).

若集合 $X$ 已经配置了某种结构，由它产生唯一的拓扑，使 $X$ 成为拓扑空间，则集合 $X$ 的拓扑不变量，是由 $X$ 上给定结构诱导出的这个拓扑空间的性质. 例如，对于集合 $X$ 上由给定度量结构或微分几何结构诱导出的拓扑所成拓扑空间，涉及它的相应性质时，就会谈到度量空间的连通性(见**连通空间**(connected space))，或给定微分流形的单连通性.

在拓扑学发展之初，主要注意力放在所谓数值不变量(numerical invariants)上(不包括最简单的拓扑不变量如连通性，紧性等). 这些不变量最初主要是对于多面体得出的. 其中最重要的是**维数**(dimension)和 **Betti 数**(Betti number). 对于闭曲面，较早研究过**曲面的亏格**(genus of a surface). 现在用第一 Betti 数这个词来表示它. 以后将注意力主要放在本身是群的拓扑不变量上，再往后仍然是别的代数结构，例如，Betti 群或秩为 Betti 数的不同维数的**同调群**(homology group); **基本群**(fundamental group)，它在

任意维数上的推广是**同伦群**(homotopy group);还有不仅对于多面体,也对极其广泛的拓扑空间类定义的流形的交环,它很快又被在应用上更一般、更方便的 Alexander-Колмогоров 上同调环所代替.

在多面体情形下,重要的拓扑不变量原则上是用将作为多面体**三角剖分**(triangulation)的单纯复形的性质来定义的.这种定义需要不变性定理(invariance theorem)的一个证明,定理断言,相应的性质不会因给定多面体由一种三角剖分换成同一多面体或同胚多面体的另一种三角剖分而发生变化.

П. С. Александров 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Janich, K., Topology, Springer, 1984(译自德文).

[A2] Alexandroff, P. [P. S. Aleksandrov] and Hopf, H., Topologie, Chelsea, reprint, 1972.

[A3] Juhász, I., Cardinal functions in topology, Math. Centre Amsterdam, 1971.


罗嵩龄 译

**拓扑模** [**topological module**; **топологический модуль**],左拓扑模(left topological module)

一个 Abel **拓扑群**(topological group)$A$,它是拓扑环(topological ring)$R$ 上的**模**(module),其乘法映射 $R\times A\to A$,将 $(r,a)$ 映射为 $ra$,要求是连续的.右拓扑模(right topological module)被类似地定义.拓扑模 $A$ 的每个子模 $B$ 是一个拓扑**模**.如果**模** $A$ 是分离的,并且 $B$ 在 $A$ 中闭,则 $A/B$ 是一个分离模.拓扑模的直积是拓扑模.模 $A$ 作为 Abel 拓扑群的完全化 $\hat{A}$ 可以在环 $R$ 的完全化 $\hat{R}$ 上被自然地赋予拓扑模的结构.

设 $G$ 是一个拓扑群,**拓扑 $G$ 模**(topological $G$-module)是一个 Abel 拓扑群 $A$,并且是一个 $G$ 模,乘法映射 $G\times A\to A$ 要求是连续的.

**参考文献**


[1] Bourbaki, N., Elements of mathematics. General topology, Addison-Wesley, 1966(译自法文).

[2] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Commutative algebra, Addison-Wesley, 1972(译自法文).


Л. В. Кузьмин 撰　蔡传仁 译

**拓扑积** [**topological product**; **топологическое произведение**],Тихонов 积(Tikhonov product),拓扑空间族$\{(X_\alpha,\mathscr{T}_\alpha):\alpha\in A\}$的

拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$,其中 $X$ 是集合 $X_\alpha(\alpha\in A)$ 的 **Descartes 积**(Cartesian product)(即完全直积),$\mathscr{T}$ 是 $X$ 上使所有自然射影映射 $\pi_\alpha:(X,\mathscr{T})\to(X_\alpha,\mathscr{T}_\alpha)$ 连续的最弱(即最小)拓扑(见**拓扑结构(拓扑)**(topological structure (topology))).此外,拓扑 $\mathscr{T}$ 称为积拓扑(product topology),而 Тихонов 积 $(X,\mathscr{T})$ 也称为空间族$\{(X_\alpha,\mathscr{T}_\alpha):\alpha\in A\}$的拓扑积.

拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 的标准基是形如 $\pi_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1})\cap\cdots\cap\pi_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n})$ 的所有集合构成的族,其中 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是指标集 $A$ 的任意有限多个元素,$U_{\alpha_i}$ 是拓扑 $\mathscr{T}_{\alpha_i}$ 的任意一个元素,$i=1,\cdots,n$.

特别地,若两个空间 $X,Y$ 组成的族$\{(X_\alpha,\mathscr{T}_\alpha):\alpha\in A\}$,那么积 $Z=X\times Y$ 的拓扑基由形如 $U\times V$ 的集合组成,其中 $U$ 是 $X$ 中任意一个开集,$V$ 是 $Y$ 中任意一个开集.任意有限个有序的拓扑空间之积的拓扑基可以类似表示.拓扑积的例子有:两条直线的积是平面;$n$ 条直线的积是 $n$ 维空间 $\mathbf{R}^n$;两个圆的积是环面.

最早是就可度量化因子空间的情形定义无穷多个拓扑空间的拓扑积.与之相应地,试图用通常(可数)序列的收敛性来描述积拓扑.当因子空间族不可数时,已经证明了用此方法不可能得出上述结果,因为在不可数个非单点度量空间的拓扑积中,闭包运算既不能用序列收敛的语言描述,也不能简化为可数集的闭包.

无穷个拓扑空间的拓扑积的定义由 А. Н. Тихонов(1930)给出.他还证明了紧 Hausdorff 空间的拓扑积仍为紧 Hausdorff 空间(Тихонов 定理(Tikhonov theorem)).

拓扑积的构造法,是从已经存在的对象组成新拓扑对象的一种主要手段.利用拓扑积可以构造出一般拓扑学的若干基本的标准对象,特别是定义作一族 $\tau$(基数)个实直线上区间的拓扑积的 **Тихонов 立方体**(Tikhonov cube)$I^\tau$.由 Тихонов 定理,所有 Тихонов 立方体都是紧的.Тихонов 证明了任何完全正则 $T_1$ 空间都同胚于立方体 $I^\tau$ 的一个子空间.

除立方体 $I^\tau$ 之外,空间 $D^\tau$ 与 $F^\tau$ 在拓扑学中有重要作用,它们分别是 $\tau$ 个空间 $D$(相应地,$F$)之积,$D$ 由两个孤立点(简单二角形)构成,$F$ 由具有一个孤立点的二角形(连通二角形)构成.任何紧度量空间都是 Cantor 完满集(即与可数个简单二角形 $D$ 的积同胚的空间)的连续象;任何零维空间(即以开闭集为基的任何 $T_0$ 空间)同胚于 Cantor 不连续统 $D^\tau$ 的一个子集;任何 $T_0$ 空间同胚于空间 $F^\tau$ 的一个子集.

关于拓扑积运算的效力及作用与拓扑性质在拓扑积运算下的性态有关的问题,是一般拓扑学的中心内容.Hausdorff 空间类,正则空间类及完全正则空间类,在拓扑积运算下是稳定的.但是,正规空间与区间之积未必是正规空间.甚至在有限个因子的情形,一些重要的拓扑性质,如 Lindelöf 性,仿紧性,在拓扑积运算下也是不稳定的.

下述定理在一般拓扑学及其应用（特别是集合论的模型构造）中有重要作用：任意多个可分拓扑空间拓扑积的 Suslin 数是可数的．特别地，任意多个 Тихонов 立方体的 Suslin 数是可数的．

从整个拓扑积中分出某些子空间时，取拓扑积运算导致 Σ 积和 σ 积这两种很有用处的运算．取拓扑 ⁄ $_{\alpha}$ 的框积的运算，导致了集合 $X_{\alpha}$ 的 Discartes 积上的完全不同的拓扑．

**参考文献**


[1] Архангельский, А. В., Пономарев, В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974 (英译本: Arkhangel'skii, A. V. and Ponomarev, V. I., Fundamentals of general topology: problems and exercises, Reidel. 1984).

[2] Bourbaki, N., Elements of mathematics, General topology, Addison-Wesley, 1966 (译自法文).

[3] Александров, П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977.


А. В. Архангельский, В. В. Федорчук 撰

【补注】 框积的基由形如 $\prod_{\alpha\in A} U_{\alpha}$ 的集合组成，对任何 $\alpha$、$U_{\alpha}$ 在 $X_{\alpha}$ 中开．通常积拓扑，要求对除去有限个之外的所有 $\alpha$，$U_{\alpha}=X_{\alpha}$．框积比通常积更难操作．

关于拓扑积与 Σ 积（相应地，框积）的主要问题及最近的结论，在[A1]的第 18 章（相应地，第 4 章）有综述．至于框积亦见[A2]．

在西方，连通二角形 $F$ 常称为 Sierpiński 空间（Sierpiński space），常用 **2** 记之；这种想法来源于它是具有由序自然导出的 $T_0$ 拓扑的有序集 $\{0,1\}$，下集是闭集．

**参考文献**


[A1] Kunen, K. and Vaughan, J. E. (eds.), Handbook of set-theoretic topology, North-Holland, 1984.

[A2] Douwen, E. K. van, Covering and separation properties of box products, in G. M. Reed (ed.), Surveys in General Topology, Acad. Press, 1980, 55 – 129.

[A3] Engelking, R., General topology, Heldermann, 1989 (译自波兰文).


罗嵩龄 译

**拓扑环 [topological ring; топологическое кольцо]**

一个环 $R$（ring），它是一个**拓扑空间**（topological space），使得映射

$$(x,y)\to x-y,\ (x,y)\to xy$$

都是连续的．拓扑环 $R$ 称为分离的（separated），如果它作为拓扑空间是分离的（见**分离公理**（seperation axiom））．这时 $R$ 是 **Hausdorff 空间**（Hausdorff space）．拓扑环 $R$ 的任何子环 $M$，以及 $R$ 对一理想 $J$ 的商环 $R/J$ 都是拓扑环．如果 $R$ 是分离的，理想 $J$ 是闭的，则 $R/J$ 是分离拓扑环．子环 $M$ 在 $R$ 中的闭包 $\bar{M}$ 也是拓扑环，拓扑环的直积以自然方式成为拓扑环．

拓扑环的同态（homomorphism）是一个环同态，同时也是一连续映射．设 $f: R_1\to R_2$ 是一这样的同态，并设 $f$ 为满的开映射，则 $R_2$ 作为拓扑环同构于 $R_1/\mathrm{Ker}f$．Banach 代数是拓扑环的一个例子．以某些理想集合作为零的基本邻域系可以定义一类重要的拓扑环．例如，对交换环 $R$ 的任一理想 $\mathfrak{m}$，可以赋予 $\mathfrak{m}$ 进拓扑（$\mathfrak{m}$-adic topology），其中集合 $\mathfrak{m}^n$，$n$ 是全体自然数，构成了零的一组基本邻域组．这个拓扑是分离的，如果条件

$$\bigcap_n \mathfrak{m}^n=0$$

成立．

对一拓扑环 $R$，我们可定义它的完全化 $\hat{R}$，它是一完全拓扑环．可分拓扑环 $R$ 可嵌入 $\hat{R}$ 成为其中一个处处稠密的子集，$\hat{R}$ 的加法群与 $R$ 中加法群的完全化相等，是一个 Abel 拓扑群．

**参考文献**


[1] Bourbaki, N., Element of mathematics, General topology, Addison-Wesley, 1966 (译自法文).

[2] Bourbaki, N., Element of methematics, Commutative algebra, Addison-Wesley, 1972 (译自法文).

[3] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд. М. 1973 (英译本: Pontryagin, L. S., Topological groups, Princeton Univ. Press, 1958).

[4] Waerden, B. L. van der, Algebra, 1 – 2, Springer, 1967 – 1971 (译自德文).


Л. В. Кузьмин 撰 冯绪宁 译

**拓扑半群 [topological semi-group; топологическая полугруппа]**

一个集合配备了一个半群代数结构和一个拓扑 **Hausdorff 空间**（Hausdorff space）结构，使得半群运算在所给的拓扑内是连续的．任何**半群**（semi-group）在**离散拓扑**（discrete topology）内都是拓扑半群．存在只能容许离散拓扑的半群．任意 Hausdorff 空间都可以做成一个拓扑半群，例如，给它一个左奇异乘法或零乘法．

出现了拓扑半群的各种独立的分支：紧拓扑半群的一般理论（见**紧性**（compactness））；拓扑半群的同伦性质；具体的拓扑空间上半群的研究；拓扑半群上的调和分析；以及拓扑空间的连续变换的半群．此外，拓扑半群的研究已开始联系着对一切闭子半群的考虑．

拓扑半群中自然的一类就是局部紧半群的类，其中包括紧的和离散的半群．然而，许多对于紧和离散半群成立的性质对于任意局部紧半群不再成立．因此

常常添上一些代数或拓扑性质的附加限制．这种类型的一个重要条件就是弱一致性：一个局部紧半群 $S$ 称为弱一致的（weakly uniform），如果对于任意 $a, b \in S$（元素之中的一个可以是空符号）和任意子集 $Y$，$W \subseteq S$，这里 $W$ 是一个具有紧闭包 $\overline{W}$ 的开子集且 $\overline{aYb} \subseteq W$ 或 $\overline{aYb} \subseteq S \setminus \overline{W}$，存在 $a$ 和 $b$ 的邻域 $V(a)$ 和 $V(b)$，使得 $V(a)YV(b) \subseteq W$，或相应地，$V(a)YV(b) \subseteq S \setminus \overline{W}$．弱一致半群类包括所有紧半群，离散半群和局部紧群．如果一个局部紧半群 $S$ 是一个群，则取逆的映射是连续的，即 $S$ 是一个**拓扑群**（topological group）．在一个局部紧逆半群内，这个映射（见**正则元**（regular element））是连续的，当且仅当 $S$ 是弱一致的．在弱一致半群内极大子群是闭的．这个性质在任意局部紧半群内不一定成立．

任意局部紧半群 $S$ 包含一个闭核 $M(S)$（见**半群的核**（kernel of a semi-group）），它是一个完全单半群．特别地，$S$ 有幂等元素．紧的，完全单（完全 0 单）半群的结构已由一个与关于离散完全单（完全 0 单）半群的 Rees 定理相类似的定理作了描述（见 **Rees 矩阵型半群**（Rees semi-group of matrix type））．与 Rees 定理相类似的定理对于弱一致半群成立，然而一般来说，对于局部紧半群不成立（[10]）．

半群 $S$ 称为一个脉络（thread），如果 $S$ 可以如此地线性序化，使得 $S$ 在这个序（区间）拓扑之下成为一个连通拓扑半群．一个具有零元 0 和单位元 $e$ 的半群 $S$ 称为一个标准脉络（standard thread）或 $I$ 半群（$I$-semi-group），如果 $S$ 是一个脉络并且 0 和 $e$ 是 $S$ 的最小和最大元素．对于标准脉络已有完全描述（[2]）．有单位元 $e$ 的紧半群 $S$ 称为不可约的（irreducible），如果它是连通的，并且不含一个真连通闭子半群 $T$，使得 $e \in T$，且 $T \cap M(S) \neq \varnothing$．有单位元的连通紧半群包含不可约半群作为闭子半群．不可约半群可以如下地描述：一个不可约半群 $S$ 是交换的，Green 等价关系 $\mathscr{H}$（见 **Green 等价关系**（Green equivalence relations））是 $S$ 上一个闭合同关系，且 $S/\mathscr{H}$ 是一个标准脉络．

一个拓扑半群的"极小块"是它的单演子半群的闭包，称为单生半群（monothetic semi-groups）．对于一个紧单生半群 $S$ 来说，核 $M(S)$ 是一个紧单生群．紧单生半群已被完全描述（[9]）．弱一致单生半群，或者是紧的，或者是离散的．有一个局部紧单生半群的例子（[13]），它既不是离散的，也不是紧的．

有单位元的交换拓扑半群的特征标（character）是到模 $\leqslant 1$ 的复数乘法半群内的一个非零连续同态．一切特征标的集合 $S^*$ 对于逐点相乘的乘法（见**半群的特征标**（character of a semi-group）和**紧开拓扑**（compact-open topology）来说，作成一个有单位元的交换拓扑半群．可以认为，(Понтрягин) 对偶定理（duality theorem）对于一个有单位元的交换拓扑半群 $S$ 成立，如果 $S$ 到 $S^{**}$ 的特征标半群的典范同态是拓扑同构"映上"的．对偶定理对于一个有单位元的交换紧半群 $S$ 成立，当且仅当 $S$ 是一个逆半群并且它的幂等元所成的子半群形成一个**全不连通空间**（totally-disconnected space）．对偶定理在一个交换局部紧半群上成立的，必要且充分条件已经被找到[12]．必要条件之一是这个半群是弱一致的．

交换紧半群的一个重要的子类就是紧半格（见**幂等元半群**（idempotents, semi-group of））．一个紧半格在同胚的范围内容有一个唯一的拓扑．对拓扑半群的某些类型的描述导致度量半群．在一个拓扑半群 $S$ 上一个度量 $d$ 称为不变的（invariant），如果对一切 $a, x, y \in S$ 来说，都有 $d(ax, ay) \leqslant d(x, y)$ 和 $d(xa, ya) \leqslant d(x, y)$．一个拓扑半群 $S$ 称为度量的（metric），如果在 $S$ 上有一个不变度量，它诱导出 $S$ 上的拓扑．每一个紧半群都是紧度量半群的一个射影极限．每一个完全不连通紧半群都是有限半群的一个射影极限．

拓扑半群的某些一般化已被考虑：具有一个非 Hausdorff 空间的半群和半拓扑半群（semi-topological semi-group），这就是一个拓扑空间在其上定义了一个结合的二元运算，使得一切左和右内平移都是连续映射．

**参考文献**


[1] Paalman-de Miranda, A. B., Topological semigroups, Math. Centre, Amsterdam, 1964.

[2] Hofmann, K. and Mostert, P., Elements of compact semi-groups, Merrill, 1966.

[3] Berglund, J. and Hofmann, K., Compact semitopological semigroups and weakly almost periodic functions, Springer, 1967.

[4] Hofmann, K., Mislove, M. and Stralka, A., The Pontryagin duality of compact 0-dimensional semilattices and its application, Springer, 1974.

[5] Hofmann, K. and Stralka, A., The algebraic theory of compact Lawson semilatticas, Applications of Galois connections to compact semilattices, *Diss. Math.*, **137** (1976).

[6] Hofmann, K., Topological semigroups; history, theory, applications, Jahrsber. Deutsch. Math.-Verein., **78** (1976), 9－59.

[7] Wallace, A. D., The structure of topological semigroups, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **61** (1955), 95－112.

[8] Williamson, J. H., Harmonic analysis on semigroups, *J. London Math. Soc.*, **42** (1967), 1－41.

[9] Hewitt, E., Compact monothetic semigroups, *Duke Math. J.*, **23** (1956), 447－457.

[10] Shneperman, L. B., The Rees theorem for weakly

uniform semigroups, *Semigroup Forum*, 23 (1981), 261 – 273.

[11] Day, D., Expository lectures on topological semigroups, in M. A. Arbib (ed). Algebraic theory of machines, Languages and Semigroups, Acad. Press, 1968. 269 – 296.

[12] Шнеперман, Л. Б., «Матем. сб.», 77 (1968), 4, 508 – 532.

[13] Зеленюк, Е. Г., «Матем. заметки», 44 (1988), 3, 402 – 403.

Б. П. Танана, Л. Н. Шеврин 撰

【补注】 自 1970 年以来，拓扑半群的研究沿着几个主要方向：紧半拓扑半群和右（相应地，左）拓扑半群，紧半格和**连续格**（continuous lattice）以及半群的 Lie 理论．

一个右拓扑半群（right-topological semi-group）是一个半群，在其中所有右平移 $x\mapsto xs$ 都是连续的．（有的作者使用相反的记法．）紧半拓扑半群和紧右拓扑半群，如同拓扑半群一样，包含幂等元且具有完全单核（极小双边理想），然而，与紧拓扑半群相反，它们不一定是闭的．在一个紧拓扑半群内核的存在已经应用到拓扑群和拓扑半群上概率论中（见[A9]，[A10]）．紧半拓扑半群是作为在强算子拓扑内线性算子半群而出现的，并且在一个拓扑群或拓扑半群上弱殆周期函数的理论中起决定性作用（见[3]，[A1]，[2]和**群上殆周期函数**（almost periodic function on a group）），它们是作为 Lie 群的紧化而产生的（见[A9]，[A11]和 **Lie 群**（Lie group））．调和分析和表示论也要求半拓扑半群（见[A3]，[A4]）．右拓扑半群出现在**拓扑动力学**（topological dynamics）中（见[A5]，[A9]，[A11]），并且因为自然数加法半群的 Stone-Čech 紧化 $\beta\mathbf{N}$ 是一个右拓扑半群而出现在数论中（见 **Ramsey 定理**（Ramsey theorem））．在 $\beta\mathbf{N}$ 中幂等元的存在性已应用于算术级数的 **van der Waerden 定理**（van der Waerden theorem）的一个新证明中（见[A9]）．

在[5]中看到，一个紧半格在其中每一个元素有一个子半格的邻域基的概念与**连续格**（continuous lattice）的概念一致．因此，紧半格的理论与连续格及其一般化的理论是有联系的．

半群的 Lie 理论（Lie theory of semi-group）处理 Lie 群的子半群和可以嵌入一个 Lie 群的拓扑半群的问题，至少局部地关于它们的单位元处是如此．令 $G$ 是一个具有 Lie 代数 $\mathfrak{g}=L(G)$ 的 Lie 群，$S$ 是 $G$ 的一个子半群，则对一切 $X\in\mathfrak{g}$，$\exp tX\in\overline{S}(t\geqslant 0)$ 的集合 $L(S)$ 是一个凸锥 $W$，满足条件 $e^{\mathrm{ad}\,X}W=W$ 对一切 $X\in W\cap -W$，这里 $\mathrm{ad}\,X(Y)=[X,Y]$．这样的锥称为 Lie 楔（Lie wedge）．如果 $W$ 生成 $\mathfrak{g}$ 作为 Lie 代数，则由 $\exp W$ 在 $\overline{S}$ 内代数地生成的这个半群包含关于 $G$ 的内点．如果 $S$ 在一切内自同构之下不变，则对于一切 $X\in\mathfrak{g}$ 来说，$e^{\mathrm{ad}\,X}W=W$．这样的锥称为不变的（invariant）．在一个 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 中，不变点锥 $W$ 连同内点存在，仅当 $\mathfrak{g}$ 包含一个紧嵌入的 **Cartan 子代数**（Cartan subalgebra）$\mathfrak{h}$ 时；在这一情形下，借助于交 $W\cap\mathfrak{h}$，可以对它们进行分类（见[A9]）．S. Lie 的基本定理在半群的 Lie 理论中有类比（见[A9]，[A11]）．半群的 Lie 理论被应用于这样的领域，如广义相对论中的时序几何（见[A7]，流形上和 Lie 群上非线性控制论（见[A9]）和表示论（见[A9]）．

**参考文献**

[A1] Berglund, J. F., Junghenn, H. D. and Milnes, P., Compact right topological semigroups and generalizations of almost periodicity, Lecture notes in math, 663, Springer, 1978.

[A2] Berglund, J. F., Junghenn, H. D. and Milnes, P., Analysis on semigroups, Wiley, 1989.

[A3] Dunkl, C. D. and Ramirez, D., Representations of commutative semitopological semigroups, Lecture notes in math., 435, Springer, 1975.

[A4] Dzinotyiweyi, H. A. M., The analogue of the group algebra for topological semigroups, Pitman, 1984.

[A5] Ellis, R., Lectures in topological dynamics, Benjamin, 1969.

[A6] Gierz, G., Hofmann, K. H., Keimel, K., Lawson, J. D., Mislove, M. and Scott, D. S., A compendium of continuous lattices, Springer, 1980.

[A7] Hilgert, J. and Hofmann, K. H., The causal structure of homogeneous manifords, *Math. Scand.*, 67 (1990), 119 – 144.

[A8] Hilgert, J., Hofmann, K. H. and Lawson, J. D., Lie groups, convex cones, and topological theory of semigroups, Oxford Univ. Press, 1989.

[A9] Hofmann, K. H., Lawson, J. D. and Pym, J. S. (eds.), The analytical and topological theory of semigroups, de Gruyter, 1990.

[A10] Mukherjea, A. and Tserpes, N., Measures on topological semigroups, Lecture notes in Math., 547, Springer, 1976.

[A11] Ruppert, W. A. F., Compact semitopological semigroups: an intrinsic theory, Lecture notes in Math., 1079, Springer, 1984.

郝钢新 译

## 拓扑空间[topological space; топологическое пространство]

具有两个要素的总体：由称为给定空间的点（point）的某一类元素构成的集合 $X$，以及 $X$ 上的**拓扑结构（拓扑）**（topological structure (topology)）；开拓

扑还是闭拓扑这一点并不重要（把由给定拓扑构成的集合换成它的补集，其中一种拓扑就变成另一种）．除非另有说明，假设拓扑 $\mathfrak{G}$ 是开的．逻辑上，定义给定集合 $X$ 上的拓扑的最简单的方法是直接说 $X$ 的诸子集构成拓扑．不过，常用的比较简单的方法并不是指由所有集合构成给定的拓扑，而是指的其中一部分集合（即指定给定拓扑的基（base））．运用基，该拓扑的其余所有元素都可以作为属于基的集合的并集（开拓扑情形）或交集（闭拓扑情形）而得到．例如，实直线的通常拓扑，以所有开区间（其实，只要具有有理端点的开区间就足够了）的集合作为其开拓扑的基．其余的开集是这些区间的并集．

提到开拓扑或闭拓扑的基时，都是指的给定拓扑空间的开基或闭基．开基比闭基更常用，因此，如果简单地说拓扑空间的基，就是指开基．最小的（非平凡情形，无限的）基数是给定拓扑空间的基的势，称为它的权（见**拓扑空间的权**（weight of a topological space））．除了所有点的集合的势之外，权是最重要的空间的基数不变量（cardinal invariant of the space）（见**基数特征**（cardinal characteristic））．具有可数基的空间特别重要，例如实直线．选用所谓有理（开）球（即球心坐标和半径都是有理数的球），就得到了 $n$ 维 Euclid 空间的可数基．拓扑通常是用在集合上配备某个另外的结构这种（自然的）标准方式定义的．比如说度量空间的自然拓扑或全序集的自然（区间）拓扑．前者以给定度量空间的所有开球的集合为基，后者以给定全序集的所有开区间为基．

拓扑空间称为可度量化的（metrizable）（见**可度量化空间**（metrizable space）），如果在它的诱导给定拓扑的底集上存在一个度量．可度量化空间成为一类最重要的拓扑空间，数十年来，一般拓扑学的核心问题中，就有一般的和特殊的度量化问题，即寻找拓扑空间（或某个特殊类型的拓扑空间）可度量化的必要充分条件．这些条件是一般或特殊的度量化定理的内容．

给定拓扑空间 $(X, \mathfrak{G})$ 的所有点的集合 $X$ 的子集 $X_0$ 可以自然地构成拓扑空间（$(X, \mathfrak{G})$ 的子空间），其拓扑由所有形为 $X_0 \cap \Gamma$ 的集合组成，其中 $\Gamma$ 是 $\mathfrak{G}$ 的任一元素．因为拓扑是 $X$ 的子集的集合，所以在给定集合 $X$ 上的不同拓扑之间存在一自然的由包含关系确定的（偏）序，这就是说，如果 $\mathfrak{G}_1$ 是集合 $\mathfrak{G}_2$ 的子集，即如果拓扑 $\mathfrak{G}_1$ 中的每个开集在拓扑 $\mathfrak{G}_2$ 中都是开的，则拓扑 $\mathfrak{G}_2$ 大于（或等于）拓扑 $\mathfrak{G}_1$．如果从内容看，在给定集合 $X$ 上所用的拓扑是清楚的，则简单地用 $X$ 表示拓扑空间 $(X, \mathfrak{G})$．从拓扑的概念可以推导出其余所有的基本拓扑概念．首先，闭集定义为开集的补集．还有，包含给定空间 $X$ 中一点 $x$ 的任一开集称为 $x$ 的邻域（neighbourhood）．根据邻域的概念可以把集合 $M \subset X$ 的闭包点（closure point）或邻近点（proximate point）定义为这样的点，其每个邻域与 $M$ 有非空交集．此定义又蕴含：集合 $M$ 的每一点本身就是 $M$ 的邻近点．$M$ 的所有邻近点的集合称为 $M$ 的闭包（closure），记为 $[M]$（见**集合的闭包**（closure of a set））．任一集合 $M$ 到其闭包的过渡称为给定拓扑空间上的闭包运算（closure operation）．此运算的性质是：1）$M \subset [M]$，且 $M = [M]$ 的充分必要条件是 $M$ 为闭集，或者 $M$ 的补集为开集；2）$[M_1 \cup M_2] = [M_1] \cup [M_2]$；3）$[[M]] = [M]$．任一集合 $M$ 的闭包是包含 $M$ 的所有闭集的交集；换言之，$[M]$ 是包含 $M$ 的最小闭集．

闭包运算及其基本性质 1），2），3）已由在给定集合 $X$ 上拓扑的基本概念推出．换一种提法，可以把闭包的这些性质视为基本的拓扑概念．即假定：在给定的抽象集合 $X$ 中，对于每个子集 $M$，指定一个称为 $M$ 的闭包的子集 $[M]$，使其满足性质 1），2），3）（称为闭包公理（axioms of closure）或 Kuratowski 公理（Kuratowski axioms））和 4）$\varnothing = [\varnothing]$．按照这种方式，闭集定义为与其闭包重合的集合，开集定义为闭集的补集．于是，我们准确地得到了最初意义下的拓扑；而且，由此导致的闭包运算与原先给出的运算一致．这个方法是 K．Kuratowski（1922）为了建立拓扑空间的概念而选用的．1925 年 П．С．Александров 引进了开拓扑结构．两种方法都导致相同的拓扑空间类，其使用非常广泛．

与拓扑空间的概念紧密联系的是一个空间映入另一个空间的**连续映射**（continuous mapping）的概念．把拓扑空间 $X$ 映入拓扑空间 $Y$ 的映射 $f: X \to Y$ 是在点 $x \in X$ 连续的（continuous at a point $x \in X$），如果对于点 $y = f(x) \in Y$ 的任一邻域 $O_y$，在 $X$ 中存在 $x$ 的邻域 $O_x$，使得 $f(O_x) \subset O_y$（Cauchy 条件（Cauchy condition））．不改变定义的内容，可以使邻域 $O_y$ 和 $O_x$ 分别属于空间 $Y$ 和 $X$ 的任意的开基．特别地，对于度量空间，连续性的定义可以换为通常的、在数学分析教程中熟知的定义．如果 $f: X \to Y$ 在每一点 $x \in X$ 连续，则称 $f$ 为把 $X$ 映入 $Y$ 的**连续映射**（continuous mapping）．下面的每个条件对于 $f: X \to Y$ 的连续性都是必要充分的．a）若 $x$ 是集合 $M \subset X$ 的邻近点，则 $f(x)$ 是 $Y$ 中集合 $f(M)$ 的邻近点．b）$Y$ 中任一开集 $\Gamma$ 的完全原象 $f^{-1}(\Gamma)$ 在 $X$ 中是开的．对于闭集有类似结论．

给定一个把拓扑空间 $X$ 映入拓扑空间 $Y$ 的（连续）映射 $f$ 和 $X$ 的一个子空间 $X_0$，则 $f$ 把 $X_0$ 映入 $Y$，并且是连续的（称为 $f: X \to Y$ 在于空间 $X_0$ 的限制（restriction））．

一个重要类型的连续映射是所谓**商映射**(quotient mapping),由下列条件刻画．集合 $B \subset Y$ 在 $Y$ 中是开(闭)的，当且仅当 $f^{-1}(B)$ 在 $X$ 中具有相同性质．如果 $X$ 到 $Y$ 的连续映射 $f$ 是一一映射，则定义逆映射 $f^{-1}: Y \to X$，但 $f^{-1}$ 不必是连续的．如果 $f^{-1}$ 是连续的，则 $f$ 和 $f^{-1}$ 都是 $X$ 和 $Y$ 的拓扑之间的一一映射．两个一一映射 $f$ 和 $f^{-1}$ 都称为拓扑映射(topological mapping)或**同胚**(homeomorphism)．可以同胚地互相映射的两个空间 $X$ 和 $Y$ 称为同胚的(homeomorphic)或拓扑等价的(topologically equivalent)．

连续映射 $f: X \to Y$ 称为不可约的(irreducible)，如果除 $X$ 外，没有被映射到整个 $Y$ 上的闭集 $M$．

拓扑空间的具体研究，首先是从一般的拓扑空间类中分离出若干子类，这些子类是用定义空间拓扑结构的某些附加条件或公理来刻画的．这些附加的公理可以是多种类型的．首先，有一组公理称为分离公理(separation axioms)．第一个**分离公理**(separation axiom)是 **Hausdorff 公理**(Hausdorff axiom)，它要求空间的任意两个不同的点都能用邻域分离，即这两点分别含于两个不相交的开集(两个或更多的集合是不相交的，如果它们没有两个集合具有公共点)．Hausdorff 分离性公理也称为 $T_2$ 公理($T_2$-axiom)，满足它的拓扑空间称为 **Hausdorff 空间**(Hausdorff space)或 $T_2$ 空间($T_2$-space)．这些空间是 F．Hausdorff 在 1914 年定义的，他首次发现了一类拓扑空间的充分广泛同时又充分丰富的诸多性质，这些性质满足了当时数学上的迫切需要．一般拓扑学后来的发展正是源于 Hausdorff 空间．$T_2$ 公理的削弱是 $T_1$ 公理($T_1$-axiom)：拓扑空间两点中每一点都有一个不包含另一点的邻域．此要求等价于要求"任一有限子集都是闭集"．满足此要求的空间称为 $T_1$ 空间($T_1$-space)．更宽的拓扑空间类是 $T_0$ 空间($T_0$-space)类，即满足 $T_0$ 公理($T_0$-axiom)(Колмогоров 公理(Kolmogorov axiom))的空间类：给定两个不同的点，则至少有一点具有不包含另一点的邻域．$T_0$ 空间可以由有限个点甚至两点组成．如果一个点是闭且非开的集合，反过来，另一点就是开且非闭的集合(连通二角形(connected digon))．

$T_3$ 公理($T_3$-axiom)要求空间的任意点和不含此点的任意闭集可以被邻域分离，即分别含于两个不相交的开集．满足 $T_3$ 公理的空间称为 $T_3$ 空间($T_3$-space)．$T_3$ 空间不必满足 $T_1$ 公理．(例如：连通二角形)．满足 $T_1$ 公理的 $T_3$ 空间称为正则的(regular)(见正则空间(regular space))；它们是 Hausdorff 空间．拓扑空间称为 $T_4$ 空间($T_4$-space)，如果它的任意二个不相交的闭集都有不相交的邻域．$T_4$ 空间同时又是 $T_1$ 空间，则称为正规的(normal)(见**正规空间**(normal space))；它们是正则 Hausdorff 空间．满足 $T_i (i = 0, 1, 2, 3)$ 公理之一的空间的任意子空间也满足该 $T_i$ 公理，即 $T_i$ 公理被给定空间的所有子空间继承．$T_4$ 公理不具备这个性质：存在正规空间 $X$，它的子空间(甚至开子空间)不全是正规的．但是，如果 $X_0$ 是正规空间 $X$ 的闭集，则子空间 $X_0$ 是正规的．

到目前为止，点和集合的分离性是按照存在不相交邻域的意义来理解的．然而，在现代拓扑学中所谓函数分离性也很重要，那是 П．С．Урысон 在 1924 年最早引入的．拓扑空间中两个集合 $A$ 和 $B$ 称为函数可分离的(functionally separable)，如果存在在整个空间 $X$ 上连续、有界的实值函数 $f$，它在 $A$ 的所有点取值 0 而在 $B$ 的所有点取值 1．在正规空间中，任意两个不相交的闭集是可函数分离的(Урысон 引理(Urysohn lemma))．反之，任意两个集合的函数分离性蕴含它们的邻域分离性．特别地，点和集合的函数分离性蕴含它们在给定空间的邻域分离性．然而，如果空间是正则的，则每个点和不含此点的每个闭集有不相交的邻域，但由此不会推出每个点和集合是可函数分离的．于是，下述完全正则性(complete regularity)是比正则性更强的性质．一个空间称为完全正则的，如果任一点和任一不含该点的闭集是可函数分离的(见**完全正则空间**(completely-regular space))．满足此条件的(完全正则)空间中，最重要的是完全正则 $T_1$ 空间，也称为 **Тихонов 空间**(Tikhonov space)．特别地，任意 $T_0$ 拓扑群的底空间是完全正则的但不一定是正规的空间．

除分离公理外，所谓紧性型条件(conditions of compactness type)对拓扑空间理论很重要．它们基于对(开)覆盖的研究．拓扑空间 $X$ 的(开)集族 $\Sigma$ 称为 $X$ 的一个覆盖(covering)(见**覆盖(集合的)**(covering (of a set)))，如果每一点 $x \in X$ 都至少含于一个作为 $\Sigma$ 之元素的集合．如果覆盖 $\alpha'$ 的每个元素都是覆盖 $\alpha$ 的至少一个元素的子集，则称 $\alpha'$ 为 $\alpha$ 的加细，或者说 $\alpha'$ 比 $\alpha$ 细，或者说在给定空间的覆盖偏序集中 $\alpha'$ 在 $\alpha$ 之后．$\alpha'$ 加细 $\alpha$ 的特别情形是 $\alpha'$ 含于 $\alpha$(即 $\alpha'$ 每个元素也是 $\alpha$ 的元素)．某些紧性型条件假设已经给定了空间 $X$ 的两类(开)覆盖：类 $\mathfrak{A}$ 和类 $\mathfrak{B}$，使得 $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$，即 $\mathfrak{B}$ 的每个覆盖也属于 $\mathfrak{A}$．($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$)紧性条件(condition of ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$)-compactness)要求：对于 $\mathfrak{A}$ 中的每个覆盖，在 $\mathfrak{B}$ 中有加细它的覆盖．如果 $\mathfrak{A}$ 是一空间的所有开覆盖组成的类，而 $\mathfrak{B}$ 是有限覆盖(即由有限个元素组成的覆盖)的子类，即覆盖由有限个元素组成，则得到所有这种类型的条件中最重要的一个，称为紧性条件

(compactness condition): 它等价于所谓 Borel-Lebesgue 条件 (Borel-Lebesgue condition): 对空间 $X$ 的每个开覆盖 $\alpha$, 存在一个含于 $\alpha$ 的 $X$ 的有限覆盖 $\alpha'$. 满足紧性条件的 Hausdorff 空间称为 Hausdorff 紧统 (Hausdorff compacta). 它们都是正规的. 可度量化的 Hausdorff 紧统 (具有可数基的 Hausdorff 紧统) 称为紧统 (compacta). 现在流行另一个术语, 称 Hausdorff 紧统为紧 Hausdorff 拓扑空间, 对可度量化的情形不予区别 (亦见**紧空间** (compact space)).

如果取可数开覆盖类为 $\mathfrak{A}$, 仍然取有限覆盖的子类为 $\mathfrak{B}$, 则相应的 $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ 紧性称为列紧性 (countable compactness) (见**列紧集** (compact set, countably)). 对于可度量化空间, 还有具有可数基的 Hausdorff 空间, 紧和列紧这两个条件等价. 如果取所有开覆盖组成的类为 $\mathfrak{A}$, 取可数覆盖类为 $\mathfrak{B}$, 则得到终紧性条件 (condition of final compactness). 说明此条件时 (如同紧性情形) 可以要求覆盖 $\alpha' \in \mathfrak{B}$ 不仅是 $\alpha$ 的加细, 而且含于 $\alpha$ 中.

有一类重要的空间, 称为**局部紧空间** (locally compact space), 是按这样的要求定义的: 给定空间 $X$ 的每个点 $x$ 都有一个邻域 $O_x$, 它在 $X$ 中的闭包是紧子空间. 任何局部紧 Hausdorff 空间, 也仅限于这类空间, 可以视为某个 Hausdorff 紧统 $\bar{X}$ 的一个开集, 而且, $\bar{X}$ 是由 $X$ 仅添加一个点 $\bar{x}$ 而得到, $\bar{X}$ 的拓扑由这最后的要求及 $X$ 的拓扑唯一确定; Hausdorff 紧统 $\bar{X}$ 称为 $X$ 的单点紧化 (one-point compactification) 或 $X$ 的 **Александров 紧化** (Aleksandrov compactification).

紧性条件之后, 最重要的紧性型条件是仿紧性条件 (condition of paracompactness) (见**仿紧性准则** (paracompactness criteria)), 它要求给定空间 $X$ 的每个开覆盖 $\alpha$ 都可以被一个局部有限开覆盖 $\alpha'$ 加细 (拓扑空间的集族称为在它上面局部有限的 (locally finite), 如果每个点都有一个邻域, 仅与该族的有限多个集合相交). 在这里, 不能要求 $\alpha'$ 含于 $\alpha$. 所有可度量化空间都是仿紧的 Hausdorff 空间.

**参考文献**


[1] Александров, П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М. 1977.

[2] Bourbaki, N., Elements of mathematics. General topology, Addison-Wesley, 1966 (译自法文).

[3] Kuratowski, K., Topology, 1. Acad. Press, 1966 (译自法文).

[4] Александров, П. С., Пасынков, Б. А., Введение в теорию размерности …, М., 1973.


П. С. Александров 撰

【补注】 许多作者恰好按照与上述内容相反的方式使用 "$T_3$ 空间" 和 "正则空间", "$T_4$ 空间" 和 "正规空间" 这两对术语.

Borel-Lebesgue 条件 (Borel-Lebesgue condition) 也称为 Heine-Borel 性质 (Heine-Borel property) (见 **Heine-Borel 定理** (Heine-Borel theorem)); 而终紧性 (final compactness) 通常也称为 Lindelöf 性质 (Lindelöf property) (见 **Lindelöf 空间** (Lindelöf space)). 很少使用术语 "紧统"; 它们是紧空间 (也可以是 Hausdorff 空间, 可度量化空间, 等等).

在确定空间上拓扑的诸多等价方式之中, 应当注意收敛结构 (convergence structure). (开集、闭包运算、收敛结构等常用的工具也有进一步的推广.) 收敛性的早期描述使用诸如有向集 (见 [A3] 和**有向集** (directed set)) 之类的外在工具, 但有一个内在的描述. 因为描述的格式由底集 $X$ 确定, 所以它在技术上是内在的. 平心而论, 这种描述与引入基数 $m$ 的内在性相差甚远. 因此, 对于每个幂集 (power set) $X^m$, 对于指标集 $m$ 上的每个**超滤子** (ultrafilter) $\mathcal{F}$, 我们必须说明, 它的点 $x_0$ 是它的 $m$ 元组 $\{x_\alpha\} \in X^m$ 沿 $\mathcal{F}$ 的极限. [A2] 中描述了紧 Hausdorff 情形的公理, 这时, 每个 $m$ 元组都有一个沿每个超滤子的唯一极限; 一般的情形见 [A1]. 应用上, 更常用的是具有辅助工具的收敛性, 特别是广义序列 (网, 见**广义序列** (generalized sequence)) 的收敛性.

**参考文献**


[A1] Barr, M., Relational algebras, in S. Maclane (ed.), Midwest Category Sem. IV, Lecture notes in math., Vol 137, Springer, 1970, 39 – 55.

[A2] Linton, F. E. J., Some aspects of equational categories, in Proc. Conf. Categorical Algebra (La Jolla, 1965), Springer, 1966, 84 – 94.

[A3] Tukey, J. W., Convergence and uniformity in topology, Princeton Univ. Press, 1940.

[A4] Engelking, R., General topology, Heldermann, 1989 (译自波兰文).


白苏华, 胡师度 译

**拓扑结构 (拓扑)** [**topological structure (topology)**; **топологическая структура**], 开拓扑 (open topology), 相应地, 闭拓扑 (closed topology)

集合 $X$ 的一个子集族 $\mathfrak{G}$ (相应地 $\mathfrak{F}$), 满足下述性质:

1. 集合 $X$, 以及空集 $\varnothing$, 都是族 $\mathfrak{G}$ (相应地 $\mathfrak{F}$) 的元素.

$2_{\mathfrak{G}}$ (相应地 $2_{\mathfrak{F}}$). $\mathfrak{G}$ 中有限个元素的交集 (相应地, $\mathfrak{F}$ 中有限个元素的并集), 以及 $\mathfrak{G}$ 中任意多个元素的并集 (相应地, $\mathfrak{F}$ 中任意多个元素的交集), 都是该族中的元素.

在集合 $X$ 上引进或定义了拓扑结构 (简称拓扑), 该集合就称为**拓扑空间** (topological space),

其元素称为点(points), 族 $\mathfrak{G}$(相应地 $\mathfrak{F}$)中元素称为这个拓扑空间的开(open)(相应地, 闭(closed))集.

若 $X$ 的子集族 $\mathfrak{G}$ 或 $\mathfrak{F}$ 之一已经定义, 并满足性质 1 及 $2_{\mathfrak{G}}$(或相应地 1 及 $2_{\mathfrak{F}}$), 则另一个族可以对偶地定义为第一个集族中元素的补集族.

П. С. Александров 撰

【补注】 亦见**拓扑学**(topology); **拓扑空间**(topological space); **一般拓扑学**(general topology).

**参考文献**


[A1] Engelking, R., General topology, Heldermann, 1989 (译自波兰文).


罗嵩龄 译

**拓扑结构** [**topological structures; топологические структуры**]

【补注】

**引言** 一般拓扑学(亦称集合论拓扑学或分析拓扑学, 见**一般拓扑学**(general topology))的目的是要以一般的提法来阐明古典分析中熟知的诸如收敛及连续这样一些概念. 最初, 这是对度量空间进行的(M. Fréchet([A10]), 1906), 后来又扩展到今天称为 Hausdorff 空间的那种拓扑空间(F. Hausdorff([A11]), 1914). 通常的**拓扑空间**(topological space)概念可以回溯到 C. Kuratowski([A25], 1922), 他把"闭包"的概念公理化, 从而阐明点 $x$ 与集合 $A$ 之间的"近性"(nearness)(通常记为 $x \in \overline{A}$, 即 $x$ 属于 $A$ 的闭包). 但是对度量空间有意义的**一致连续性**(uniform continuity)、**一致收敛**(uniform convergence), 以及**完全性**(completeness)这些概念却未能对拓扑空间加以阐明. 因此, 又引进了一致空间的概念(A. Weil([A33], 1937))用"近域"(entourage)来定义, 而 J. W. Tukey([A32], 1940)则是用"一致覆盖"(uniform cover)来定义的, 亦见**一致空间**(uniform space)). 基于同样的理由, В. А. Ефремович([A7], 1952)也把两个集合之间的"近性"(nearness)概念公理化, 提出了**邻近空间**(proximity space). 此后, 人们多次尝试把拓扑概念与一致概念结合起来, 例如, L. Nachbin(1949)研究了几乎一致空间(见[A9]), A. Császár(1957)提出了共拓扑基因空间(见[A5]), Д. Б. Дойчинов([A6], 1964)引进了广义拓扑空间(或超拓扑空间), M. Katětov([A21], 1965)研究了半近性空间(merotopic space 或 semi-nearness space), H. Herrlich([A13], 1974)提出了近性空间(nearness space). "近性"(nearness)是拓扑学中的基本概念, 其直观概念现在已有满意的定义, 即利用近性空间(或相应的, 半近性空间)可以阐明"任意集族的近性".

由于拓扑空间之间映射的连续性不可能象古典分析那样利用收敛序列来阐明, 所以需要更一般的概念. 因此, E. H. Moore 和 H. L. Smith([A26], 1922)提出了网的理论(见**网(拓扑空间中集合的)**(net (of sets in a topological space))), 后来, H. Cartan([A3], 1937)又引进了**滤子**(filter). 由于**超滤子**(ultrafilter)的存在, 一般拓扑中宁愿使用滤子理论. 把滤子收敛的概念公理化则得到极限空间(拓扑空间的推广). 这种空间是 H. J. Kowalsky([A24], 1954)首先研究的, 其后, H. R. Fischer([A8], 1959)也进行了独立的研究. 就函数空间的研究而言, 极限空间比拓扑空间更为方便. 此前, G. Choquet([A4], 1948)曾经研究过一种更有局限性的概念, 即伪拓扑空间(Choquet 空间)的概念. 此外, 还提出了许多其他的概念, 例如, D. C. Kent([A23], 1964)的收敛空间, Katětov([A21], 1965)的滤子半近性空间(即筛网确定的半近性空间).

所有上述种种空间都是有结构的集合, 其间保持结构的映射则称为连续映射或一致连续映射, 从而得到许多具体的范畴. 阐释这些范畴构造的明显相似性产生了拓扑范畴的定义及其相互关系的研究. 结果建立了一个新的学科, 即所谓范畴拓扑学(categorical topology)(约在 1971 年)(见 Herrlich([A12], 1971)及 O. Wyler([A34], 1971)).

本条目的术语见[A19]及[A28].

**拓扑范畴.** 所谓具体范畴(concrete category), 是指一个**范畴**(category) $\mathscr{C}$, 其对象都是有结构的集合, 即配对 $(X,\xi)$, 其中 $X$ 是集合, $\xi$ 是 $X$ 上的 $\mathscr{C}$ 结构. 其态射 $f:(X,\xi)\to(Y,\mu)$ 是 $X$ 与 $Y$ 之间的适当映射, 态射的合成是通常的映射合成. 换言之, 范畴 $\mathscr{C}$ 还附带有一个忠实函子(即遗忘函子) $\mathscr{U}$: $\mathscr{C}\to$ Set, Set 是集合(及映射)的范畴.

具体范畴 $\mathscr{C}$ 称为拓扑的(topological), 当且仅当它满足下述条件:

Cat $\mathrm{top}_1$). 初始结构存在性(existence of initial structures). 对任何集合 $X$, 任何指标集为 $I$ 的一族 $\mathscr{C}$ 对象 $\{(X_i,\xi_i)\}_{i\in I}$, 以及任何一族指标集为 $I$ 的映射 $\{f_i: X\to X_i\}_{i\in I}$, 存在 $X$ 上的唯一 $\mathscr{C}$ 结构 $\xi$, 关于 $\{X, f_i, (X_i,\xi_i), I\}$ 是初始结构, 即是对任何 $\mathscr{C}$ 对象 $(Y,\mu)$, 映射 $g:(Y,\mu)\to(X,\xi)$ 是 $\mathscr{C}$ 态射的充要条件是: 对每个 $i\in I$, 合成映射 $(f_i\circ g):(Y,\mu)\to(X_i,\xi_i)$ 是一个 $\mathscr{C}$ 态射.

Cat $\mathrm{top}_2$). 纤维细小性(fibre-smallness). 任何集合 $X$ 的 $\mathscr{C}$ 纤维(即 $X$ 上的所有 $\mathscr{C}$ 结构的类)是一个集合.

Cat $\mathrm{top}_3$). 终止隔离子性质(terminal separator property). 对于基数为 1 的任何集合 $X$, 恰好存在一个 $X$ 上的 $\mathscr{C}$ 结构.

拓扑范畴的例子.

1) 拓扑空间(及连续映射)的范畴 Top.

2) 一致空间(及一致连续映射)的范畴 Unif.

3) 邻近空间(及 $\delta$ 映射)的范畴 Prox.

4) 收敛空间、极限空间以及伪拓扑空间(连同连续映射)的范畴 Conv, Lim 以及 PsTop.

(设 $X$ 是一个集合, $F(X)$ 是 $X$ 上所有滤子的集合, $q$ 是 $F(X)\times X$ 的子集, 满足下列条件:

$\mathrm{Lim}_1$) 对于每个 $x\in X$ 有 $(\dot{x},x)\in q$, 其中 $\dot{x}$ 表示 $X$ 中所有含有 $x$ 的子集的集合.

$\mathrm{Lim}_2$) 对于 $(\mathscr{F},x)\in q$ 而 $\mathscr{F}\subset\mathscr{G}$ 有 $(\mathscr{G},x)\in q$.

这时, $(X,q)$ 称为**收敛空间**(convergence space), 如果还满足

(C) $(\mathscr{F},x)\in q$ 蕴含 $(\mathscr{F}\cap\dot{x},x)\in q$;

$(X,q)$ 称为**极限空间**(limit space), 如果还满足

$\mathrm{Lim}_3$) $(\mathscr{F},x)\in q$ 且 $(\mathscr{G},x)\in q$ 蕴含 $(\mathscr{F}\cap\mathscr{G},x)\in q$;

$(X,q)$ 称为**伪拓扑空间**(pseudo-topological space)或 Choquet **空间**(Choquet space), 如果还满足

PsT) $(\mathscr{F},x)\in q$, 只要对每个超滤子 $\mathscr{G}\supset\mathscr{F}$ 有 $(\mathscr{G},x)\in q$.

$(\mathscr{F},x)\in q$ 通常改写为 $\mathscr{F}\to x$(读作 $\mathscr{F}$ 收敛于 $x$). 在各种情形中, 态射是所有的连续映射, 即是把收敛于 $x$ 的滤子映成收敛于 $f(x)$ 的滤子的映射.)

5) 共拓扑基因空间(及连续映射)的范畴 SynTop (见[A5]).

6) 超拓扑空间(及连续映射)的范畴 SuperTop (见[A6]).

7) 拟一致空间(及拟一致连续映射)的范畴 QuasiUnif (见[A9]).

8) 半近性空间(及一致连续映射)的范畴 Mer 和近性空间(及一致连续映射)的范畴 Near.

(设 $X$ 是一个集合, $\mu$ 是 $X$ 的非空覆盖组成的非空集, 满足下列条件:

$\mathrm{N}_1$) 若 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{B}$ 的加细, $\mathscr{A}\in\mu$, 则 $\mathscr{B}\in\mu$;

$\mathrm{N}_2$) 若 $\mathscr{A}\in\mu$, $\mathscr{B}\in\mu$, 则 $\{A\cap B\mid A\in\mathscr{A},B\in\mathscr{B}\}\in\mu$.

这时 $(X,\mu)$ 称为**半近性空间**(merotopic space 或 semi-nearness space), 而 $\mu$ 的元素称为**一致覆盖**(uniform coverings).

半近性空间 $(X,\mu)$ 称为**近性空间**(nearness space), 如果还满足下列条件:

$\mathrm{N}_3$) 若 $\mathscr{A}\in\mu$, 则 $\{\mathrm{int}_\mu A: A\in\mathscr{A}\}\in\mu$, 其中 $\mathrm{int}_\mu A=\{x\in X:\{A,X\setminus\{x\}\}\in\mu\}$. 若 $(X,\mu)$ 和 $(Y,\mu)$ 是半近性空间(或近性空间), 则映射 $f: X\to Y$ 称为**一致连续的**(uniformly continuous), 如果对每个 $\mathscr{A}\in\eta$, $f^{-1}\mathscr{A}=\{f^{-1}[A]: A\in\mathscr{A}\}\in\mu$.)

9) 双拓扑空间(及配对连续映射)的范畴 BiTop (见[A22]).

10) 有界型空间(及有界映射)的范畴 Born (见[A20]).

11) 单纯复形(及单纯映射)的范畴 Simp (见[A30]).

12) 自反关系的范畴 Rere 及准序集范畴 PrOrd (它们的对象都是配对 $(X,\rho)$, 其中 $X$ 是集合, $\rho$ 是 $X$ 上的自反关系(就 Rere 而言)或自反及传递关系(就 PrOrd 而言); 在两种情况下, 态射都是保持关系的映射).

13) 紧生成的拓扑空间(及连续映射)的范畴 CGTop (即是范畴 Top 中含有范畴 Comp $T_2$ 的最小余自反子范畴, 其中 Comp $T_2$ 是紧 Hausdorff 空间(及连续映射)的范畴).

14) 对称收敛空间、对称极限空间、对称伪拓扑空间及对称拓扑空间(及连续映射)的范畴 $\mathrm{Conv}_s$, $\mathrm{Lim}_s$, $\mathrm{PsTop}_s$ 及 $\mathrm{Top}_s$.

(收敛空间 $(X,q)$ 称为**对称的**(symmetric), 如果满足:

$$(S)\ (\mathscr{F},y)\in q \text{ 及 } x\in\bigcap\mathscr{F} \text{ 蕴含 } (\mathscr{F},x)\in q.$$

特别是, 拓扑空间 $X$ 为对称拓扑空间的充要条件是: $X$ 为 $R_0$ **空间**($R_0$-space), 即 $x\in\overline{\{y\}}$ 蕴含 $y\in\overline{\{x\}}$, $(x,y)\in X\times X$.)

15) 筛网确定的半近性空间(及一致连续映射)的范畴 Grill.

(半近性空间 $(X,\mu)$ 称为**筛网确定的**(grill-determined), 如果 $X$ 的任何一个**近性子集族** $\mathscr{A}$ 均含于 $X$ 上的某个近性筛网 $\mathscr{G}$ 中. 这里, $X$ 的子集族 $\mathscr{B}$ 称为**近性的**(near), 如果对每个 $\mathscr{C}\in\mu$, 存在某个 $C\in\mathscr{C}$, 使得对每个 $B\in\mathscr{B}$ 有 $C\cap B\neq\phi$; $\mathscr{G}$ 称为**筛网**(grill), 如果 $\phi\notin\mathscr{G}$, 并且对 $X$ 的任何一对子集 $(A,B)$, $A\cup B\in\mathscr{G}$ 的充要条件是 $A\in\mathscr{G}$ 及 $B\in\mathscr{G}$.

范畴 Grill 同构于范畴 Fil, 后者定义如下: Fil 的对象是配对 $(X,\gamma)$, 其中 $X$ 是集合, $\gamma$ 是 $X$ 上的滤子集, 满足下述条件: 1) 若 $\mathscr{F}\in\gamma$, 且滤子 $\mathscr{G}$ 比 $\mathscr{F}$ 精细, 则 $\mathscr{G}\in\gamma$; 2) 对任何 $x\in X$ 有 $\dot{x}\in\gamma$. 态射 $f:(X,\gamma)\to(X',\gamma')$ 是映射 $f: X\to X'$, 使得对每个 $\mathscr{F}\in\gamma$, 由 $\{f[F]: F\in\mathscr{F}\}$ 生成的滤子属于 $\gamma'$.)

16) 接触近性空间(及一致连续映射)的范畴 Cont.

(近性空间 $(X,\mu)$ 称为**接触**(contigual)近性空间, 如果对每个 $\mathscr{A}\in\mu$, 存在一个有限的 $\mathscr{B}\subset\mathscr{A}$, 使得 $\mathscr{B}\in\mu$.)

17) 子拓扑近性空间(及一致连续映射)的范畴

SubTop.

(近性空间 $(X,\mu)$ 称为子拓扑 (subtopological) 近性空间，如果它可以嵌入一个拓扑近性空间（即对称拓扑空间）. 注意，范畴 Top$_s$ 同构于拓扑近性空间（及一致连续映射）的范畴 **T-Near**. 这里，近性空间 $(X,\mu)$ 称为拓扑 (topological) 近性空间，如果 $X=\bigcup\{\mathrm{int}_\mu A : A\in\mathscr{A}\}$ 蕴含 $\mathscr{A}\in\mu$.)

**拓扑范畴的性质.**

1) 条件 Cattop$_1$ 可以换为下述等价条件（存在最终结构 (existence of final structure)）：对于任何集合 $X$，任何一族指标集为 $I$ 的 $\mathscr{C}$ 对象 $\{(X_i,\xi_i)\}_{i\in I}$ 以及任何一族指标集为 $I$ 的映射 $\{f_i : X_i\to X\}_{i\in I}$，存在 $X$ 上的唯一 $\mathscr{C}$ 结构 $\xi$，关于 $\{(X_i,\xi_i), f_i, X, I\}$ 是最终结构 (final structures)，即是对任何 $\mathscr{C}$ 对象 $(Y,\mu)$，映射 $g:(X,\xi)\to(Y,\mu)$ 是 $\mathscr{C}$ 态射的充要条件是：对每个 $i\in I$，合成映射 $g\circ f_i:(X_i,\xi_i)\to(Y,\mu)$ 是一个 $\mathscr{C}$ 态射.

2) 让 $\mathscr{C}$ 是一个拓扑范畴. 这时下述结论成立:

(1) $\mathscr{C}$ 是完全且余完全范畴，遗忘函子 $U:\mathscr{C}\to$ Set 通过初始结构（最终结构）将极限（余极限）从 Set 提升到 $\mathscr{C}$.

(2) $\mathscr{C}$ 态射是**单态射** (monomorphism)（**满态射** (epimorphism)、**双态射** (bimorphism)）的充要条件是：它是单射（满射、双射）.

(3) $\mathscr{C}$ 是良幂范畴及余良幂范畴.

(4) 对任何 $\mathscr{C}$ 态射 $f:(X,\xi)\to(Y,\mu)$，下列条件等价: a) $f$ 是**一范畴的嵌入** (imbedding of categories)，即 $f$ 是单射且 $\xi$ 是关于 $(Y,\mu)$ 及 $f$ 的初始结构; b) $f$ 是极端单态射; c) $f$ 是正则单态射.

(5) 对任何 $\mathscr{C}$ 态射 $f:(X,\xi)\to(Y,\mu)$，下列条件等价: a) $f$ 是**商映射** (quotient mapping)，即 $f$ 是满射，且 $\mu$ 是关于 $(X,\xi)$ 及 $f$ 的最终结构; b) $f$ 是极端满态射; c) $f$ 是正则满态射.

(6) $\mathscr{C}$ 是（满、嵌入）范畴并且是（商、单）范畴.

(7) 遗忘函子 $U:\mathscr{C}\to$ Set 具有满且忠实的左伴随函子. 即对任何集合 $X$，存在 $X$ 上的离散 $\mathscr{C}$ 结构 $\xi_X$，其特性是：任何映射 $f:(X,\xi_X)\to(Y,\eta)$ 都是 $\mathscr{C}$ 态射.

(8) 遗忘函子 $U:\mathscr{C}\to$ Set 具有满且忠实的右伴随函子，即对任何集合 $X$，存在 $X$ 上的非离散 $\mathscr{C}$ 结构 $\xi^X$，其特性是：任何映射 $f:(Y,\mu)\to(X,\xi^X)$ 都是 $\mathscr{C}$ 态射.

(9) 对任何集合 $X$，由 “$\xi\leqslant\mu \Leftrightarrow 1_X:(X,\xi)\to(X,\mu)$ 是 $\mathscr{C}$ 态射” 赋序的、$X$ 的 $\mathscr{C}$ 纤维是一个**完全格** (complete lattice).

(10) 对任何集合 $X\neq\varnothing$，任何常值映射 $f:(X,\xi)\to(Y,\eta)$ 是一个 $\mathscr{C}$ 态射.

(11) 任何 $\mathscr{C}$ 对象 $(X,\xi)$，其中 $X\neq\varnothing$，都是隔离子.

(12) $\mathscr{C}$ 对象 $C$ 是余隔离子的充要条件是：存在一个嵌入，把一个具有两个点的非离散对象映入 $C$.

(13) $\mathscr{C}$ 对象 $(X,\xi)$ 是射影对象的充要条件是: $\xi$ 是 $X$ 上的离散结构（亦见**范畴的射影对象** (projective object of a category)）.

(14) $\mathscr{C}$ 对象 $(X,\xi)$ 是单射对象的充要条件是: $X\neq\varnothing$ 且 $\xi$ 是 $X$ 上的非离散结构（亦见**单射对象** (injective object)）.

3) 为了说明拓扑范畴之间的关系，反射及余反射的理论是非常有用的. 以下，总是假定子范畴是满的 (full) 且同构闭的 (isomorphism closed) 子范畴（范畴 $\mathscr{C}$ 的子范畴 $\mathscr{A}$ 称为同构闭的，如果任何 $\mathscr{C}$ 对象，只要同构于某个 $\mathscr{A}$ 对象，就是一个 $\mathscr{A}$ 对象；满子范畴的定义见**满子范畴** (full subcategroy)）. 若 $\mathscr{A}$ 是范畴 $\mathscr{C}$ 的子范畴，$J:\mathscr{A}\to\mathscr{C}$ 表示包含函子，则 $\mathscr{A}$ 称为 $\mathscr{C}$ 中的自反的（余自反的）(reflective (co-reflective)) 子范畴，如果下述两个（等价的）条件成立: a) $J$ 具有左伴随函子 $\mathscr{R}$（右伴随函子 $\mathscr{R}_c$），称为反射子 (reflector)（余反射子 (co-reflector)）; b) 对于每个 $\mathscr{C}$ 对象 $X$，存在一个 $\mathscr{A}$ 对象 $X_\mathscr{A}$ 和一个 $\mathscr{C}$ 态射 $r_X:X\to X_\mathscr{A}$，称为 $X$ 的 $\mathscr{A}$ 反射（对应地，$m_X:X_\mathscr{A}\to X$，称为 $X$ 的 $\mathscr{A}$ 余反射），使得对每个 $\mathscr{A}$ 对象 $Y$ 和每个 $\mathscr{C}$ 态射 $f:X\to Y$（对应地，$f:Y\to X$），存在唯一的 $\mathscr{A}$ 态射（即 $\mathscr{C}$ 态射）$\bar f:X_\mathscr{A}\to Y$（对应地，$\bar f:Y\to X_\mathscr{A}$），使得 $\bar f\circ r_X=f$（对应地，$m_X\circ\bar f=f$）.

此外，子范畴 $\mathscr{A}$ 分别称为 $\mathscr{C}$ 中满自反（单余自反）(epireflective (monocoreflective))、极端满自反（极端单余自反）(extremal epireflective (extremal monocoreflective)) 或双自反（双余自反）(bireflective (bicoreflective)) 子范畴，如果 $\mathscr{A}$ 是自反（余自反）子范畴，并且每个 $\mathscr{C}$ 对象 $X$ 的 $\mathscr{A}$ 反射（$\mathscr{A}$ 余反射）分别是满态射（单态射）、极端满态射（极端单态射）或双态射.

就拓扑范畴而言，下述两个结论成立:

(1) 拓扑范畴的任何双自反（及双余自反）的子范畴都是拓扑范畴.

(2) 让 $\mathscr{A}$ 是拓扑范畴 $\mathscr{C}$ 的子范畴，则下述结论成立:

a) $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{C}$ 中的满自反（极端满自反）的子范畴的充要条件是: $\mathscr{A}$ 在 $\mathscr{C}$ 中的乘积运算、子对象（即极端单态射）运算及弱子对象（即单态射）运算下是封闭的.

b) $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{C}$ 中的双自反子范畴的充要条件是: $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{C}$ 中的自反子范畴，并且含有 $\mathscr{C}$ 的所有非离散对

象．

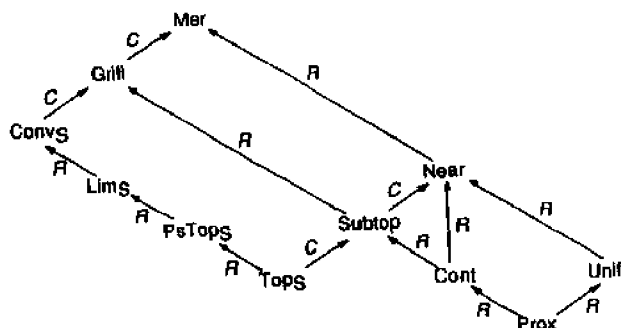
c) 若 $\mathscr{A}$ 至少含有一个对象，其基本集非空，则下列条件等价：

($\alpha$) $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{C}$ 中的余自反子范畴；

($\beta$) $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{C}$ 中的双余自反子范畴；

($\gamma$) $\mathscr{A}$ 在 $\mathscr{C}$ 中的余积运算及商对象运算下是封闭的；

($\delta$) $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{C}$ 中的余自反子范畴，且含有 $\mathscr{C}$ 的所有离散对象．




(3) 某些拓扑范畴之间的关系如上图所示，其中 $R$ 及 $C$ 分别表示映成双自反及双余自反子范畴的嵌入映射．

关于表中所列诸拓扑范畴中初始结构及最终结构的构成，可以利用下述结果：若 $\mathscr{A}$ 是某个拓扑范畴 $\mathscr{C}$ 的双自反（双余自反）子范畴，则 $\mathscr{A}$ 中的初始结构（最终结构）如在 $\mathscr{C}$ 中一样构成，而 $\mathscr{C}$ 中的最终结构（初始结构）则是应用包含函子 $\mathscr{F}$: $\mathscr{A}\to\mathscr{C}$ 的左伴随函子 $\mathscr{R}$（右伴随函子 $\mathscr{R}_c$）构成的（即是 $\mathscr{A}$ 中的最终结构（初始结构）是从 $\mathscr{C}$ 中的最终结构（初始结构）通过双自反（双余自反）修正得到的）．

例．对称拓扑空间（或拓扑近性空间）构成 Near 的一个双余自反子范畴：若 $(X,\mu)$ 是拓扑近性空间，则恒同映射 $1_X:(X,\mu_t)\to(X,\mu)$ 是一个 T-Near 余反射，其中 $\mu_t$ 由满足 $X=\bigcup\{\mathrm{int}_\mu A: A\in\mathscr{A}\}$ 的 $X$ 的所有覆盖 $\mathscr{A}$ 组成；相应的余反射子 T: Near → T-Near 把每个近性空间 $(X,\mu)$ 变成拓扑近性空间 $(X,\mu_t)$，即是它的双余自反修正．

首先，考虑 Near 中的子空间及乘积的构造．

子空间 (subspace)．让 $(X,\mu)$ 是近性空间，$A$ 是 $X$ 的子集，$i: A\to X$ 是包含映射．于是存在 $A$ 上关于 $i$ 及 $(X,\mu)$ 的唯一初始邻近结构 $\mu_A=\{\{A\}\wedge\mathscr{U}:\mathscr{U}\in\mu\}$，其中，$\{A\}\wedge\mathscr{U}=\{A\cap U: U\in\mathscr{U}\}$．配对 $(A,\mu_A)$ 称为 $(X,\mu)$ 的近性子空间 (nearness subspace)．

积 (product)．设 $\{(X_i,\mu_i)\}_{i\in I}$ 是指标集为 $I$ 的一族近性空间，$\prod X_i$ 是族 $\{X_i\}_{i\in I}$ 的 Descartes 积（见直积 (direct product)），$p_i:\prod X_i\to X_i$ 是投影映射，$i\in I$．于是，$\prod X_i$ 上存在唯一一个关于 $(\prod X_i, p_i, (X_i,\mu_i), I)$ 的初始邻近结构 $\mu$，即是由 $\prod X_i$ 的以 $\{p_i^{-1}\mathscr{U}_i:\mathscr{U}_i\in\mu_i,\ i\in I\}$ 的元素的有限交加细的所有覆盖组成的集合 $\mu$，其中 $p_i^{-1}\mathscr{U}_i=\{p_i^{-1}[U_i]:U_i\in\mathscr{U}_i\}$，而集合 $X$ 的两个覆盖 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 的交集定义为覆盖 $\mathscr{A}\wedge\mathscr{B}=\{A\cap B: A\in\mathscr{A}, B\in\mathscr{B}\}$，配对 $(\prod X_i,\mu)$ 称为 $\{(X_i,\mu_i)\}_{i\in I}$ 的近性积空间 (nearness product space)．

其次，构造 T-Near 中的子空间和积，这首先是在 Near 中构造，然后应用余反射子 $T$ 即得．这样也可以得到（对称）拓扑空间的子空间和积的通常构造．但是，正是这第二步使某些企图得到的论断不成立，例如下列论断：

1) 仿紧拓扑空间的积是仿紧空间；

2) 紧 Hausdorff 空间与正规 $R_0$ 空间的积是正规空间；

3) 仿紧拓扑空间（正规 $R_0$ 空间）的子空间是仿紧空间（正规空间）；

4) 对于仿紧拓扑空间有 $\dim(X\times Y)\leqslant\dim X+\dim Y$；

5) 对于正则 $R_0$ 空间 $Y$ 的稠密子空间 $X$ 有 $\dim X=\dim Y$．

在按通常（拓扑）意义构造积及子空间时上述论断全都不成立，但在 Near 中构造积及子空间时上述论断又都成立，而且是某些更一般定理的特例．例如，考虑仿紧空间的情形：近性空间 $(X,\mu)$ 称为仿紧 (paracompact) 近性空间，如果它是一致 $N_1$ 空间．这里，近性空间 $(X,\mu)$ 称为 $N_1$ 空间 ($N_1$-space)，如果基本拓扑空间 $\mathrm{T}((X,\mu))$ 是 $T_1$ 空间，$(X,\mu)$ 称为一致 (uniform) 近性空间，如果每个 $\mathscr{A}\in\mu$ 都以某个 $\mathscr{B}\in\mu$ 为其星形加细．因此，一致近性空间是（由一致覆盖定义的）一致空间，一致 $N_1$ 空间则是分离的一致空间，而仿紧拓扑空间正好就是同时为拓扑近性空间及一致近性空间的那些 $N_1$ 空间．于是仿紧近性空间的积及子空间是仿紧近性空间．特别是，仿紧拓扑空间（在 Near 中）的积和子空间是仿紧近性空间，但一般不是拓扑近性空间．进一步的信息，例如，可以在 [A14] 和 [A28] 中找到．

推广．有初始结构（即单拓扑）的范畴 (initially structured (monotopological) categories)．拓扑范畴的满自反（极端满自反）的子范畴一般不是拓扑范畴．例如 Hausdorff 空间（及连续映射）的范畴 Haus 是 Top 的极端满自反子范畴，但 Haus 不是拓扑范畴（注意，把有理数 Hausdorff 空间 $\mathbf{Q}$ 映入实数 Hausdorff 空间 $\mathbf{R}$ 的嵌入映射是 Haus 中的满态射，却不是满映射）．为了使目前的讨论包含 Haus，需要下述定义：

具体范畴 $\mathscr{C}$ 称为具有初始结构的（或单拓扑的）（initially structured (or monotopological)），如果满足 Cattop$_2$）及 Cattop$_3$），并且对任何集合 $X$，任何一族指标集为 $I$ 的 $\mathscr{C}$ 对象 $\{(X_i, \xi_i)\}_{i\in I}$ 的任何映射单源 $\{f_i: X \to X_i\}_{i\in I}$（即是一族映射 $\{f_i: X \to X_i\}_{i\in I}$，使得对任何一对映射 $Y \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} X$，$f_i \circ \alpha = f_i \circ \beta (i\in I)$ 蕴含 $\alpha = \beta$），存在 $X$ 上的唯一 $\mathscr{C}$ 结构 $\xi$，关于 $\{X, f_i, (X_i, \xi_i), I\}$ 是初始结构．

显然，每个拓扑范畴都是有初始结构的．此外，一个拓扑范畴（有初始结构的范畴）的任何满自反（极端满自反）子范畴都是有初始结构的．例如，（拓扑 $T_0$ 空间的）范畴 Top$_0$，（拓扑 $T_1$ 空间的）范畴 Top$_1$，（正则拓扑 $T_1$ 空间的）范畴 Reg$_1$，（完全正则拓扑 $T_1$ 空间的）范畴 Comp Reg$_1$，（半序集的）范畴 Poset，（Hausdorff 收敛空间的）范畴 HConv，（Hausdorff 极限空间的）范畴 HLim 以及（Hausdorff 伪拓扑空间的）范畴 HPsTop（最后三例中 Hausdorff 性质是指滤子极限唯一）都是有初始结构的范畴，但不是拓扑范畴．反之，任何有初始结构的范畴都是某个拓扑范畴的极端满自反子范畴．有初始结构的范畴是完全的、余完全的、良幂的，但并不具有拓扑范畴的所有良好性质，特别是，这种范畴不是余良幂的（例如，$T_{2a}$ 空间，即 **Урысон 空间**（Urysohn space）（及连续映射）的范畴是有初始结构的，但不是余良幂的）．进一步的细节见 [A28]．

**任意基本范畴上的拓扑范畴**．先给一些定义．让 $\mathscr{U}: \mathscr{C} \to \mathscr{X}$ 是一个函子，$A$ 是一个 $\mathscr{C}$ 对象，$(f_i: A \to A_i)_{i\in I}$ 是一族有指标的 $\mathscr{C}$ 态射，均以 $A$ 为定义域．配对 $\{A, (f_i: A \to A_i)_{i\in I}\}$ 称为 $\mathscr{C}$ 中的一个源（source），它称为 $\mathscr{U}$ 初始（$\mathscr{U}$-initial）源，如果对 $\mathscr{C}$ 中的每个源 $\{B, (g_i: B \to A_i)_{i\in I}\}$ 以及每个 $\mathscr{X}$ 态射 $f: \mathscr{U}(B) \to \mathscr{U}(A)$，使得对每个 $i\in I$ 有 $\mathscr{U}(f_i) \circ f = \mathscr{U}(g_i)$，则存在唯一的 $\mathscr{C}$ 态射 $\overline{f}: B \to A$，使得对每个 $i\in I$ 有 $\mathscr{U}(\overline{f}) = f$ 而 $f_i \circ \overline{f} = g_i$．函子 $\mathscr{U}: \mathscr{C} \to \mathscr{X}$ 称为**拓扑函子**（topological functor），如果对任何一族有指标的 $\mathscr{C}$ 对象 $(A_i)_{i\in I}$ 以及 $\mathscr{X}$ 中的任何一个源 $\{X, (f_i: X \to \mathscr{U}(A_i))_{i\in I}\}$，存在 $\mathscr{C}$ 中的唯一的 $\mathscr{U}$ 初始源 $\{A, (g_i: A \to A_i)_{i\in I}\}$，使得对每个 $i\in I$ 有 $\mathscr{U}(A) = X$ 而 $\mathscr{U}(g_i) = f_i$．让 $\mathscr{X}$ 是一个固定的范畴，称为**基本范畴**（base category）．$\mathscr{X}$ 上的**具体范畴**（concrete category）是指一个配对 $(\mathscr{C}, \mathscr{U})$，其中 $\mathscr{C}$ 是一个范畴，而 $\mathscr{U}: \mathscr{C} \to \mathscr{X}$ 是一个忠实的、可取的函子（即是任何 $\mathscr{C}$ 同构 $f$ 是一个 $\mathscr{C}$ 恒同的充要条件是 $\mathscr{U}(f)$ 是一个 $\mathscr{X}$ 恒同），并且是可转移函子（即是对任何 $\mathscr{C}$ 对象 $A$，任何 $\mathscr{X}$ 对象 $B$ 以及任何同构 $q: B \to \mathscr{U}(A)$，存在唯一的 $\mathscr{C}$ 对象 $C$ 及同构 $\overline{q}: C \to A$，使得 $\mathscr{U}(\overline{q}) = q$）．函子 $\mathscr{U}$ 称为 $(\mathscr{C}, \mathscr{U})$ 的**基本函子**（underlying functor）．$(\mathscr{C}, \mathscr{U})$ 有时也记为 $\mathscr{C}$．$\mathscr{X}$ 上的具体范畴 $(\mathscr{C}, \mathscr{U})$ 称为**初始完全**（initially complete）范畴，如果 $\mathscr{U}: \mathscr{C} \to \mathscr{X}$ 是拓扑函子；$(\mathscr{C}, \mathscr{U})$ 称为小纤维（small-fibred）范畴，如果对每个 $\mathscr{X}$ 对象 $X$，满足 $\mathscr{U}(A) = X$ 的所有 $\mathscr{C}$ 对象 $A$ 的类是一个集合；$(\mathscr{C}, \mathscr{U})$ 称为拓扑（topological）范畴，如果它既是初始完全范畴，又是小纤维范畴．

显然，若 $\mathscr{C}$ 是开始时定义的拓扑范畴，$\mathscr{U}: \mathscr{C} \to$ Set 表示遗忘函子，那么 $(\mathscr{C}, \mathscr{U})$ 是 Set 上的拓扑范畴．但这时略去了公理 Cattop$_3$）．这个公理等价于 $\mathscr{C}$ 对象之间的所有常值映射（即是通过 $\{\varnothing\}$ 析因的函数）都是 $\mathscr{C}$ 态射．因此，例如，有向图（及图同态）的范畴 Graph 不再被排除．除了 Set 外，基本范畴还有，例如，1）以 $\{\varnothing\}$ 作为唯一对象，恒同映射作为唯一态射的范畴 $\mathscr{S}$．这时 $\mathscr{S}$ 上的具体范畴是半有序集；$\mathscr{S}$ 上的拓扑范畴是完全格．

2）群（及同态）的范畴 Group．于是，拓扑群（及连续同态）的范畴 TopGroup 是 Group 上的拓扑范畴．

3）范畴 $\mathscr{C}$，其对象是互不相交集的配对 $(A, B)$，其态射 $F: (A, B) \to (A', B')$ 是映射 $F: A \cup B \to A' \cup B'$，使得 $F(A) \subset A'$，$F(B) \subset B'$．于是，范畴 Net 是 $\mathscr{C}$ 上的拓扑范畴．这里 Net 的对象是三元组 $(A, B, R)$，其中 $(A, B)$ 是 $\mathscr{C}$ 对象，而 $R \subset (A \times B) \cup (B \times A)$，Net 的态射 $F: (A, B, R) \to (A', B', R')$ 是 $\mathscr{C}$ 态射 $F: (A, B) \to (A', B')$，使得对任何 $(x, y) \in R$ 有 $(F(x), F(y)) \in R'$，在 $\mathscr{C}$ 上是拓扑的（注意，Net 的对象称为网络，在计算机科学中得到应用，见 [A29]）．

拓扑函子是忠实函子、可取函子、可转移函子、从而导致某些初始完全的具体范畴．如果 $\mathscr{C}$ 是 $\mathscr{X}$ 上的拓扑范畴，其基本函子是 $\mathscr{U}$，那么按照关于 Set 上的拓扑范畴的诸结果可以得到下列结论：$\mathscr{U}$ 具有满且忠实的左伴随函子和右伴随函子；通过初始结构（最终结构）把极限（余极限）从 $\mathscr{X}$ 提升到 $\mathscr{C}$．$\mathscr{X}$ 上的任何析因结构可以通过初始结构（或最终结构）提升为 $\mathscr{C}$ 上的析因结构；完全性、余完全性、良幂性及余良幂性在 $\mathscr{C}$ 中成立的充要条件是：这些性质在 $\mathscr{X}$ 中成立；纤维是完全格，等等．此外，对偶性成立，即是若 $\mathscr{C}$ 是 $\mathscr{X}$ 上的拓扑范畴，则 $\mathscr{C}$ 的对偶范畴（见**范畴**（category））$\mathscr{C}^{op}$ 是 $\mathscr{X}^{op}$ 上的拓扑范畴．

**Descartes 闭性及进一步的限制**．拓扑空间（及连续映射）的范畴 Top 并不具有某些企望的性质，例如，两个商映射的乘积不必是商映射．并且一般不存在自然的函数空间拓扑结构，即 Top 不是 Descartes 闭的（见**范畴**（category））．由于这不便于研究代数拓扑（同伦论）、泛函分析（对偶理论）及拓扑代数（商代

数)，所以 Top 已经换成某些性态良好的子范畴或某些更方便的超范畴．确切的概念如下：

1) 范畴 $\mathscr{C}$ 称为 Descartes 闭 (Cartesian closed) 范畴，如果下列条件成立 (亦见范畴 (category))：

a) 对任何一对 $\mathscr{C}$ 对象 $(A,B)$，存在 $\mathscr{C}$ 中的一个乘积 $A\times B$；

b) 设 $A$ 是一个 $\mathscr{C}$ 对象，那么对每个 $\mathscr{C}$ 对象 $B$，存在某个 $\mathscr{C}$ 对象 $B^A$ 和某个 $\mathscr{C}$ 态射 $e_{A,B}:A\times B^A\to B$，使得对每个 $\mathscr{C}$ 对象 $C$ 和每个 $\mathscr{C}$ 态射 $f:A\times C\to B$，存在唯一的 $\mathscr{C}$ 态射 $\bar{f}:C\to B^A$，使得图表

$$\begin{array}{ccc} A\times B^A & \xrightarrow{e_{A,B}} & B \\ {\scriptstyle 1_A\times\bar{f}}\nwarrow & & \nearrow{\scriptstyle f} \\ & A\times C & \end{array}$$

可交换 (即是对每个 $\mathscr{C}$ 对象 $A$，函子 $A\times -:\mathscr{C}\to\mathscr{C}$ 具有右伴随函子，记为 $\cdot^A$，这里，对每个 $\mathscr{C}$ 对象 $B$ 定义 $(A\times -)(B)=A\times B$，对每个 $\mathscr{C}$ 态射 $f$ 定义 $(A\times -)(f)=1_A\times f$)．形如 $B^A$ 的对象称为幂对象 (power objects)．

2) 设 $\mathscr{C}$ 是一个范畴．一族有指标的 $\mathscr{C}$ 态射 $\{f_i:B_i\to B\}_{i\in I}$ 称为一个渊薮 (epi-sink)，如果对于定义域为 $B$ 的任何一对 $\mathscr{C}$ 态射 $(\alpha,\beta)$，$\alpha\circ f_i=\beta\circ f_i\,(i\in I)$ 缠涵 $\alpha=\beta$．

3) 设 $\mathscr{C}$ 是一个拓扑范畴．渊薮 $\{f_i:B_i\to B\}_{i\in I}$ 称为最终渊薮 (final epi-sink)，如果 $B$ 的 $\mathscr{C}$ 结构是关于 $\{f_i\}_{i\in I}$ 的最终结构．

就拓扑范畴 $\mathscr{C}$ 而言，下列断言是等价的：

(1) $\mathscr{C}$ 是 Descartes 闭范畴；

(2) 对任何 $\mathscr{C}$ 对象 $A$ 以及任何一族有指标的 $\mathscr{C}$ 对象 $\{B_i\}_{i\in I}$，下述结论成立：

a) $A\times\coprod_{i\in I}B_i\cong\coprod_{i\in I}(A\times B_i)$ (更确切地说，$A\times\coprod$ 保持余积)．

b) 若 $f$ 是商映射，则 $1_A\times f$ 也是商映射，即 $A\times -$ 保持商映射；

(3) a) 对任何 $\mathscr{C}$ 对象 $A$ 以及任何一族有指标的 $\mathscr{C}$ 对象 $\{B_i\}_{i\in I}$，$A\times\coprod_{i\in I}B_i\cong\coprod_{i\in I}(A\times B_i)$ (更确切地说，$A\times -$ 保持余积)．

b) $\mathscr{C}$ 中任何两个商映射 $f$ 和 $g$ 的乘积 $f\times g$ 是一个商映射；

(4) 对每个 $\mathscr{C}$ 对象 $A$，函子 $A\times -$ 保持最终渊薮：对 $\mathscr{C}$ 中任何最终渊薮 $\{f_i:B_i\to B\}_{i\in I}$，$\{1_A\times f_i:A\times B_i\to A\times B\}_{i\in I}$ 也是最终渊薮；

(5) 对任何配对 $(A,B)\in|\mathscr{C}|\times|\mathscr{C}|$，从 $A$ 到 $B$ 的所有 $\mathscr{C}$ 态射的集合 $[A,B]_{\mathscr{C}}$ 可以具有一个 $\mathscr{C}$ 对象 $B^A$ 的结构，使得：

a) 赋值映射 (evaluation mapping) $e_{A,B}:A\times B^A\to B$ 是一个 $\mathscr{C}$ 态射，这里对每个 $(a,g)\in A\times B^A$ 定义 $e_{A,B}(a,g)=g(a)$．

b) 对每个 $\mathscr{C}$ 对象 $C$，映射 $\psi:(B^A)^C\to B^{A\times C}$ 是满映射．这里对每个 $\mathscr{C}$ 态射 $f:C\to B^A$ 定义 $\psi(f)=e_{A,B}\circ(1_A\times f)$．

4) 于是，就 Descartes 闭的拓扑范畴 $\mathscr{C}$ 而言，下列结论成立：

a) 第一指数律：$A^{B\times C}\cong(A^B)^C$；

b) 第二指数律：$(\prod_{i\in I}A_i)^B=\prod_{i\in I}A_i^B$；

c) 第三指数律：$A^{\coprod_{i\in I}B_i}\cong\prod_{i\in I}A^{B_i}$；

d) 分配律：$A\times\coprod_{i\in I}B_i\cong\coprod_{i\in I}A\times B_i$．

Descartes 闭的拓扑范畴的例子有 Set，PsTop，Lim，Conv，Grill，Born，Simp，Rere，PrOrd，CGTop．

5) 若 $\mathscr{C}$ 是有初始结构的范畴，则 $\mathscr{C}$ 是 Descartes 闭范畴的充要条件是：对每个 $\mathscr{C}$ 对象 $A$，函子 $A\times -$ 保持最终渊薮．此外，在 Descartes 闭的有初始结构的范畴 $\mathscr{C}$ 中，幂对象 $B^A$ 可以解释为集合 $[A,B]_{\mathscr{C}}$，配备了某个适当的 $\mathscr{C}$ 结构，即是一个"函数空间"(精确到同构)，而 $\mathscr{C}$ 态射 $e_{A,B}$ 则是通常的赋值映射 (精确到同构)．由于 Descartes 闭的有初始结构的范畴的任何极端满自反子范畴都是 Descartes 闭范畴，所以范畴 Poset，HConv (Hausdorff 收敛空间)，HLim (Hausdorff 极限空间) 以及 HPsTop (Hausdorff 伪拓扑空间) 都是 Descartes 闭的有初始结构的范畴 (在每种情况下，Hausdorff 性质都是指滤子极限唯一)，因为这些范畴分别是 PrOrd，Conv，Lim 以及 PsTop 中的极端满自反子范畴 (例如见[A28])．由于上述 Descartes 闭的拓扑范畴中有些还满足另一个良好性质，所以给出下述定义是有用的：范畴 $\mathscr{C}$ 称为一个拓扑斯 (topos) (拟拓扑斯 (quasi-topos)，如果 $\mathscr{C}$ 具有有限的极限及余极限；$\mathscr{C}$ 是 Descartes 闭范畴；并且在 $\mathscr{C}$ 中 (强性) 部分态射都是可表示的，即是对任何 $\mathscr{C}$ 对象 $A$，存在一个 (强性) 单态射 $m_A:A\to A'$，使得 $m_A$ 是万有的，即对映入 $A$ 的任何 (强性) 部分态射 (即由一个 (强性) 单态射 $m:B\to C$ 和一个态射 $f:B\to A$ 组成的配对) 存在唯一的拉回

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & A \\ {\scriptstyle m}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle m_A} \\ C & \longrightarrow & A' \end{array}$$

显然，任何拓扑斯都是拟拓扑斯．上述 Descartes 闭的诸拓扑范畴中只有 Set 是拓扑斯 (注意，拓扑斯是平衡范畴 (balanced category)，即任何双态射都是同构的范畴)．由于在具有前推的每个范畴中，强性单态射与极端单态射一致，所以强性单态射可以换为嵌入，只要 $\mathscr{C}$ 是拓扑范畴．因此，就拓扑范畴 $\mathscr{C}$ 而言，下列条件是等价的：

(1) $\mathscr{C}$ 是拟拓扑斯；

(2) $\mathscr{C}$ 是 Descartes 闭范畴，并且任何 $\mathscr{C}$ 对象 $A$ 可以添加唯一一点 $\infty_A$ 而嵌入一个 $\mathscr{C}$ 对象 $A'=A\cup\{\infty_A\}$，使得对于从 $B$ 的子范畴 $C$ 到 $A$ 的任何 $\mathscr{C}$ 态射 $f:C\to A$，由

$$f'(b)=\begin{cases} f(b), & b\in C,\\ \infty_A, & b\notin C,\end{cases}$$

定义的唯一映射 $f':B\to A'$ 是一个 $\mathscr{C}$ 态射；

(3) 在 $\mathscr{C}$ 中，最终渊薮是通用的 (universal)，即若 $\{f_i:A_i\to A\}_{i\in I}$ 是 $\mathscr{C}$ 中的**最终渊薮**，$f:B\to A$ 是 $\mathscr{C}$ 态射，并且对于每个 $i\in I$ 图表

$$\begin{array}{ccc} B_i & \xrightarrow{f_i} & A_i \\ g_i\downarrow & & \downarrow f_i \\ B & \xrightarrow[f]{} & A \end{array}$$

是 $\mathscr{C}$ 中的拉回，那么 $\{g_i:B_i\to B\}_{i\in I}$ 是 $\mathscr{C}$ 中的最终渊薮．

(4) a) $\mathscr{C}$ 是 Descartes 闭范畴，并且 b) $\mathscr{C}$ 中的最终渊薮是**遗传的** (hereditary)，即若 $\{f_i:A_i\to A\}_{i\in I}$ 是 $\mathscr{C}$ 中的最终渊薮，$B$ 是 $A$ 的子空间，$B_i$ 是 $A_i$ 的子空间、其基本集为 $f_i^{-1}(B)$，而 $g_i=B_i\to B$ 是 $f_i$ 的相应限制，则 $\{g_i:B_i\to B\}_{i\in I}$ 也是 $\mathscr{C}$ 中的最终渊薮．

成为拟拓扑斯的拓扑范畴亦称为**强拓扑范畴** (strongly topological categories) 或**拓扑统** (topological universes)．

拟拓扑斯的例子有：PsTop，Lim，Conv，Grill，Born，Simp，Rere．

特别是，成为拟拓扑斯的拓扑范畴具有遗传商 (见上述 (4b))．这个条件的用处在研究拓扑范畴的连通性时已经显而易见 (见 [A18]，[A27])．甚至在 Mer 中最终渊薮也是遗传的，尽管 Mer 不是 Descartes 闭范畴．由于 Descartes 闭是拓扑范畴的一个方便的性质 (见 [A31])，所以拟拓扑斯性质可以视为一个超常方便的性质 (见 [A35])．因此，对于已知的拓扑范畴 $\mathscr{C}$ 以及已知的方便 (或超常方便) 的性质 $P$，如果能找到 $\mathscr{C}$ 的最小扩充 $P(\mathscr{C})$ 满足 $P$，这似乎是合乎需要的．这样的扩充称为 $\mathscr{C}$ 的 **$P$ 包** ($P$-hull)．人们已经付出相当大的努力来构造这样的包．进一步的细节例如见 [A16]．

任意基本范畴上的 Descartes 闭拓扑范畴甚至具有具体幂 (基本范畴 $\mathscr{X}$ 上基本函子为 $\mathscr{S}$ 的拓扑范畴 $\mathscr{C}$ 称为**具有具体幂** (concrete powers)，如果对所有的对象 $A$ 和 $B$，$\mathscr{S}(B^A)=\mathscr{S}(B)^{\mathscr{S}(A)}$，并且 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{X}$ 中的赋值映射重合)．例如，Graph 和 Net 都是具有具体幂的拟拓扑斯．关于任意基本范畴上拓扑范畴的 Descartes 闭性以及拟拓扑斯的研究见 [A1] 和 [A15]．

**终评**．结果，例如有关仿紧性、正规性或维数的许多企望得到的性质，在 Top 中是不成立的，但把 Top 换成 Near 后却成立，因为后者可以恰当地嵌入 Mer．甚至在研究函数空间时，例如，Mer 的子范畴 Grill 的性态也比 Top 好．利用近性空间适当的完全化，即所谓标准完全化 (或 Herrlich 完全化)，可以得到某些著名的扩张及紧化，例如 Wallman 扩张，Hewitt 实紧化，Александров 单点紧化以及 Stone-Čech 紧化．甚至拓扑空间的任何 Hausdorff 紧化 (或正则 Hausdorff 扩张) 也可以利用标准完全化得到 (详情例如见 [A17] 及 [A28])．最后但并非无足轻重的一点，代数拓扑中使用的 Čech 同调论及上同调论也对近性空间 (及半近性空间) 有了适当的推广，基本思想是把开覆盖换为一致覆盖 (详情例如见 [A2] 及 [A28])．

**参考文献**


[A1] Adámek, J. and Herrlich, H., Cartesian closed categories, quasitopoi and topological universes, *Comm. Math. Univ. Carolinae*, **27** (1986), 235 – 257.

[A2] Bently, H. L., Homology and cohomology for merotopic and nearness spaces, *Quaest Math.*, **6** (1978), 541 – 568.

[A3] Cartan, H., Théorie des filtres, *Comp. Rend.*, **205** (1937), 595 – 598.

[A4] Choquet, G., Convergences, *Ann. Univ. Grenoble Sect. Sci. Math. Phys.* (*N. S.*), **23** (1948), 57 – 112.

[A5] Császár, A., Foundations of general topology, Macmillan, 1963.

[A6] Doïtchinov, D. B., A unified theory of topological spaces, proximity spaces and uniform spaces, *Soviet Math. Dokl.*, **5** (1964), 595 – 598 (*Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **5** (1964)).

[A7] Efremovič, V. A., Geometry of proximity, *Math. USSR Sb.*, **31** (1952), 73, 189 – 200. (*Mat. sb.*, **31** (1952), 73).

[A8] Fischer, H. R., Limesräume, *Math. Ann.*, **137** (1959), 269 – 303.

[A9] Fletscher, P. and Lindgren, W. F., Quasi-uniform spaces, M. Dekker, 1982.

[A10] Fréchet, M., Sur quelques points du calcul fonctionnel, *Rend. Palermo*, **22** (1906), 1 – 74.

[A11] Hausdorff, F., Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig, 1914. Reprinted (incomplete) English translation: Set theory, Chelsea (1978).

[A12] Herrlich, H., Categorical topology, *General Topol. Appl.*, **1** (1971), 1 – 15.

[A13] Herrlich, H., Topological structures, in Math. Centre Tracts, Vol. 52, Math. Centrum Amsterdam, 1974, 59 – 122.

[A14] Herrlich, H., Some topological theorems which fail to be true, in Categorical topology, Lecture notes in

math., Vol. 540, Springer, 1976, 265 – 285.

[A15] Herrlich. H., Universal topology, in Categorical Topology, Sigma Ser. Pure Math., Heldermann, 1984, 223 – 281

[A16] Herrlich, H., Topological improvements of categories of structured sets. *General Topol. Appl.*, **27** (1987), 145 – 155.

[A17] Herrlich. H., Topologie II · Uniforme Raume, Heldermann, 1988.

[A18] Herrlich, H., Salicrup, G. and Vásquez, R., Light factorization structures. *Quest. Math.*, 3 (1979), 189 – 213.

[A19] Herrlich, H. and Strecker, G. E., Category theory, Heldermann, 1979.

[A20] Hogbe-Nlend, H., Théorie des bornologies et applications, Lecture notes in math.. Springer, 1971.

[A21] Katětov, M., On continuity structures and Spaces of mappings, *Comm. Math. Univ. Carolinae*, 6(1965), 257 – 278.

[A22] Kelley, C. J., Bitopological spaces, *Proc. London Math. Soc.*, **13** (1963), 71 – 89.

[A23] Kent, D. C., Convergence functions and their related topologies, *Fund. Math.*, **54** (1964), 125 – 133.

[A24] Kowalsky, H.-J., Limesräume und Komplettierung, *Math. Nachr.*, **12** (1954), 301 – 340.

[A25] Kuratowski, C., Sur l'opération $\bar{A}$ de l'analysis situs, *Fund. Math.*, 3 (1922), 182 – 199.

[A26] Moore, E. H. and Smith, H. L., A general theory of limits, *Amer J. Math.*, **44** (1922), 102 – 121.

[A27] Preuss, G., Connectednesses and disconnectednesses in $S$-Near, in Categorical Aspects of Topology and Analysis, Lecture notes in math., Vol, 915, Springer, 1982.

[A28] Preuss, G Topological structures —— An approach to categorical topology, Reidel, 1988.

[A29] Reisig, W., Petri nets, EATCS Monographs on Theoretical computer Science, 4, Springer, 1985.

[A30] Spanier, E. H., Algebraic topology, Springer, 1966 (中译本: E. H. 斯潘尼尔, 代数拓扑学, 上海科技出版社, 1987).

[A31] Steenrod, N. E., A convenient category of topological spaces, *Michigan Math. J.*, **14** (1967), 133 – 152.

[A32] Tukey, J. W., Convergence and uniformity in topology, Princeton Univ. Press, 1940.

[A33] Weil, A., Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale, Hermann, 1937.

[A34] Wyler, O., Top Categories and categorical topology, *General Topol. Appl.*, **1** (1971), 17 – 28.

[A35] Wyler, O., Are there topoi in topology?. Lecture notes in math., 540, Spinger, 1976, 696 – 719.

【译注】

1) 共拓扑基因空间 (syntopogeneous space) 是指在它上面定义了共拓扑基因结构 (syntopogeneous structure) 的集合.

共拓扑基因结构的定义如下:

(1) 定义在集合 $E$ 的子集族上的关系 "$<$" 称为 $E$ 上的序拓扑基因 (order topogene), 如果满足

$(O_1)$ $0 < 0$, $E < E$;

$(O_2)$ $A < B \Rightarrow A \subset B$;

$(O_3)$ $A \subset A' < B' \subset B \Rightarrow A < B$;

$(O_4)$ $\begin{cases} A < B \\ A' < B' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \cap A' < B \cap B'. \\ A \cup A' < B \cup B'. \end{cases}$

(2) 考虑集合 $E$ 和 $E$ 上的非空序拓扑基因族 $\mathscr{S} = \{<\}$, $\mathscr{S}$ 称为 $E$ 上的共拓扑基因结构, 如果满足

$(S_1)$ $<'$, $<'' \in \mathscr{S}$, 则存在比 $<'$ 和 $<''$ 细的 $< \in \mathscr{S}$;

$(S_2)$ $< \in \mathscr{S}$, 则存在 $<' \in \mathscr{S}$, 使得

$A < B \Rightarrow$ 存在 $C$, 满足 $A <' C <' B$.

2) 关于拓扑范畴的进一步讨论见[B1].

**参考文献**

[B1] Adamek, J., Herrlich, H. and Strecker, G. E., Abstract and Concrete Categories, John Wiley & Sons, Inc., 1990.

G. Preuss 撰 胡师度、白苏华 译

**拓扑张量积** [**topological tensor product; топологическое тензорное произведение**], 两个局部凸空间 $E_1$ 和 $E_2$ 的

关于 $E_1 \times E_2$ 上双线性算子有泛性质且满足一连续条件的一个**局部凸空间** (locally convex space). 更确切地说, 设 $\mathscr{K}$ 是局部凸空间的某一个类且对每一 $F \in \mathscr{K}$ 设给定从 $E_1 \times E_2$ 到 $F$ 中的分别连续双线性算子集合的一个子集 $T(F)$. 则 $E_1$ 和 $E_2$ 的拓扑张量积 (关于 $T(F)$) 是有以下性质的 (唯一的) 局部凸空间 $E_1 \tilde{\otimes} E_2 \in \mathscr{K}$ 连同算子 $B \in T(E_1 \tilde{\otimes} E_2)$: 对任何 $S \in T(F)$, $F \in \mathscr{K}$, 存在唯一的连续线性算子 $R$: $E_1 \tilde{\otimes} E_2 \to F$ 使得 $R \circ B = S$. 这样, 如果说到函子 $T$: $\mathscr{K} \to$ 集合, 则 $E_1 \tilde{\otimes} E_2$ 定义为这函子的表示对象.

在所有已知的例子中 $\mathscr{K}$ 包含复数域 $\mathbf{C}$, 而 $T(\mathbf{C})$ 包含具有 $f \circ g$ 形式, $f \in E_1^*$, $g \in E_1^*$, 映 $(x, y)$ 到 $f(x)g(x)$ 的所有双线性泛函. 如果在拓扑张量积存在的情形, 则存在一个 $E_1 \tilde{\otimes} E_2$ 中可等同于代数张量积 (tensor product) $E_1 \otimes E_2$ 的稠密子空间; 此外, $B(x, y) = x \otimes y$.

如果 $\mathscr{K}$ 由所有分别 (分别地, 联合) 连续双线性算子组成, 则该拓扑张量积称为归纳的 (inductive) (相应地, 射影的 (projective)). 最重要的是射影拓

扑张量积．设 $\{p_i\}$ 是 $E_i(i=1,2)$ 中的一个半范数定义族；用 $\pi$ 表示用半范数族 $\{p_1\hat{\otimes}p_2\}$ 定义的 $E_1\otimes E_2$ 上的拓扑：

$$p_1\hat{\otimes}p_2(u)=$$

$$=\inf\left\{\sum_{k=1}^{n}p_1(x_k)p_2(y_k):\ \sum_{k=1}^{n}x_k\otimes y_k=u\right\}.$$

如果 $\mathscr{E}$ 是所有的或相应地，所有完全的局部凸空间的类，则 $E_1$ 和 $E_2$ 的射影拓扑张量积存在且其局部凸空间是具有拓扑 $\pi$ 的 $E_1\otimes E_2$，相应地，其**完全化**(completion)．如果 $E_i$ 是带有范数 $p_i$ 的 Banach 空间，$i=1,2$，则 $p_1\hat{\otimes}p_2$ 是 $E_1\otimes E_2$ 上的一个范数；关于它的完全化记成 $E_1\hat{\otimes}E_2$．对每一 $\varepsilon>0$，$E_1\hat{\otimes}E_2$ 的元素有表示

$$u=\sum_{k=1}^{\infty}x_k\otimes y_k,$$

这里

$$\sum_{k=1}^{\infty}p_1(x_k)p_2(y_k)\leqslant p_1\hat{\otimes}p_2(u)+\varepsilon.$$

如果用半范数族 $p_1\tilde{\otimes}p_2$

$$p_1\tilde{\otimes}p_2(u)=\sup_{f,g\in V\times W}|(f\otimes g)(u)|$$

赋予 $E_1\otimes E_2$ 一个弱于 $\pi$ 的拓扑，这里 $V$ 和 $W$ 是关于 $p_1$ 和 $p_2$ 的单位球面的极集，则产生了一个拓扑张量积，有时称为内射的(injective)．

局部凸空间 $E_1$，如果具有这样的性质：对一个任意的 $E_2$ 在 $E_1\otimes E_2$ 上的两个拓扑重合，则它们构成**核空间**(nuclear space)这一重要的类．

射影拓扑张量积是与下述的逼近性质相结合的：局部凸空间 $E_1$ 有逼近性质，如果对每一**准紧集** $K\subset E_1$ 和零的邻域 $U$ 存在有限秩连续算子 $\varphi: E_1\to E_1$ 使得对所有 $x\in K$ 有 $x-\varphi(x)\in U$．所有的核空间都有逼近性质．Banach 空间 $E_1$ 有逼近性质，当且仅当对任意 Banach 空间 $E_2$ 由方程 $[\tau(x\otimes y)](f\otimes g)=f(x)g(y)$ 确切定义的算子 $\tau:[E_1\hat{\otimes}E_2]\to(E_1^*\otimes E_2^*)^*$ 有平凡核．无逼近性质的可分 Banach 空间已经构造出来([3])．这空间也给出了无 Schauder 基的 Banach 空间的一个例子，因为有 Schauder 基的 Banach 空间有逼近性质（这样，S．Banach 所称的"基问题"已被否定地解决了）．

**参考文献**


[1] Grothendieck, A., Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Amer. Math. Soc., 1955.

[2] Schaefer, H. H., Topological vector spaces, Macmillan, 1966.

[3] Enflo, P., A counterexample to the approximation problem in Banach spaces, *Acta Math.*, **130** (1973), 309–317.


А. Я. Хелемский 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Pietsch, A., Nukleare lokalkonvexe Räume, Akad. Verlag, 1965.

[A2] Lindenstrauss, J. and Tzafriri, L., Classical Banach spaces, I, Springer, 1977.

[A3] Treves, F., Topological vector spaces, distributions and kernels, Acad. Press, 1967.

[A4] Pisier, G., Factorisation of linear operators and geometry of Banach spaces, Amer. Math. Soc., 1986.


葛显良 译　鲁世杰 校

## 拓扑传递性 [topological transitivity; топологическая транзитивность]

对于**拓扑动力系统**(topological dynamical system) $\{T_t\}$，通常对于流或瀑布（时间 $t$ 取遍实数或整数）定义的一种性质，它指的是以整个相空间 $W$ 作为其 $\omega$ 极限集的轨道 $\{T_t w_0\}$ 的存在性．（见**轨道的极限集**(limit set of a trajectory)；一个等价条件是在 $W$ 中处处稠密的正半轨道 $\{T_t w_0: t\geqslant 0\}$ 的存在性．）这样的轨道（半轨道）称为拓扑传递的．

与拓扑传递性密切相关的是区域的传递性(transitivity of domains)：对任何非空开集 $U, V\subset W$，存在一个 $t>0$，使得 $T_t U\cap V\neq\emptyset$．更确切地说，拓扑传递性蕴涵区域的传递性，若 $W$ 是完全可分度量空间，则反之亦然（见[1]，[2]）（这时，拓扑传递轨道的集合具有连续统的基数）．因此，在关于 $W$ 的同样假定下，拓扑传递性关于时间的走向是对称的：若存在以整个 $W$ 作为其 $\alpha$ 极限集的轨道 $\{T_t w_0\}$，则有区域的传递性及拓扑传递性．

拓扑传递性通常指的是在 $W$ 中处处稠密的轨道 $\{T_t w_0\}$ 的存在性．（当这种轨道的点组成 $W$ 中的开集时，两定义之间有着本质的不同；否则，轨道本身就是 $\alpha$ 极限或 $\omega$ 极限，因而整个 $W$ 就是它的 $\alpha$ 极限集或 $\omega$ 极限集．）后一定义也用于更一般的变换群([3])．这个定义以及一些结果也适用于不可逆映射和半群，尽管在拓扑动力学中往往不涉及这些．

**参考文献**


[1] Birkhoff, G. D., Dynamical systems, Amer. Math. Soc., 1927.

[2] Немыцкий, В. В., Степанов, В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.-Л., 1949（中译本：В．В．涅梅茨基，В．В．斯捷巴诺夫，微分方程定性论，科学出版社，1956–1959）．

[3] Gottschalk, W. and Hedlund, G. A., Topological dynamics, Amer. Math. Soc., 1955.


Д. В. Аносов 撰

【补注】 具有区域传递性的拓扑动力系统也称为拓扑遍历的（topological ergodic）（在[3]中称为区域传递的（regionally transitive））．在许多情况下，**度量传递性**（metric transitivity）蕴涵拓扑传递性．

罗嵩龄 译

**拓扑向量空间** [**topological vector space**; **топологическое векторное пространство**]，拓扑域 $K$ 上的

装备着与向量空间结构相容的拓扑（见**拓扑结构（拓扑）**（topological structure (topology)））的 $K$ 上**向量空间**（vector space）$E$，即满足以下公理：1）映射 $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$，$E \times E \to E$ 是连续的；和 2）映射 $(k, x) \mapsto kx$，$K \times E \to E$ 是连续的（这里积 $E \times E$ 和 $K \times E$ 看成有积拓扑）．完全类似地可定义拓扑除环（不必交换）上的拓扑左和右向量空间（topological left and right vector spaces）．有时带有拓扑 $\tau$ 的拓扑向量空间 $E$ 表成 $(E, \tau)$．另一方面，关于域 $K$ 的说明常常省略．

同一域上两个拓扑向量空间 $E_1$ 和 $E_2$ 称为同构的（isomorphic），如果存在一个从 $E_1$ 到 $E_2$ 上的连续的一一对应的线性变换且其逆也连续．拓扑向量空间 $(E, \tau)$ 的维数（dimension of a topological vector space）是向量空间 $E$ 的维数．

**在拓扑向量空间上规定拓扑的方法，和该拓扑的性质**．设 $(E, \tau)$ 是拓扑域 $K$ 上的一个拓扑向量空间．此拓扑 $\tau$ 在平移下是不变的（即对任何 $a \in E$ 映射 $x \mapsto x + a$ 是从 $E$ 到自身上的一个同胚）．所以拓扑 $\tau$ 是由任何固定点（特别是零点）的邻域基（base, basis）（基本邻域系）唯一决定的．拓扑 $\tau$ 是与 $E$ 的加群结构相容的，且以下命题成立．1）$E$ 是 Hausdorff 的（分离的），当且仅当对 $E$ 中每一点 $x \neq 0$，存在零的一个邻域不包含 $x$．2）如果 $E$ 是 Hausdorff 的，则它是完全正则的．3）存在 $E$ 上具有下列性质的唯一的一致结构（亦见**一致空间**（uniform space））：a）它在平移下不变（即所有平移是一致连续的）；和 b）与它相伴的拓扑与空间 $E$ 的原拓扑一致．拓扑向量空间中一个集合称为完全的（complete），如果它关于上述的一致结构是完全的．这样，拓扑空间 $E$ 是完全的，如果 $E$ 中每一 **Cauchy 滤子**（Cauchy filter）收敛．对每一拓扑向量空间 $E$，存在一个同一域上的完全拓扑向量空间，包含 $E$ 作为一个处处稠密子集且诱导出 $E$ 上的原拓扑和线性结构．它称为 $E$ 的完全化（completion）．每一 Hausdorff 拓扑向量空间都有 Hausdorff 完全化，在精确到保持空间 $E$ 的元素不动的同构下是唯一的．

此后，除非明确的说明，均假定 $K$ 是一非离散赋范域，赋予由此范数导出的拓扑（见**域上的范数**（norm on a field））．如果 $E$ 是 $K$ 上向量空间，则一个集合 $Q \subset E$ 称为圆形的（circled）或平衡的（balanced），如果对所有 $|k| \leqslant 1$ 的 $k \in K$，$kQ \subset Q$．设 $A$ 和 $B$ 是 $E$ 的两个子集，则称 $A$ 吸收 $B$，如果存在一个正数 $r$ 使得对所有满足 $|k| \geqslant r$ 的 $k \in K$ 有 $kA \supset B$．$E$ 的一个子集称为吸收的（absorbing）或径向的（radial），如果它吸收每一个单点集．在每一个 $K$ 上拓扑向量空间 $E$ 中存在具有以下性质的零的闭邻域基 $\mathscr{V}$：$\alpha$）对每一集合 $V \in \mathscr{V}$ 存在 $W \in \mathscr{V}$ 使得 $W + W \subset V$；$\beta$）每一个 $V \in \mathscr{V}$ 是平衡吸收集；且 $\gamma$）如果 $V \in \mathscr{V}$，则对 $K$ 中每个 $k \neq 0$，$kV \in \mathscr{V}$．另一方面，设 $\tau$ 是 $K$ 上向量空间 $E$ 的一个拓扑且在平移下不变又有一个零的邻域基 $\mathscr{V}$ 满足性质 $\alpha$）和 $\beta$），且又满足以下性质：$\gamma_1$）存在一个 $k \in K$，$0 < |k| < 1$，使得如果 $V \in \mathscr{V}$，则 $kV \in \mathscr{V}$．那么 $E$ 连同拓扑 $\tau$ 是 $K$ 上的拓扑向量空间（在 $K$ 上的范数是 Archimedes 的（见 **Archimedes 公理**（Archimedean axiom）情形，$\gamma_1$）是加在 $(E, \tau)$ 上其他性质的结果））．每一满足 $\alpha$），$\beta$）和 $\gamma_1$），或在有 Archimedes 范数的域的情形至少满足 $\alpha$ 和 $\beta$）的 $K$ 上向量空间 $E$ 的每个滤子基 $\mathscr{V}$ 是关于 $E$ 上某唯一决定的与向量空间结构相容的拓扑 $\tau$ 的零的基本邻域系（不必是闭的）．实数域 $\mathbf{R}$ 或复数域 $\mathbf{C}$ 上的一个拓扑向量空间及其拓扑称为局部凸的（locally convex），如果 $E$ 有一个凸集组成的零的邻域基（局部凸空间的定义有时也要求该空间是 Hausdorff 的）．

例 1）每个拓扑域 $K$ 可看作它本身上的（一维）拓扑向量空间．按此方式考虑，它将表示成 $K_0$．2）设 $I$ 是一非空集，又设 $K_0^I$ 是 $K_0$ 的 $I$ 重积所成的 $K$ 上向量空间，赋予乘积拓扑．那么 $K_0^I$ 是拓扑向量空间．3）如果拓扑域 $K$ 的拓扑是离散的，则 $K$ 上每个向量空间，带有与其加法群结构相容且对与 $K$ 的任意非零元相乘不变的拓扑，就是一个拓扑向量空间（特别地，这些条件被 $E$ 上离散拓扑所满足）．具有离散拓扑的域上的一个拓扑向量空间称为拓扑向量群（topological vector group）．4）设 $E$ 是拓扑域 $K$ 上的一个向量空间，又设 $\mathscr{S}$ 是 $E$ 上半范数的一个集合．$E$ 上按**半范数**（semi-norm）$p$ 半径为 $r > 0$ 的球（ball）是集合 $\{x \in E: p(x) < \gamma\}$．按属于 $\mathscr{S}$ 的（所有）半范数的（所有有正半径的）球的所有有限交的集合构成关于 $E$ 上与向量空间结构相容的某拓扑 $\tau$，的零的邻域基．称此拓扑由 $\mathscr{S}$ 给出或定义．如果 $K = \mathbf{R}$ 或 $K = \mathbf{C}$，则 $\tau_{\mathscr{S}}$ 是局部凸的．反之，任何局部凸空间（locally convex space）的拓扑可由某半范数的集合定义，例如，由平衡凸集组成的零的任意邻域子基的规范函数（Minkowski 泛函）的集合定义．

拓扑向量空间的一个子集称为有界的（bounded），如果被零的每个邻域吸收．

一个拓扑向量空间称为可赋范的（normable），如果它的拓扑可由单一的范数定义．**R** 或 **C** 上一个拓扑向量空间可赋范，当且仅当它是 Hausdorff 的且有零的一个凸有界邻域（Колмогоров 定理（Kolmogorov theorem））．

5）设 $n$ 是一自然数，设 $I_n$ 是包含 $n$ 个元素的一个集合又令 $K_0^n = K_0^{I_n}$．$K_0^n$ 的拓扑由范数 $\|x\| = \sum_{i=1}^{n}|x_i|$ 定义，其中符号 $|\cdot|$ 表示 $K$ 中范数．如果域 $K$ 是完全的，则 $K$ 上每个 $n$ 维拓扑向量空间同构于 $K_0^n$（对 $n=1$ 即使无 $K$ 的完全性假设这仍成立）．如果域 $K$ 是局部紧的，则 $K$ 上一个 Hausdorff 拓扑向量空间是有限维的，当且仅当它有零的一个准紧邻域（Тихонов 定理（Tikhonov theorem））．

一个拓扑向量空间称为可度量化的，如果它的拓扑可由某个度量（metric）定义（在所有这样的度量中，总存在一个平移下不变的）．一个拓扑向量空间可度量化，当且仅当它是 Hausdorff 的且有零的一个可数邻域基．

6）设 $(E, \tau)$ 是一个拓扑向量空间，设 $E_1$ 是 $E$ 的向量子空间又设 $\tau_1$ 是 $E_1$ 上子空间拓扑．拓扑 $\tau_1$ 是与 $E_1$ 的向量空间结构相容的．拓扑向量空间 $(E_1, \tau_1)$ 称为拓扑向量空间 $(E, \tau)$ 的拓扑向量子空间（topological vector subspace）．如果 $\mathscr{U}$ 是 $(E, \tau)$ 中零的一个邻域基（分别地，子基），则集合 $\{V\cap E_1: V\in\mathscr{U}\}$ 构成 $(E_1, \tau_1)$ 中零的一个邻域基（分别地，子基）．如果 $(E, \tau)$ 是 Hausdorff 的（分别地，可度量化的，局部凸的），则 $(E_1, \tau_1)$ 也是如此．如果拓扑 $\tau$ 是由某半范数集合给出，则拓扑 $\tau_1$ 由这些半范数在 $E_1$ 上的限制给出．

7）设 $(E, \tau)$ 和 $E_1$ 如上面的 6)，又设 $E/E_1$ 是 $E$ 关于子空间 $E_1$ 的商向量空间．$E/E_1$ 上商拓扑 $\tau_2$ 与 $E/E_1$ 上向量空间结构是相容的．拓扑向量空间 $(E/E_1, \tau_2)$ 称为 $(E, \tau)$ 在 $E_1$ 上的拓扑向量商空间（topological vector quotient space）．（由商空间定义，一个集合 $V\subset E/E_1$ 在 $\tau_2$ 中是闭的，当且仅当在典范映射 $E\to E/E_1$ 下它的逆象在 $(E, \tau)$ 中闭．如果 $\mathscr{U}$ 是 $E$ 中零的一个邻域基，则在典范映射 $E\to E/E_1$ 下它的元素的象的集合构成 $(E/E_1, \tau_2)$ 中零的一个邻域基（对子基，一般这不成立）．拓扑向量空间 $(E/E_1, \tau_2)$ 是 Hausdorff 的，当且仅当子空间 $E_1$ 在 $(E, \tau)$ 中是闭的．如果 $\overline{\{0\}}$ 表示单元集 $\{0\}$ 在 $(E, \tau)$ 中的闭包，则（Hausdorff）拓扑向量空间 $E/\overline{\{0\}}$ 称为与 $E$ 相伴的 Hausdorff 拓扑向量空间．当然，如果 $E$ 本身是 Hausdorff 的，则相伴 Hausdorff 拓扑向量空间同构于它．如果 $E$ 是局部凸的（分别地，如果 $E$ 可度量化且 $E_1$ 是闭的；或如果 $E$ 可度量化且是完全的），则 $E/E_1$ 是局部凸的（分别地，可度量化，完全的）．然而 $E$ 可以是完全的（不能度量化）且有一个非完全的拓扑向量商（甚至是可分的可度量化的）（见下）．

8）设 $\mathscr{S}$ 是 $[0, 1]$ 上所有 Lebesgue 可测实值函数的向量空间，设 $\mu_l$ 是这区间上的 Lebesgue 测度，对每个 $n\in\mathbf{Z}_+$，令

$$V_n = \left\{f\in\mathscr{S}: \mu_l\left\{t\in[0,1]: |f(t)| > \frac{1}{n+1}\right\} < \frac{1}{n+1}\right\}.$$

集合 $\mathscr{U} = \{V_n: n\in\mathbf{N}\}$ 构成 $\mathscr{S}$ 中具有性质 α) 和 β) 的一个滤子基．设 $\tau$ 是 $\mathscr{S}$ 上带有零的邻域基 $\mathscr{U}$ 的与向量空间结构相容的拓扑，且设 $\mathscr{S}_0$ 是与 $(\mathscr{S}, \tau)$ 相伴的 Hausdorff 拓扑向量空间（$(\mathscr{S}, \tau)$ 本身不是 Hausdorff 的）．拓扑向量空间 $\mathscr{S}_0$ 可距离化，但不是局部凸的．作为一个向量空间，它可恒同于 $[0, 1]$ 上 $\mu_l$ 可测实值函数的 $\mu_l$ 等价类的空间．$(\mathscr{S}, \tau)$（分别地，$\mathscr{S}_0$）中一个序列的收敛与（第一种情形中个体的函数的，而第二种情况下 $\mu_l$ 等价类的）依测度收敛是一样的．

从现在起 $K=\mathbf{R}$ 或 $K=\mathbf{C}$．

9）设 $S=S(\mathbf{R}^n)$ 是取值于 $K$，且满足以下条件的所有 $\mathbf{R}^n$ 上无穷可微函数 $\varphi$ 的向量空间：对 $t=(t_1, \cdots, t_n)\in\mathbf{R}^n$，对所有 $k, \gamma\in\mathbf{Z}_+$，

$$p_{rk}(\varphi) \equiv \max(1+\|t\|^r)\|\varphi^{(k)}(t)\| < \infty,$$

其中

$$\|t\| = [\sum |t_i|^2]^{1/2},$$

$$\|\varphi^{(k)}(t)\| = = \max\left\{\left|\frac{\partial^k\varphi(t)}{\partial t_1^{k_1}\cdots\partial t_n^{k_n}}\right|: k_1+\cdots+k_n = k\right\}.$$

赋予用以上方程定义的范数 $p_{rk}$ 的集合来给定的拓扑 $\tau_S$，$S$ 是完全、可距离化的、局部凸空间（这样的空间称为 Fréchet 空间（Fréchet space））．空间 $(S, \tau_S)$ 在广义函数（generalized function）理论中起着重要作用．有兴趣的是在 $S$ 上没有任何范数使 $S$ 成为 Banach 空间且使得函数 $\varphi\mapsto\varphi(t)$，$S\to K(t\in\mathbf{R})$ 都连续（特别地，$(S, \tau_S)$ 不是可赋范的）．

**构造拓扑向量空间的某些方法**．1）投射拓扑（projective topology）．设 $E$ 是一个向量空间，又对某指标集 $\mathfrak{A}$ 中的每个 $\alpha$，设 $g_\alpha$ 是从 $E$ 到一个拓扑向量空间 $E_\alpha$ 中的线性变换．则使得所有映射 $g_\alpha$ 连续的 $E$ 上的所有拓扑中，有一个最弱的拓扑 $\tau$（拓扑集合 $\{g_\alpha^{-1}(\tau_\alpha): \alpha\in\mathfrak{A}\}$ 的上确界，其中对每个 $\alpha$，$\tau_\alpha$ 是 $E_\alpha$ 上拓扑）．该拓扑 $\tau$ 称为投射拓扑，且赋予 $\tau$ 的

空间 $E$ 称为空间族 $E_\alpha$ 关于映射 $g_\alpha$ 的投射极限（projective limit）．拓扑 $\tau$ 是与 $E$ 上向量空间结构相容的，且如果所有空间 $(E_\alpha, \tau_\alpha)$ 是局部凸的，则 $(E, \tau)$ 也是．（有时术语"投射极限"用于表示一种更特殊的构造，且不是"带投射拓扑的空间"的同义词，见**局部凸空间**（locally convex space）．）

投射拓扑的例：a）空间族 $E_\alpha$ 的积赋予关于投射 $g_\alpha$ 的投射拓扑——术语"投射极限"由来于此．b）设 $E$ 是一个向量空间又设 $\{\tau_\alpha\}$ 是 $E$ 上与向量空间结构相容的一族拓扑．赋予拓扑 $\{\tau_\alpha\}$ 的上确界的空间 $E$ 是拓扑向量空间族 $\{(E, \tau_\alpha)\}$ 关于恒等映射族 $E \to E$ 的投射极限．c）$E$ 的一个拓扑子空间 $E_1$ 是单一族 $\{E\}$ 关于包含映射 $E_1 \to E$ 的投射极限．d）任一局部凸空间是一族 **Banach 空间**（Banach space）的投射极限．

2）归纳拓扑（inductive topology）．设 $E$ 是一个向量空间，且对某集合 $\mathfrak{A}$ 中每个 $\alpha$，设 $g_\alpha$ 是从一个拓扑向量空间 $E_\alpha$ 到 $E$ 中的线性变换．则在 $E$ 中存在：a）一个使所有 $g_\alpha$ 都连续的最强拓扑；b）一个与其向量空间结构相容的且使所有这些映射都连续的最强拓扑；c）一个使所有 $g_\alpha$ 都连续的最强局部凸拓扑（即使所有 $E_\alpha$ 是局部凸空间的情形，这三个拓扑可以不同）．如果所有的 $E_\alpha$ 是局部凸空间，则空间 $E$ 赋于 c）中定义的拓扑就称为空间族 $\{E_\alpha\}$ 关于映射族 $g_\alpha$ 的归纳极限（inductive limit），而该拓扑是（同一空间族关于同一映射族的）归纳拓扑．术语"归纳极限"有时也在不同的意义下使用．这里引入的意义是文献中用得最广的．归纳拓扑是一种投射拓扑，是拓扑集合的上确界．

归纳极限的例：a）局部凸空间族 $\{E_\alpha\}$ 的局部凸直和（direct sum）．这是向量空间族 $\{E_\alpha\}$ 的代数直和 $E$，赋予局部凸空间族 $\{E_\alpha\}$ 关于 $E_\alpha$ 到 $E$ 中的典范包含 $g_\alpha$ 族的归纳拓扑．b）设 $E$ 是一向量空间又设 $\{\tau_\alpha\}$ 是 $E$ 上一族与向量空间结构相容的局部凸拓扑．设 $\tau$ 是它在所有局部凸拓扑的类中的下确界．则局部凸空间 $(E, \tau)$ 是局部凸空间族 $\{(E, \tau_\alpha)\}$ 关于 $E$ 上恒同映射族的归纳极限．c）设 $E$ 是局部凸空间又设 $E_1$ 是一向量子空间．拓扑向量商空间 $E/E_1$ 是单元集 $\{E\}$ 关于典范映射 $E \to E/E_1$ 的归纳极限．d）局部凸空间称为有界型的（bornological），如果从它到任何 Banach 空间中的映每一有界集到有界集的任一线性变换均是连续的．一个局部凸空间是有界型的，当且仅当它是一族可赋范局部凸空间的归纳极限．e）设 $\Omega$ 是空间 $\mathbf{R}^n$ 的一个非空开子集，又对每一紧统 $K \subset \Omega$，设 $D_K$ 是由所有在 $\Omega \setminus K$ 上为零的 $S(\mathbf{R}^n)$ 中函数组成的 $(S(\mathbf{R}^n), \tau_S)$ 的拓扑向量子空间．令 $D(\Omega)$ 是向量子空间 $\bigcup\{D_K: K \subset \Omega\}$ 赋予局部凸空间族 $\{D_K: K \subset \Omega\}$ 关于典范包含 $D_K \to D(\Omega)$ 的归纳拓扑．局部凸空间 $D(\Omega)$（它也在广义函数论中起重要作用）是完全的、Hausdorff 的和不可度量化的．它是一个 **Montel 空间**（Montel space），因而是仿紧的，也是正规的．空间 $D(\Omega)$ 有一个不完全的可度量化商空间（[11]）且后者是某 $\mathbf{R}^N$ 的真稠子空间．

3）映射的空间（spaces of mappings）．设 $E$ 是一拓扑向量空间，$T$ 是一个集合而 $\sigma$ 是 $T$ 的子集的一个集合以包含关系为序，使以下性质成立：对所有的 $B_1, B_2 \in \sigma$ 存在 $B_3 \in \sigma$ 满足 $B_3 \supset B_1 \cup B_2$．设 $L$ 是从 $T$ 到 $E$ 中的映射的某向量空间（带有自然的代数运算），又设 $\mathscr{V}$ 是 $E$ 中零的一个邻域基．对 $B \in \sigma$ 和 $V \in \mathscr{V}$，令 $v_{B,V} = \{g \in L: g(B) \subset V\}$．则集合 $\{v_{B,V}: B \in \sigma, V \in \mathscr{V}\}$ 是对 $L$ 上平移下不变的唯一拓扑的零（把 $T$ 的全体映成 $E$ 的零元的映射 $f \in L$）的一个邻域基．这个拓扑称为在 $\sigma$ 中集合上的一致收敛拓扑（topology of uniform convergence），或简称 $\sigma$ 拓扑（$\sigma$-topology）．这拓扑与 $L$ 上向量空间结构相容，当且仅当对所有的 $f \in L$ 和所有的 $B \in \sigma$ 集合 $f(B)$ 在 $E$ 中有界．例如，如果 $\sigma$ 是 $T$ 的所有有限子集的集合，则以上条件成立．在这种情形下 $L$ 上这个 $\sigma$ 拓扑称为逐点收敛拓扑（topology of pointwise convergence）．这个拓扑是由空间 $E$ 的复本组成的族 $\{E_t: t \in T\}$ 关于映射 $L \to E_t, g \to g(t)$ 的投射拓扑（在 $L$ 中）．赋予 $\sigma$ 拓扑的空间 $L$ 将表成 $L_\sigma$．如果 $T$ 是一个拓扑向量空间且空间 $L$ 的所有元素是连续线性映射而 $\sigma$ 的所有元素是 $T$ 中有界集，则 $L_\sigma$ 也是拓扑向量空间．如果 $E$ 是局部凸空间，则 $L_\sigma$ 也是如此．从拓扑向量空间 $E_1$ 到 $E_2$ 中的所有连续线性映射的向量空间表成 $\mathscr{L}(E_1, E_2)$．特别地，假设 $E$ 是局部凸空间．$E$ 的（拓扑地）对偶（topologically dual）空间是 $E$ 上所有连续线性泛函的向量空间 $E'$．这样 $E' = \mathscr{L}(E, K_0)$．$E'$ 赋予 $E$ 的所有有界子集的集合 $\beta$ 上的一致收敛拓扑，则它称为强对偶（strong dual）（且它的拓扑称为强拓扑（strong topology）），且表成 $\beta(E', E)$．$E'$ 上点式收敛拓扑也称为弱拓扑（weak topology），或更通常地称为弱 * 拓扑（weak-* topology）．对弱 * 拓扑一般采用的记号是 $\sigma(E', E)$．已知 $E'_\sigma$ 的拓扑对偶空间可按显然的方式（$E \ni x \mapsto [g \mapsto g(x)]$）典范地恒同于 $E$．因而 $E$ 可以给予 $E'$ 上点式收敛拓扑 $\sigma(E, E')$（称为弱拓扑（weak topology））．$(E, \sigma(E, E'))$ 常表成 $E_\sigma$．它的对偶是 $E'$，而且 $\sigma(E, E')$ 是使得 $(E, \tau)' = E'$ 的 $E$ 上最弱局部凸拓扑 $\tau$．也有具有此性质的一个最强局部凸拓扑，即所谓的 Mackey 拓扑（Mackey topology）$\mu(E, E')$．Mackey 拓扑是在 $E'$ 的绝对凸 $\sigma(E', E)$ 紧子集上的一致收敛拓扑．当 $E$ 是赋范空间时，

$\sigma(E', E)$ 称为 $E'$ 上弱 * 拓扑. 任何局部凸空间的拓扑可看成其对偶空间的某些子集的集合上的收敛拓扑.

4. 张量积(tensor products). 设 $E_1$ 和 $E_2$ 是局部凸空间, 令 $E_1 \otimes E_2$ 是它们的代数**张量积**(tensor product), 又设 $b$ 是从拓扑空间 $E_1 \times E_2$ 到 $E_1 \otimes E_2$ 中的典范双线性映射. $E_1 \otimes E_2$ 上的投射(projective)(相应地, 归纳(inductive))拓扑是使得 $b$ 连续(相应地, 分别连续)的 $E_1 \otimes E_2$ 上所有局部凸拓扑中的最强者. 即使这术语不是完全一致的, 但它是通常采用的. 在向量空间上由配置投射(分别地, 归纳)拓扑而得到的局部凸空间表成 $E_1 \otimes_\pi E_2 (E_1 \otimes_\iota E_2)$ 且它的完全化表成 $E_1 \hat{\otimes}_\pi E_2 (E_1 \hat{\otimes}_\iota E_2)$. 空间 $E_1 \otimes_\pi E_2$ 和 $E_1 \otimes_\iota E_2$ 称为相应的局部凸空间的局部凸张量积(locally convex tensor product), 而它们的完全化称为完全局部凸张量积. 除了这里引入的那些以外, 还有另外的局部凸张量积. 这些是由于在代数张量积上引入与上述不同的拓扑而产生的. 如果张量积的因子之一是一个**核型空间**(nuclear space), 则它的许多性质就更简单.

例. 局部凸空间 $S(\mathbf{R}^n) \hat{\otimes}_\pi S(\mathbf{R}^k)$, $S(\mathbf{R}^n) \hat{\otimes}_\iota S(\mathbf{R}^k)$ 和 $S(\mathbf{R}^{n+k})$ 是典范同构的(前面两者之间的同构是从 Frécbet 空间之积到任意局部凸空间中每一分别连续双线性映射是连续的这一事实的结果). 局部凸空间 $D(\mathbf{R}^n) \hat{\otimes}_\iota D(\mathbf{R}^k)$ 和 $D(\mathbf{R}^{n+k})$ 也是典范同构的. 向量空间 $D(\mathbf{R}^n) \hat{\otimes}_\pi D(\mathbf{R}^k)$ 和 $D(\mathbf{R}^{n+k})$ 是典范同构的, 但它们的拓扑不一致([8], [9]).

**对偶性**(duality). 局部凸空间及其对偶之间的关系在局部凸空间研究中起着重要的作用. 特别地, 一个局部凸空间的某些性质依赖于其对偶空间的大小. 例如, 如果 $E$ 是一个局部凸空间而 $E'$ 是它的对偶, 则对所有与 $E$ 和 $E'$ 之间对偶性相容的 $E$ 上局部凸拓扑, 有界集恰好是同样的, 且闭凸集也恰好是同样的.

对偶性理论原来对完全空间的研究是有用的. 这样, 一个局部凸空间(分别地, 可度量化的局部凸空间) $E$ 是完全的, 当且仅当如其对偶 $E'$ 的每一个超平面与 $E$ 中零的所有邻域的极集之交在拓扑 $\sigma(E', E)$ 中都是闭的, 则它本身在该拓扑中也是闭的(Banach-Grothendick 定理(Banach-Grothendieck theorem)和 Крейн-Шмульян 定理(Krein-Shmul'yan theorem)).

在这方面可给出以下定义. 一个局部凸空间称为 $B_r$ 完全的($B_r$-complete)(相应地, $B$ 完全的($B$-complete)或满完全的(fully complete), 超完全的(hypercomplete) Крейн-Шмульян 空间(Krein-Shmul'yan space)), 如果 $(E', \sigma(E', E))$ 中与 $E$ 中零的所有邻域的极集之交是闭的处处稠密线性子空间(分别地, 线性子空间, 绝对凸集, 凸集)本身是闭的. 这些空间类在推广 Banach 的闭图象定理和开映射定理(见以下)中起重要作用. 完全可度量化局部凸空间和自反(见以下)可度量化局部凸空间的强对偶属于这些空间类之一. 同时, 空间 $D$ 和 $D'$ 不属于其中任一类. 超完全空间类与 Крейн-Шмульян 空间类不一致. 然而迄今还不知道 $B_r$ 完全空间类和超完全空间类是否一致.

用对偶性方法也可证明关于局部凸空间紧子集的命题. 1) 设 $E$ 是一个局部凸空间又设 $H$ 是具有 Mackey 拓扑中完全闭凸包的 $E$ 的子集. 若 $H$ 的每一元素序列有 $E$ 中极限点, 则 $H$ 是相对紧的(Eberlein 定理(Eberlein theorem)). 2) 设 $E$ 是可度量化局部凸空间又设 $\{x_n\}$ 是 $E$ 中序列其每一子序列有 $(E, \sigma(E, E'))$ 中的极限点. 则从 $\{x_n\}$ 可抽取收敛子序列(Шмульян 定理(Shmul'yan theorem)). 3) 设 $B$ 是 Hausdorff 局部凸空间 $E$ 的一个紧子集又设 $C$ 是 $B$ 的闭凸包. 则 C 是紧的, 当且仅当它在 Mackey 拓扑中是完全的(Крейн 定理(Krein theorem)).

局部凸空间 $E$ 称为半自反的(semi-reflexive)(分别地, 自反的(reflexive)), 如果典范包含 $x \mapsto [g \to g(x)]$, $E \to (E'_\beta)'_\beta$ 是向量空间的同构(分别地, 拓扑向量空间的同构). 一个局部凸空间是半自反的, 当且仅当其中每一个有界子集按拓扑 $\sigma(E, E')$ 是相对紧的. 它是自反的, 当且仅当它是半自反的**桶型空间**(barrelled space).

**拓扑向量空间之间的映射**. 1. 闭图象和开映射定理(closed-graph and open-mapping theorems). 从一个拓扑向量空间 $E_1$ 到一拓扑向量空间 $E_2$ 中的线性映射 $f$ 称为拓扑同态(topological homomorphism), 如果它把 $E_1$ 中每一开集映成 $f(E_1)$ 中开集(按由 $E_2$ 诱导出的拓扑). $f: E_1 \to E_2$ 的图象(graph)是集合 $\{(x, f(x)): x \in E_1\} \subset E_1 \times E_2$.

设 $\mathscr{E}_1$ 和 $\mathscr{E}_2$ 是两个拓扑向量空间类, 称关于偶对 $(\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2)$ 闭图象定理(分别地, 同态定理或开映射定理)成立, 如果对所有的 $E_1 \in \mathscr{E}_1$ 和 $E_2 \in \mathscr{E}_2$, 每一个其图象在拓扑向量空间 $E_1 \times E_2$ 中是闭的线性映射 $f: E_1 \to E_2$ 是连续的(分别地, 如果每一个从 $E_2$ 到 $E_1$ 上的满连续线性映射是拓扑同态). 如果 $\mathscr{E}$ 是所有完全、可度量化的拓扑向量空间的类, 则闭图象定理和开映射定理两者对 $(\mathscr{E}, \mathscr{E})$ 成立(Banach 定理(Banach theorem)). 这结果可以加强. 设 $\mathscr{E}_1$ 是所有作为 Banach 空间族的归纳极限的 Hausdorff 局部凸空间的类(这种空间称为超有界型的(ultrabornological)), 又设 $\mathscr{E}_2$ 是包含所有完全、可度量化局部凸空间且关于其中空间的可数族的投射和归纳极限是封闭的最小局部凸空间类. 则闭图象和开映射定理关

于偶对 $(\mathscr{A}_1, \mathscr{B}_2)$ 成立（Райков 定理（Raikov theorem））.（在泛函分析中出现的具有其通常拓扑的所有完全局部凸空间同时属于这两类.）事实上，上述论断对比 $\mathscr{A}_2$ 稍微宽一些的拓扑向量空间类 $\mathscr{B}'_2$ 可以证明，且可对多值线性映射证明之. 在[7]中已描述了另一类拓扑向量空间 $\mathscr{A}'_2 \supset \mathscr{B}'_2$，它可取代该论断中 $\mathscr{A}_2$ 的地位，这就是所谓带网空间（spaces with a web）.

设 $\mathscr{A}$，$\mathscr{A}_r$，$\mathscr{B}'_r$ 分别是所有 Hausdorff 桶型的、总体完全的，和 $B_r$ 完全的局部凸空间类. 那么闭图象定理对 $(\mathscr{A}, \mathscr{B}'_r)$ 成立，而开映射定理对 $(\mathscr{B}, \mathscr{B}_r)$ 成立.

2. 不动点定理（fixed-point theorems）. a) 设 $E$ 是 Hausdorff 局部凸空间，$K$ 是它的非空凸紧子集，又设 $f$ 是从 $K$ 到 $K$ 的非空凸闭子集的集合中的一个映射. 假设对每个 $x \in K$ 和集合 $f(x)$ 的每个邻域 $\mathscr{U}$，存在 $x$ 的一个邻域 $\mathscr{V}$ 使得 $f(\mathscr{V} \cap K) \subset \mathscr{U}$（$f$ 的这个性质称为上半连续性（upper semicontinuity））；则存在点 $z \in K$，使得 $z \in f(z)$ —— $f$ 的一个"不动点"（樊𰻞定理（Fan theorem）——Schauder-Тихонов 定理（Schauder-Tikhonov theorem）的一种推广）. b) 设 $E$ 是 Hausdorff 拓扑向量空间，$K$ 是它的非空紧凸子集，又设 $\Gamma$ 是从 $K$ 到 $K$ 中的具有以下性质的两两可交换的映射 $g$ 的集合：如果 $x, z \in K$，$\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ 且 $\alpha, \beta > 0$，$\alpha + \beta = 1$，则 $g(\alpha x + \beta z) = \alpha g(x) + \beta g(z)$. 那么存在点 $z_0 \in K$，使得对所有 $g \in \Gamma$ 有 $g(z_0) = z_0$（Марков-角谷静夫定理（Morkov-Kakutani theorem））.

3. 在局部凸空间理论中也有很大重要性的是 **Hahn-Banach 定理**（Hahn-Banach theorem）和 **Banach-Steinhaus 定理**（Banach-Steinhaus theorem）.

在取值于局部凸空间的测度理论中，且特别是与随机过程理论相联系，在局部凸空间上数值柱面测度理论中，许多有意义的结果已经得到.

拓扑向量空间上的数学分析已经兴起，且继续在发展，这就是所谓无穷维分析（infinite-dimensional analysis）. 虽然它是经典分析的一种推广，但是在其中产生的问题和结果方面以及在方法方面与经典分析都有所不同. 无穷维分析包括拓扑向量空间上可微映射和拓扑向量空间上可微测度的理论；拓扑向量空间上广义函数和测度（分布）的理论；以及微分方程理论——包括关于实自变量而取值在拓扑向量空间的函数的微分方程，和关于定义在拓扑向量空间上的数值函数和测度（可以是广义的）的微分方程两者. 无穷维分析的语言对于表述无穷维系统物理学——量子场论、统计力学和流体动力学中的基本问题是很自然的，对于表述起源于无穷维分析以外的某些数学问题也是如此.

**参考文献**


[1] Bourbaki, N.. Elements of mathematics. Topological vector spaces, Addison-Wesley, 1977（译自法文）.

[2] Robertson, A. and Robertson, B., Topological vector spaces, Cambridge Univ. Press, 1964.

[3] Schaefer, H. H., Topological vector spaces, Macmillan, 1966.

[4] Edwards, R. E., Functional analysis: theory and applications, Holt, Rinehardt, Winston, 1965.

[5] Pietsch, A., Nuclear locally convex spaces, Springer, 1972（译自德文）.

[6] Pietsch, A., Operator ideals, Deutsch. Verlag Wissenschaft., 1978.

[7] Wilde, M. de, Closed graph theorems and webbed spaces, Pitman, 1978.

[8A] Schwartz, L., Théorie des distributions, Hermann, 1966.

[8B] Schwartz, L., Théorie des distributions à valeurs vectorielles Ⅰ, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 7 (1957), 1 - 141.

[8C] Schwartz, L., Théorie des distributions à valeurs vectorielles Ⅱ, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **8** (1958), 1 - 209.

[9] Шавгулидзе, Е. Т., 《Функц. анализ и его прил.》, 11 (1977), 1, 91 - 92.

[10] Смолянов, О. Г., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, 35 (1971), 3, 682 - 696.

[11] Смолянов, О. Г., Анализ на топологических линейных пространствах и его приложения, М., 1979.

[12] Jarchow, H., Locally convex spaces, Teubner, 1981.

[13] Grothendieck, A., Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **16** (1965), 1 - 140.

[14] Valdivia, M., Topics in locally convex spaces, North-Holland, 1982.

[15] Köthe, G., Topological vector spaces, 1 - 2, Springer, 1969 - 1979.

[16] Pérez Carrera, P. and Bonet, J., Barrelled locally convex spaces, North-Holland, 1987.

[17] Fröhlicher, A. and Kriegl, A, Linear spaces and differentiation theory, Wiley, 1988.

[18] Смолянов, О. Г., Шавгулидзе, Е. Т., Непрерывные интегралы, М., 1990.


О. Г. Смолянов 撰

【补注】 关于无穷维分析方面，例如见**抽象微分方程**（differential equation, abstract），**微分方程定性理论（Banach 空间中的）**（qualitative theory of differential equations in Banach spaces），**向量测度**（vector measure）以及[A3].

一个局部凸拓扑向量空间是拟完全的（quasi-com-

plete)，如果每一个有界闭集是完全的．每一个拟完全的拓扑向量空间是序列完全的(sequentially complete)(每一个 Cauchy 序列有极限)．有不是拟完全的序列完全空间的例子，也有不是完全的拟完全空间的例子([15])．有自然的拟完全化运算([15]，Vol.1，p.295)．

**参考文献**


[A1] Horvath, J., Topological vector spaces and distributions, 1, Addison-Wesley, 1968.

[A2] Dugundji and Granas, A., Fixed point theory, 1, PWN, 1982.

[A3] Daleckii, Yu. L. and Fomin, S. V., Measures and differential equations in infinite-dimensional spaces, Kluwer, 1992 (译自俄文).


葛显良 译　鲁世杰 校

**拓扑化范畴 [topologized category; топологизированная категория]**

赋予 Grothendieck 拓扑的范畴.

【补注】 见景(site).

**拓扑学 [topology; топология]**

在数学的框架下，研究并阐述连续性思想的数学分支．连续性思想直观地表达了时间和空间的基本性质，因而有重要的学术价值．在拓扑学中，连续性概念得到数学的证明，因此它很自然地渗透到几乎所有的数学分支．拓扑学和代数学一起，构成了数学的普遍基础，促进了数学的统一．

拓扑学的目的是研究图形以及图形之间相互位置关系的性质，这些性质在**同胚**(homeomorphism)之下保持不变．同胚是其逆映射也连续的一一连续映射．因此，可以把拓扑学视为几何学的一个分支．此分支的一个特点是：由其规则界定的研究范围囊括了很广泛的一类几何对象．

导致这种广泛性的原因是：拓扑学的主要概念——同胚——的定义不需要任何经典的几何概念，例如，不需要距离、直线性、线性、光滑性等等概念．同胚的概念及基于它的连续映射概念仅仅假定：被研究的点和图形的点集可以有某种直观上明显的邻近性关系，一般说来，这种关系有别于简单的隶属关系．

拓扑学中的"图形"是这样的任意点集，在它上面，点和满足指定公理的某些点集之间给定了邻近性的关系．这样的图形称为**拓扑空间**(topological space)．实际上，在某种几何(仿射几何、射影几何、微分几何等等)意义下的任意图形自然也可以看作是拓扑空间．在这个意义下，拓扑学是最一般的几何学；而且，在拓扑学中有意略去了其他几何学所研究图形的许多性质．

拓扑学的主要问题是识别和研究空间的拓扑性质，或**拓扑不变量**(topological invariant)．最重要的拓扑不变量是**连通性**(connectivity)；**紧性**(compactness)；**维数**(dimension)；**拓扑空间的权**(weight of a topological space)；**基本群**(fundamental group)；以及**同调群**(homology group)．

此外，受到颇多注意的是一个图形在另一个图形中的位置关系或一个拓扑空间在另一个拓扑空间中的位置关系，这些关系在其包含空间到自身的同胚映射之下保持不变．这类问题始于 **Jordan 定理**(Jordan theorem)．在这些思想的发展进程中，人们得到了 Alexander 对偶律及其推广，**纽结理论**(knot theory)．

按一般的作法，很自然地把三元组 $(X, f, Y)$ 视为拓扑学的主要研究对象，这里 $f$ 是拓扑空间 $X$ 到拓扑空间 $Y$ 的连续映射．它包括上述拓扑学基本问题的两种描述．用范畴论的说法，比较诸三元组的基本工具是它们之间的连续同胚．

现代拓扑学涉及的很多拓扑空间(准确地说，拓扑空间类型)是在反映多种数学分支的很不相同需要的影响下描述的．这表明拓扑空间的范围先天就是多样的．

在作为整个数学对拓扑学的需要而描述的最重要的拓扑空间类中，特别地有：流形(光滑的，分段线性的，拓扑的，等等，见**流形**(manifold))——这些拓扑空间局部地具有 Euclid 空间的结构；多面体(见**抽象多面体**(polyhedron, abstract))——这些空间是由诸如线段、三角形、四面体等初等图形"引伸"出来的．(作为多面体概念的基础的单纯复形的概念，是研究多面体和流形的重要工具)；Euclid 空间的子空间(研究子空间及其在空间中位置关系的拓扑学部分通常称为几何拓扑学)；函数空间(例如具有点态收敛拓扑或具有紧开拓扑的连续函数(映射)空间和具有弱拓扑的 **Banach 空间**(Banach space)——这类拓扑对象在泛函分析及其应用中起重要作用)．

许多重要的拓扑空间类是用公理方式，即以具体拓扑对象的某种重要性质来分类的．例如，Heine-Borel 定理(Heine-Borel theorem)(见 **Borel-Lebesgue 覆盖定理**(Borel-Lebesgue covering theorem))：有限闭区间的由开区间构成的每个覆盖都有有限的子覆盖．该定理导致定义抽象的紧性(compactness)概念(亦见**列紧性**(compactness, countable))和与之相应的紧空间类(见**紧空间**(compact space))．在具体集合上出现的自然**度量**(metric)是**度量空间**(metric space)和**可度量化空间**(metrizable space)的抽象定义的出发点．用邻域来分离点与集合(见**分离公理**(separation axiom))这个直观明显的思想，在拓扑学中被用于定义 Hausdorff 空间类、正规空间类、正则空间类、完全正则空间类，等等．特别地，表述空间的无限可除

性思想的仿紧空间类也是重要的．（见 **Hausdorff 空间**（Hausdorff space）；**正规空间**（normal space）；**完全正则空间**（completely-regular space）；**仿紧空间**（paracompact space）．）

对上述拓扑空间类的研究，由一般的同胚的思想及由此产生的拓扑不变量的概念统一起来．因为同胚概念有特别明显的集合论特征，所以集合论的方法和具有某种复杂性或一般性的结构被用于研究包括上述所有拓扑空间类在内的一些拓扑空间类．这些方法多数具有一般的特性，对于整个拓扑学是有价值的．同时，限于某些固定空间类的拓扑对象的研究要求特殊的、更窄更细致的方法．这些方法用于其适用范围明显不同的拓扑学诸领域，换言之，拓扑学被分解为若干独立的、关联不大的分支（如**代数拓扑学**（algebraic topology）；**微分拓扑学**（differential topology）；几何拓扑学（geometric topology）和一般拓扑学）．然而，拓扑学从一开始就被它的原始概念所统一．在拓扑学的发展进程中，这种统一因许多基本结构、原理和概念对所有拓扑分支的普遍价值而得到加强．诸如**商空间**（quotient space）的概念，**拓扑积**（topological product）运算，函数分离思想，拓扑逼近和拓扑扩张，涉及紧性的诸原理，等等．

在其他数学领域直接影响下形成的拓扑学对象通常具有下列重要特点：其拓扑是由与所研究对象自然联系着的某些其他的、更严格的数学结构产生的．在这方面，产生了下列有关基本性质的问题：

1）给定的"外在"结构（组合的，微分的，代数的等等）的不变量是如何与该结构所生成拓扑的拓扑不变量相联系的？

2）给定的"外在"结构的哪些不变量是它所生成的拓扑的不变量，即哪些是拓扑不变量？

3）准确到同构，由一个给定拓扑生成的给定类型的不同的"外在"结构有多少个？首先，重要的是要弄清楚，是否至少存在一个这样的结构，而特别有意义的是此结构唯一的情形（准确到同构）；因此，它自身就是一个被研究拓扑的（拓扑）不变量（它的所有特征标也都是不变量）．

在一些拓扑学分支，例如，在**流形的拓扑学**（topology of manifold）中，这些一般性问题有重要而又具体的含义．

原则上，涉及度量的和拓扑的不变量之间关系的问题和确定给定拓扑的度量的存在性问题（度量化问题）具有类似的特征．

在更一般空间的情形下，提出了一致结构和它生成的拓扑结构二者的不变量之间关系的问题．研究一致不变量及其与拓扑不变量之间的关系，是一致拓扑（uniform topology）（见**一致空间**（uniform space））的任务．与拓扑结构关系密切的另一种结构是邻近结构．**邻近空间**（proximity space）的概念是建筑在空间的诸子集之间的邻近性关系之上的，它有别于拓扑空间的概念．

拓扑学中基本问题的提法，因被研究拓扑空间类的大小而有所变化．于是，在限定了更窄的空间类之后，人们就面临着用拓扑不变量准确到同构地将它们分类的问题．这个问题看起来是完全自然的，例如，在拓扑流形类中就有这个问题，但是，即使在这个类中，分类也是非常困难乃至在算法上多半是不可解的．准确到同胚的流形分类问题的复杂性，导致研究拓扑空间的同伦等价（homotopy equivalence）关系的必要性（这是比同胚更粗的分类）．基于这种关系，产生了一个连续映射到另一个连续映射的**同伦**（homotopy）的概念，这是具有纯粹的集合论特性的问题．

在拓扑研究中，虽然代数拓扑方法起着极为重要的作用，纯集合论的结构也有本质的作用．例如，这涉及到下述事实：用于流形的同伦等价关系超出了流形类的范围．这里，人们得到较为简单的拓扑对象，对此的研究在技巧方面是很有用的．同伦论方法要求实现集合论的结构，诸如各种类型的"拼接"，把一个拓扑空间和另一个沿着任一连续映射粘合，等等．这导致 **CW 复形**（CW-complex）和**胞腔空间**（cellular space）的概念；后者也构成包括所有可微流形和多面体的极大空间类，且可用代数拓扑方法予以十分全面的研究．

对于较广的空间类，例如所有紧统类，所有仿紧统类或所有度量空间类，不可能提出用一组可计算的拓扑不变量将这些空间准确到同胚地分类的问题，这是因为其直观上的不可解性．在这里，拓扑学的基本问题并不是比较单个的拓扑空间，而是专门用公理的方法来比较整个拓扑空间类，这些类通常对应于不同的拓扑不变量或它们的组合．这样一来，拓扑学的基本问题就转换成了系统比较拓扑不变量的问题．因此，一个系统而又发展的拓扑空间分类法被成功地作出．

这个问题的解法主要有两种．第一种是空间和映射的相互分类法．研究拓扑不变量在不同的连续映射类之下的性质，也研究一个给定类中的拓扑空间何时能表为另一给定类中的空间在某类连续映射之下的象．此问题更重要更自然，因为拓扑空间通常是给定的，且已经与某些连续映射有联系；例如，一个新空间作为某原始拓扑空间的商空间而构造的情形．

第二种是比较法，它应用基数，或基数值、拓扑不变量，也称为**基数特征**（cardinal characteristic）．因为无限基数是基数不变量的值，这就给出了用基数的运算和定律来比较它们的可能性．这一拓扑学方向对于诸如 Martin 公理、连续统假设等集合论的描述依赖

颇深．Суслин 猜测（在集合论的 Zermelo-Fraenkel 公理体系的框架下，其不可解性已获证明）可以用基数不变量的语言来描述．以下是运用基数不变量的颇具特色的推理：对于可度量化空间，密度和重数是一致的；因此，如果给定空间的密度和重数不相同，该空间就是不可度量化的．运用基数不变量理论，得到了许多精采的、意料不到的结果．

尽管为获得上述特殊性质采用的拓扑问题和方法依赖于研究中所选择的拓扑空间类，但决定拓扑学发展的许多基本问题是用一般方法对所有拓扑分支描述，并且是用某些一般的原理和方法来解决的．

下列诸问题是其实例：

a）在拓扑结构或由生成它的外部结构的基础上构造一组拓扑不变量．这时提出的问题是，对各个空间或空间类求出这些不变量．

b）研究拓扑不变量在拓扑空间基本运算下的性质，特别地，研究到子空间的转移运算之下的性质．

c）研究拓扑不变量在不同类（特别是嵌入类）的连续映射下的性质．

d）研究空间及其在某一包容空间中的补的诸拓扑性质之间的关系．几何拓扑学的许多结果，对偶定理以及与拓扑空间及其在紧 Hausdorff 扩张中的剩余的性质有关的一些结果，都是这个方向很好的例证．

在这些一般的方法中，可用于解决所有拓扑分支中多数拓扑问题的方法是：

α）覆盖方法（见**覆盖（集合的）**（covering (of a set)）．此方法给出一个结果，用于解度量化问题，确定和研究仿紧空间，以及确定和研究组合拓扑的基本对象（单纯复形和胞腔复形）．用多面体来逼近拓扑空间，也是基于覆盖方法，特别地，基于覆盖的神经（见**集族的神经**（nerve of a family of set））．关于流形浸入 Euclid 空间的诸定理，是利用开覆盖和与之对应的单位分解来证明的．

β）**函子**（functor）方法．此方法涉及到拓扑空间的具有准确的（函子）性质和容许计算的代数对象或代数拓扑对象．**同调群**（homology group）、**上同调环**（cohomology ring）以及与推广切流形概念的拓扑空间上向量丛概念相伴的 **$K$ 函子**（**$K$-functor**），都是函子的重要实例．拓扑学中的代数方法就是建立在使用这些函子的基础上的．

γ）谱方法（见**空间的谱**（spectrum of space））．其实质是把具有较复杂结构的空间表示为较简单空间（例如，多面体）逆谱的极限．在这方面，人们研究谱的元素和极限空间的那些拓扑不变量之间的关系．谱的概念以某种形式体现了用较简单的或更便于研究的对象来逼近拓扑空间的思想．

广泛的空间类的上同调论构造，以及具有给定综合性质的复杂拓扑空间的实例构造，都以此方法为依据．

δ）连续映射方法：嵌入，一类空间到另一类空间的映射（见**连续映射**（continuous mapping））．在这里，拓扑不变量性质的研究是此方法的实质．把定义在空间一部分的映射连续扩张到整个空间的作法在这个问题的求解中起重要作用．此问题的求解实质上依赖于空间的同伦性质，它处于同伦论的中心位置．特别地，与此问题有关的是阻碍理论和收缩核理论（见**阻碍**（obstruction）；**拓扑空间的收缩核**（retract of topological space））．

ε）**公理方法**（axiomatic method）．此方法给出最广泛且最自然的框架，用以阐明拓扑不变量之间的相互关系，并按照使分类系统而协调的需要在拓扑结构自身"之中"定义新的拓扑不变量和拓扑空间类．这里，人们选定一个拓扑不变量，该不变量由拓扑结构自身所定义，且通常是由被研究类中空间的具体给出方式抽象而得的，而且不考虑计算此拓扑不变量的方法问题．于是，产生了紧统类，连续统类、等等．

拓扑学的应用有两重含义，即它所确定的拓扑分支的应用和拓扑学自身的应用．显然，存在连续性思想时就有可能用到拓扑学．

在具体情形下，尽管拓扑学的上述应用是多方面的，但可以举出许多一般性的原理和方法，拓扑学的多数应用都是以此为依据的．例如，流形理论在力学和微分方程理论中有最直接的应用；同调论已超出了拓扑学的框架，发展成一个重要的独立学科分支——**同调代数**（homological algebra），此分支已用于代数几何，Banach 代数理论，等等．下列概念得自拓扑学的代数处理及与之相关的应用：流形；由微分拓扑产生的 $K$ 函子；**配边**（cobordism）理论，它对微分拓扑的发展有重要作用，且已用于代数几何（**Riemann-Roch 定理**（Riemann-Roch theorem））及椭圆算子理论（**指标公式**（index formulas）），等等．**映射度**（degree of mapping）在应用上也很重要．所谓代数基本定理的证明就要用到它．同调和同伦的概念与方法在无限维函数空间的应用分析上有实质性影响——特别地，对于偏微分方程解的存在性定理．连续映射的不动点定理也有重要应用．这些定理兼有集合论性质和代数性质，其应用具有定性的特点；它们的目的不是计算这样那样的对象，而是证明其存在．把拓扑结构和线性结构结合起来的许多重要原理都带有同样的目的．例如，关于凸紧统端点的 Крейн-Мильман 定理，Banach-Steinhaus 定理，闭图象定理，关于单位球在弱拓扑下的紧性的 Alaoğlu 定理，关于具有弱拓扑的 Banach 空间中紧统的 Eberlein-Шмульян 定理，等等．

存在许多"纯"集合论性质的拓扑原理与概念．其中有：紧性（可数紧性）概念；关于紧空间拓扑乘积之紧性的 Тихонов 定理；关于紧集在任意 Hausdorff 空间中的封闭性定理；紧性作为绝对封闭性的刻画；Stone-Weierstrass 定理；完全性及其相关原理；压缩映射的不动点定理；关于可数个处处稠密开集族交集非空性的 Baire 定理；等等．拓扑维数以及紧性和完全性无疑是最重要的一般数学概念之一．

在泛函分析、位势论等分支的许多结构中，拓扑空间和边界的扩张概念有实质性作用（在函数代数中：Шилов 边界，Martin 边界和 Choquet 边界）．

**拓扑动力学**（topological dynamics）的性质要求对集合论的概念和拓扑结构作更广泛的抽象．仅仅给出讨论和分析诸如下面那样一些概念的框架：轨道的极限集，殆周期性，极小集、Lagrange 稳定性，Poisson 稳定性、非游荡点，等等．在这里，紧性再一次起了非常重要的作用．

拓扑学的（特别是集合论的）概念和方法很自然地出现在拓扑代数中．在应用拓扑方法时，应当注意，在与拓扑学一致的某些代数结构中，拓扑不变量之间的关系可能变化甚大：许多熟知的关系被简化了，出现了一些新的深刻关系．

拓扑学的集合论的结构在数理逻辑中有重要应用．

**参考文献**


[1] Александров，П．С．，Комбинаторная топология，М．-Л．，1947（英译本：Aleksandrov，P．S．，Combinatorial topology，Graylock，Rochester，1956）．

[2] Sullivan，D．，Geometric topology，M．I．T．，1971．

[3] Hu，S．-T．，Homotopy theory，Acad．Press，1959．

[4] Steenrod，N．E．，The topology of fibre bundles，Princeton Univ．Press，1951．

[5] Spanier，E．H．，Algebraic topology，McGraw-Hill，1966（中译本：E．H．斯潘尼尔，代数拓扑学，上海科学技术出版社，1987）．

[6] Hurewicz，W．and Wallman，H．，Dimension theory，Princeton Univ．Press，1948．

[7] Новиков，С．П．，《Успехи матем．наук》，**21**（1966），5，217－232．

[8] Александров，П．С．，《Успехи матем．наук》，**19**（1964），6，3－46．

[9] Александров，П．С．，Федорчук，В．В．，《Успехи матем．наук》，**33**（1978），3，3－48．

[10] Kuratowski，K．，Topology，1－2，Acad．Press，1966－1968（译自法文）．

[11] Александров，П．С．，Пасынков，Б．А．，Введение в теорию размерности …，М．，1973．

[12] Kelley，J．L．，General topology，Springer，1975（中译本：J．L．凯莱，一般拓扑学，科学出版社，1982）．

[13] Архангельский，А．В．，Пономарев，В．И．，Основы общей топологии в задачах и упражнениях，М．1974（英译本：Arkhangel'skiĭ，A．V．and Ponomarev，V．I．，Fundamentals of general topology：problems and exercises，Reidel，1984）．

[14] Архангельский，А．В．，《Успехи матем．наук》，**33**（1978），5，29－84．

[15] Топология，БСЭ-3，**26**，86－92．

[16] Геометрия，БСЭ-3，**6**，307－313．

[17] Сибирский，К．С．，Введение в топологическую динамику，Кишинев，1970（英译本：Sibirskiĭ，K．S．，Introduction to topological dynamics，Noordhoff，1975）．


А．В．Архангельский 撰

【补注】 直到 60 年代，大约在 P．Cohen 为了证明**集合论**（set theory）中基本的独立性定理而引入**力迫法**（forcing method）之时（[A3]），一般拓扑学主要还是用否定方式定义．一般拓扑学是不局限于具有多种结构的经典流形的拓扑学（见**流形**（manifold）；**流形的拓扑学**（topology of manifolds））；仅有拓扑结构之空间的拓扑学．有人认为，几何拓扑学（geometric topology）的范围从**扭结理论**（knot theory）（它并不总是一般拓扑学）经 3 维拓扑学（它虽然很特殊，但部分地是产生概念与方法的温床，因而可以大为推广）发展到怪异"流形"理论，怪异流形的建立类似于用图册来建立经典流形，不过，它使用的不是 Euclid 空间的而是具有适当自相似性质的其他可度量化空间的初等部分．

一般拓扑学的成功领域中的一个例子是类胞腔映射（cell-like mapping）（[A5]），其中心思想起源于在 R．H．Bing 的著名例子"犬骨"中涉及的 3 维拓扑学（[A1]）．这些映射（闭满射，其纤维同胚于可表为收缩的胞腔序列之交集的流形的子集）在流形的刻画中起实质性作用，见**流形的拓扑学**（topology of manifolds）．正因为模拟同胚，它们很早就脱离了流形而列入维数论和几何拓扑学．Kozlowski-Walsh 定理（Kozlowski-Walsh theorem）（[A9]）表明：3 维流形在类胞腔映射下的象最多是 3 维的．此结论对所有有限维连续统是否成立（即它们的类胞腔象是否一定是有限维的）问题，至今是维数论的主要问题之一（[A5]）．至于怪异流形，第一种类型（初等部分不是线性空间）是 Hilbert 立方体流形（Hilbert cube manifold）（[A2]）．现已证明 K．Menger 的万有空间 $M_n^m$（见 **Menger 曲线**（Menger curve））与 $m$ 最终（即对大的 $m$）是无关的，并且适合作为 $M_n$ 流形理论的基础（[A4]）．

随着集合论（模型）的增加，在一般拓扑学中集合论的影响逐渐占了上风．《集合论的拓扑学手册》（Handbook of Set-Theoretic Topology）（[A10]）是一般拓扑学家必备的参考书．该书开始的三章是关于基

数特征（基数不变量，见**基数特征**（cardinal characteristic））的．第三章全部涉及可数性．与**描述集合论**（descriptive set theory）比较，在这方面它无疑已确立了一个独立的地位，但还不能从一般拓扑学分开．进一步，关于涉及 Н. Н. Лузин（1914）和 В. Серпинский（1924）的著名的构造问题有着活跃的工作，他们二人的构造理论起源于**连续统假设**（continuum hypothesis；CH），见［A10］，第 5 章．一般说来，在 CH 之下作的每项工作都会提出这样的问题：在 ¬CH 之下又如何？见［A10］，第 19 章，关于 Martin 公理．而且，其中有一个分支特别活跃，称为"$S$ 和 $L$ 问题"（"基本的 $S$ 和 $L$ 问题"，［A10］，第 7 章）．它出自 Суслин 猜测（见 **Суслин 假设**（Suslin hypothesis））：遗传的 Lindelöf 线性序空间必是可分的．然而，在 Cohen（［A3］）之后不久，S. Tenenbaum（［A14］）和 T. Jech（［A8］）就证明了：此猜测与 ZFC 无关，即与通常的集合论公理无关．$L$ 空间问题（$L$-space problem）是："每个遗传 Lindelöf 正则 $T_1$ 空间都是可分的"是否与 ZFC 相容？$S$ 空间问题（$S$-space problem）是："每个遗传可分的正则 $T_1$ 空间是 Lindelöf 的"是否是相容的？S. Todorčević 在 1983 年给出了肯定的证明（［A15］）．此分支学科研究在各种空间类型和各种集合论模型中的这些性质之间的关系．［A10］中有好几章主要讨论 $S$ 和 $L$ 问题．

覆盖性质（covering property）（包括紧性）和正规性（乘积的正规性、集体正规性、正规 Moore 空间问题）的范围界线，是一直很活跃的两个邻近领域．其中最大的问题是研究了多年的正规 Moore 空间问题（normal Moore space problem）．它涉及 R. L. Moore 的正则可展空间，而不是 **Moore 空间**（Moore space）条目中 J. C. Moore 的空间．原问题（1930 年）是：是否所有正规 Moore 空间都是可度量化的？在［A10］的第 15 章中，对其复杂的历史回顾颇多．迄今得到的结果有：a）对于给定的很大的基数，每个正规 Moore 空间都是可度量化的；但出人意料的是，大基数实质上是必须的．特别地，b）如果集合的全域没有可测基数的内模型，则存在一个不可度量化的正规 Moore 空间．更多的介绍见［A10］第 16 章，其中包括 K. Kunen 和 P. Nyikos 的定理，同时给出了 a）的另一种说法．颇为难办的是：给定一个强紧基数 $\kappa$，用作出 $\kappa$ 个随机实数（random real numbers）的方式构造的模型可能没有不可度量化的正规 Moore 空间．显然，解释这种情况是拓扑学的一个很重要的任务．

拓扑测度论（topological measure theory）这一分支学科值得重视，它有点脱离了一般拓扑学，而且脱离的趋势颇强，当然，测度的重要性主要还是在泛函分析中．对此分支至 1984 年止的回顾见［A10］的第 22 章．与测度论相比，泛函分析有相当广泛的部分依赖于拓扑方法，其程度与分析方法一样（见［A10］第 23 章）．若干性态良好的紧空间类，例如 Corson 紧空间（Corson compact space），Eberlein 紧空间（Eberlein compact space），或多或少是按泛函分析意义来定义的．这些空间类中最早的是 **Eberlein 紧统**（Eberlein compactum）：在弱拓扑下同胚于 Banach 空间之一子集的紧空间．Corson 紧空间成为一个较广的类，其定义开始显示出这一领域的思想倾向：Corson 紧空间是这样一种紧空间，在点态收敛拓扑下，它可嵌入到某一集合 $I$ 上的具有可数支集的实值函数集合中．

特殊连续统提出这样的问题：关于空间 $X$，$X$ 上的实值连续函数的线性拓扑空间 $C_p(X)$ 能告诉我们什么呢？这里，必须假定 $X$ 是完全正则的，从而存在足够多的实值连续函数．背景是 И. М. Гельфанд，M. H. Stone 和 E. Hewitt 的经典结果：$X$ 上的有界实值连续函数所成的 Banach 空间严格地确定了 $X$ 的 **Stone-Čech 紧化**（Stone-Čech compactification），$X$ 上所有实值连续函数所成的环严格地确定了 $X$ 的 **Hewitt 实紧化**（Hewitt realcompactification）（［A6］）．$C_p(X)$ 的拓扑并不确定 $X$ 是否是紧的（［A7］）．然而，作为一致空间（作为加法拓扑群由其结构诱导的），$C_p(X)$ 确定了紧性（［A16］）．这个特殊的分领域尚处于发展初期（亦见［A22］）．

准确检验给定 4 维流形的同胚问题，其算法不可解性是 A. A. Марков 在 1958 年证明的（［A11］）．现在已经有两份关于一般拓扑学来解决问题的权威性目录（［A12］，［A13］）．

**参考文献**


［A1］Bing, R. H., A decomposition of $E^3$ into points and tame arcs such that the decomposition space is topologically different from $E^3$, *Ann. of Math.*, **65**(1957), 2, 484 – 500.

［A2］Chapman, T. A., Lectures on Hilbert cube manifolds, Amer. Math. Soc., 1976.

［A3］Cohen, P. J., Set theory and the continuum hypothesis, Benjamin, 1966.

［A4］Dranishnikov, A. N., Universal Menger compacta and universal mappings, *Math. USSR-Sb.*, **57** (1987), 139 – 149 (*Mat. Sb.*, **129** (1986), 121 – 139).

［A5］Dranishnikov, A. N. and Shchepin, E. V., Cell-like maps. The problem of raising dimension, *Russian Math. Surveys*, **41** (1986), 6, 59 – 111 (*Uspekhi Mat. Nauk*, **41** (1986), 6, 49 – 90).

［A6］Gillman, L. and Jerison, M., Rings of real-valued continuous functions, v. Nostrand, 1960.

［A7］Gul'ko, S. P. and Khmyleva T. E., Compactness is not preserved by the $t$-equivalence relation, *Math.*

*Notes*, **39** (1986), 484 – 487 (*Mat. Zametki*, 39 (1986), 895 – 903).
[A8] Jech, T. J., Trees, *J. Symbolic Logic*, **36** (1971), 1 – 14
[A9] Kozlowski, G. and Walsh, J. J., Cell-like mappings on 3-manifolds, *Topology*, **22** (1983), 147 – 153.
[A10] Kunen, K. and Vaughan, J. E. (eds.), Handbook of Set-theoretic topology, North-Holland, 1984.
[A11] Markov, A. A., Unsolvability of the homeomorphy problem, in Proc. Internat. Congress Mathem, (Cambridge, 1958). Cambridge Univ. Press, 1960, 300 – 306.
[A12] Mill, J. van and Reed, G. M. (eds.), Open problems in topology, North-Holland, 1990.
[A13] Mill, J. van and Reed, G. M., Open problems in topology, *Topology and its Appl.*, **38** (1991), 101 – 105.
[A14] Tenenbaum, S., Souslin's problem, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **59** (1968), 60 – 63.
[A15] Todorčević, S., Forcing positive partition relations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **280** (1983), 703 – 720.
[A16] Uspen'skiĭ, V. V., A characterization of compactness in terms of uniform structure in a function space, *Russian Math. Surveys*, **37** (1982), 4, 143 – 144 (*Uspekhi Mat. Nauk*, 37 (1982), 4, 183 – 184).
[A17] Willard, S., General topology, Addison-Wesley, 1970.
[A18] Nagata, J., Modern general topology, North-Holland, 1985.
[A19] Brown, R., Topology, Ellis Horwood, 1988.
[A20] Morita, K. and Nagata, J. (eds.), Topics in general topology, North-Holland, 1989.
[A21] James, I. M., General topology and homotopy theory, Springer, 1984.
[A22] Arkhangel'skiĭ, A. V., Topological function spaces, Kluwer, 1991 (译自俄文).

白苏华、胡师度 译

**紧收敛拓扑[topology of compact convergence; компактной сходимости топология]**

连续函数空间上的拓扑中的一种；与**紧开拓扑**(compact-open topology)相同．对于从局部凸空间 $E$ 到局部凸空间 $F$ 中的线性映射的空间 $L(E, F)$，紧收敛拓扑是 $\sigma$ 拓扑中的一种，即在属于 $E$ 中有界集的一个集族 $\sigma$ 的集合上一致收敛的拓扑；它是与 $L(E, F)$ 的向量空间结构相容的且是局部凸的．

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 这样 $L(E, F)$ 上紧收敛拓扑是由所有紧集的族定义的([A1])．

准紧收敛拓扑(topology of pre-compact convergence)是由所有准紧集的族定义的 $\sigma$ 拓扑([A2])．

$\mathbf{R}^n$ 上所有 $m$ 次可微的实或复值函数的空间 $C^m(\mathbf{R}^n)$ 上的按所有导数紧收敛的拓扑(topology of compact convergence in all derivatives)是由伪范数

$$\{q_K^{(m)}: K\subset \mathbf{R}^n \text{ 紧}\},$$

$$q_K^{(m)}(f)=\sup\{|D^p f(x)|: x\in K, |p|\leqslant m\}$$

的族定义的．由此得到的函数空间是局部凸和可度量化的([A3])．

**参考文献**

[A1] Treves, F., Topological vector spaces, distributions and kernels, Acad. Press, 1967, 198.
[A2] Köthe, G., Topological vector spaces, 1, Springer, 1969, p. 263 ff.
[A3] Kelley, J. L. and Namioka, I., Linear topological spaces, v. Nostrand, 1963, 82.

葛显良 译 鲁世杰 校

**嵌入的拓扑学[topology of imbeddings; топология вложений]**

拓扑学的一个分支，在其中，研究 Euclid 空间或流形的闭子集所特有的局部拓扑性质．

嵌入的拓扑学出现在 A. Schoenflies, L. Antoine, П. С. Урысон 和 J. Alexander 的工作中． $E^3$ 中的嵌入是 20 世纪 50 年代被研究的．特别地，证明了曲面到 $E^3$ 中的嵌入可由多面体嵌入拓扑地逼近．对 $n>3$，嵌入到 $E^n$ 的拓扑的系统的研究开始于 **Schoenflies 猜想**(Schoenflies conjecture)解决之后．基本地，它是在事实的积累和解决了大量的特殊性问题后来到的．嵌入的拓扑理论的方法和几何的**流形的拓扑学**(topology of manifolds)之间的关系也被阐明了．大约在 20 世纪 70 年代中期，嵌入的拓扑学被系统地表达成一个有它自己的术语、方法和问题的独立分支．它用于解决流形的几何拓扑学中的一些基本问题：证明了维数 $\geqslant 5$ 的球面的非组合三角剖分存在性，得到了拓扑流形的特征和单连通四维流形的分类．

空间 $X$(作为规定，流形，多面体或紧集)在 Euclid 空间 $E^n$ 中的拓扑嵌入(topological imbedding)是从 $X$ 到空间 $f(X)\subset E^n$ 中的任意同胚 $f: X\to E^n$．有时，拓扑嵌入被简单地理解为一个包含 $X\subset E^n$．两个嵌入 $f_1, f_2. X\to E^n$ 称作等价的(equivalent)，如果存在一个同胚 $h: E^n\to E^n$ 使得 $h\circ f_1=f_2$．如果 $h$ 是一个同痕，则称嵌入 $f_1, f_2$ 是同痕的(isotopic)．

非等价嵌入的最简单的例子是用纽结(见**纽结理论**(knot theory))得到的；在 $E^3$ 中构造一个零维紧体或线段的非等价嵌入是更加困难的(见**非驯纽结**(wild knot))．

位于 $E^3$ 中的直线段上的 Cantor 集和 $E^3$ 中的非驯零维 Antoine 紧统是非等价的．

拓扑嵌入理论的基本问题集中于局部性质上这个事实由称为非驯嵌入的存在性所解释：对该非驯嵌入，局部构造的正则性被破坏了．驯顺（局部平坦）嵌入的整体性质的研究，作为规则，不包含在嵌入的拓扑学中（也见驯顺嵌入（tame imbedding））．

下面的四个定理被看作是拓扑嵌入理论的基础．

定理 1（表征（characterization））．嵌入 $X\subset E^n$ 是驯顺的，当且仅当补集 $Y=E^n\setminus X$ 有性质 1－ULC（对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得每个 $\delta$ 映射 $S^1\to Y$ 在 $Y$ 中 $\varepsilon$ 同伦于零）．

定理 2（关于闭嵌入（close imbeddings））．任何两个闭驯顺嵌入由一个小的合痕是合痕的．

定理 3（关于在平凡维的区域中的嵌入（imbeddings in a trivial-dimensional domain））．如果 $2\dim X+2\leqslant n$，则任何两个驯顺嵌入是合痕的．

定理 4（关于逼近（approximation））．任何嵌入可用驯顺嵌入逼近．

除了定理 3，所有这些定理都只在对维数加以限制下给出了证明；这些限制对于流形、多面体和紧体是不同的．

流形 $X$ 在 $E^n$ 中的一个嵌入是驯顺的（tame）（或局部平坦的（locally flat）），如果对任何点 $x\in X$，存在 $E^n$ 中的一个邻域 $U(x)$，使得对 $(U(x),U(x)\cap X)$ 在一个使点变到 $E^n$ 中的原点的同胚变换下同胚于标准的对（homeomorphic to the standard pair）$(E^n,E^r)$．

定理 1 当 $n\neq 4$ 和 $r\neq n-2$ 时成立（如果 $r=n-2$ 和 $n\geqslant 5$，答案也是已知的：对于补集 $Y=E^n\setminus X$，粗略地讲，同伦等价于一个圆是必要的）．

当 $r\neq n-2$ 和 $n\geqslant 5$ 时，定理 2 成立（附加一个小纽结表明，对 $r=n-2$，定理 2 显然是不对的；当 $r=n-2$ 时，对于两个嵌入是合痕闭的条件是知道的）．另外，如果 $X$ 是球面 $S^r$，则已经证明，当 $r\neq n-2$ 时，任何驯顺嵌入 $S^r\to E^n$ 是合痕于标准的（如果 $r=n-2$ 和 $n\neq 4$，这是正确的，当且仅当补集 $E^n\setminus S^{n-2}$ 同伦等价于一个圆）．

定理 4 当 $r\neq n-2$ 和 $n\neq 4$ 时成立（但是，如果 $r=n-2$ 和 $n\geqslant 6$——相应的反例表明——显然是不对的）．

多面体 $X$ 在 $E^n$ 中的一个嵌入称作是驯顺的(tame)，如果它等价于分片线性嵌入．定理 1,2 和 3 当 $\dim X\leqslant n-3$ 时成立．

一个 $r$ 维紧统 $X$ 在 $E^n$ 中的嵌入称为驯顺的（tame），如果可以由一个合痕将它从一个任何直线多面体 $P\subset E^n$（维数 $\leqslant n-r-2$）中移开．当 $r\leqslant n-3$ 和 $n\neq 4$ 时，定理 1 成立，一般地讲，（如果 $2r+2>n$）定理 2 不真而定理 4 对任何 $r$ 都成立．

**参考文献**


[1] Келдыш, Л. В., Топологические вложения в евклидово пространство, М., 1966 (英译本：Keldysh, L. V., Topological imbeddings in a Euclidean space, Amer. Math. Soc, 1968)

[2] Чернавский, А. В.,《Докл. АН СССР.》, **181** (1968), 2, 290－293.

[3] Чернавский, А. В.,《Матем. сб.》, **91** (1973), 2, 279－286.

[4] Daverman R., Locally nice codimension one manifolds are locally flat, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **79** (1973), 2, 410－413.

[5] Chapman, T., Locally homotopically unknotted embeddings of manifolds in codimension two are locally flat, *Topology*, **18** (1979), 339－348.

[6] Ancel, F. and Cannon, J., The locally flat approximation of cell-like embeddings, *Ann. of Math.*, **109** (1979), 61－86.

[7] Bryant, J. and Seebeck, C. L., Locally nice embeddings of polyhedra, Quart. *J. Math.*, **19** (1968), 257－274.

[8] Edwards, R. D., The equivalence of close piecewise linear embeddings, *General Topol. Appl.*, **5** (1975), 2, 147－180.

[9] Miller, R. T., Approximating codimension three embeddings, *Ann. of Math.*, **95** (1972), 3, 406－416.

[10] Bryant, J. L., Approximating embeddings of polyhedra in codimension three, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **170** (1972), 85－95.

[11] Edwards, R. D., Dimension theory Ⅰ, in L. C. Glase and T. B. Rushing (eds.): Geometric topology (Utah. 1974), Lecture notes in math., Vol. 438, Springer, 1975, 195－211.

[12] Штанько, М. А.,《Матем. сб.》, **90** (1973), 4, 625－636.


М. А. Штанько 撰

【补注】一个给定的空间是否允许嵌入到特定的 $E^n$ 中以及这样的嵌入的分类问题曾是代数拓扑学中许多研究的课题．H. Whitney([A1]) 证明了每个光滑 $n$ 维流形可以嵌入在 $E^{2n}(n>1)$ 中，**示性类**(characteristic class)的理论给出了将给定的 $n$ 流形嵌入到较低维的流形中的必要条件．例如，维数 $n=2^k$ 的实射影空间不能嵌入到 $E^{2n-1}$ 中．对维数的某些范围，A. Haefliger ([A2]) 给出了充分条件．吴文俊([A3]，[A4])发展了单纯复合形的嵌入的代数不变量．

也见**胎紧和套紧浸入**（tight and taut immersions）．

**参考文献**


[A1] Whitney, H., The self-intersections of a smooth $n$-manifold in $2n$-space, *Ann. of Math.*, **45** (1944), 220－246.

[A2] Haefliger, A., Plongements différentiables dans la domaine stable, *Comm. Math. Helvetici*, **37** (1963),

155 − 176.

[A3] 吴文俊，复形在欧氏空间中的实现 I，中国科学，7(1958)，251 − 297.

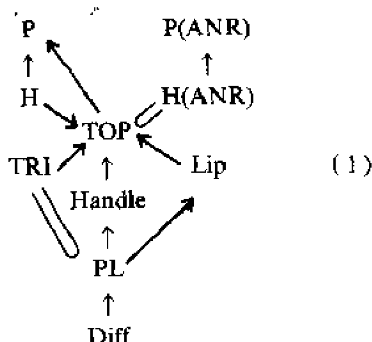
[A4] 吴文俊，复形在欧氏空间中的实现 II，中国科学，8(1959)，79 − 94.

[A5] Moise, E. E., Geometric topology in dimensions 2 and 3, Springer, 1977. 薛春华 译

**流形的拓扑学 [topology of manifolds; топология многообразий]**

研究不同类型流形之间关系的流形（manifold）理论的一个分支.

有限维流形的最重要的类型和它们之间的关系在（1）中由图所表明. 这里 Diff 是微分（光滑）流形的



(1)

范畴; PL 是分片线性（组合）流形的范畴; TRI 是多面体的拓扑流形的范畴; Handle 是允许拓扑分解为环柄的拓扑流形的范畴; Lip 是 Lipschitz 流形（带局部图卡之间的 Lipschitz 转移映射）的范畴; TOP 是拓扑流形（Hausdorff 和具有可数基）的范畴; H 是无边（多角体，它的每个顶点的星形状的边界有相应维数的球面的同调）的多面体同调流形的范畴; H(ANR) 是广义流形（同调于无边流形的有限维绝对邻域收缩核 $X$，即具有性质: 对任何点 $x\in X$，群 $H^*(X, X\setminus x; \mathbf{Z})$ 同构于群 $H^*(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n\setminus 0; \mathbf{Z})$) 的范畴; P(ANR) 是 Poincaré 空间（有限维绝对邻域收缩核 $X$，对于它，存在数 $n$ 和元素 $\mu\in H_n(X)$ 使得当 $r\geqslant n+1$ 时，$H_r(X, \mathbf{Z})=0$ 和对所有的 $r$，映射 $\mu\cap: H^r(X)\to H_{n-r}(X)$ 是一个同构）的范畴; P 是 Poincaré 多面体的范畴（由多面体组成的上述范畴的子范畴）.

（1）中的箭头，除了三个较低的和箭头 H → TOP → P 外，表示具有遗忘函子结构的函子. 箭头 Diff → PL 表示关于光滑流形可三角剖分性的 Whitehead 的定理. 当维数 $<8$ 时，箭头是可逆的（任何 PL 流形是可光滑的），但在维数 $\geqslant 8$ 时，存在不可光滑的 PL 流形，甚至同伦等价于任何光滑流形的 PL 流形. 嵌入 PL ⊂ TRI 在同样强的意义下也是不可逆的（存在同伦等价于任何 PL 流形的维数 $\geqslant 5$ 的多面体流形），这里，对 $n\geqslant 5$ 的球面 $S^n$，早已存在三角剖分，但在其中，它不是一个 PL 流形.

箭头 PL → Handle 表示事实: 每个 PL 流形有环柄分解.

箭头 PL → Lip 表示了关于在任何 PL 流形上的 Lipschitz 结构的存在性定理.

箭头 Handle → TOP 当 $n\neq 4$ 时是可逆的，而当 $n=4$ 时是不可逆的（任何维数 $n\neq 4$ 的拓扑流形允许一个环柄分解和存在四维拓扑流形，对于它，这不是真的）.

类似地，如果 $n\neq 4$，箭头 Lip → TOP 是可逆的（且进一步是唯一的方法）.

关于箭头 TRI → TOP 的可逆性问题给出了关于任何拓扑流形的可三角剖分性的古典的不可解问题.

箭头 H → P 在强的意义下是不可逆的（存在不同伦等价于任何同调流形的 Poincaré 多面体）.

箭头 H → TOP 表示了有关任何一个维数 $\geqslant 5$ 的同调流形同伦等价于一个拓扑流形的定理.

箭头 TOP → P 表示了关于任何一个拓扑流形同伦等价于一个多面体的定理.

嵌入 TOP ⊂ H(ANR) 表示了任何一个拓扑流形是一个 ANR.

对于箭头 Diff → PL → TOP → P，类似的问题已经用稳定丛（分别是向量、分片线性、拓扑和球丛）的理论解决了，即通过检查流形 $X$ 到相应的分类空间 BO, BPL, BTOP, BG 的映射的同伦类.

存在典型的合成映射

$$\mathrm{BO}\to\mathrm{BPL}\to\mathrm{BTOP}\to\mathrm{BG},\qquad (2)$$

它的同伦纤维和它们的合成的同伦纤维分别用符号

$$\mathrm{PL/O},\ \mathrm{TOP/O},\ \mathrm{G/O},\ \mathrm{TOP/PL},\ \mathrm{G/PL},\ \mathrm{G/TOP}$$

来表示.

来自范畴 Diff, PL, TOP, P 的每个流形 $X$，存在一个正规稳定丛，即一个从 $X$ 到相应的分类空间的典型映射 $\tau_X$.

在从流形的"窄"范畴到"较宽"的范畴的变换中，例如，从光滑到分片线性，映射 $\tau_X$ 由相应的映射（2）构成. 因此，例如对 PL 流形 $X$，存在一个光滑流形 PL 同胚于它（$X$ 称为可光滑的），仅当提升问题（3）可解:

$$\begin{array}{ccc} & \nearrow & \mathrm{BO} \\ & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\tau_X} & \mathrm{BPL} \end{array}\qquad (3)$$

该问题的解的同伦障碍位于群 $H^{i+1}(X, \pi_i(\mathrm{PL/O}))$

中，这里，结果是 (3) 的可解性对 PL 流形 $X$ 的光滑性（和所有非等价的光滑是在映射 $X \to PL/O$ 的同伦类的集合 $[X, PL/O]$ 相对应的一一映射中）不仅是必要的，而且是充分的．

通过用 TOP/O 代替 PL/O，对维数 $\geqslant 5$ 的拓扑流形 $X$ 的可光滑性同样成立，而且（用 TOP/O 代替 PL/O）也对它们的 PL 三角剖分成立．同伦群 $\Gamma_k = \pi_k(PL/O)$ 同构于通过粘合两个 $k$ 维球的边界得到的定向微分光滑流形的分类的群．这个群对所有的 $k$ 是有限的（对 $k \leqslant 6$ 甚至是平凡的）．因此，任何一个 PL 流形 $X$ 的非等价光滑的数目是有限的且以数

$$\mathrm{ord} \sum_k H^k(X, \pi_k(PL/O))$$

为上界．

同伦群 $\pi_k(TOP/PL)$ 等于零，一个例外：$\pi_3(TOP/PL) = \mathbf{Z}/2$．因此，维数 $\geqslant 5$ 的拓扑流形 $X$ 的 PL 三角剖分的存在性由一些上同调类 $\Delta(X) \in H^4(X, \mathbf{Z}/2)$ 的零化所决定，而 $X$ 的非等价 PL 三角剖分的集合是在相应于群 $H^3(X, \mathbf{Z}/2)$ 的一一映射中．

当 $k \neq 3$ 时，群 $\pi_k(TOP/O)$ 与群 $\Gamma_k$ 一致，当 $k = 3$ 时，$\pi_k(TOP/O)$ 与 $\Gamma_k$ 差一个群 $\mathbf{Z}/2$．维数 $\geqslant 5$ 的拓扑流形 $X$ 的非等价光滑化数是有限的，且以数 $\mathrm{ord} \sum_k H^k(X, \pi_k(TOP/O))$ 为上界．

类似的结果对 Poincaré 多面体是不正确的．

$$\begin{array}{ccc} & & BPL \\ & \overset{\tau'_X}{\nearrow} & \downarrow \\ X & \xrightarrow[\tau_X]{} & BG \end{array} \qquad (4)$$

当然，例如在 (4) 中提升的存在对同伦等价于 Poincaré 多面体 $X$ 的 PL 流形的存在是必要条件，但一般地讲（对 $n \geqslant 5$），只保证 PL 流形 $M$ 和度为 1 的使得 $\tau_M = f^* \tau'_X$ 的映射 $f: M \to X$ 的存在，该流形到一个同伦等价于 $X$ 的流形的变换需要**割补术**（surgery）（再构造）的技术，最初，当 $X$ 是一个维数 $\geqslant 5$ 的单连通光滑流形的情形，这技术是由 С. П. Новиков 发展的．对单连通的 $X$，该技术已推广到下面考虑的情形．因此，对单连通 Poincaré 多面体 $X$，一个维数 $\geqslant 5$ 的同伦等价于它的 PL 流形的存在，当且仅当提升 (4) 存在．同伦等价于一个（甚至单连通）Poincaré 多面体的拓扑或光滑流形的存在性问题仍是比较复杂的．

**参考文献**


[1] Новиков, С. П., 《Изв. АН СССР, Сер. Матем.》, 30 (1966), 1, 207 – 246.

[2] Madsen, I. and Milgram, R., The classifying spaces for surgery and cobordism of manifolds, Princeton Univ. Press, 1979.

[3] Latour, F., Double suspension d'une sphere d'homologie (d'après R. Edwards), in Sem. Bourbaki Exp. 515. Lecture notes in math., Vol. 710, Springer, 1979, 169 – 186.

[4] Freedman, M. H., The topology of four-dimensional manifolds, *J. Differential Geom.*, 17 (1982), 357 – 453.

[5] Quinn, F., Ends of maps Ⅲ, Dimensions 4 and 5, *J. Differential Geom.*, 17 (1982), 503 – 521.

[6] Mandelbaum, R., Four-dimensional topology: an introduction, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 2 (1980), 1 – 159.

[7] Lashof, R., The immersion approach to triangulation and smoothing, in A. Liulevicius (ed.): Algebraic Topology (Madison, 1970), Proc. Symp. Pure Math., Vol. 22, Amer. Math. Soc., 1971, 131 – 164.

[8] Edwards, R. D., Approximating certain cell-like maps by homeomorphisms, *Notices Amer. Math. Soc.*, 24 (1977), 7, A649.

[9] Quinn, F., The topological characterization of manifolds, *Abstracts Amer. Math. Soc.*, 1 (1980), 7, 613 – 614.

[10] Cannon, J. W., The recognition problem: what is a topological manifold, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 84 (1978), 5, 832 – 866.

[11] Spivak, M., Spaces satisfying Poincaré duality, *Topology*, 6 (1967), 77 – 101.

[12] Kuiper, N. H., A short history of triangulation and related matters, in P. C. Baayen, D. van Dulst and J. Oosterhoff (eds.): Bicentennial Congress Wisk. Genootschap (Amsterdam 1978), Math. Centre Tracts, Vol. 100, CWI, 1979, 61 – 79.


М. А. Штанько 撰

【补注】 最近发现（[A1]），维数 4 的光滑流形的性能根本不同于维数 $\geqslant 5$ 的流形．在大量的近期结果中有

i) 存在一个光滑的、紧的、单连通的 4 流形的可数无限族，它们彼此同胚，但具有不同的光滑结构．

ii) 存在不可数的光滑 4 流形族，每一个同胚于 $\mathbf{R}^4$，但彼此具有不同的光滑结构．

iii) 存在单连通光滑 4 流形，它们是 $h$ 配边（$h$-cobordism）的，但不微分同胚．

对提升问题 (3)，见[A2] – [A3].

对于 Kirby-Siebenmann 定理（Kirby-Siebenmann theorem），箭头 TOP → P，也见[A4].

**参考文献**


[A1] Donaldson, S. M., The geometry of 4-manifolds, in A. M. Gleason (ed.): Proc. Internat. Congress of Mathematicians (Berkeley, 1986), Amer. Math. Soc., 1987, 43 – 54.

[A2] Hirsch, M. W. and Mazur, B., Smoothings of piecewise-linear manifolds, Princeton Univ. Press, 1974.

[A3] Lashof, R. and Rothenberg, M., Microbundles and smoothing, *Topology*, 3 (1965), 357 – 388

[A4] Kirby, M. C. and Siebenmann, L. C., Foundational essays on topological manifolds, smoothings and triangulations, Princeton Univ. Press, 1977.

薛春华 译

**一致收敛拓扑[topology of uniform convergence; равномерной сходимости топология]**

从集合 $X$ 到一致空间(uniform space) $Y$ 中映射的空间 $\mathscr{F}(X, Y)$ 上的由 $\mathscr{F}(X, Y)$ 上一致结构生成的拓扑，其环境基是使得对一切 $x \in X$, $(f(x), g(x)) \in v$ 而 $v$ 跑遍 $Y$ 的一个环境基的所有偶对 $(f, g) \in \mathscr{F}(X, Y) \times \mathscr{F}(X, Y)$ 的集合. 在此拓扑中一有向集 $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathscr{F}(X, Y)$ 收敛于 $f_0 \in \mathscr{F}(X, Y)$ 称为在 $X$ 上 $f_\alpha$ **一致收敛**(uniform convergence)于 $f_0$. 如果 $Y$ 是完全的，则 $\mathscr{F}(X, Y)$ 按一致收敛拓扑是完全的. 如果 $X$ 是拓扑空间且 $\mathscr{C}(X, Y)$ 是由 $X$ 到 $Y$ 中的连续映射的集合，则 $\mathscr{C}(X, Y)$ 在 $\mathscr{F}(X, Y)$ 中按该一致收敛拓扑是闭的；特别地，$X$ 上一致收敛的连续映射序列 $f_n$ 的极限 $f_0$ 是 $X$ 上连续映射.

**参考文献**

[1] Bourbaki, N., General topology, Element of mathematics, Springer, 1988(译自法文).

[2] Kelley, J. L., General topology, Springer, 1975(中译本: J. L. 凯莱, 一般拓扑学, 科学出版社, 1985).

В. И. Соболев 撰

【补注】 如果 $Y$ 是具有由度量定义的一致结构的度量空间，则 $\mathscr{F}(X, Y)$ 中的一个开集基由集合族 $U(f, \varepsilon) = \{g: \rho(f(x), g(x)) < \varepsilon$ 对一切 $x \in X\}$ 构成，且可发现以经常在分析中遇到的形式出现的一致收敛概念.

**参考文献**

[A1] Engelking, R., General topology, Heldermann, 1989(译自波兰文).

葛显良 译 鲁世杰 校

**拓扑斯[topos; топос]**

一个范畴，等价于某个**拓扑化范畴**(topologized category)上的集合的层范畴. 另一个定义为: 拓扑斯是一个范畴 $C$，使得 $C$ 上的典范拓扑的任意层是可表示的. 对于一个拓扑斯的对象(它们是集合的层)可以定义通常的集范畴结构. 基于这一理由，拓扑斯可看作集合论的非标准模型. 此处用更一般的定义会方便些: 一个初等拓扑斯(elementary topos)是一个带有积和终对象的**范畴**(category) $C$，连同一个反变函子 $\mathscr{P}: C \to C$ (此处对 $X \in C$, $\mathscr{P}(X)$ 是对应于 $X$ 的子对象族的一个对象)，且有单射 $\sum_X \to X \times \mathscr{P}(X)$，此处 $\sum$ 是隶属关系的图. 对象 $\mathscr{P}(1)$ 是拓扑斯 $C$ 中命题逻辑值的自然定义域.

**参考文献**

[1] Artin, M., Grothendieck, A. and Verdier, J. L., Théorie des topos et cohomologie étale des shémas (SGA 4), Lecture notes in math., 269, 270, 305, Springer, 1972-1973.

[2] Deligne, P, Cohomologie étale (SGA 4 1/2), Lecture notes in math., 569, Springer, 1977.

[3] Cartier, P., Catégories, logique et faisceaux: modéles de la théorie des ensembles, in Sém. Bourbaki 1977/78, Lecture notes in math., Vol. 710, Springer, 1979.

[4] Goldblatt, R., Topoi. the categorical analysis of logic, North-Holland, 1979.

В. И. Данилов 撰

【补注】 拓扑范畴称为景(site)(拓扑化范畴)更好.

拓扑斯的概念是 A. Grothendieck([1])于 1963 年左右引入的，它与代数几何中的某种上同调理论有关，特别是层的平展和结晶上同调(见**艾达尔拓扑**(etale topology)). 尽管这种上同调可以用给定的景(site)直接描述，但拓扑斯诱导出一个更有不变量意味的刻画；与拓扑空间上的层的"经典"情况相反，(见**层论**(sheaf theory))，许多不同的景可以给出同样的层的拓扑斯，因而给出同样的上同调理论. 稍后 M. Artin 和 B. Mazur([A1])指出了怎样定义拓扑斯的同伦群，并建立了关于给定拓扑斯的同调和上同调的"Whitehead 定理"(见**拓扑范畴的同伦型**(homotopy type of a topological category)).

初等拓扑斯的概念是 F. W. Lawvere 和 M. Tierney 在 1969 年提出来的. 他们的想法是抽象出集范畴的那些层范畴也具备的初等(即一阶)性质，使得后者可以被看作"广义集合论"的模型. Lawvere-Tierney 公理比 Grothendieck 引出的相应公理更简单也更广泛；基于这个理由，未加修饰的术语"拓扑斯"现在一般指"初等拓扑斯"，而较早意义下的拓扑斯(即等价于景上的层范畴的范畴)被看作 Grothendieck 拓扑斯. 初等拓扑斯的公理可以代替传统的集合论公理体系作为数学的基础([A3], [A4]). 与此相关，一个初等拓扑斯可以被看作高阶直观型论的一个模型(见**类型论**(types, theory of))([A5], [A6])，这样在**直觉主义**(intuitionism)理论中研究过的许多传统模型，如 **Kripke 模型**(Kripke models)和 Beth 模型成为特殊情况. 这些模型并不总是适应 Grothendieck 拓扑斯的较窄的框架. 例如 Kleene 的**可实现性**(realizability)解释给出了由 J. M. E. Hyland 引入的有效拓扑斯(effective topos)([A7])，但不是 Grothendick 拓扑斯. 有效拓扑斯近来在理论计算机科学中引起了极大的兴趣，因为它包含多形态 $\lambda$ **演算**($\lambda$-calculus)及其相关理论的"自然"模型([A8], [A9]).

由于 Lawvere-Tierney 公理的引入，拓扑斯理论发展的一个重要方面如上文所述影响到逻辑，而它的

几何方面已由 Grothendieck 及其同事的早期研究表现出来．在这种联系中，轨迹理论（见**轨迹**（locale））以及从轨迹范畴到（Grothendieck）拓扑斯范畴的拓扑概念的推广是关键所在．一个重要的例子是 A．Joyal 和 Tierney（[A10]）关于轨迹和拓扑斯的开映射和下降理论的工作导致了 Grothendieck 拓扑斯用轨迹范畴的内广群（见**广群**（groupoid））的表示．类似地，轨迹局部紧性概念的推广导致了 Grothendieck 拓扑斯范畴中可幂化对象（即具有函数空间的对象）的刻画（[A13]）．更近期的研究[A14]，[A15]，[A16] 表明，Grothendieck 拓扑斯的同调和上同调理论并不比轨迹的相应理论复杂，事实上，每个拓扑斯都可以被具有相同"弱同伦型"的轨迹覆盖．

拓扑斯理论的进一步资料，包括此处未涉及到的方面，可见[A4]，[A6]，[A17] – [A20]．

**参考文献**


[A1] Artin．M．and Mazur，B．，Etale homotopy，Lecture notes in math．，100，Springer，1969．

[A2] Lawvere，F．W．，Quatifiers and sheaves，in Actes du Cougrès Intern，des Mathematiciens，Nice 1970，Gauthier-Villars，1971，329 – 334．

[A3] Lawvere，F．W．，An elementary theory of the category of sets，*Proc．Nat．Acad．Sci．USA*，**52**（1964），1506 – 1511．

[A4] Bell，J．L．，Toposes and local set theories，Oxford Univ．Press，1988．

[A5] Fourman，M．P．The logic of topoi，in J．Barwise（ed．），Handbook of Mathematical logic，North-Holland，1977，1053 – 1090．

[A6] Lambek，J．and Scott，P．J．，Introduction to higher-order categorical logic，Cambridge Univ．Press，1986．

[A7] Hyland，J．M．E，The effective topos，in A S．Troelstra and D．van Dalen（eds．），The L．E．J．Brouwer Centenary Symposium，North-Holland，1982，165 – 216．

[A8] Hyland，J．M．E．，A small complete category，*Ann．Pure Appl．Logic*，**40**（1988），135 – 165．

[A9] Carboni，A．Freyd，P．J．，Scedrov，A．，A categorical approach to realizability and polymorphic types，in M．Main．et al．（ed．），Proc．3rd A．C．M Workshop on Mathematical Foundations of Pragramming Language Semantics，Lecture notes comp．sci．，Vol．298．Springer，1988，23 – 42．


张英伯 译

## Torelli 定理[Torelli theorems；Торелли теорема]

指出一代数簇或 Kähler 簇 $X$ 的上同调空间的 **Hodge 结构**（Hodge structure）（周期矩阵）完全刻画了 $X$ 的极化 Jacobi 簇的一些定理．

经典的 Torelli 定理是关于曲线的情况的（见[1]，[2]），并指出，一曲线除相差一个同构外，完全由其周期决定．设 $X$ 是一个亏格为 $g$ 的曲线，$\gamma_1,\cdots,\gamma_{2g}$ 是 $H_1(X,\mathbf{Z})$ 的一个基，令 $\omega_1,\cdots,\omega_g\in H^0(X,\Omega_X^1)=H^{1,0}\subset H^1(X,\mathbf{C})$ 是 **Abel 微分**（Abelian differential）的一个基，而（$g\times 2g$）矩阵 $\Omega=\|\pi_{ij}\|$ 是**周期矩阵**（period matrix），$\pi_{ij}=\int_{\gamma_j}\omega_i$．闭链的交 $\gamma_i\gamma_j=q_{ij}$ 在 $H_1(X,\mathbf{Z})$ 中定义了一个反对称双线性型 $Q$．令 $X$ 和 $\widetilde{X}$ 是两条曲线．如果能这样选取基 $\gamma$ 和 $\omega$ 使得相对于它们，周期矩阵 $\Omega$ 和曲线的相交矩阵 $Q$ 相同，则 $X$ 和 $\widetilde{X}$ 是同构的．换言之，如果曲线 $X$ 和 $\widetilde{X}$ 的典范极化 Jacobi 阵同构，则 $X\simeq\widetilde{X}$．

令 $X$ 为一射影簇（或更一般地，为一紧 **Kahler 流形**（Kähler manifold），令 $D=D_k$ 是与本原上同调空间 $H^k(X,\mathbf{C})_0$（见**周期映射**（periodic mapping））相关的 Griffith 簇．则 $D$ 包含了在一切与 $X$ 同胚的簇上的本原 $k$ 形式的周期矩阵．周期依赖于 $H^k(X,\mathbf{C})_0$ 到一个固定空间 $H$ 的同构如何选取．有一个自然定义的 $D$ 的解析自同构群 $\Gamma$，使得 $M=D/\Gamma$ 是一个解析空间，而 $X$ 决定唯一的点 $\Phi(X)\in M$．这时 $M$ 称为模空间（modular space）或称为 **Hodge 结构的模空间**（moduli space of Hodge structure）．

**整体** Torelli 问题（global Torelli problem）就是要阐明 $\Phi(X)$ 是否可以唯一决定 $X$ 直到相差一个同构的问题．所谓（广义的）Torelli 定理的陈述就是对此问题的肯定的回答．在 1 形式和 2 形式的情况下，Torelli 定理对 Abel 簇平凡地成立（见[3]）．本质上说来，整体 Torelli 问题的解的仅有的非平凡情况（1984）是 **$K3$ 曲面**（$K3$ – surface）的情况．Torelli 定理也已被推广到 Kähler $K3$ 曲面．

**局部** Torelli 问题（local Torelli problem）就是要解决上同调空间的 Hodge 结构何时才能将簇 $X$ 的局部模空间（即**倉西空间**（Kuranishi space））的点分离开的问题．令 $\pi:\mathfrak{X}\to B$ 是一族极化代数簇，而 $\pi^{-1}(0)=X$，令 $M=D/\Gamma$ 是与 $X$ 上的本原 $k$ 形式的周期相联系的 Griffiths 簇．周期映射 $\Phi:B\to M$ 对每一个 $t\in B$ 给出了 $\pi^{-1}(t)$ 上的 $k$ 形式的周期矩阵．这个映射是全纯的；相应的切映射 $d\Phi$ 也已算出来了（见[3]）．局部 Torelli 问题等价于以下问题：$d\Phi$ 何时为嵌入？考虑对偶于 $d\Phi$ 的映射，即可得关于局部 Torelli 定理成立的上同调判别法：若映射

$$\mu:\bigoplus_{0\leqslant r\leqslant[(k-1)/2]}H^{n-r-1}(X,\Omega^{n-k+r+1})\otimes H^r(X,\Omega^{k-r})\to H^{n-1}(X,\Omega^1\otimes\Omega^n)$$

是一满态射，则 $k$ 形式的周期给出了 $X$ 的局部模．关于曲线的局部 Torelli 定理等价于二次微分是由 Abel 微分生成的这一事实．**Noether 定理**（Noether theorem）指出，如果 $g=2$，它是成立的，又如果 $g>2$ 而 $X$ 不是超椭圆的，它也成立．局部 Torelli 定理当 $k=n$

时，若典范类是平凡的，显然成立．这种簇包含了 Abel 簇，$P^{n+1}$ 中的 $n+2$ 次超曲面以及 $K3$ 曲面．对于许多类高维簇也证明了局部 Torelli 定理成立．对于 $P^{n+1}$ 中的非奇异 $d$ 次超曲面，证明了在一般点上周期映射是嵌入，但 $n=2$，$d=3$ 时例外，而当 $d$ 可以整除 $n+2$，$d=4$ 且 $n=4m$，或 $d=6$ 且 $n=6m+1$ 时可能也不行（见[4]）．

**参考文献**


[1] Torelli, R., *Rend. Accad. Lincei V*, 22 (1913), 98 – 103.

[2] Weil, A., Zum Beweis der Torellischen Satzes, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen*, (1957), 33 – 53.

[3] Griffiths, P. A., Periods of integrals on algebraic manifolds, I. II, *Amer. J Math.*, 90 (1968), 568 – 626; 805 – 865.

[4] Donagi, R., Generic Torelli for projective hypersurfaces, *Compos. Math.*, 50 (1983). 325 – 353.


Вал. С. Куликов 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Griffiths, P. A., (ed.), Topics in transcendental algebraic geometry, Princeton Univ. Press, 1984.

[A2] Barth, W., Peters, C. and Ven, A. van de., Compact complex surfaces, Springer, 1984.


齐民友 译

**圆环坐标 [toroidal coordinates; тороидальные координаты]**

数 $\sigma$，$\tau$ 及 $\varphi$，与 Descartes 直角坐标 $x$，$y$，$z$ 的关系由下列公式给出：

$$x=\frac{a\sinh\tau}{\cosh\tau-\cos\sigma}\cos\varphi,\quad y=\frac{a\sinh\tau}{\cosh\tau-\cos\sigma}\sin\varphi,$$

$$z=\frac{a\sin\sigma}{\cosh\tau-\cos\sigma},$$

这里 $-\pi\leqslant\sigma\leqslant\pi$，$0\leqslant\tau<\infty$，$0\leqslant\varphi<2\pi$．坐标曲面 $\sigma=$ 常数是中心在 $(0,\ 0,\ a\cot\sigma)$、半径为 $a/|\sin\sigma|$ 的球面；坐标曲面 $\tau=$ 常数是环面，它以 $Oxy$ 平面上中心在原点、半径为 $a\coth\tau$ 的圆为轴向圆，其横截面的圆的半径为 $a/\sinh\tau$；坐标曲面 $\varphi=$ 常数是半平面 $y/x=\tan\varphi$．圆环坐标系是正交的．

**Lamé 系数**（Lamé cofficients）是：

$$L_\sigma=L_\tau=\frac{a^2}{(\cosh\tau-\cos\sigma)^2},$$

$$L_\varphi=\frac{a^2\sinh^2\tau}{(\cosh\tau-\cos\sigma)^2}.$$

**Laplace 算子**（Laplace operator）是：

$$\Delta f=\frac{(\cosh\tau-\cos\sigma)^3}{a^2\sinh\tau}\left[\frac{\partial}{\partial\sigma}\left[\frac{\sinh\tau}{\cosh\tau-\cos\sigma}\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right]+\right.$$

$$+\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{\sinh\tau}{\cosh\tau-\cos\sigma}\frac{\partial f}{\partial\tau}\right]+$$

$$\left.+\frac{1}{\sinh\tau(\cosh\tau-\cos\sigma)}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\right].$$

Д. Д. Соколов 撰 沈纯理 译

**圆环调和函数 [toroidal harmonics; тороидальная гармоника]**

在**圆环坐标**（toroidal coordinates）$(\sigma,\tau,\varphi)$ 中用**分离变量法**（separation of variables, method of）解 **Laplace 方程**（Laplace equation）时所产生的环面上点的函数．一**调和函数**（harmonic function）$h=h(\sigma,\tau,\varphi)$，如果它是 Laplace 方程的解，那么它可以写成级数形式：

$$h=\sqrt{\cosh\tau-\cos\sigma}\ \times$$

$$\times\sum_{j,k=0}^{\infty}[A_{jk}P_{j-\frac{1}{2}}^{(k)}(\cosh\tau)+B_{jk}Q_{j-\frac{1}{2}}^{(k)}(\cosh\tau)]\times$$

$$\times(a_k\cos k\sigma+b_k\sin k\sigma)\ (c_j\cos j\varphi+d_j\sin j\varphi),\quad(*)$$

其中 $P_{j-1/2}^{(k)}$，$Q_{j-1/2}^{(k)}$ 是具有半整数指标的连带 **Legendre 函数**（Legendre functions）．令 $\tau=\tau_0$ 就得到圆环调和函数或表面圆环调和函数（surface toroidal harmonic），这和用三个变量 $(\sigma,\tau,\varphi)$ 表达的函数 $(*)$ 不一样，有时称 $(*)$ 为空间圆环调和函数（spatial toroidal harmonic）．

由于有展开式

$$\frac{1}{\sqrt{\cosh\tau-\cos\sigma}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\left[Q_{-\frac{1}{2}}(\cosh\tau)+\right.$$

$$\left.+2\sum_{k=1}^{\infty}Q_{k-\frac{1}{2}}(\cosh\tau)\cos k\sigma\right],$$

其中 $Q_{k-1/2}$ 是第二类 Legendre 函数，级数 $(*)$ 被用来在圆环坐标中解边值问题．

**参考文献**


[1] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1977（中译本：А. Н. 吉洪诺夫，А. А. 萨马尔斯基，数学物理方程，上、下册，高等教育出版社，1956）.

[2] Morse, P. M. and Feschbach, H., Methods of theoretical physics, 1 – 2, McGraw-Hill, 1953.


Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Bateman, H. and Erdélyi, A., Higher transcendental functions, The Gamma function. The hypergeometric function. Legendre functions, 1, McGraw-Hill, 1953,

Fomula 3 . 10(3). 孙和生 译 陆柱家 校

**挠率 [torsion; кручение]**

1) 三维空间中的一条曲线 $\gamma$ 的挠率 (torsion of a curve) 是一个刻画 $\gamma$ 偏离其**密切平面** (osculating plane) 的量. 设 $P$ 是 $\gamma$ 上的任一点, $Q$ 是 $P$ 的邻近点. 令 $\Delta\theta$ 表示 $\gamma$ 在 $P$ 和 $Q$ 两点处的密切平面之间的夹角, $|\Delta s|$ 表示 $\gamma$ 的弧 $PQ$ 的长度. $\gamma$ 在 $P$ 点的绝对挠率 (absolute torsion) $|k_2|$ 定义为

$$|k_2| = \lim_{Q\to P} \frac{\Delta\theta}{|\Delta s|} .$$

定义 $\gamma$ 的挠率为 $k_2 = \pm|k_2|$, 其中如果一个位于 $P$ 点的观察者看到当点在此曲线上沿着使 $s$ 增加的方向移动时, 密切平面从**副法线** (binormal) 向量到**主法线** (principal normal) 向量是反时针 (顺时针) 方向转动的, 则取 $k_2$ 为正 (负) 号.

对一条正则 (三次连续可微) 曲线, 在**曲率** (curvature) 不为零的任意点处可定义其挠率. 若 $r = r(s)$ 是曲线的自然参数化, 则

$$k_2 = -\frac{(r', r'', r''')}{[r', r'']^2} .$$

挠率有时被称为第二曲率 (second curvature).

作为弧长函数的曲率和挠率, 在不计空间位置时, 确定一条曲线.

挠率处处为零的曲线是一条平面曲线.

Е. В. Шикин 撰

【补注】 "第二曲率"这一术语常被用于高维 Frénet 理论之中. 该理论所考虑的曲线是 $n$ 维 Euclid 空间中的曲线. 如果曲线足够光滑, 则一般地可对曲线定义 $(n-1)$ 个曲率, 而且其最后一个曲率也可赋以符号.

三维空间中曲线的挠率与沿着曲线的平行法向量场的旋转角度相联系. 对一条具有正曲率的曲线, 其平行法向量场绕曲线一周的旋转角由全挠率给出, 它也被称为曲线的全扭曲 (total twist).

2) 测地挠率 (geodesic torsion) 是曲线挠率的一种推广; 它是空间 $E^3$ 中一条带 (strip) 的一个不变量, 用

$$a = (x_1, x_3, x_3')$$

来定义, 其中 $x_1$ 是带的基曲线 $\Gamma$ 的切向量, $x_3$ 是带的法向量. 具有非零曲率的曲线 $\Gamma$ 的通常挠率 $k_2$ 可藉助于 $a$ 及法曲率 $b$ 和测地曲率 $c$ 表示成如下公式:

$$k_2 = a + \frac{b'c - bc'}{b^2 + c^2} .$$

测地挠率为零是曲率带, 特别是对属于 $E^3$ 中一个曲面的带的一个特征性质—— 见**曲率线** (curvature line).

也可对 Riemann 空间的带定义类似的概念 (见 [1], [2]).

3) 子流形的挠率 (torsion of a submanifold) 是曲线挠率的推广, 即为在浸入于 Riemann 空间 $V^n$ 中的子流形 $M^k$ 的法丛 $\nu(M^k)$ 上所诱导的联络 (见**联络** (connection); **流形上的联络** (connections on a manifold)) 的曲率. 令 $\omega_\beta^\gamma$ 是 $\nu(M^k)$ 上的联络形式, $\omega_s^\gamma$ 是 $M^k$ 在 $V^n$ 中的 Euler 曲率形式, $s = 1, \cdots, k$; $\alpha, \beta = 1, \cdots, n-k$, 则形式

$$\Omega_{\alpha R}^\beta = d\omega_\alpha^\beta - \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta$$

定义了 $M^k$ 在 $V^n$ 中的 Riemann 挠率 (Riemannian torsion), 形式

$$\Omega_{\alpha G}^\beta = \omega_\alpha^s \wedge \omega_s^\beta$$

定义了 $M^k$ 在 $V^n$ 中的 Gauss 挠率 (Gaussian torsion). 这些挠率之间具有如下的关系式

$$\Omega_{\gamma R}^\beta = \Omega_{\alpha G}^\beta + R_{\alpha kh}^\beta \sigma^k \wedge \sigma^h ,$$

其中 $R_{\alpha kh}^\beta$ 是 $V^n$ 的曲率张量沿着切于 $M^k$ 的一个二重向量方向的分量, $\sigma^s$ 是 $M^k$ 的切空间的一个正交共基. 藉助于形式 $\sigma^i \wedge \sigma^j$, 将挠率形式 $\Omega_{\alpha R}^\beta (\Omega_{\alpha G}^\beta)$ 分解后所得到的张量 $S_{ij}^\beta$ 称为 Gauss 挠率和 Riemann 挠率.

例. 设 $M^2$ 是 Euclid 空间 $E^4$ 中的一个曲面, 则 Gauss 挠率和 Riemann 挠率相同, 变成一个简单的数

$$k = \frac{1}{EG - F^2} \begin{vmatrix} E & F & G \\ L_1 & M_1 & N_1 \\ L_2 & M_2 & N_2 \end{vmatrix} ,$$

其中 $E, F, G$ 是 $M^2$ 在 $E^4$ 中的第一基本型的系数, $L_i, M_i, N_i$ 是 $M^2$ 在 $E^4$ 中的第二基本型的系数. $k$ 在某个邻域中为零可以几何地解释为曲率椭圆退化成了一条直线上的一个区间; 于是存在两族正交的曲率线, 其切线对应于该区间的两个端点. 局部地, $k = 0$ 是 $M^2$ 位于一个浸入于 $E^4$ 内的 Riemann 空间 $V^3$ 中的充分必要条件, $M^2$ 在 $V^3$ 中的法向量指向 $V^3$ 的 **Ricci 张量** (Ricci tensor) 的主向量方向. 特别地, 挠率为零是 $M^2$ 在 $E^3$ 中平坦的一个必要条件.

4) 仿射联络 $\Gamma$ 的挠率 (torsion of an affine connection) 是一个刻画具有联络 $\Gamma$ 的流形 $M^n$ 上的函数关于此联络的**共变导数** (covariant derivative) 与可交换性相偏离的程度的量, 它是用变换

$$(X, Y) \to S(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

来定义的, 其中 $X, Y$ 是 $M^n$ 上的向量场, $\nabla_X Y$ 是 $Y$

沿着 $X$ 的协变导数，$[X, Y]$ 是 $X$ 和 $Y$ 的 Lie 括号. 在局部坐标 $x^i$ $(i=1, \cdots, n)$ 下，令 $X=\partial/\partial x^i$, $Y=\partial/\partial x^j$，则变换 $S$ 由

$$S\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)=S_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

给出；张量 $S_{ij}^k=\Gamma_{ij}^k-\Gamma_{ji}^k$ 即为挠率张量（torsion tensor），其中 $\Gamma_{ji}^k$ 是 $\Gamma$ 关于所选取的基的分量.

利用联络的位移的向量值 1 - 形式 $\omega^k$ 的协变微分可给出挠率的一个等价定义，称形式

$$\Omega^k=d\omega^k+\theta_j^k \wedge \omega^k$$

为挠率形式（torsion form）；其中 $\theta_j^k$ 是 $\Gamma$ 的联络形式. 在局部余基 $dx^i$（基 $\partial/\partial x^i$ 的对偶）下，挠率形式为

$$\Omega^k=S_{ij}^k dx^i \wedge dx^j,$$

其中 $S_{ij}^k$ 的意义与前面所述相同.

仿射联络 $\Gamma$ 的挠率有如下的几何解释. 从 $x \in M^n$ 出发又回到 $x$ 处的任意无穷小环路 $L$ 在 $M^n$ 于 $x$ 处的切空间中的切展线不再是一条闭曲线. 不计二阶项时，在切展线端点处的向量差具有分量 $\Omega^k$, $k=1, \cdots, n$. 换句话说，此向量与具有二重向量 $df^{ij}$ 的 2 维面积元的有界围道 $L$ 成比例：$\Omega^k=S_{ij}^k df^{ij}$. 这些思想形成了解释在位移形式下具有内部压力连续分布源的弹性介质的基础；于是向量 $\Omega^k$ 是 Burgers 向量（Burgers vector）的一种类似（见[4]－[7]）.

例. 在具有度量联络（metric connection）的 2 维 Riemann 空间 $M^2$ 中，挠率张量约化成一个向量：$S_{ij}^k=S^k e_{ij}$，其中 $e_{ij}$ 是度量二重向量. 考虑 $M^2$ 中一个小三角形，它的边是长度分别为 $a, b, c$ 的测地线，且有夹角 $A, B, C$. 向量 $S^k$ 在点 $A$ 处向边 $AB$ 上的投影的主部等于 $(c-a\cos B-b\cos A)/\sigma$，而向 $AB$ 的垂直方向上的投影等于 $(a\sin B-b\sin A)/\sigma$，其中 $\sigma$ 是三角形的面积. 于是，如果 $M^2$ 的挠率为零，那么在允许相差一个和 $\sigma$ 相比为小量的情况下，传统三角学中的正弦和余弦定理是成立的.

5）空间 $A$ 的挠率（torsion of a space）是由偶对 $(X, A)$ 所定义的 **Whitehead 群**（Whitehead group）$\mathrm{Wh}\,A$ 的一个元素 $\tau(X, A)$，其中 $A$ 是一个有限**胞腔空间**（cellular space），嵌入 $A \subset X$ 是一个同伦等价. 等价地：挠率是基本群 $\pi_1$ 的 Whitehead 群 $\mathrm{Wh}\,\pi_1$ 的一个元素. 在胞腔的扩张、收缩和胞腔加细下，挠率是不变的. 已经证明挠率是一个拓扑不变量. 如果 $A$ 是单连通的，则它的挠率为零（见 **Whitehead 挠率**（Whitehead torsion））.

如果 $(W; M_0, M_1)$ 是一个任意的 $h$ 配边，则称 $\tau(W, M_0)=\tau(K, M_0)$ 为 $h$ 配边挠率（torsion of the $h$-cobordism），其中 $K$ 是与流形 $W$（流形 $M_0$）的给定环柄分解相配的胞腔空间.

设 $M_f$ 是胞腔式映射 $f: X \to Y$ 的柱，这里 $f$ 是一个同伦等价（见**映射柱面**（mapping cylinder）），则 $\tau(M_f, Y)=0$，但 $\tau(M_f, X) \in \mathrm{Wh}\,\pi_1 X$ 处处不为零，它是用公式

$$\tau(f)=f_* \tau(M_f, X) \in \mathrm{Wh}\,\pi_1 Y$$

来定义的. 称这个元素为映射 $f$ 的挠率（torsion of the mapping）（有时 $\tau(M_f, X)$ 本身也称为挠率）. 如果 $\tau(f)=0$，则称映射为单同伦等价（simple homotopy equivalence）（见[8]）.

6）有限生成 Abel 群 $G$ 的挠率（torsion of a finitely-generated Abelian group）是群 $G$ 中由所有有限阶 $\nu$ 的元素所组成的群 $T$. 在差一个置换的情形下，数 $\nu$ 可以唯一选定为素数的幂，称为群 $G$ 的挠系数（torsion coefficients）（见[9]）.

**参考文献**


[1] Cartan, E., Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann, Gauthier-Villars, 1946.

[2] Blaschke, W., Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einstein Relativitäts-theorie, Elementare Differentialgeometrie, 1, Springer, 1921

[3] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия, 1969, М., 1971, 123－168.

[4] Sulanke, R. and Wintgen, P., Differentialgeometrie und Faserbündel, Birkhäuser, 1972.

[5] Норден, А. П., Пространства аффинной связности, 2 изд., М.-Л., 1976.

[6A] Cartan, E., Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la rélativité généralisée, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* (3), **40** (1923), 325－412.

[6B] Cartan, E., Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la rélativité généralisée, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* (3), **41** (1923), 1－25.

[6C] Cartan, E., Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la rélativité généralisée, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* (3), **42** (1925), 17－88.

[6D] Cartan, E., Sur les variétés à connexion projective, *Bull. Soc. Math. France*, **52** (1924), 205－241.

[6E] Cartan, E., Sur les variétés à connexion conforme, *Ann. Soc. Polon. Math.*, **2** (1924), 171－221.

[7] Schouten, J. A., Tensor analysis for physicists, Clarendon Press, 1951.

[8] Rourke, C. P. and Sanderson, B. J., Introduction to piecewise-linear topology, Springer, 1972.

[9] Курош, А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967（中译本：A. Г. 库洛什，群论，高等教育出版社，上册，1987；下册，1982）.


———

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 Abel 群 $A$ 的挠子群 (torsion subgroup) $T(A)=\{a\in A: na=0$, 对某个 $n\}$ 定义了一个从 Abel 群的范畴到其自身的函子 (functor). 对结合环上的左模的挠性, 见扭子模 (torsion submodule).

参考文献


[A1] Berger, M. and Gostiaux, B., Differential geometry, Springer, 1988 (译自法文).

[A2] Coxerter, H., Introduction to geometry, Wiley, 1963.

[A3] Do Carmo, M., Differential geometry of curves and surfaces, Prentice Hall, 1976 (中译本: 多卡模, 曲线和曲面的微分几何学, 上海科学技术出版社, 1988).

[A4] Darboux, G., Leçons sur la théorie générale des surfaces, 1-4, Chelsea, reprint, 1972.

[A5] Guggenheimer, H., Differential geometry, McGraw-Hill, 1963.

[A6] Kobayashi, S. and Nomizu, K., Foundations of differential geometry, 1-2, Interscience, 1963-1969.

[A7] O'Neill, B., Elementary Differential geometry, Acad. Press, 1966.

[A8] Spivak, M., Differential geometry, 1-5, Publish or Perish, 1979.

[A9] Klingenberg, W., Riemannian geometry, de Gruyter, 1982.

[A10] Cartan, E., Oeuvres complètes, Gauthier-Villars, 1952.


沈纯理 译

**挠率形式** [**torsion form; кручения форма**]

仿射联络 (affine connection) 的位移的向量值 1 形式的共变微分, 即 2 形式

$$\Omega=D\omega=d\omega+\theta\wedge\omega,$$

其中 $\theta$ 是联络形式. 挠率形式满足第一 Bianchi 恒等式 (first Bianchi identify):

$$d\Omega=\theta\wedge\Omega+\omega\wedge\Theta,$$

其中 $\Theta$ 是给定联络的曲率形式 (curvature form). 约化联络的挠率形式的定义是类似的.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】

参考文献


[A1] Kobayashi, S. and Nomizu, K., Foundations of differential geometry, 1-2, Interscience, 1963.


沈纯理 译

**无扭模** [**torsion-free module; модуль без кручения**], 亦称无挠模

一个无零因子环 $A$ 上的模 (module) $M$, 使得由等式 $am=0$, $a\in A$, $m\in M$ 可得 $a=0$ 或 $m=0$. 这样的 (左) 模例子有环 $A$ 自身及 $A$ 的非零左理想. 无扭模的子模以及无扭模的直和与直积都是无扭模. 如果 $A$ 是交换的, 则对任意模 $M$, 有一个扭子模.

$$T(M)=\{m\in M|\exists a\in A,\ a\neq 0, \text{使得 } am=0\},$$

这时商模 $M/T(M)$ 是无扭的. Л. В. Кузьмин 撰

【补注】 更一般地, 对任意交换环 $R$, 一个左 $R$ 模 $M$ 称为无扭的, 如果 $m\in M$, $r$ 为 $R$ 中正则元, 使 $rm=0$, 则必有 $m=0$. 详情及一些参考文献见扭子模 (torsion submodule).

冯绪宁 译

**扭子模** [**torsion submodule; кручения подмодуль**], 亦称挠子模

【补注】 设 $R$ 是有单位元的结合环, $M$ 是左 $R$ 模. 扭子群 (torsion subgroup) $T(M)$ 定义为

$$T(M)=\{x\in M:\mathrm{Ann}_R(x)\text{ 含有一个正则元}\}.$$

这里正则元 (regular element) $r\in R$ 是一个不是零因子 (既非左零因子, 又非右零因子) 的元素.

如果 $R$ 是左 Ore 的 (left Ore) (见下文和**结合环与结合代数** (associative rings and algebras)), 则 $T(M)$ 是 $M$ 的子模, 称为扭子模 (torsion submodule). 若 $T(M)=0$, 则模 $M$ 是无扭的 (torsion free). 若 $T(M)=M$, 则为扭 (torsion) 模.

更一般地, Abel 范畴 $\mathscr{C}$ 的扭 (挠) 理论 (torsion theory) 是 $\mathscr{C}$ 的对象的一对子类 $(\mathscr{T},\mathscr{F})$, 使得对所有 $T\in\mathscr{T}$, $F\in\mathscr{F}$, 均有 $\mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(T,F)=\{0\}$, 并且 $\mathscr{T}$ 和 $\mathscr{F}$ 关于这一性质极大, 即若对所有 $F\in\mathscr{F}$, $\mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(X,F)=\{0\}$, 则有 $X\in\mathscr{T}$; 若对所有 $T\in\mathscr{T}$, $\mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(T,Y)=\{0\}$, 则 $Y\in\mathscr{F}$.

左 Ore 环 $R$ 的扭子模和无扭子模形成左 $R$ 模范畴 $R$-Mod 的一个扭理论.

$R$-Mod 上的根 (radical) 是一个左正合函子 Rad: $R$-Mod $\to R$-Mod, 使对所有 $M$, $N\in R$-Mod, 有

i) $\mathrm{Rad}(M)$ 是 $M$ 的子模;

ii) 对所有 $f\in\mathrm{Hom}_R(M,N)$, 有 $f(\mathrm{Rad}\,M)\subset\mathrm{Rad}\,N$; 更确切地, $\mathrm{Rad}(f)$ 是 $f$ 在 $\mathrm{Rad}(M)\subset M$ 上的限制;

iii) $\mathrm{Rad}(M/\mathrm{Rad}(M))=\{0\}$.

一个根 Rad 是扭根 (torsion radical) 或遗传根 (hereditary radical), 若对模 $M$ 的每个子模 $N$, $N\cap\mathrm{Rad}(M)=\mathrm{Rad}(N)$. 扭根 Rad 确定 $R$-Mod 中的一个扭理论 $\mathscr{T}_{\mathrm{Rad}}=\{M\in R\text{-Mod};\ \mathrm{Rad}(M)=M\}$, $\mathscr{F}_{\mathrm{Rad}}=\{M\in R\text{-Mod};\ \mathrm{Rad}(M)=0\}$. $R$-Mod 的所有扭理论由此得到.

$R$ 的一个左分母集是 $R$ 的一个子幺半群 $S$ (即

$1\in S$，并且 $s_1$，$s_2\in S\Rightarrow s_1s_2\in S$)，使得

a)(左 Ore 条件(left Ore condition))对所有 $s_1\in S$，$r_1\in R$，存在 $s_2\in S$，$r_2\in R$，使得 $s_2r_1=r_2s_1$；

b)若对 $r\in R$，$s\in S$，有 $rs=0$，则存在 $s'\in S$，使得 $s'r=0$.

如果 $R$ 的所有正则元的集合是一个左分母集，则 $R$ 称为左 Ore 的(left Ore)．左分母集也称为左 Ore 集(left Ore set)．

一个左分母集 $S$ 由相伴根函子

$$\mathrm{Rad}_S(M)=\{x\in M;\ \mathrm{Ann}_R(x)\cap S\neq\varnothing\}$$

确定 $R$-Mod 的一个扭理论($\mathcal{T}_S$，$\mathcal{F}_S$)．这表明了扭理论和(非交换)局部化(理论)之间的联系．这方面的更详细的内容见[A1]，[A2]，[A3]，也见**分式环**(fractions，ring of)．

**参考文献**


[A1] Rowen，L．H．，Ring theory，1，Acad．Press，1988，§3．4

[A2] Faith，C．，Algebra：rings，modules，and categories，1，Springer，1973，§15，§16．

[A3] Golan，J．S．，Localization of noncommutative rings，M．Dekker，1975．


蔡传仁 译

## 挠率张量[torsion tensor；кручения тензор]

一个(1，2)型张量，关于其指标是反对称的．它可通过流形 $M^n$ 上的局部共基把联络的**挠率形式**(torsion form)分解而得．特别地，在和乐共基 $dx^i$ ($i=1,\cdots,n$)下，挠率张量的分量 $S^k_{ij}$ 可用联络的 **Christoffel 符号**(Christoffel symbol) $\Gamma^k_{ij}$ 表示如下：

$$S^k_{ij}=\Gamma^k_{ij}-\Gamma^k_{ji}.$$

М．И．Войцеховский 撰

【补注】 挠率张量 $T$ 也可用共变导数 $\nabla$ 和向量场 $X$，$Y$ 表示成

$$T(X,\ Y)=\nabla_XY-\nabla_YX-[X,\ Y].$$

**参考文献**


[A1] Hicks，N．J．，Notes on differential geometry，v．Nostrand，1965．

[A2] Gromoll，D．，Klingenberg，W．and Meyer，W．，Riemannsche Geometrie im Grossen，Springer，1968．

[A3] Klingenberg，W．，Riemannian geometry，de Gruyter，1982．


沈纯理 译

## 环面[torus；тор]

由一个闭圆环绕位于圆所在的平面内并且与圆不相交的一轴线旋转所得到的立体图形．圆的中心画出一个圆，称为**环面的轴圆**(axial circle of the torus)，它的中心称为环面的中心(centre of the torus)．轴圆的平面称为**环面的赤道面**(equatorial plane of the torus)，由给定圆的旋转而得到的位于环面上圆的边界称为**环面的子午线**(meridians of the torus)．

在 Euclid 空间 $E^3$ 的 Descartes 坐标下，具有向径

$$r=a\sin u\mathbf{k}+l(1+\varepsilon\cos u)(\mathbf{i}\cos v+\mathbf{j}\sin v)$$

(这里($u$,$v$)是内蕴坐标，$a$ 是旋转圆的半径，$l$ 是轴圆的半径，并且 $\varepsilon=a/l$ 是偏心率)的环面的表面也常称为一个**环面**(torus)，它的线素是

$$ds^2=a^2du^2+l^2(1+\varepsilon\cos u)^2dv^2,$$

它的曲率是 $K=(\cos u)/al(1+\varepsilon\cos u)$．环面分别是**旋转曲面**(surface of revolution)与**管道曲面**(canal surface)的特殊情形．

从拓扑的观点看，一个环面是两个圆的乘积，所以一个环面是一个亏格 1 的二维闭流形．如果这个乘积是可度量化的，那么它可以作为一个 Clifford 曲面(Clifford surface)在 $E^4$ 内或在椭圆空间 $El^3$ 内的实现，例如，在 $E^4$ 内它的方程是

$$x_1^2+x_2^2=a^2,\quad x_3^2+x_4^2=b^2.$$

环面的一个自然的推广是**多维环面**(multidimensional torus)，即圆 $S$，即模等于 1 的所有复数的流形自身的拓扑乘积．$S$ 的自然的光滑性决定了环面上一个光滑流形结构，并且自然的乘法结构诱导环面上一个连通紧的交换实 Lie 群结构．这些群是 Lie 群理论的一个重要部分，且它们也称为**环面**(tori)(见**紧 Lie 群**(Lie group，compact)；**极大环面**(maximal torus)；**Cartan 子群**(Cartan subgroup))．一个偶数维的环面容许有一个复结构；当某些条件得到满足时，这样一个结构使环面成为 **Abel 簇**(Abelian variety)(亦见**复环面**(complex torus))．在代数群的结构理论中，环面作为一个实 Lie 群，有一个重要的类似，**代数环面**(algebraic torus)(亦见**代数群**(algebraic group)；**线性代数群**(linear algebraic group))．一个代数环面自身不是一个环面(如果基域是复数域)，但是有一个子群是一个环面并且在其上可缩(作为一个拓扑空间)，更确切地，一个代数环面，作为一个 Lie 群，同构于某个环面与同样的几个正实数乘法群的乘积．

М．И．Войцеховский，В．Л．Попов 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Berger，M．，Geometry，1－2，Springer，1987(中译本：M．贝尔热，几何，第一—五卷，科学出版社，1987－1991)

[A2] Berger，M．and Gostiaux，B．，Differential geometry，Springer，1988(译自法文)．

[A3] Coxeter, H. S. M., Introduction to geometry, Wiley, 1969, p.132; 356; 374.

林向岩 译 陆珊年 校

**环面纽结** [**torus knot**; **торический узел**]，型 $(p,q)$ 的

$\mathbf{R}^3$ 中的一条曲线，在柱坐标 $r, z, \theta$ 中，用方程

$$r = 2 + \cos t,\quad z = \sin t,\quad \theta = \frac{pt}{q}$$

给出，其中 $t \in [0, 2\pi q]$．这里，$p$ 和 $q$ 是互素的自然数．环面纽结位于非扭环面 $(r-2)^2 + z^2 = 1$ 的曲面上，与环面的子午线相交于 $p$ 个点且在 $q$ 个点平行．型 $(p,1)$ 和 $(1,q)$ 的环面纽结是平凡的．最简单的非平凡环面纽结是三叶形(trefoil)(图 1)．它是型 $(2,3)$ 的一种．型 $(p,q)$ 的环面纽结的群有一个表示(presentation) $\langle a, b : a^p = b^q \rangle$，Alexander 多项式由

$$(t^{pq}-1)(t-1)(t^p-1)^{-1}(t^q-1)^{-1}$$

给出．所有的环面纽结都是 **Neuwirth 纽结** (Neuwirth knot)．环面纽结的亏格是 $(p-1)(q-1)/2$．

环面纽结的第二个结构用到代数超曲面

$$V = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2 : z_1^p + z_2^q = 0\}$$

在原点处的奇异性．如果 $p$ 和 $q$ 互素，则 $V$ 与充分小的球面 $S^3 \subset \mathbf{C}^2$ 的交是 $S^3$ 中的一个纽结，它等价于型 $(p,q)$ 的环面纽结．在 $p$ 和 $q$ 不互素的情形，这个交也位于一个非扭环面 $T^2 \subset S^3$ 上，但由几个分支组成．这样得到的链环称为型 $(p,q)$ 的环面链环(torus link of type $(p,q)$)(见图 2，其中 $p=3$，$q=6$)．

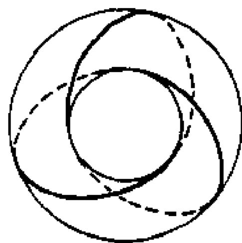


图 1

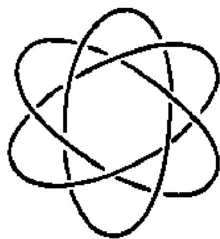


图 2

**参考文献**

[1] Crowell, R. H. and Fox, R. H., Introduction to knot theory, Ginn, 1963.

[2] Milnor, J., Singular points of complex hypersurfaces, Princeton Univ. Press, 1968.

М. Ш. Фарбер 撰

【补注】 也见纽结理论(knot theory)．

**参考文献**

[A1] Rolfsen, D., Knots and links, Publish or Perish, 1976.

徐森林 译

**全导数** [**total derivative**; **полная производная**]，复合函数的

函数 $y = f(t, u_1, \cdots, u_m)$ 关于 $t$ 的导数，其中 $f$ 不仅直接依赖于变量 $t$，而且还通过中间变量 $u_1 = u_1(t, x_1, \cdots, x_n), \cdots, u_m = u_m(t, x_1, \cdots, x_n)$ 依赖于 $t$．它由公式

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial t} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial u_m}\frac{\partial u_m}{\partial t}$$

计算，其中 $\partial f/\partial t, \partial f/\partial u_1, \cdots, \partial f/\partial u_m, \partial u_1/\partial t, \cdots, \partial u_m/\partial t$ 均为**偏导数**(partial derivative)．

Е. Д. Соломенцев 撰 王斯雷 译

**全增量** [**total increment**; **полное приращение**]，多元函数的

当所有自变量具有增量(一般为非零)时，函数得到的增量．确切地说，设函数 $f$ 定义在变量 $x_1, \cdots, x_n$ 的 $n$ 维空间 $\mathbf{R}^n$ 的点 $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})$ 的某个邻域内．记

$$\Delta x = (\Delta x_1, \cdots, \Delta x_n),$$

$$x^{(0)} + \Delta x = (x_1^{(0)} + \Delta x_1, \cdots, x_n^{(0)} + \Delta x_n),$$

称函数 $f$ 在 $x^{(0)}$ 的增量

$$\Delta f = f(x^{(0)} + \Delta x) - f(x^{(0)})$$

为全增量，是指当 $x^{(0)} + \Delta x$ 属于 $f$ 的定义域时，它被看成自变量 $x_1, \cdots, x_n$ 的 $n$ 个可能增量 $\Delta x_1, \cdots, \Delta x_n$ 的函数．除了函数的全增量，也可以考虑 $f$ 在点 $x^{(0)}$ 关于变量 $x_k$ 的部分增量(partial increments) $\Delta_{x_k} f$，即当 $\Delta x_j = 0$，$j = 1, \cdots, k-1, k+1, \cdots, n$ 时的增量 $\Delta f$，而 $k$ 固定 $(k = 1, \cdots, n)$．

Л. Д. Кудрявцев 撰 王斯雷 译

**全集** [**total set**; **тотальное множество**]

**向量空间**(vector space) $E$ 上分离 $E$ 中点的线性泛函的一个集合 $\Sigma$，即使得对任意非零向量 $x \in E$ 存在 $f \in \Sigma$ 使 $f(x) \neq 0$．

В. И. Ломоносов 撰

【补注】 在上述意义下的全集也可以更确切地称为线性泛函的全集(total set of linear functionals)，[A1]．

更一般地，当 $T$ 是一拓扑向量空间时，集合 $M \subset T$ 称为全集或基本集(fundamental set)，如果 $M$ 的线性张在 $T$ 中稠．如果 $E$ 的代数对偶 $E^*$ 上给予弱拓扑(weak topology)(因而 $E^* \simeq \prod_{\alpha \in A} K$，如果 $K$ 是基域且 $\{e_\alpha : \alpha \in A\}$ 是 $E$ 的一个代数基)，则对集合 $\Sigma \subset E^*$ 这两个定义是一致的．

参考文献

[A1] Rolewicz, S., Metric linear spaces, Reidel, 1985. 44.

[A2] Köthe, G., Topological vector spaces, I, Springer, 1969, p. 132, 247 ff.　　葛显良 译　鲁世杰 校

**全空间 [total space; расслоения пространство]**

见纤维空间 (fibre space).

**函数的全变差 [total variation of a function; полное изменение функции]**

即一元函数的变差 (variation of a function). 实值函数的全变差是它的正变差 (见函数的正变差 (positive variation of a function)) 与负变差 (见函数的负变差 (negative variation of a function)) 之和.

Б. И. Голубов 撰

【补注】 若 $f$ 为 $[a,b]$ 上的复值函数, 则它在 $[a,b]$ 上的全变差是数

$$V_a^b f=\sup\left\{\sum_{j=1}^{n}|f(t_j)-f(t_{j-1})|:\right.$$
$$\left.a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b\right\}.$$

若 $f$ 还是连续的, 则这个数就是参数表示 $f$ 在复平面上的弧长. 若 $f$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续, 则

$$V_a^b f=\int_a^b|f'(t)|dt.$$

参考文献

[A1] Stromberg, K., An introduction to classical real analysis, Wadsworth, 1981.　　王斯雷 译

**全加性函数 [totally-additive function; вполне аддитивная функция], 集合上的**

更一般地, 称为可数加性集函数 (countably-additive set function).

**全有界集 [totally-bounded set; вполне ограниченное множество], 度量空间中的**

与度量空间的全有界子空间相同. 见全有界空间 (totally-bounded space).

А. В. Архангельский 撰　罗嵩龄 译

**全有界空间 [totally-bounded space; вполне ограниченное пространство]**

一个度量空间 (metric space) $X$, 对于任意 $\varepsilon>0$, 它可表示成有限个直径小于 $\varepsilon$ 的集合之并集. 等价条件是: 对每个 $\varepsilon>0$, $X$ 中存在有限 $\varepsilon$ 网 ($\varepsilon$-net), 也就是这样的有限集 $A$, 它使 $X$ 中每个点与 $A$ 中某点的距离小于 $\varepsilon$. 全有界空间并且仅有全有界空间才是这样的度量空间, 它可以表示成紧度量空间 (见紧空间 (compact space)) 的子空间. 度量全有界空间当作拓扑空间来看, 包罗了所有具有可数基的正则空间 (regular space). Euclid 空间的子空间全有界, 当且仅当它有界. 其逆不真: 任意两点间距离为 1 的无穷空间, 如同 Hilbert 空间的球面或球, 就是有界而非全有界的度量空间. 全有界空间概念的意义可用下述定理说明: 度量空间是紧统 (compactum), 当且仅当它是全有界且完全的. 度量全有界空间的度量完全化是紧空间. 全有界空间在一致连续映射下的象是全有界空间.

参考文献

[1] Kelley, J. L., General topology, Springer, 1975 (中译本: J. L. 凯莱, 一般拓扑学, 科学出版社, 1982).

[2] Hausdorff, F., Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig, 1914 (中译本: F. 豪斯道夫, 集论, 科学出版社, 1960).

[3] Александров, П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, М.-Л., 1948 (中译本: П. С. 亚历山大罗夫, 集与函数泛论初阶, 上册, 商务印书馆, 1954; 下册, 高等教育出版社, 1955).

[4] Колмогоров, А. Н., Фомин, С. В., Элементы функционального анализа, 4 изд., М., 1976 (中译本: A. H. 柯尔莫果洛夫, C. B. 佛明, 函数论与泛函分析初步, 上、下册, 高等教育出版社, 1992).

А. В. Архангельский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Engelking, R., General topology, Heldermann, 1989 (译自波兰文).　　罗嵩龄 译

**全不连通空间 [totally-disconnected space; вполне несвязное пространство]**

一个空间, 它的任何多于一点的子集都不连通. 等价条件是, 该空间中任何点的连通分支就是这个点. 同全不连通空间的任何子空间一样, 全不连通空间的拓扑积与拓扑和都是全不连通的. 任何全不连通紧统 (在所有意义下) 是零维的. 这种紧统很重要, 特别因为它们是 Boole 代数的 Stone 空间. 平面上全不连通空间 (Knaster-Kuratowski 扇 (Knaster-Kuratowski fan)) 可以用附加一个单点的办法构成连通空间. 这样的空间不是零维的. 在 Hilbert 空间中, 由所有坐标为有理数的点组成的子空间是一维全不连通的. 若空间中每个点是包含该点的所有闭开集的交, 则此空间是全不连通的 (特别地, 所有零维空间全不连通). 但是, 存在具有可数基的全不连通度量空间, 并不是其中所有点都是这种闭开集的交.

**参考文献**


[1] Hurewicz, W. and Wallman, G., Dimension theory, Princeton Univ. Press, 1948.

[2] Engelking, R., Outline of general topology, North-Holland, 1968 (译自波兰文).

[3] Kelley, J. L., General topology, Springer, 1975 (中译本: J. L. 凯莱, 一般拓扑学, 科学出版社, 1982).

[4] Bourbaki, N., Elements of mathematics, General topology, Springer, 1989 (译自法文).


А. В. Архангельский, Б. А. Ефимов 撰

【补注】 存在全不连通的平面集 $E$, 其中没有真超集是全不连通的 ([A3]). 这种集合的余集称为平面的原始离差集 (primitive dispersion set). 对所有 $n$, 存在 $n$ 维全不连通可分度量群 ([A4]).

不连通空间这个术语存在一些混乱. 有几种不连通性: 主要的两个共同点是: i) 本条目采用的: 连通子集由至多一点组成; ii) 对任意两点 $x$, $y$, 存在闭开集 $C$, 使 $x\in C$ 而 $y\notin C$.

这时, 两种都称为全不连通性. 参考文献 [A1] 和 [A2] 称满足 ii) 的空间为全不连通空间, [A2] 中称满足 i) 的空间为遗传不连通的 (hereditarily disconnected) (因为它们没有非平凡的连通子空间). (注意, ii) 蕴涵 i).)

Knaster - Kuratowski 扇形是如下定义的平面的一个子集: 在平面上考察位于区间 $[0,1]\times\{0\}$ 中的常用的 Cantor 三分集 $C$. 将 $C$ 中任意点 $x$ 与点 $(1/2, 1/2)$ 用直线段 $L_x$ 连接. 对任一 $x\in C$, 可如下取 $L_x$ 的子集 $F_x$: 若 $x$ 是 $C$ 的余集中一个区间的端点, 取 $L_x$ 中所有具有有理第二坐标的点, 反之取具有无理第二坐标的点. 并集 $F=\bigcup_{x\in C}F_x$ 就是 Knaster - Kuratowski 扇. 若在 $F$ 上移动点 $(1/2, 1/2)$, 就得到满足上述 i) 而不满足 ii) 的空间. 也见 **Kuratowski - Knaster 扇形** (Kuratowski-Knaster fan).

**参考文献**


[A1] Arkhangel'skiĭ, A. V. and Ponomarev, V. I., Fundamentals of general topology: problems and exercises, Reidel, 1984 (译自俄文).

[A2] Engelking, R., General topology, Helderman, 1989 (译自波兰文).

[A3] Estill, M. E., A primitive dispersion set of the plane, *Duke Math. J.*, 9 (1952), 19, 323 – 328.

[A4] Mill, J. van, $n$-dimensional totally disconnected topological groups, *Math. Japon.* 32 (1987), 267 – 273.


罗嵩龄 译

## 全测地流形 [totally-geodesic manifold; вполне геодезическое многообразие], 全测地子流形 (totally-geodesic submanifold)

**Riemann 空间** (Riemannian space) $V^N$ 中的一个子流形 $M^n$, 使得 $M^n$ 中的**测地线** (geodesic line) 也是 $V^N$ 中的测地线. 全测地子流形 $M^n$ 是用如下的特征来刻画的: 对 $M^n$ 的每个法向量, 其相应的**第二基本形式** (second fundametal form) 为零; 这等价于 $M^n$ 的所有法曲率为零.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 一般 Riemann 流形中全测地子流形的存在是例外情形. 反之, 许多这种全测地子流形的存在在近期的各种研究中被用来刻画某些特殊流形, 例如对称空间. 见 [A1].

**参考文献**


[A1] Ballman, W., Gromov, M. and Schroeder, V., Manifolds of non-positive curvature, Birkhäuser, 1985.

[A2] Kobayashi, S. and Nomizu, K., Foundations of differential geometry, 1 – 2, Interscience, 1963 – 1969.


沈纯理 译

## 全不完满空间 [totally-imperfect space; вполне несовершенное пространство]

不包含与 **Cantor 集** (Cantor set) 同胚的子集的**拓扑空间** (topological space). 例如, 任何完全可分不可数的可度量空间含有一不可数子空间, 和它的余子空间同为全不完满的.

А. А. Мальцев 撰

【补注】 在 F. Bernstein 发表 [A1] 之后, 若 $\mathbf{R}$ 的子集及其补集都是全不完满的, 常称之为 Bernstein 集 (Bernstein set). 这种集合是不可测的.

**参考文献**


[A1] Bernstein, F., Zur Theorie der trigonometrischen Reihe, *Ber. K. Sächs. Ges. Wissenschaft Leipzig Math.-Phys. Kl.*, **60** (1908), 325 – 338.


罗嵩龄 译

## 全不可约集 [totally-irreducible set; вполне неприводимое множество]

局部凸的**拓扑向量空间** (topological vector space) $E$ 上的, 在 $E$ 上的所有弱连续线性算子的代数 $S(E)$ 中处处稠密 (见**弱拓扑** (weak topology)) 的**线性算子** (linear operator) 集 $M$, 这里, $S(E)$ 被认为带弱算子拓扑. 全不可约集的概念, 最初是对 Banach 空间引进的, 后来发现在群 (主要是半单 Lie 群) 表示理论中很有用. 如果 $M$ 是全不可约集, 则它也是拓扑不可约的, 即 $E$ 的关于 $M$ 不变的任意闭子空间, 或者是零或者是整个空间 $E$. 如果 $M$ 是全不可约集, 则它的在 $S(E)$ 中的换位子集由恒等的倍数算子组成. 在下列情形, 全不可约的性质与拓扑不可约的性质是等价的: 1) $\dim E<\infty$, 2) $M$ 是 Hilbert 空间上的酉算子的半群.

**参考文献**


[1] Желобенко, Д. П., Гармонический анализ на па-

лупростых комплексных группах Ли. М., 1974.

Д. П. Желобенко 撰

【补注】 向量空间 $E$ 上的算子集 $M$ 称为代数不可约的 (algebraically irreducible), 如果不存在在所有 $A\in M$ 作用下保持不变的 $E$ 的真子空间 {即除了 {0} 和 $E$ 以外}. 也见**不可约表示** (irreducible representation). 在英文中, "totally-irreducible" 有时也写成 "completely irreducible (完全不可约的)".

拓扑不可约和代数不可约之间的联系, 以及 $M$ 的换位子集由恒等的倍数算子组成这一结论, 都基于 **Schur 引理** (Schur lemma). 在 $E$ 是域 $k$ 上的有限维空间的情形, 由算子集合的代数 (或拓扑) 不可约性可以推得: $\mathrm{End}_k(E)$ 中的换位子集通常是域 $k$ 上的可除代数, 而且等于 $k$ 如果 $k$ 是代数闭的. 如果 $k$ 不是代数闭的则不一定. 例如, 在 $k=\mathbf{R}$ 的情形, 群的不可约表示的换位可以是 $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ 或者 $\mathbf{R}$ 上的四元数的 4 维代数. 因此, 上面关于有限维空间 $E$ 时在代数不可约性 (或者, 此时是相同的, 拓扑不可约性) 之间的等价的叙述适合于代数闭的基本域, 但对非代数闭的基本域不成立. 例如, 设 $M$ 是算子集:

$$\left\{\begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix} : a,b,c,d\in\mathbf{R}\right\}$$

(四元数代数 (quaternion algebra) 的在其本身上的左正则表示), 则 $M$ 是代数不可约的, 但它的换位代数是形式为

$$\begin{bmatrix} e & f & g & h \\ -f & e & -h & g \\ -g & h & e & -f \\ -h & -g & f & e \end{bmatrix},\quad e,f,g,h\in\mathbf{R}$$

的所有矩阵的 4 维代数 (四元数代数在 $\mathrm{End}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}^4)$ 中的另一个相应于右正则表示的副本).

**参考文献**


[A1] Bratteli, O. and Robinson, D. W., Operator algebras and quantum statistical mechanics, 1, Springer, 1979, p. 47.

[A2] Dixmier, J., Les $C^*$-algèbres et leur représentations, Gauthier-Villars, 1964, § 2.3.


朱学贤 译 刘和平 校

## 全正规空间 [totally-normal space; вполне нормальное пространство]

一个拓扑空间 (topological space), 它的满足条件 $[A]\cap B=\emptyset$, $A\cap[B]=\emptyset$ 的任意两个子集 $A$, $B$ 有不交邻域; 这里, $[A]$ 和 $[B]$ 为集合 $A$ 和 $B$ 的闭包, $\emptyset$ 为空集. 全正规空间, 且只有这样的空间, 是遗传正规的. **完满正规空间** (perfectly-normal space) 是全正规的, 但反之不真. 也存在非全正规的**正规空间** (normal space).

В. И. Пономарев 撰

【补注】 在西方, 这种空间称为完全正规的 (completely normal), 全正规空间 (totally-normal space) 是这样的正规空间, 其每个开集都是局部有限开集族 $F_\alpha$ 之并 ([A1]). 因此, 这种空间推广了完满正规空间. 在维数论和同调论中, 完满正规空间在这种意义下多数可以推广成全正规空间.

**参考文献**


[A1] Dowker, C. H., Inductive dimension of completely normal spaces, *Quart. J. Math. (Oxford)*, 4 (1952), 267 – 281.

[A2] Engelking, R., General topology, Heldermann, 1989 (译自波兰文).


罗嵩龄 译

## 全序群 [totally ordered group; линейно упорядоченная группа]

一个**代数系统** (algebraic system) $G$, 关于乘法是一个**群** (group), 关于二元序关系 $\leqslant$ 是一个**全序集** (totally ordered set), 并且满足下列公理: 对任意元素 $x$, $y$, $z\in G$, 由 $x\leqslant y$ 得到 $xz\leqslant yz$ 和 $zx\leqslant zy$.

全序群 $G$ 的正元 (positive element) 集 $P=\{x\in G: x\geqslant e\}$ 有下列性质: 1) $PP\subseteq P$; 2) $P\cap P^{-1}=\{e\}$; 3) $g^{-1}Pg\subseteq P$; 以及 4) $P\cup P^{-1}=G$. 反过来, 如果群 $G$ 有一个集合 $P$ 满足条件 1) – 4), 那么 $G$ 可以构成一个以 $P$ 为正元集的全序群.

对于一个群是可序的有大量判别准则. 可序群是元素开方有唯一性的无挠群. 下面的群是可序的: 无挠 Abel 群, 无挠幂零群, 自由群以及自由可解群. 单纯非 Hopf 全序群存在. 可序群对其中心的商群是可序的.

全序群的直积, 完全直积和自由积, 并且也还有圈积都可以用扩充因子序的方法全序. 可以由全序群近似的群本身是可序的. 对于全序群有一个局部定理 (见 **Мальцев 局部定理** (Mal'tsev local theorem)). 一个全序群可以嵌入一个全序体的乘群和一个单纯全序群中. 可序群类是可公理化的. 一个全序群是关于区间拓扑的**拓扑群** (topological group). 一个全序群称为 Archimedes 的 (Archimedean), 当且仅当它没有非平凡的凸子群. 任意一个 Archimedes 全序群同构于具有自然顺序的实数加群的一个子群. 一个全序群的所有凸子群的集合形成一个具有 Archimedes 因子的完全内不变系统 (infra-invariant system), 从而全序群有可解正规系统 (见于**群系统** (subgroup system)).

全序群理论的特性是同偏序扩充相联系的问题(见准可序群(pre-orderable group)). 全序群概念有若干推广.

**参考文献**

[1] Кокорин, А. И., Копытов, В. М., Линейно упорядоченные группы, М., 1972(英译本: Kokorin, A. I. and Kopytov, V. M., Fully ordered groups, Israel Progr. Sci. Transl., 1974).

[2] Fuchs, L., Partially ordered algebraic systems, Pergamon, 1963

[3] Bourbaki, N., Algèbre, Eléments de mathématiques, Masson, 1981, Chapts. IV – VI.

А. И. Кокорин, В. М. Копытов 撰

【补注】

**参考文献**

[A1] Anderson, M. and Feil, T., Lattice ordered groups. An introduction, Reidel, 1988.

卢景波 译 王世强 校

**全序集** [**totally ordered set**; **линейно упорядченное множество**], 链(chain)

一个**偏序集**(partially ordered set), 对其中的任意两个元素 $a$ 和 $b$ 适合 $a\leqslant b$ 或 $b\leqslant a$. 全序集的任一子集本身也是全序集. 全序集的每一个极大(小)元素是一个最大(小)元素. 全序集的一个重要特殊情况是**良序集**(well-ordered set). 在偏序集的全序子集中, **合成序列**(composition sequence)起着特别重要的作用. 一个全序集 $P$ 的一个分割(cut)是指把它划分成两个集合 $A$ 及 $B$, 使得 $A\cup B=P$, $A\cap B$ 是空集, $A\subseteq B^{\vee}$ 并且 $B\subseteq A^{\Delta}$, 其中

$$B^{\vee}=\{x\in P: x\leqslant b, \text{ 对所有 } b\in B\},$$

$$A^{\Delta}=\{x\in P: x\geqslant a, \text{ 对所有 } a\in A\}.$$

类 $A$ 和 $B$ 分别称分割的下类和上类(lower and upper classes of the cut). 可以区分出下面类型的分割: 跳跃(jump)——在下类中有一个最大元素并且上类中有一个最小元素; Dedekind 分割(Dedekind cut)——在下(上)类中存在一个最大(小)元素, 但是在上(下)类中没有最小(大)元素; 间断(gap)——在下类中没有最大元素并且在上类中没有最小元素. 一个全序集称为连续的(continuous), 如果其所有分割都是 Dedekind 分割. 全序集 $P$ 的一个子集 $D$ 称为稠密的(dense), 如果 $P$ 的每一个非单个元素的区间都包含 $D$ 的元素. 全序实数集可以刻画为一个既无最大元素, 又无最小元素, 但却包含一个可数稠密子集的连续全序集. 每一个可数全序集同构于区间 [0, 1] 中的所有二进位分式构成的全序集的一个子集. 一个格(lattice) $L$ 同构于全序整数集的一个子集, 当且仅当它的每一个子格是一个收缩核(retract).

**参考文献**

[1] Александров, П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, М.-Л., 1948.

[2] Александров, П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977.

[3] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Theory of sets. Addison-Wesley, 1968 (译自法文).

Л. А. Скорняков 撰

【补注】 全序集也称线性序集(linearly ordered set).

**参考文献**

[A1] Sierpiński, W., Cardinal and ordinal numbers, PWN, 1958.

[A2] Zuckerman, M. M. Sets and transfinite numbers, Macmillan, 1974

卢景波 译 王世强 校

**全良序集** [**totally well-ordered set**; **вполне упорядоченное множество**]

见良序集(well-ordered set).

**竞赛图** [**tournament**; **турнир**]

无自环的**定向图**(graph, oriented), 且每一对顶点之间恰有一个方向的弧连接它们. $n$ 个顶点的竞赛图, 可视为在没有平局的情况下 $n$ 个选手比赛的结果. 竞赛图的概念被用于对 $n$ 个对象用两两比较的方法进行排序. 因此, 它在生物学、社会学等领域有用.

一个竞赛图, 如果它的顶点能用 1, …, $n$ 进行标号, 使得顶点 $v_i$ 到 $v_j$ 有弧, 当且仅当 $i>j$, 则这个竞赛图称为传递的(transitive). 传递的竞赛图不含回路. 一个竞赛图, 如果对任意有序对 $v_iv_j$, 都存在自 $v_i$ 到 $v_j$ 的有向路, 则称它是强的(strong). 竞赛图的一个弧集称为相容的(compatible), 如果这些弧及弧关联的顶点所构成的子图里不含回路. 按竞赛图"胜者"的定义, 相容集的最大基数是相容性的度量. 每一个竞赛图包含一个基数不小于 $(n^2/4)(1+o(1))$ 的相容弧集. 相容性的另一度量是 $n$ 个点竞赛图的传递 $k$ 顶点子竞赛图个数与强 $k$ 顶点子竞赛图个数的比. $n$ 个点竞赛图的强 $k$ 顶点子竞赛图的最大个数等于

$$\binom{n}{k}-k\binom{(n-1)/2}{k}, \text{ 若 } n \text{ 为奇数},$$

$$\binom{n}{k}-\frac{k}{2}\left\{\binom{n/2}{kh}-\binom{(n-2)/2}{k-1}\right\},$$

若 $n$ 为偶数.

一个竞赛图是强的, 当且仅当它有一个生成回路

(Hamilton 回路)．$n$ 个顶点的每个强竞赛图有一个长为 $k$ 的回路，$k=3, \cdots, n$．每一个竞赛图有一条生成路（Hamilton 路）．

$n$ 个顶点的竞赛图的出度 $d_i$ 满足方程

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (n-d_i)^2 .$$

假设一组整数 $(d_1, \cdots, d_n)$ 满足条件 $0 \leqslant d_1 \leqslant \cdots \leqslant d_n \leqslant n-1$．那么存在一个竞赛图其出度为 $d_1, \cdots, d_n$，当且仅当对任意 $k=1, \cdots, n-1$ 有不等式

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \geqslant \frac{k(k-1)}{2} .$$

且当 $k=n$ 时等式成立．进而，一个竞赛图是强的，当且仅当对 $k<n$ 有

$$\sum_{i=1}^{k} d_i > \frac{k(k-1)}{2} .$$

如果 $T_1$ 和 $T_2$ 是一个竞赛图的两个子竞赛图且满足：对 $T_1$ 的每个顶点 $v'$ 和 $T_2$ 的每个顶点 $v''$ 有弧 $(v', v'')$，则记为 $T_1 \to T_2$．假设一个竞赛图的点集被划分为不相交的子集 $T_1, \cdots, T_m$，使得对 $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant m$ 或者 $T_i \to T_j$ 或者 $T_j \to T_i$，那么这个划分定义了 $T$ 的顶点上的一个等价关系（equivalence relation）．一个竞赛图称为简单的（simple），如果其顶点上不能够定义非平凡的等价关系．$n$ 个顶点的每个竞赛图都是某个 $n+2$ 个顶点简单竞赛图的子竞赛图．一个 $n$ 顶点竞赛图 $T$ 是某个 $n+1$ 顶点简单竞赛图的子竞赛图，当且仅当 $T$ 不是 3 个点的回路，也不是奇数个顶点的非平凡传递竞赛图．两两不同构的 $n$ 个顶点的竞赛图的个数渐近地等于

$$\frac{1}{n!} 2^{\binom{n}{2}}$$

$n$ 个顶点标号的不同竞赛图的个数等于

$$2^{\binom{n}{2}}$$

对于竞赛图和强竞赛图的生成函数 $t(x)$ 和 $s(x)$ 有关系：

$$s(x) = \frac{t(x)}{1+t(x)}$$

$n \geqslant 5$ 个顶点的每个竞赛图，若它不是强的，则可由它的 $n-1$ 个顶点的子竞赛图族唯一地重构．

**参考文献**


[1] Harary, F., Graph theory, Addison-Wesley, 1969.

[2] Moon, J. W., Topics on tournaments, Holt. Rineh-art & Winston, 1968.


A. A. Сапоженко 撰

【补注】 $N=\{1, \cdots, n\}$ 上的一个随机竞赛图定义为：对每对不同顶点 $x_i, x_j$，随机地选取弧 $\overrightarrow{x_i x_j}$ 或 $\overrightarrow{x_j x_i}$．这种选取对所有不同顶点对是等概率和独立的．关于随机竞赛图的许多结果见[2]．

**参考文献**


[A1] Harary, F. and Moser, L., The theory of round robin tournaments, *Amer. Math. Monthly*, 73 (1966), 231－246.

[A2] Comtet, L., Advanced Combinatorics, Reidel, 1974, p. 68ff.


刘振宏 译 李 乔 校

**域塔**[**tower of fields** 或 field tower; **Башня полей**]

某个域 $k$ 的扩张序列

$$k \subset k_1 \subset \cdots \subset k_i \subset \cdots . \qquad (*)$$

依据扩张 $k_{i+1}/k_i$ 的性质，这个塔被称作正规的，Abel 的，可分的，等等．域塔的概念在 **Galois 理论**（Galois theory）中起着重要的作用，在此理论中用根号表示方程的根的问题归结为该方程的分裂域含于一个正规 Abel 域塔的可能性．

在类域论（class field theory）中出现域塔

$$k \subset k_1 \subset \cdots \subset k_i \subset \cdots ,$$

其中 $k$ 是某个代数数域，同时每个域 $k_{i+1}$ 是 $k_i$ 的 Hilbert 类域（Hilbert class field）（即 $k_i$ 的极大 Abel 非分歧扩张）．任一扩张 $k_{i+1}/k_i$ 的 Galois 群同构于域 $k_i$ 的理想类群（依照 Artin 互反律），由于后者是有限群，所以所有扩张 $k_{i+1}/k_i$ 都是有限的．这些 $k_i$ 的并集 $K$ 是 $k$ 的极大可解非分歧扩张．扩张 $K/k$ 的有限性问题（类域塔问题（class field tower problem））于 1925 年由 Ph. Furtwängler 提出，于 1964 年得到了否定的答案（[2]）．具有无限类域塔的域的例子是有理数域添加 $\sqrt{-30030}$ 所得到的扩张．这样的域不可能嵌入到一个具有唯一因子分解性质的代数数域中．此问题的这个解答在代数数论中有其应用，例如，在得到代数数域判别式增长的精确估计方面．

**参考文献**


[1] Cassels, J. W. S. and Fröhlich. A. (eds.), Algebraic number theory, Acad. Press, 1967.

[2] Голод, Е. С., Шафаревич, И. Р., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **28** (1964), 2, 261－272.


A. H. Паршин 撰 赵春来 译

**迹**[**trace**; **след**]

域 (field) $K$ 到域 $k$（其中 $K$ 是 $k$ 的有限扩张）的映射，它把元素 $\alpha \in K$ 映到下述矩阵的迹（见**方阵的迹**（trace of a square matrix））：此矩阵是把 $\beta \in K$ 映成 $\alpha\beta$ 的 $k$ 线性映射 $K \to K$ 的矩阵．$\mathrm{Tr}_{K/k}$ 是加法群的同态（homomorphism）．

如果 $K/k$ 是可分扩张，则

$$\mathrm{Tr}_{K/k}(\alpha)=\sum\sigma_i(\alpha),$$

其中的求和取遍 $K$ 到 $k$ 的代数闭包 $\bar{k}$ 的所有 $k$ 同构 $\sigma_i$. 迹映射是传递的，即，如果 $L/K$ 和 $K/k$ 是有限扩张，则对任一 $\alpha\in L$,

$$\mathrm{Tr}_{L/k}(\alpha)=\mathrm{Tr}_{K/k}(\mathrm{Tr}_{L/K}(\alpha)).$$

Л. В. Кузьмин 撰

【补注】 特别在比较老的数学文献中，会见到用 $S_{pK/k}$（来源于德文 Spur）代替 $\mathrm{Tr}_{K/k}$ 作为这个映射的记号.

**参考文献**


[A1] Jacobson, N., Lectures in abstract algebra, 3. Theory of fields and Galois theory, Springer, reprint, 1975.

[A2] Jacobson, N., Basic algebra, 1, Freeman, 1985.

[A3] Lang, S., Algebra, Addison-Wesley, 1965.


赵春来 译

## 方阵的迹 [trace of a square matrix; след]

**矩阵**（matrix）的主对角线上元素的和. 矩阵 $A=\|a_{ij}\|$ 的迹记作 $\mathrm{tr}\,A$, $\mathrm{Tr}\,A$ 或 $\mathrm{Sp}\,A$:

$$\mathrm{tr}\,A=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}.$$

设 $A$ 是域 $K$ 上一个 $n$ 阶方阵. $A$ 的迹等于 $A$ 的**特征多项式**（characteristic polynomial）的根的和. 如果 $K$ 是特征为零的域，那么 $n$ 个迹 $\mathrm{tr}\,A,\cdots,\mathrm{tr}\,A^n$ 唯一确定 $A$ 的特征多项式. 特别地，$A$ 是幂零的，当且仅当 $\mathrm{tr}\,A^k=0$ 对所有 $k=1,\cdots,n$.

如果 $A$ 与 $B$ 是 $K$ 上同阶的方阵，$\alpha,\beta\in K$，则

$$\mathrm{tr}(\alpha A+\beta B)=\alpha\,\mathrm{tr}\,A+\beta\,\mathrm{tr}\,B,$$

$$\mathrm{tr}\,AB=\mathrm{tr}\,BA,$$

如果 $\det B\neq 0$,

$$\mathrm{tr}(BAB^{-1})=\mathrm{tr}\,A.$$

域上方阵的张量（Kronecker）积的迹等于其因子的迹的乘积.

Д. А. Супруненко 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Cohn, P. M., Algebra, 1, Wiley, 1982, p. 336.

[A2] Gantmacher, F. R. (Gantmakher, F. R.), The theory of matrices, 1, Chelsea, reprint, 1959（译自俄文）（中译本：甘特马赫尔，矩阵论，高等教育出版社，1955）.


蒋滋梅 译

## $C^*$ 代数 $A$ 上的迹 [trace on a $C^*$-algebra; след на $C^*$-алгебре]

$A$ 的正元素集 $A^+$ 上的一个加性泛函 $f$，在 $[0,+\infty]$ 中取值，对于用正数的乘法是齐性的且对所有的 $x\in A$ 满足条件 $f(xx^*)=f(x^*x)$. 迹 $f$ 称为**有限的**（finite），如果对所有的 $x\in A^+$, $f(x)<+\infty$; $f$ 称为**半有限的**（semi-finite），如果对所有的 $x\in A^+$, $f(x)=\sup\{f(y):\ y\in A,\ y\leqslant x,\ f(y)<+\infty\}$. $A$ 上的有限迹是使得对所有 $x,y\in A$, $\varphi(xy)=\varphi(yx)$ 的那些 $A$ 上正线性泛函 $\varphi$ 到 $A^+$ 上的限制. 设 $f$ 是 $A$ 上的一个迹，设 $\mathfrak{N}_f$ 是使得 $f(xx^*)<+\infty$ 的元素 $x\in A$ 的集合，又设 $\mathfrak{M}_f$ 是 $\mathfrak{N}_f$ 中元素对之积的线性组合的集合. 则 $\mathfrak{N}_f$ 和 $\mathfrak{M}_f$ 是 $A$ 的自伴双边理想，且存在唯一的 $\mathfrak{M}_f$ 上线性泛函 $\varphi$ 与 $f$ 在 $\mathfrak{M}_f\cap A^+$ 上一致，设 $f$ 是 $C^*$ 代数 $A$ 上一个下半连续半有限迹. 则公式 $s(x,y)=\varphi(y^*x)$ 定义 $\mathfrak{N}_f$ 上的一个 Hermite 型，对于此型从 $\mathfrak{N}_f$ 到其自身中的映射 $\lambda_f(x):x\mapsto xy$ 对任意 $x\in A$ 是连续的. 令 $N_f=\{x\in\mathfrak{N}_f:\ s(x,x)=0\}$，又设 $H_f$ 是商空间 $\mathfrak{N}_f/N_f$ 关于型 $s$ 定义的标量积的完全化. 通过转移到商空间随后作完全化，算子 $\lambda_f(x)$ 定义了 Hilbert 空间 $H_f$ 上的某个算子 $\pi_f(x)$，且映射 $x\to\pi_f(x)$ 是 $C^*$ 代数 $A$ 在 $H_f$ 中的一个表示. 映射 $f\to\pi_f$ 建立了 $A$ 上下半连续半有限迹的集合与具有迹的 $A$ 的表示的集合之间的一一对应，精确到拟等价是确定的.

**参考文献**


[1] Dixmier, J., $C^*$ algebras, North-Holland, 1977（译自法文）.


А. И. Штерн 撰

【补注】 亦见 **$C^*$ 代数**（$C^*$-algebra）；**迹**（trace）；**拟等价表示**（quasi-equivalent representations）.

**参考文献**


[A1] Bratteli, O. and Robinson, D. W., Operator algebras and quantum statistical mechanics, 1, Springer, 1979.


葛显良 译 鲁世杰 校

## 曳物线 [tractrix; трактриса]

一条平面超越曲线，它在 Descartes 直角坐标系中的方程是

$$x=\pm a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}\mp\sqrt{a^2-y^2}.$$

曳物线关于原点是对称的（见图），$x$ 轴是它的渐近线，点 $(0,a)$ 是一个带有垂直切线的尖点（cusp）. 从点 $x=0$ 量起的弧长是

$$l=a\ln\frac{a}{y}.$$

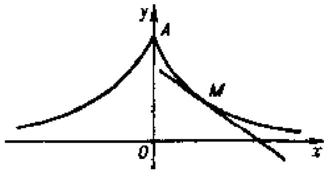
曲率半径是

$$r=a\cot\frac{x}{y}.$$

由曳物线和它的渐近线所围面积是

$$S=\frac{\pi a^2}{2}.$$

把曳物线绕 $x$ 轴旋转后就形成了**伪球面**（pseudosphere）. 从曳物线一条切线的切点 $M$ 到该切线与 $x$ 轴的交点之间的线段的长度是常值，由于这一性质可




把曳物线看成是长度为 $a$ 的线段的一端沿 $x$ 轴移动后，另一端所形成的轨道．曳物线的概念可以推广到当线段的一端不是沿一直线，而是沿某给定曲线移动的情形；称这样所得到的曲线为给定曲线的轨道(trajectory)．

**参考文献**

[1] Савелов, А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов 撰

【补注】

**参考文献**

[A1] Berger, M. and Gostiaux, B., Differential geometry, Springer, 1988(译自法文).
[A2] Gomes Teixeira, F., Traité des courbes, 1－3, Chelsea, reprint, 1971.
[A3] Greenberg, M., Euclidean and non-Euclidean geometries, Freeman, 1974.
[A4] Spivak, M., Differential geometry, 1－5, Publish or Perish, 1979.
[A5] Fladt, K., Analytische Geometrie spezieller ebener Kurven, Akad. Verlagsgesellschaft, 1962.
[A6] Lawrence, J. D., A catalog of special plane curves, Dover, reprint, 1972.

沈纯理 译

**轨道[trajectory; траектория]**

此词的原意是一点在运动中所描绘出的曲线(此点的轨道)．在质点组的运动中每点都沿自己的轨道运动．同时，整个系统的状态由**相空间**(phase space)中之一点表示，它也沿相空间中某一轨道运动．如果有必要强调所讨论的是后一种轨道，就说讨论的是**相轨道**(phase trajectory)．(对于仅由一个质点 $M$ 构成的"质点组"，它在通常空间中的"几何"轨道和相轨道的区别仍然存在，因为状态不仅指 $M$ 的几何位置，同时也包括了它的速度．)

在比较抽象的**动力系统**(dynamical system)理论中，轨道通常是指相轨道(这更多是由于，在一般情况下讨论其他意义下的轨道是不合适的；"系统"一词不一定具有质点组那样的物理意义)．严格说来，相轨道不一定是一曲线而可以成为一个点(即一**平衡位置**(equilibrium position))．最后，"轨道"(trajectory)一词同时也是 orbit 的译名，其意义相同，但后者是用于动力系统的抽象概念，即作为变换的群或半群的轨道，而不一定指单参数群或半群的轨道(即是说，轨道不一定是一曲线)．

对于由不可逆映射 $S$ 的迭代而生成的**瀑布**(cascade)，所谓一点 $x$ 的轨道(或称完全轨道(complete trajectory))有时是指其象 $S^n x$, $n=0, 1, \cdots$, 以及这些象在映射 $S^m$, $m=1, 2, \cdots$, 下的原象的全体．

Д. В. Аносов 撰

【补注】

**参考文献**

[A1] Арнольд, В. И., Математические методы классической механики, М. 1974(中译本：В. И. Арнольд，经典力学的数学方法，高等教育出版社，1992)．
[A2] Arnol'd, V. I. and Avez, V., Ergodic problems of classical mechanics, Benjamin, 1968(译自法文)．

齐民友 译

**超越性的度量[transcendency, measure of 或 transcendence measure; трансцендентности мера]**，简称超越度

刻画一个给定的**超越数**(transcendental number)与高和次数均有界的代数数的集合之间，当这些参数的界值变化时产生的偏差的函数．对于超越数 $\omega$ 及自然数 $n$ 和 $H$，超越性度量是

$$w_n(\omega; H)=\min|P(\omega)|,$$

其中极小值取自所有次数不超过 $n$ 且高不超过 $H$ 的非零多项式．由 Dirichlet"抽屉"原理(见 **Dirichlet 原理**(Dirichlet principle))可推出下列估值始终成立：

$$w_n(\omega; H)<c_1^n H^{-n},$$

其中 $c_1$ 仅与 $\omega$ 有关．在许多情况下，不仅可以得到数 $\omega$ 的超越性的证明，而且能够通过次数及 $n$ 和 $H$ 的对数或指数函数给出超越性度量的下界．例如，证明 $e$ 的超越性的 Hermite 方法可以得到不等式

$$w_n(e; H)>H^{-n-(c_2 n^2 \ln n)/\ln\ln H},$$

此处 $c_2>0$ 是一个绝对常数，而 $H\geqslant H_0(n)$．对任何固定的 $n$ 及 $\varepsilon>0$，对几乎所有(在 Lebesgue 意义下)实数 $\omega$ 有

$$w_n(\omega; H)>c_3 H^{-n-\varepsilon},\ c_3=c_3(\omega; n, \varepsilon)$$

(见 **Mahler 问题**(Mahler problem))．超越数可以基于在 $n$ 和 $H$ 不加限制地变化时 $w_n(\omega; H)$ 的渐近性状的差别而加以分类(见[3])．

**参考文献**

[1] Гельфонд, А. О., Трансцендентные и алгебраические числа, М., 1952.(英译本：Gel'fond, A. O., Transcendental and algebraic numbers, Dover, 1960)．
[2] Cijsouw, P. L., Transcendence measures, Dissertation, Univ. Amsterdam, 1972.

[3] Baker, A., Transcendental number theory, Cambridge Univ. Press, 1975. В. Г. Спринджук 撰

【补注】

参考文献

[A1] Шидловский, А. Б., Трансцендентные числа, М., 1987 (英译本: Shidlovskiĭ, A. B., Transcendental numbers, de Gruyter, 1989).

朱尧辰 译 戚鸣皋 校

**超越分支点** [**transcendental branch point**; **трансцендентная точка ветвления**], 解析函数 $f(z)$ 的

不是**代数分支点** (algebraic branch point) 的**分支点** (branch point). 换言之, 它或是有限 $k(>0)$ 阶分支点 $a$, 但在该点处不存在有限或无穷极限

$$\lim_{\substack{z \to a \\ z \neq a}} f(z),$$

或是无穷阶对**数分支点** (logarithmic branch point). 例如, 第一种可能性出现于函数 $\exp(1/z^{1/k})$ 的超越分支点 $a=0$ 处, 第二种可能性出现于函数 $\ln z$ 的超越分支点 $a=0$ 处.

在第一种情形下, 函数 $f(z)$ 在 $a$ 的邻域中可展开为 **Puiseux 级数** (Puiseux series)

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^{n/k},$$

且此级数对无穷多个负下标 $n$ 具有非零系数 $c_n$.

参考文献

[1] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968 (中译本: A. И. 马库雪维奇, 解析函数论, 高等教育出版社, 1957, 第八章).

Е. Д. Соломенцев 撰 沈永欢 译

**超越曲线** [**transcendental curve**; **трансцендентная кривая**]

一条平面曲线, 其在直角 Descartes 坐标系下的方程不是代数的. 和**代数曲线** (algebraic curve) 相对照, 超越曲线和一条直线能有无穷多个相交点, 而且自身可以有无穷多个拐点. 在超越曲线上存在着具有特殊属性的点, 而这在代数曲线上是不存在的: 终结点 (points of termination)——以该点为中心、半径充分小的圆与曲线只交于一点; 角点 (corner points) (折点 (points of fracture))——在该点曲线的两个分支重合, 而且每个分支在该点都有一条切线; 渐近点 (asymptotic points)——曲线的一个分支连续地逼近它, 且形成围绕该点的一个无穷次的旋转. 某些超越曲线还有其他形式的特性 (例如, 它们有一个点化的分支, 包含着无穷多个孤立点).

一个将超越曲线予以分类的企图是基于下列事实: 对已知超越曲线中的绝大多数 (如同对所有的代数曲线), 曲线在每一点处的切线的斜率 $y'$ 是一个代数方程的根, 该方程的系数是 $x$ 和 $y$ 的多项式. 换句话说, 大多数已知超越曲线的微分方程是一个形如

$$\sum_{r=0}^{n} f_r(x,y)(y')^{n-r}=0$$

的一阶方程, 其中 $f_0, \cdots, f_n$ 是无公共因子的多项式. 这就使得能将所有的代数曲线及几乎所有的超越曲线 (除去譬如说 **Cornu 螺线** (Cornu spiral)) 分类成一群所谓的泛代数曲线 (pan-algebraic curves), 它们是用度 $n$ 和秩 $\nu$ 来区分, 这里秩 $\nu$ 是多项式 $f_0, \cdots, f_n$ 的次数的最大值. 例如, 对三阶曲线, $n=1$, $\nu=2$; 对 **Archimedes 螺线** (Archimedean spiral), $n=2$, $\nu=4$. 泛代数曲线具有许多代数曲线所固有的性质, 例如, **Hesse 曲线** (**代数曲线的**) (Hessian (algebraic curve)) 和**极线** (polar) 的概念都可以推广到泛代数曲线上去. 关于对泛代数曲线的更进一步的分类, 见 [1].

超越曲线的例子有: **螺线** (spirals), **悬链线** (catenary), **Dinostratus 割圆曲线** (Dinostratus quadratrix), **摆线** (cycloid), 还有超越函数 (指数的, 对数的, 三角的, 等等) 的图 (见**超越函数** (transcendental function)).

参考文献

[1] Савелов, А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Fladt, K., Analytische Geometrie spezieller ebener Kurven, Akad. Verlagsgesellschaft, 1962.

沈纯理 译

**超越扩张** [**transcendental extension**; **трансцендентное расширение**]

非代数的域扩张 (见**域的扩张** (extention of a field)). 扩张 $K/k$ 是超越的, 当且仅当域 $K$ 包含有在 $k$ 上超越 (transcendental over $k$) 的元素, 即它不是任一系数在 $k$ 中的非零多项式的根.

集合 $X \subset K$ 中的元素称为在 $k$ 上代数无关 (algebraically independent over $k$), 如果对任意有限个元素 $x_1, \cdots, x_m \in X$ 及任一系数在 $k$ 中的非零多项式 $F(X_1, \cdots, X_m)$, 有

$$F(x_1, \cdots, x_m) \neq 0.$$

集合 $X$ 中的元素在 $k$ 上是超越的. 如 $X \subset K$ 是在 $k$ 上代数无关的最大集合, 则称 $X$ 为 $K$ 在 $k$ 上的超越基 (transcendence basis). $X$ 的基数称为 $K$ 在 $k$ 上的超越次数 (transcendence degree), 它是扩张 $K/k$ 的不变量. 对于域塔 (tower of fields) $L \supset K \supset k$, $L/k$

的超越次数等于 $L/K$ 的超越次数与 $K/k$ 超越次数之和．

如果集合 $X$ 中所有元素都在 $k$ 上代数无关，则扩张 $k(X)$ 称为纯超越的（purely transcendental）．此时，域 $k(X)$ 同构于 $k$ 上以集合 $X$ 的元为变量的有理函数域．任一域扩张 $L/k$ 可表成一个扩张的塔 $L \supset K \supset k$，其中 $L/K$ 是代数的，$K/k$ 是纯超越的．如果可选择 $K$，使 $L/K$ 为**可分扩张**（separable extension），则扩张 $L/k$ 称为可分生成的（separable generated），且 $K$ 在 $k$ 上的基称为分离基（separating basis）．如果 $L$ 在 $k$ 上是可分生成的，则 $L$ 在 $k$ 上是可分的．当扩张 $L/K$ 为有限生成时，其逆也成立．由定义，扩张 $K/k$ 是可分的，当且仅当 $k$ 的任一导子（见**环中的导子**（derivation in a ring））可扩张到 $K$ 上．这样的扩张对任一导子是唯一确定的，当且仅当扩张 $K/k$ 是代数的．

**参考文献**

[1] Zariski, O., and Samuel, P., Commutative algebra, 1, Springer, 1975.

[2] Bourbaki, N., Algebra, Elements of Mathematics, Springer, 1988, Chapt. 4 – 6（译自法文）.

Л. В. Кузьмин 撰

【补注】 Noether 正规化引理（Noether normalization lemma）指出：如果 $A$ 是一整环，作为域 $k$ 上的环是有限生成的，则存在 $x_1, \cdots, x_r \in A$，它们在 $K$ 上代数无关，而 $A$ 在 $k[x_1 \cdots x_r]$ 上是整的．

**参考文献**

[A1] Cohn, P. M., Algebra, Wiley, 1989, Vol.2, 350. Vol.3, 168.

冯绪宁 译

## 超越函数 [transcendental function; трансцендентная функция]

狭义地说是复 $z$ 平面 C 中非**有理函数**（rational function）的**亚纯函数**（meromorphic function）．特别地，整超越函数即不是多项式的**整函数**（entire function）属于这一类，例如指数函数 $e^z$，三角函数 $\sin z$，$\cos z$，双曲函数 $\sinh z$，$\cosh z$ 以及函数 $1/\Gamma(z)$（$\Gamma(z)$ 是 Euler Γ **函数**（gamma function））等．整超越函数只在无穷远处有一个本质奇点．真正的亚纯超越函数由下列事实刻画：在有限平面 C 中出现极点构成的有限或无穷集，而且在无穷远处分别出现本质奇点或极点的极限点；属于此种类型的有，例如，三角函数 $\tan z$，$\cot z$，双曲函数 $\tanh z$，$\coth z$ 以及 Γ 函数 $\Gamma(z)$．上述超越函数的定义可推广到多复变量 $z = (z_1, \cdots, z_n)$ 的空间 $\mathbf{C}^n (n \geqslant 2)$ 中的亚纯函数 $f(z)$．

广义地说，超越函数是任一这样的（单值或多值）解析函数，其值的计算除自变量的代数运算外，还需要某种形式的极限过程．对于超越函数，典型的是尽管出现奇点，此奇点也不是极点或代数分支点；例如对数函数 $\ln z$ 有两个超越分支点 $z = 0$ 和 $z = \infty$．解析函数是超越函数当且仅当其 **Riemann 曲面**（Riemann surface）是非紧的．

重要的超越函数类由经常遇到的特殊函数组成：Euler Γ **函数**（gamma-function）和 **B 函数**（beta-function），**超几何函数**（hypergeometric function）和**汇合型超几何函数**（confluent hypergeometric function）特别是其特殊情形**球面函数**（spherical function），**柱函数**（cylinder functions）和 **Mathieu 函数**（Mathieu functions）．

**参考文献**

[1] Krazer, A., Franz, W., Transzendente Funktionen, Akademie-Verlag, 1960.

[2] Whittaker, E. T., Watson, G. N., A course of modern analysis, Cambridge Univ. Press, 1952, Chapt. 2.

[3] Стоилов, С., Теория функций комплексного переменного, т. 1, М., 1962（译自罗马尼亚文）.

Л. Д. Кудрявцев, Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】

**参考文献**

[A1] Nevanlinna, R., Analytic functions Springer, 1970,（译自德文）.

[A2] Caratheodory, C., Theory of functions of a complex variable, 1, Chelsea, reprint, 1983, 170（中译本：C. Caratheodory，复变函数论，第一卷，高等教育出版社，1985）

[A3] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968（中译本：А. И. 马库雪维奇，解析函数论，高等教育出版社，1957）.

沈永欢 译

## 超越数 [transcendental number; трансцендентное число]

不是任何整系数非零多项式的根的数．这种数的定义的区域是实数、复数或 $p$ 进数的域．超越数的存在性及明显构造是 J. Liouville（[1]）基于他所指出的下列事实而给出的．代数无理数不能“很好”地被有理数逼近（见 **Liouville 定理**（Liouville theorem））．类似的考虑能够构造 $p$ 进超越数．G. Cantor（[2]）发现所有代数数组成的集合的可数性及全部实数组成的集合的不可数性后，从而证明了实超越数形成一个具有连续统基数的集合．E. Borel（[3]）在引进了测度论的初始概念后确立了“几乎所有”的实数是超越数．后来还发现 Liouville 超越数形成实数轴上一个处处稠密的子集，它有连续统基数而 Lebesgue 测度为零．尽管在 18 世纪中叶就已出现关于诸如 $e$，$\pi$，$\ln 2$，$2^{\sqrt{2}}$，等等这样一些数的超越性的猜测，但并没

有得到它们的证明．$e$ 的超越性是 Ch. Hermite ([4]) 证明的，$\pi$ 的超越性以及更一般的，代数数的对数的超越性是 C. L. F. Lindemann ([5]) 证明的，$2^{\sqrt{2}}$ 的超越性是 A. O. Гельфонд ([6]) 证明的．C. L. Siegel ([7]) 发展了一个一般性方法，用以证明一类特殊的满足多项式系数线性微分方程的整函数（$E$ 函数）在代数点上的值的超越性和代数无关性（见 **Siegel 法** (Siegel method))．Гельфонд ([8]) 和 T. Schneider ([9]) 同时、独立地证明了：若 $\alpha \neq 0, 1$ 是代数数而 $\beta$ 是代数无理数，则 $\alpha^{\beta}$ 是超越数（它称为 Hilbert 第七问题 (Hilbert seventh problem))．A. Baker ([10]) 在自然限制下证明了 $\alpha^{\beta}$ 形式的数的乘积的超越性．类似的结果也对 $p$ 进超越数得到（包括 Siegel 的 $E$ 函数理论）．超越数论的方法的发展表现出对 **Diophantus 方程** (Diophantine equations) 的新研究有强烈的影响 ([10], [11])．

**参考文献**


[1] Liouville, J., Sur des classes de très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationelles algébriques, *C. R. Acad. Sci.*, 18 (1844), 883－885, 910－911.

[2] Cantor, G., Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts, Olm, 1962.

[3] Borel, E., Leçons sur les fonctions discontinues, Gauthier-Villars, 1898.

[4] Hermite, Ch., Sur la fonction exponentielle, *C. R. Acad. Sci.*, 77 (1873), 18－24, 74－79, 221－233, 285－293.

[5] Lindemann, C. L. F., Über die Zahl $\pi$, *Math. Ann.*, 20 (1882), 213－225.

[6] Gel'fond, A. O., Sur les nombre transcendants, *C. R. Acad. Sci.*, 189 (1929), 1224－1226.

[7] Siegel, C. L., Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen, *Abhandl. Preuss. Akad. Wiss.*, *Phys. Kl.*, 1 (1929), 1－70.

[8] Гельфонд, А. О., 《Докл. АН СССР》, 2 (1934), 4－6.

[9] Schneider, T., Transzendenzuntersuchungen periodischer Functionen Ⅰ, Ⅱ, *J. Reine Angew. Math.*, 172 (1934), 65－69, 70－74.

[10] Baker, A., Transcendental number theory, Cambridge Univ. Press, 1975.

[11] Спринджук, В. Г., Классические диофантовы уравнения от двух неизвестных, М., 1982 (英译本: Sprindzhuk, V. G., Classical diophantine equations, Lecture Notes in Math., 1559, Springer, 1993).

[12] Фельдман, Н. И., Седьмая проблема Гильберта, М., 1982.


В. Г. Спринджук 撰

【补注】 Гельфонд 和 Schneider 的结果蕴含了对任何 $\alpha, \beta \in \overline{\mathbf{Q}} \setminus \{0, 1\}$, $\log\alpha/\log\beta \notin \mathbf{Q}$ 蕴含 $\log\alpha/\log\beta \notin \overline{\mathbf{Q}}$. Baker 的推广断言，对于任何 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \overline{\mathbf{Q}}$, $\log\alpha_1, \cdots, \log\alpha_n$ 的 $\mathbf{Q}$ 线性无关性蕴含 $1, \log\alpha_1, \cdots, \log\alpha_n$ 的 $\overline{\mathbf{Q}}$ 线性无关性．此外，可以对这种线性型给出有效性下界．它对 Diophantus 方程理论有许多深刻的推论（见 [10]）．Гельфонд 和 Schneider 的方法还被进一步推广，使椭圆曲线的周期和拟周期的 $\overline{\mathbf{Q}}$ 线性无关性被包括进来，并且通过 G. Wüstholz, P. Philippon 和 M. Waldschmidt 的工作，它最终形成了定义在 $\overline{\mathbf{Q}}$ 上的交换代数群上的 $\overline{\mathbf{Q}}$ 线性无关性的非常一般的陈述．

**参考文献**


[A1] Mahler, K., Lectures on transcendental numbers, Lecture Notes in Math., 546, Springer, 1976.

[A2] Гельфонд, А. О., Трансцендентные и алгебраические числа, М., 1952 (英译本: Gel'fond, A. O., Transcendental and algebraic numbers, Dover, 1960).

[A3] Bertrand, D., et al., Les nombres transcendants, *Mem. Soc. Math. France*, 13 (1984), 1－60.

[A4] Шидловский, А. Б., Трансцендентные числа, М., 1987 (英译本: Shidlovskiĭ, A. B., Transcendental numbers, de Gruyter, 1989).

[A5] André, Y., G-functions and geometry, Vieweg, 1988.

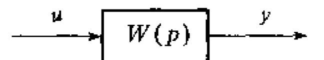

朱尧辰 译　戚鸣皋 校

**传递函数** [**transfer function**; **передаточная функция**]，线性定常控制系统（自动控制系统）的

在 $t=0$ 时零初始条件下单位脉冲函数 (unit pulse function)（$\delta$ 函数）$\delta(t)$ 的响应的 **Laplace 变换** (Laplace transform)（这一响应称为权函数 (weighting function)，脉冲传递函数 (pulse transfer function) 或者脉冲特征 (pulse characteristic)）．一种等价的定义是，传递函数是零初始条件下输出和输入信号的 Laplace 变换（见**算子演算** (operational calculus)）之比．传递函数是复变量 $p$ 的一个有理分式函数 $W(p)$；它是零初始条件下线性关系

$$Y(p)=W(p)U(p) \qquad (1)$$

中的系数，这个式子把零初始条件下系统输入（作用，控制）$u(t)$ 的 Laplace 变换 $U(p)$ 和输出（响应，反应）$y(t)$ 的 Laplace 变换 $Y(p)$ 关联起来．在控制理论中，关系 (1) 用图象表示成：




例如，设控制系统由一常系数线性常微分方程描述：

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}=\sum_{j=0}^{m} b_j y^{(j)},\ a_n=1 \qquad (2)$$

（在实际系统中通常 $m \leqslant n$）．于是

$$W(p)=\frac{b_m p^m+b_{m-1}p^{m-1}+\cdots+b_0}{p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_0}. \quad (3)$$

如果使用 (2) 的算子形式和微分算子 $p$,

$$A(p)y=B(p)u.$$

把传递函数定义成输入算子 (input operator) $B(p)$ 与本征算子 (eigenoperator) $A(p)$ 之比, 则可得到同样的表达式; (2) 的传递函数 (3) 具有如下解释: 若选择控制 $u=e^{st}$, 其中 $s$ 为使 $A(s)\neq 0$ 的复数, 则线性齐次方程 (2) 有特解 $y=W(s)e^{st}$.

不应该把传递函数与阶梯响应 (step response) 相混淆, 后者表示系统对单位阶梯函数 (unit step function):

$$u(t)=\begin{cases}0, & t\leqslant 0,\\ 1, & t>0\end{cases}$$

在零初始条件下的响应.

传递函数是线性定常控制系统理论中的基本概念之一. 它与施加在系统上的控制作用无关, 仅仅由系统本身的参数所决定, 从而为系统提供一种固有的动态特性. 纯虚变量的函数 $W(i\omega)$ 在控制理论中起着特殊的作用, 它称为振幅-相位特性 (amplitude-phase characteristic), 或者频率特性 (frequency characteristic). 传递函数概念已经被推广到别种类型线性控制系统 (矩阵系统, 非定常系统, 离散系统, 分布参数系统, 等等) 的线性控制系统.

**参考文献**

[1] Ройтенберг, Я. Н., Автоматическое управление, 2 изд., М., 1978.

[2] Математические основы теории автоматического регулирования, М., 1971.

[3] Kalman, R. E., Falb, P. L. and Arbib, M. A., Topics in mathematical systems theory, McGraw-Hill, 1969.

[4] Бутковский, А. Г., Характеристики систем с распределенными параметрами. Справочное пособие, М., 1979.

Н. Х. Розов 撰

【补注】

**参考文献**

[A1] Kwakernaak, H. and Sivan, R., Linear optimal control systems, Wiley (Interscience), 1972.

[A2] Kailath, T., Linear systems, Prentice-Hall, 1980.

冯德兴 译

**转移定理 (Diophantus 逼近中的) [transference theorem in Diophantine approximation; переноса теорема]**

关于一个不等式组的整数可解性与另一个以确定方式与前者相联系的不等式组的可解性之间的关系的论断. 线性转移定理的一个经典的例子是 Хинчин 的转移原则 (见 **Diophantus 逼近** (Diophantine approximations)). 更一般的线性转移定理涉及具有非奇异方阵的齐次线性不等式组的整数解和与之对应的具有逆转置阵的不等式组的解之间的关系: 一个不等式组的非平凡解的存在性保证了另一个不等式组的非平凡解的存在性, 并且反过来也正确. 在齐次和非齐次的线性不等式组之间存在着这样的关系: 齐次组不存在非平凡解保证了相应的非齐次组的解的存在, 并且反过来命题也成立. 此外还知道对于非线性问题也存在类似的关系, 不过它们表达得不够明确而且研究也较少. Diophantus 逼近论中转移定理的基本原理可以通过数的几何 (geometry of numbers) 中的转移定理显示出来: 对于一个凸集, 该集及其对偶集中整点的存在性之间有着一定的关系.

**参考文献**

[1] Cassels, J. W. S., An introduction to diophantine approximation, Cambridge Univ. Press, 1957.

[2] Cassels, J. W. S., An introduction to the geometry of numbers, Springer, 1959.

В. Г. Спринджук 撰 朱尧辰 译 戚鸣皋 校

**超限直径 [transfinite diameter; трансфинитный диаметр]**, 紧集的

复平面内紧集 $E$ 的特征 $d=d(E)$, 它为该集的**容量** (capacity) 提供了几何解释. 设 $E$ 是 $z$ 平面内一无限紧集, 则称量

$$d_n(E)=\left\{\max_{z_k,z_l\in E}\prod_{1\leqslant k<l\leqslant n}[z_k,z_l]\right\}^{2/[n(n-1)]}$$

$$n=2,3,\cdots \quad (1)$$

为 $E$ 的 $n$ 阶直径 ($n$-th diameter), 其中 $[a,b]=|a-b|$ 是 $a$ 与 $b$ 之间的 Euclid 距离. 特别, $d_2(E)$ 就是 $E$ 的 Euclid 直径. $E$ 中使 (1) 式右端达到最大值的点 $z_{n,1},\cdots,z_{n,n}$ 称为 $E$ 的 Fekete 点组 (Fekete points) (或 Vandermonde 结点组 (Vandermonde nodes)). 量 $d_n(E)$ 的序列非增: $d_{n+1}(E)\leqslant d_n(E)$, $n=2,3,\cdots$, 故存在如下极限:

$$\lim_{n\to\infty}d_n(E)=d(E).$$

量 $d(E)$ 亦称为 $E$ 的超限直径 (transfinite diameter). 若 $E$ 是有限集, 则有 $d(E)=0$. 超限直径 $d(E)$, Чебышев 常数 $\tau(E)$ 与容量 $C(E)$ 相等:

$$d(E)=\tau(E)=C(E).$$

集合 $E$ 的超限直径具有如下性质: 1) 若 $E_1\subset E$, 则 $d(E_1)\leqslant d(E)$; 2) 若 $a$ 是固定的复数, $E_1=\{w: w=az, z\in E\}$, 则 $d(E_1)=|a|d(E)$; 3) 若 $E_\varepsilon$ 是同 $E$ 的距离至多为 $\varepsilon$ 的那些点组成的集合, 则 $\lim_{\varepsilon\to 0}d(E_\varepsilon)=d(E)$; 4) 若 $E^*$ 是由方程

$$Q(z)=z^k+a_1z^{k-1}+\cdots+a_k=w$$

的根组成的集合, 其中 $Q(z)$ 是给定的多项式, $w$

取遍整个 $E$，则 $d(E^*)=\{d(E)\}^{1/k}$. 圆周的超限直径等于它的半径；线段的超限直径等于它的长度的四分之一.

设 $E$ 是有界连续统，$D$ 是 $E$ 关于扩充平面的余集的包含点 $\infty$ 的分支. 则 $E$ 的超限直径等于 $D$ 的（关于 $\infty$ 的）共形半径（见**共形半径**（conformal radius））.

对于双曲及椭圆平面中的集合，相应的概念定义如下. 作为双曲平面的一个模型，考虑圆盘 $|z|<1$，其度量由线元素 $ds_h=|dz|/(1-|z|^2)$ 确定，且假定 $E$ 是 $|z|<1$ 内的无限闭集. 则 $E$ 的 $n$ 阶双曲直径（$n$-th hyperbolic diameter）$d_{n,h}(E)$ 由（1）式定义，但其中

$$[a,b]=\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| \tag{2}$$

是 $a$ 与 $b$ 之间的双曲伪距离（hyperbolic pseudo-distance），即 $[a,b]=\tanh\rho_h(a,b)$，其中 $\rho_h(a,b)$ 是 $|z|<1$ 中 $a$ 与 $b$ 之间的双曲距离（见**双曲度量**（hyperbolic metric））. 如同 Euclid 的情形，序列 $d_{n,h}(E)$ 非增且存在如下极限:

$$\lim_{n\to\infty} d_{n,h}(E)=d_h(E),$$

称其为 $E$ 的双曲超限直径（hyperbolic transfinite diameter）. 模仿用 $z$ 平面的点之间的 Euclid 距离定义 Чебышев 常数 $\tau(E)$ 与容量 $C(E)$，用 $|z|<1$ 的点之间的双曲伪距离（2）定义双曲 Чебышев 常数（hyperbolic Chebyshev constant）$\tau_h(E)$ 与双曲容量（hyperbolic capacity）$C_h(E)$. 从而得到

$$d_h(E)=\tau_h(E)=C_h(E).$$

双曲超限直径是关于双曲等距完全群的不变量. 若 $E$ 是连续统，则在双曲超限直径 $d_h(E)$ 与共形映射之间存在简单的关系. 即：设 $E$ 是圆盘 $|z|<1$ 内的连续统使得 $E$ 关于该圆盘的余集共形等价于圆环 $r<|w|<1$, $0<r<1$. 则 $r=d_h(E)$.

作为椭圆平面的一个模型，考虑扩充复数 $z$ 平面，具有直径为 1 且与 $z$ 平面相切于 $z=0$ 的 Riemann 球面 $K$ 的度量，即其度量由线元素

$$ds_e=\frac{|dz|}{1+|z|^2}$$

确定，且设点 $z$ 与 $z^*=-1/z$ 被视为同一点：在扩充 $z$ 平面到 $K$ 的球极平面投影下，它们对应于 $K$ 的直径的两端. 设 $E$ 是扩充 $z$ 平面内的闭无限集，$E\cap E^*=\varphi$，其中 $E^*=\{-1/z: z\in E\}$. 则 $E$ 的 $n$ 阶椭圆直径（$n$-th elliptic diameter）$d_{n,e}(E)$ 由（1）式定义，但其中

$$[a,b]=\left|\frac{a-b}{1+\bar{a}b}\right| \tag{3}$$

是 $E$ 中的点 $a$ 与 $b$ 之间的椭圆伪距离（elliptic pseudo-distance），即 $[a,b]=\tan\rho_e(a,b)$，其中 $\rho_e(a,b)$（$<\pi/2$）是 $a$ 与 $b$ 之间的椭圆距离. 如前面的情形，序列 $d_{n,e}(E)$ 非增且存在称之为 $E$ 的椭圆超限直径（elliptic transfinite diameter）的如下极限:

$$\lim_{n\to\infty} d_{n,e}(E)=de(E).$$

用椭圆伪距离（3）定义 $E$ 的椭圆 Чебышев 常数（elliptic Chebyshev constant）$\tau_e(E)$ 及椭圆容量（elliptic capacity）$C_e(E)$. 则得到

$$d_e(E)=\tau_e(E)=C_e(E).$$

椭圆超限直径 $d_e(E)$ 是关于扩充 $z$ 平面到自身的分式线性变换

$$z\mapsto\frac{pz+q}{-\bar{q}z+p},\ |p|^2+|q|^2=1$$

所组成的且经关于椭圆直线的反射群所增补的群的不变量. 第一个这样的群，同构于 $K$ 关于过其中心的平面的反射群. 根据这一定义，$E$ 的椭圆超限直径以如下方式同共形映射相关联. 若 $E$ 是扩充 $z$ 平面内的连续统，$E\cap E^*=\phi$，并且 $E\cup E^*$ 关于扩充平面的余集共形等价于圆环 $r<|w|<1/r$, $0<r<1$，则 $r=d_e(E)$.

超限直径的概念可推广到多维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^m$（$m\geqslant 2$）中的紧集 $E$，并且同**位势理论**（potential theory）相联系. 对于点 $x\in\mathbf{R}^m$，设

$$H(|x|)=\begin{cases}\ln\dfrac{1}{|x|}, & \text{当 } m=2,\\[2mm] \dfrac{1}{|x|^{m-2}}, & \text{当 } m\geqslant 3,\end{cases}$$

是 **Laplace 方程**（Laplace equation）的基本解，且对于点集 $(x_j)_{j=1}^n\subset E$，令

$$\chi_n(E)=$$

$$=\inf\left\{\frac{2}{n(n-1)}\sum_{\substack{j,k=1\\ j<k}}^{n}H(|x_j-x_k|):(x_j)_{j=1}^n\subset E\right\}.$$

则对于 $m=2$ 有

$$d(E)=C(E)=\exp\left\{-\lim_{n\to\infty}\chi_n(E)\right\}$$

同时对于 $m\geqslant 3$，取

$$d(E)=C(E)=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\chi_n(E)}$$

是较为有利的（见[4]）.

**参考文献**

[1] Fekete, M., Ueber die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen

Koeffizienten, *Math. Z.*, 17 (1923), 228 – 249.

[2] Pólya, G. and Szegö, G., Ueber den transfiniten Durchmesser (Kapazitätskonstante) von ebenen und räumlichen Punktmengen. *J. Reine Angew. Math.*, 165 (1931), 4 – 49.

[3] Голузин, Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966 (英译本: Goluzin, G. M., Geometric theory of functions of a complex variable, Amer. Math. Soc., 1969).

[4] Carleson, L., Selected problems on exceptional sets, v. Nostrand, 1967.

[5] Смирнов, В. И., Лебедев, Н. А., Конструктивная теория функций комплексного переменного, М.-Л., 1964 (英译本: Smirnov, V. I. and Lebedev, N. A., Functions of a complex variable: constructive theory, M. I. T., 1968).

[6] Tsuji, M., Potential theory in modern function theory, Chelsea, reprint, 1959.

[7] Kühnau, R., Geometrie der konformen Abbildung auf der hyperbolischen und der elliptischen Ebene, Deutsch. Verlag Wissenschaft., 1974.

Г. В. Кузьмина, Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 外半径(outer radius)是超限直径的另一术语. 关于 $\mathbf{R}^2$ 或 $\mathbf{R}^n$ 中的超限直径, **Robin 常数**(Robin constant)及**容量**(capacity)之间的关系可见[A1].

超限直径的概念在多复变中亦有重要意义, 如果以正确的方式解释如下: 取 $[a, b]=|a-b|$, (1) 是 Vandermond 行列式的一个根:

$$d_n(E)=\left(\max_{x^{(n)}\in E^n}|V(x^{(n)})|\right)^{2/n(n-1)},$$

其中

$$V(x^{(n)})=\det[x_i^j]_{j=0,\cdots,n-1}^{i=1,\cdots,n}.$$

在 $\mathbf{C}^n$ 中, 设 $e_1, \cdots, e_{m_n}$ 是次数 $\leqslant n$ 的单项式有序系, $x^{(n)}$ 是 $E^{m_n}\subset\mathbf{C}^{m_n}$ 中一点. 则 $V(x^{(n)})$ 定义为 $\det[e_i(x_j)]$, $x^n=(x_1, \cdots, x_{m_n})$, $d_n(E)=(\max_{x^{(n)}\in E^{m_n}}V(x^{(n)}))^{1/\deg V(x^{(n)})}$. 相关的容量为一相伴于复 Monge-Ampère 算子的量.

**参考文献**

[A1] Hsiao, G. C. and Kleinman, R. E., On a unified characterization of capacity, in J. Král, et al. (ed.): Potential theory (Praag, 1987), Plenum, 103 – 120.

[A2] Klimek, M., Pluripotential theory, Cambridge Univ. Press, 1991.

[A3] Siciak, J. Extremal plurisubharmonic functions and capacities in $\mathbf{C}^n$, Sophia Kokyuroku in Math., 14, Dept. Math. Sophia Univ. Tokyo, 1982.

杨维奇 译

**超限归纳法[transfinite induction; трансфинитная индукция]**

保证性质 $A(x)$ 对良序类 $E$ 上每个元素 $x$ 都成立的原理, 这里 $A(x)$ 和 $E$ 满足下列条件: 对每个 $z\in E$, 对每个 $y<z$, $A(y)$ 为真蕴涵 $A(z)$ 为真, 即

$$\forall z(\forall y(y<z\rightarrow A(y))\rightarrow A(z))\rightarrow\forall A(x).$$

当 $E$ 是由小于 $\alpha$ 的序数组成的区间时(参见**序数**(ordinal number)), 下列是一个等价的公式: 如果 $A(0)$, $A(\sigma)\rightarrow A(\sigma+1)$ 成立, 而且 $A(\sigma)$ 在极限序数保持真, 即:

$$(\sigma=\sup\{\sigma_i\}\wedge\forall iA(\sigma_i))\rightarrow A(\sigma).$$

则对任何 $\sigma<\alpha$, $A(\sigma)$ 成立. 超限归纳法的一个特殊情况是**数学归纳法**(mathematical induction). 如果关系 $<$ 在类 $E$ 上定义一个良基树(well-founded tree)(即树的每个分支都可以终止), 则对这样的 $E$ 的超限归纳法等价于**坝归纳**(bar induction): 如果 $A$ 对于所有最终结点为真, 并且这个性质向根的方向遗传, 则 $A$ 在根上也为真. 这种形式的归纳法在直觉主义数学中是很重要的. 一个形式系统的演绎能力通常可以用它能否证明在各种序数上的超限归纳法来衡量.

Г. Е. Минц 撰

【补注】

**参考文献**

[A1] Feferman, S., Theories of finite type related to mathematical practice, in J. Barwise (ed.): Handbook of Mathematical logic, North-Holland, 1977, 913 – 972.

何青 译 罗里波 校

**超限数[transfinite number; трансфинитное число]**

有限良序集(well-ordered set)的序型(order type). 亦见**序数**(ordinal number); **基数**(cardinal number).

**超限递归[transfinite recursion; трансфинитная рекурсия]**

在序数(ordinal number)上, 或者更一般地, 在赋予了序数结构的集合上定义函数的一种方法. 超限递归的定义方程具有形式

$$F(x)=G(x, F|x), \qquad (*)$$

其中 $F|x$ 是在 $x$ 的前节上函数 $F$ 的定义的片段, $G$ 是某一给定的函数. 在集合论中许多重要的函数和类(例如, Gödel 可构造集类, 见 **Gödel 构造集**(Gödel constructive set))是用超限递归定义的. 在这个集合论构造法和数值函数的递归定义之间的相似性从算法理论产生的最初起就是研究的一个对象(见**算法论**(algorithms, theory of)). 特别地, 这种相似性是一

般递归函数（见[1]）的种种分类所依赖的基础.

在数理逻辑的一些分支（证明论、递归分层理论）中有重要意义的递归序数和超限递归的变型与它有关（递归序数（recursive ordinal number））是可数序数的算法的相似物；由此提出了较大基数的序数的相似性）. 在这情况下，超限递归被称为 Rogers 引理（Rogers lemma）. 这里等式（*）归之于如下的变型：函数 $G$ 替换成任意递归函数且 $F|x$ 用它的 Gödel 数（即算法描述的编码来代替，亦见**算术化**（arithmetization））.

参考文献

[1] Peter, R., Recursive functions Acad. Press, 1967（译自德文）.

[2] Rogers, Jr. H., Theory of recursive functions and effective computability, McGraw-Hill, 1967.

[3] Barwise, J., Admissible sets and structures, Springer, 1975.

Н. В. Белякин 撰

【补注】 J. von Neumann 是第一个证明了超限递归合理性的人.

参考文献

[A1] Levy, A., Basic set theory, Springer, 1979.

杨东屏 译

**超限序列**[**transfinite sequence**; **трансфинитная последовательность**]，一给定集合 $X$ 中元素的（超限）序数的区间 $[0, \beta)$ 到 $X$ 内的映射（亦见**序数**（ordinal number））. 超限序列 $f: [0, \beta) \to X$ 的一个元素（element）或项（term）是一个序对 $(\alpha, x)$，其中 $\alpha \in [0, \beta)$ 且 $x = f(\alpha)$；该项通常记为 $x_\alpha$.

Л. Д. Кудрявцев 撰 赵希顺 译

**变换**[**transformation**; **преобразование**]

集合 $M$（一般被赋予某种结构）到其自身的一个映射 $u$. 元素 $\alpha \in M$ 在变换 $u$ 下的象，记为 $u(\alpha)$, $u\alpha$, $\alpha u$ 或 $\alpha^u$. 集合 $M$ 到其自身的所有变换的集合关于乘法（合成）构成一个变换半群，称为 $M$ 上的对称**变换半群**（transformation semi-group））. 这个半群的可逆元称为置换（见**集合的置换**（permutation of a set)）. 集合 $M$ 上的所有置换构成对称半群的一个子群——**对称群**（symmetric group）.

亦见**置换群**（permutation group）；**变换群**（transformation group）.

О. А. Иванова 撰 杜小杨 译

**变换群**[**transformation group**; **преобразований группа**]

作用在集合 $M$ 上的**置换群**（permutation group）$(G; M)$. 如果 $M$ 被赋予确定的结构，并且 $G$ 的元素保持这个结构，那么通常就说 $G$ 是这个结构的变换群. 变换群的名称在某种程度上反映了 $M$ 上所赋予结构的名称. 例如，若 $M$ 是除环上的向量空间，则保持这个结构的群称为**线性群**（linear group）. 此外，不同环上模的自同态群，常常也称为线性群. 特别地，若 $M$ 是整数环 $\mathbf{Z}$ 上自由有限维模，就称为**晶体群**（crystallographic group）. 若 $M$ 是拓扑空间，$G$ 由 $M$ 的自同态组成，就称为连续变换群. 若 $M = K$ 是一个域，$G$ 是 $K$ 的有限自同态群，则 $G$ 是扩张 $K/L$ 的 Galois 群，其中 $L$ 是在 $G$ 的元素作用下不变的那些元素的子域. 还可以研究这种情形，$G$ 与 $M$ 被赋予相同类型的结构，且 $G$ 在 $M$ 上的作用是对应范畴中的态射. 例如，若 $G$ 是连续作用在拓扑空间 $M$ 上的拓扑群，就称为拓扑变换群（见**拓扑群**（topological group））；可以类似地定义 Lie 变换群和代数变换群（见 **Lie 变换群**（Lie transformation group）；**变换的代数群**（algebraic group of transformations））.

参考文献

[1] Алесандров, А. А., Математика, ее содержание, методы и значение, т. 3, М., 1956, гл. 20（中译本：A. A. 亚历山大洛夫等著，数学——它的内容、方法和意义，第三卷，科学出版社，1962）.

Л. А. Калужнин 撰 罗嵩龄 译

**变换半群**[**transformation semi-group**; **преобразований полугруппа**]

对称半群（semi-group）$T_\Omega$ 的任意子半群，其中 $T_\Omega$ 是集合 $\Omega$ 的所有变换的集合. 变换半群的特殊情况是**变换群**（transformation group）.

两个变换半群 $P_1 \subset T_{\Omega_1}$, $P_2 \subset T_{\Omega_2}$ 称为相似的（similar），如果存在一一映射 $\varphi: \Omega_1 \to \Omega_2$ 和 $\psi: P_1 \to P_2$ 使得 $u\alpha = \beta$ $(\alpha, \beta \in \Omega_1, u \in P_1)$ 蕴涵 $(\psi u)(\varphi\alpha) = \varphi\beta$. 相似的变换半群是同构的. 反之，一般不成立. 但是，某些变换半群类中，同构必相似. 例如，包含使得 $u\Omega$ 由一个元素组成的所有变换 $u$ 的变换半群类是这样的. 具体指明一个半群为变换半群比半群的精确到同构的陈述包含更多的信息.

显示变换半群在同构下不变的性质是头等重要的. 关于给定的变换半群类 $\Gamma$，半群 $S$ 同构于 $\Gamma$ 中的某个半群的那些条件称为类 $\Gamma$ 的抽象特征（abstract characteristics of the class）. 已经得到某些重要的变换半群类的抽象特征. 每个半群同构于某个变换半群. 半群 $S$ 同构于某个对称半群 $T_\Omega$，如果 $S$ 是满足恒等式 $xy = x$ 的任一半群 $A$ 的极大完全理想扩张（见**半群的扩张**（extension of a semi-group））.

在具有变换集 $\Omega$ 的变换半群的一般理论中，若干方向由于 $\Omega$ 被附加了某种结构（$\Omega$ 中的一个拓扑、一个作用，一个关系等）而被区分出来，与这种结构有联系的变换半群（半群的自同态，连续变换或线性变

换，**半群的平移**（translations of semi-groups），等）被讨论．$\Omega$ 的结构性质和相应变换半群的性质之间的关系的研究是 Galois 理论的推广．特别地，已经知道这样一些情况，其中一个半群的结构被它的指出的平移半群（见**自同态半群**（endomorphism semi-group））所完全确定．在一般半群理论中，半群的左、右平移的性质常被应用．

部分变换（partial transformation）（$\Omega$ 的部分变换指 $\Omega$ 的某个子集 $\Omega' \subset \Omega$ 到 $\Omega$ 中的一个映射）是变换概念的一个推广．集合 $\Omega$ 上的二元关系有时视为 $\Omega$ 的多值（一般地，部分）变换．单值和多值部分变换在变换的合成运算（作为二元关系的乘积）下也形成半群．将其作为带有附加结构（例如，二元关系的包含关系，定义域的包含或相等关系，值域的包含或相等关系，等）的半群来研究是适当的．

**参考文献**

[1] Ляпин, Е. С., Полугруппы, М., 1960（英译本：Lyapin, E. S., Semigroups, Amer. Math. Soc., 1974）.

[2] Clifford, A. H. and Preston, G. B., The algebraic theory of semigroups, 1－2, Amer. Math. Soc., 1961－1967.

[3] Глускин, Л. М.,《Матем. сб.》, 55 (1961), 421－428.

[4] Schein, B. M., Relation algebras and function semigroups, *Semigroup Forum*, 1 (1970), 1, 1－62.

Л. М. Глускин Е. С. Ляпин 撰

郑恒武 田振际 译 郭聿琦 校

**超渡**［**transgression**; **трансгрессия**］，纤维空间中的

纤维与底空间的上同调类之间的一种特殊对应．更准确地说，若 $E$ 是连通**纤维空间**（fibre space），底空间为 $B$，纤维是 $F$、$A$ 是交换群，则 $E$ 中的超渡是对应

$$\tau \subset H^S(F, A) \times H^{S+1}(B, A),$$

它的定义是

$$\tau = \{(x, y): \delta x = q^* y\},$$

其中 $\delta: H^*(F, A) \to H^{S+1}(E, F, A)$ 是上边缘同态，$q^*: H^{S+1}(B, A) \to H^{S+1}(E, F, A)$ 是投影 $E \to B$ 定义的同态．对应 $\tau$ 的定义域 $T^S(F, A)$ 中的元素称为超渡的（transgressive）；满足 $x\tau y$ 的元素 $y \in H^{s+1}(B, A)$ 称为元素 $x \in T^s(F, A)$ 在超渡同态下的象（image）．超渡可看作群 $T^s(F, A)$ 到 $H^{s+1}(B, A)$ 的某个商群中的同态．可以用纤维空间 $E$ 的谱序列 $(H_r)$ 对超渡作一较好的解释：本质上，它就是微分 $d_{s+1}: H^{0,s}_{s+1} \to H^{s+1,0}_{s+1}$．

纤维的超渡上同调类的刻画在纤维丛的上同调结构的研究中起着非常重要的作用．这里非常重要的是 Borel 超渡定理（Borel transgression theorem）：若 $A$ 是域，$H^n(E, A) = 0$ 对 $n > 0$，$H^*(F, A) = \wedge P$ 是子空间 $P$ 上的外代数，子空间 $P$ 中元素的分次是奇数，并且纤维的上同调空间构成 $B$ 上的简单层，则可以选择 $P$ 使之满足 $P^s = T^s(F, A)$，对任意 $s > 0$；此外，$H^*(B, A)$ 是多项式代数，其生成元是 $P$ 的齐次基的元素在超渡下的象．特别地，若 $G$ 是连通 Lie 群，$G$ 没有 $p$ 挠，$\mathrm{char}\, A = p$，则 $H^*(G, A) = \wedge P$，其中 $P$ 的齐次元的分次为奇数，且在群 $G$ 的任何主纤维丛上是超渡的．这里 $P$ 与本原上同调类的空间相同．

**参考文献**

[1] Borel, A., Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes des groupes de Lie compacts, *Ann. of Math.*, 57 (1953), 115－207.

[2] Serre, J.-P., Homologie singulière des espaces fibrés. Applications. *Ann. of Math.*, 54 (1951), 425－505.

А. Л. Онищик 撰

【补注】

**参考文献**

[A1] Switzer, R. M., Algebraic topology - homotopy and homology, Springer, 1975, p. 360ff.

[A2] Dieudonné, J., A history of algebraic and differential topology: 1900－1960, Birkhäuser, 1989.

潘建中 译 沈信耀 校

**转移函数**［**transition function**; **переходная функция**］，转移概率（transition probability）

在 Марков 过程论中为了从在以前时间的已知状态决定将来的瞬间分布而使用的一族测度．设可测空间 $(E, \mathscr{B})$ 使得 $\sigma$ 代数 $\mathscr{B}$ 包括 $E$ 中一切单点集，$T$ 是实直线 $\mathbf{R}$ 的一个子集．对 $s, t \in T$, $s \leqslant t$, $x \in E$ 及 $B \in \mathscr{B}$ 给定的函数 $P(s, x; t, B)$，称为对 $(E, \mathscr{B})$ 的转移函数（transition function），如果：a）对给定的 $s$, $x$ 和 $t$，它是 $\mathscr{B}$ 上的测度，且 $P(s, x; t, B) \leqslant 1$；b）对给定的 $s, t$ 和 $B$，它是点 $x$ 的 $\mathscr{B}$ 可测函数；c）$P(s, x; s, \{x\}) \equiv 1$ 且对 $\mathbf{R}$ 的拓扑中 $T$ 的所有右极限点 $s$，

$$\lim_{\substack{t \downarrow s \\ t \in T}} P(s, x; t, E) = 1;$$

以及 d）对一切 $x \in E$, $B \in \mathscr{B}$ 和 $T$ 中的 $s \leqslant t \leqslant u$，Колмогоров-Chapman 方程（Kolmogorov-Chapman equation）

$$P(s, x; u, B) = \int_E P(s, x; t, dy) P(t, y; u, B) \quad (*)$$

成立（在某些情形、要求 c）可省去或减弱）．如果 $P(s, x; t, E) \equiv 1$，称转移函数为 Марков 转移函数（Markov transition function），否则称为次 Марков 转

移函数(subMarkov transition function). 如果 $E$ 是至多可数的, 则转移函数用转移概率矩阵

$$P^{st} = \| P_{xy}(s,t) \|$$

确定(见**转移概率**(transition probabilities); **转移概率矩阵**(matrix of transition probabilities)). 常常发生对任何容许的 $s,x$ 和 $t$, 测度 $P(s,x;t,\cdot)$ 关于某个测度具有密度 $p(s,x;t,\cdot)$. 如果在这种情形方程 $(*)$ 的下述形式

$$p(s,x;u,z) = \int_E p(s,x;t,y)p(t,y;u,z)dy$$

对任何 $E$ 中的 $x$ 和 $z$ 及 $T$ 中的 $s \leqslant t \leqslant u$ 满足, 则称 $p(s,x;t,y)$ 为转移密度(transition density).

在非常一般的条件下(见[1], [2]), 转移函数可以同一个 Марков 过程 $X = \{x_t, \zeta, \mathcal{F}_t^s, \mathrm{P}_{s,x}\}$ 相联系, 对于它 $\mathrm{P}_{s,x}\{x_t \in B\} = P(s,x;t,B)$ (在 Марков 转移函数的这种情形, 这个过程不中止于有限时刻, 即 $\zeta = \infty$, $P_{s,x}$ - a.s.). 另一方面, 随机过程的 Марков 性一般地能够把过程同一个转移函数相对应([3]).

设 $T$ 是齐次的, 即对 $T$ 中的 $s \leqslant t$, $t-s$ 的值的集合形成一个依 $\mathbf{R}$ 中的加法成一个半群 $\widetilde{T}$(例如, $T=\mathbf{R}$, $T=\{t \in \mathbf{R},\ t \geqslant 0\}$, $T=\{0,1,\cdots\}$). 进一步, 如果转移函数 $P(s,x;t,B)$ 只依赖于差 $t-s$, 即 $P(s,x;t,B) = P(t-s,x,B)$, 其中 $P(t,x,B)$ 是 $t \in \widetilde{T}$, $x \in E$, $B \in \mathscr{B}$ 满足条件 a) - d) 相应形式的函数, 则称 $P(s,x;t,B)$ 为齐次转移函数(homogeneous transition function). 对函数 $P(t,x,B)$ 也用这一名字. 这时 $(*)$ 取下述形式:

$$P(t+s,x,B) = \int_E P(t,x,dy)P(s,y,B)$$

$$s,t \in \widetilde{T},\ x \in E,\ B \in \mathscr{B}.$$

为了某些目的(诸如规则化转移函数)有必要扩展定义. 例如, 取定可测空间族 $(E_t, \mathscr{B}_t)$, $t \in T$, 定义满足适当修改了的条件 a) - d) 的函数 $P(s,x;t,B)$, 其中 $s,t \in T$, $s \leqslant t$, $x \in E_s$, $B \in \mathscr{B}_t$.

**参考文献**


[1] Neveu, J., Bases mathématiques du calcul des probabilités, Masson, 1970.

[2] Гихман, И. И., Скороход, А. В., Теория случайных процессов, 2, М., 1973 (英译本: Gihman, I. I. and Skorohod, A. V., The theory of stochastic processes, 2, Springer, 1975).

[3] Кузнецов, С. Е., «Теория вероятн. и ее примен.», 25 (1980), 2, 389 - 393.


М. Г. Шур 撰

【补注】 另外的参考文献亦见 **Марков 链** (Markov chain); **Марков 过程** (Markov process).

**参考文献**


[A1] Dellacherie, C. and Meyer, P. A., Probabilities and potential, 1 - 3, North-Holland, 1978 - 1988, Chapts. XII - XVI (译自法文).

[A2] Sharpe, M. J., General theory to Markov processes, Acad. Press, 1988.

[A3] Albeverio, S. and Ma, Z. M., A note on quasi-continuous kernels representing quasilinear positive maps, *Forum Math*, 3 (1991), 389 - 400.


刘秀芳 译 陈培德 校

**转移算子半群** [**transition-operator semi-group; переходных операторов полугруппа**]

由 **Марков 过程** (Markov process) 的**转移函数** (transition function) 所生成的**算子半群** (semi-group of operators). 从状态空间 $(E, \mathscr{B})$ 上的齐次 Марков 过程 $X = (X_t, \zeta, \mathscr{F}_t, \mathrm{P}_x)$ 的转移函数 $P(t,x,A)$, 可以构造一个作用在某个 Banach 空间 $B$ 上的线性算子 $P^t$ 半群([1]). 经常, $B$ 是 $E$ 中有界实值可测函数 $f$ 依一致范数所形成的空间 $B(E)$(或者, 对 **Feller 过程** (Feller process) $X$, 是在 $E$ 中具有同样范数的连续函数空间 $C(E)$), 或者是 $\mathscr{B}$ 上有限的可数可加函数 $\varphi$ 依全变差范数的空间 $V(E)$. 在前两种情形, 令

$$P^t f(x) = \int_E f(y) \mathrm{P}(t,x,dy);$$

在第三种情形, 令

$$P^t \varphi(A) = \int_E \mathrm{P}(t,y,A)\varphi(dy)$$

(此处 $f$ 和 $\varphi$ 属于相应的空间, $x \in E$, $A \in \mathscr{B}$). 在所有这些情况下半群性成立: $P^t P^s = P^{t+s}$, $s,t \geqslant 0$, 而三个半群 $\{P^t\}$ 的任何一个都称为转移算子半群(transition-operator semi-group).

下面只考虑第一种情形. 通常半群 $\{P^t\}$ 的无穷小生成元 (infinitesimal generator) $A$ (也是过程的无穷小生成元)定义如下: 对所有使得这个极限存在且属于 $B(E)$ 的 $f \in B(E)$,

$$Af = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t}(P^t f - f).$$

假定对 $A \in \mathscr{B}$, $P(t,x,A)$ 是变量 $(t,x)$ 的可测函数, 引入过程 $X$ 的预解式 $R^\alpha$, $\alpha > 0$,

$$R^\alpha f = \int_0^\infty e^{-\alpha t} P^t f\, dt,\ f \in B(E). \qquad (*)$$

如果当 $t \downarrow 0$ 时 $\|P^t f - f\| \to 0$, 则 $Ag = \alpha g - f$, 其中 $g = R^\alpha f$. 在某些假定下积分 $(*)$ 对 $\alpha = 0$ 也存在且 $g = R^0 f$ 满足 "Poisson 方程"

$$Ag = -f$$

(为了这个理由，特别把 $R^0 f$ 称为 $f$ 的位势 (potential)).

无穷小生成元的知识使得能够导出原始过程的重要特征；Марков 过程的分类相当于对它们的相应的无穷小生成元的描述 ([2], [3])．使用无穷小生成元也使得能够求得各种函数的平均值．例如，在某些假定下，函数

$$v(t,x) = \mathsf{E}_x\left[\exp\left\{\int_0^{t\wedge\zeta} c(x_s)\,ds\right\} f(x_{t\wedge\zeta})\right],$$

$$t \geqslant 0,\ x \in E,$$

是对 $v_t' = Av + cv$, $v(0,x) = f(x)$, 的唯一解，它是增长不太快的 $t$ 的函数．此处 $\mathsf{E}_x$ 是相应于 $\mathsf{P}_x$ 的数学期望，而 $t\wedge\zeta = \min(t,\zeta)$.

算子 $A$ 与特征算子 $\mathfrak{A}$ 有关 ([2])．设 $X$ 是在拓扑空间 $E$ 中右连续的 Марков 过程．对 Borel 函数 $f$，令

$$\mathfrak{A}f(x) = \lim_{U\downarrow x}\left[\frac{\mathsf{E}_x f(x_\tau) - f(x)}{\mathsf{E}_x\tau}\right],$$

如果对所有 $x\in E$ 极限都存在，其中 $U$ 跑遍收缩到 $x$ 的点 $x$ 的一个邻域系，而 $\tau$ 是 $X$ 离开 $U$ 的首出时刻 (如果 $\mathsf{E}_x\tau = \infty$，在极限中的分数置为零)．在许多情况下 $Af$ 的计算相当于 $\mathfrak{A}f$ 的计算．

**参考文献**


[1] Feller, W., The parabolic differential equations and the associated semi-groups of transformations, *Ann. of Math.*, 55 (1952), 468 – 519.

[2] Дынкин, Е. Б., Основания теории марковских процессов, М., 1959 (中译本: E. Б. 邓肯，马尔科夫过程论基础，科学出版社，1962).

[3] Гихман, И. И., Скороход, А. В., Теория случайных процессов, 2, М., 1973 (英译本: Gihman, I. I. and Skorohod, A. V., The theory of stochastic processes, 2, Springer, 1975).


М. Г. Шур 撰

**【补注】**

**参考文献**


[A1] Blumenthal, R. M. and Getoor, R. K., Markov processes and potential theory, Acad. Press, 1968.

[A2] Doob, J. L., Classical potential theory and its probabilistic counterpart, Springer, 1984.

[A3] Dynkin, E. B., Markov processes, 1, Springer, 1965 (译自俄文).

[A4] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, Ⅰ – Ⅱ, Wiley, 1957 – 1971.

[A5] Loève, M., Probability theory, Ⅱ, Springer, 1978.

[A6] Dellacherie, C. and Meyer, P. A., Probabilities and potentials, 1 – 3, North-Holland, 1978 – 1988, Chapts. Ⅻ – ⅩⅥ (译自法文).

[A7] Sharpe, M. J., General theory of Markov processes, Acad. Press, 1988.

[A8] Albeverio, S. and Ma, Zh. M., A note on quasi-continuous kernels representing quasilinear positive maps, *Forum Math.*, 3 (1991), 389 – 400.


刘秀芳 译　陈培德 校

**转移概率** [**transition probabilities**; **переходные вероятности**]

**Марков 链** (Markov chain) 在时间区间 $[s,t]$ 内从状态 $i$ 转移到状态 $j$ 的概率

$$p_{ij}(s,t) = \mathsf{P}\{\xi(t) = j \mid \xi(s) = i\},\ s < t.$$

鉴于 Марков 链的基本性质，对任意 $i, j\in S$ (此处 $S$ 是该链的所有状态的集合) 和任意 $s < t < u$,

$$p_{ij}(s,u) = \sum_{k\in S} p_{ik}(s,t)\,p_{kj}(t,u).$$

通常考虑齐次 Марков 链，即其转移概率 $p_{ij}(s,t)$ 只依赖于区间 $[s,t]$ 的长度不依赖于它在时间轴上的位置:

$$p_{ij}(s,t) = p_{ij}(t-s).$$

离散时间齐次 Марков 链对任意状态 $i$ 和 $j$ 序列 $p_{ij}(n)$ 具有 Cesàro 极限，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_{ij}(k) \geqslant 0.$$

加上某些附加条件 (对连续时间的链也一样)，极限在通常意义下也存在．见**遍历 Марков 链** (Markov chain, ergodic); **Марков 链的正状态类** (Markov chain, class of positive states of a).

离散时间 Марков 链的转移概率 $p_{ij}(t)$ 由 $p_{ij}(1)$, $i, j\in S$ 的值确定；对任意 $t > 0$, $i\in S$

$$\sum_{j\in S} p_{ij}(t) = 1.$$

在连续时间 Марков 链的情形通常假定转移概率满足下述附加条件：所有的 $p_{ij}(t)$ 作为 $t\in(0,\infty)$ 的函数是可测的，

$$\lim_{t\downarrow 0} p_{ij}(t) = 0\ (i\neq j),\ \lim_{t\downarrow 0} p_{ii}(t) = 1,\ i,j\in S.$$

在这些假定之下，下述转移速率存在:

$$\lambda_{ij} = \lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\,(p_{ij}(t) - p_{ij}(0)) \leqslant \infty,\ i,j\in S.\ (1)$$

如果所有的 $\lambda_{ij}$ 是有限的且如果 $\sum_{j\in S}\lambda_{ij} = 0$, $i\in S$, 则 $p_{ij}(t)$ 满足 Колмогоров-Chapman <u>微分方程组</u> (Kolmogorov-Chapman system of differential equations):

$$p_{ij}'(t) = \sum_{k\in S}\lambda_{ik}\,p_{kj}(t),\ p_{ij}'(t) = \sum_{k\in S}\lambda_{kj}\,p_{ik}(t)\quad(2)$$

连同初始条件 $p_{ii}(0)=1$，$p_{ij}(0)=0$，$i\neq j$，$i,j\in S$（亦见 **Колмогоров 方程**（Kolmogorov equation）；**Колмогоров - Chapman 方程**（Kolmogorov - Chapman equation））．

如果 Марков 链由转移速率（1）确定，则转移概率满足条件

$$p_{ij}(t)\geqslant 0,\ \sum_{j\in S}p_{ij}(t)\leqslant 1,\ i,j\in S,\ t>0;$$

对某个 $i\in S$，$t>0$，$\sum_{j\in S}p_{ij}(t)<1$ 的链称之为亏损的（defective）（在这种情形（2）的解不唯一）；如果对一切 $i\in S$ 和 $t>0$ 有 $\sum_{j\in S}p_{ij}(t)=1$，则此链称为正常的（proper）．

例．具有状态集 $\{0,1,\cdots\}$ 和转移密度

$$\lambda_{i,i+1}=-\lambda_{ii}=\lambda_i>0,\ \lambda_{ij}=0(i\neq j\neq i+1)$$

的 Марков 链 $\xi(t)$（即纯生过程（pure birth process））是亏损的，当且仅当

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i}<\infty.$$

设

$$\tau_{0n}=\inf\{t>0:\xi(t)=n(\xi(0)=0)\},$$

$$\tau=\lim_{n\to\infty}\tau_{0n};$$

则

$$\mathsf{E}\tau=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i}$$

且由 $\mathsf{E}\tau<\infty$ 有 $\mathsf{P}\{\tau<\infty\}=1$，即 $\xi(t)$ 的路径"在有限时间内以概率 1 趋于无穷"（亦见**分支过程的正则性**（branching processes, regularity of））．

**参考文献**


[1] Chung, K. L., Markov chains with stationary probability densities, Springer, 1967.　　А. М. Зубков 撰


【补注】 另外的参考文献见 **Марков 链**（Markov chain）；**Марков 过程**（Markov process）．

在（1）中，如果 $i\neq j$，$\lambda_{ij}\geqslant 0$；$\lambda_{ii}\leqslant 0$．

**参考文献**


[A1] Iosifescu, M., Finite Markov processes and their applications, Wiley, 1980.

[A2] Revuz, D., Markov chains, North-Holland, 1984.


刘秀芳 译　陈培德 校

**带禁忌的转移 [transition with prohibitions；переход с запрещениями]**，带禁忌状态的转移（transition with taboo states），对于 Марков 链的

在给定的时间区间内从未进入一个特定的状态集的 **Марков 链**（Markov chain）的轨道集．例如，令 $\xi(t)$ 是离散时间 Марков 链，其状态集为 $S$，而 $H$ 是"禁忌"状态集（禁忌集）（taboo set）），则禁忌概率（taboo probabilities）${}_Hp_{ij}(t)$ 是

$${}_Hp_{ij}(t)=\mathsf{P}\{\xi(k)\notin H(k=1,\cdots,t-1),$$
$$\xi(t)=j\mid\xi(0)=i\},\ i,j\in S.$$

禁忌概率 ${}_Hp_{ij}(t)$ 的性质类似于通常的**转移概率**（transition probabilities）$p_{ij}(t)$ 的性质，因为矩阵族 $P(t)=\|p_{ij}(t)\|_{i,j\in S}$ 和 $P_H(t)=\|{}_Hp_{ij}(t)\|_{i,j\in S\setminus H}$，$t\geqslant 0$，形成乘法半群；不过，$\sum_{j\in S}p_{ij}(t)=1$，而 $\sum_{j\in S}{}_Hp_{ij}(t)\leqslant 1$．各种各样的问题，例如，对 Марков 链首次进入给定集合的时间或对**分支过程**（branching process）在非灭绝条件下的极限定理的研究，事实上相当于对禁忌概率各种性质的研究．

**参考文献**


[1] Chung, K. L., Markov chains with stationary transition probabilities, Springer, 1960.　　А. М. Зубков 撰


【补注】

**参考文献**


[A1] Gihman, I. I. and Skorohod, A. V., The theory of stochastic processes, I, Springer, 1975（译自俄文）．


刘秀芳 译　陈培德 校

**传递群 [transitive group；транзитивная группа]**

**置换群**（permutation group）$(G,X)$，使得 $X$ 的每个元素 $x$ 可用适当的元素 $\gamma\in G$ 带到任意元 $y\in X$，即 $x^\gamma=y$．换句话说，$X$ 是群 $(G,X)$ 的唯一轨道（orbit）．若轨道数大于 1，则 $(G,X)$ 称为非传递的（intransitive）．非传递群的轨道有时称为传递性区域（domain of transitivity）．设非传递群 $(G,X)$ 具有轨道 $X_i$，则

$$X=X_1\cup\cdots\cup X_s,$$

且群作用限制在 $X_i$ 上是传递的．

令 $H$ 是群 $G$ 的子群且令

$$G=H\cup Hx_1\cup\cdots\cup Hx_{s-1}$$

是 $G$ 对于 $H$ 的右陪集的分解．进而令 $X=\{Hx_i\}$．则由 $(Hx_i)^g=Hx_ig$ 就定义了 $(G,X)$ 的作用．该作用是传递的，且反之，每个传递作用，有 $G$ 的适当子群 $H$，使它具有上述类型．

作用 $(G,X)$ 称为 $k$ 传递的，$k\in\mathbf{N}$，若对任何两个有序子集 $(x_1,\cdots,x_k)$ 和 $(y_1,\cdots,y_k)$，它们都具有 $k$ 个不同的元素 $x_i$ 和 $y_i\in X$，则有元素 $\gamma\in G$ 使得 $y_i=x_i^\gamma$，对所有 $i=1,\cdots,k$．换句话说，$(G,X)$ 恰具有一个非自反的 $k$ 轨道．对 $k\geqslant 2$，$k$ 传递群称为多重传递的（multiply transitive）．某域 $K$ 上仿射变换 $x\mapsto ax+b$，$a\neq 0$，$b\in K$，作成的群是双传递群的例子．域 $K$ 上射影直线的分式线性变换，即形式为

$$x\mapsto\frac{ax+b}{cx+d},\ a,b,c,d,x\in K\cup\{\infty\},$$

其中

$$\det\begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix} \neq 0$$

的变换所成的群是三重传递群的例子.

$k$ 传递群 $(G, X)$ 称为严格 $k$ 传递的 (strictly $k$-transtive), 如果仅有恒等置换才能使 $k$ 个不同的元素全不动. 仿射变换群及分式线性变换群是严格的双传递和三重传递的置换群的例子.

有限**对称群** (symmetric group) $S_n$ (作用在 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 上) 是 $n$ 传递的. 有限**交错群** (alternating group) $A_n$ 是 $(n-2)$ 传递的. 多重传递群的这两个系列是显然的系列. 还知道两个 4 传递群, 即 $M_{11}$ 和 $M_{23}$, 同样有两个 5 传递群, 即 $M_{12}$ 和 $M_{24}$ (参见 [3], 亦见 **Mathieu 群** (Mathieu group)). 有个猜想: 除去这 4 个群外, 对 $k \geqslant 4$, 没有非平凡的 $k$ 传递群. 这猜想已被证明, 使用了有限非 Abel 单群的分类 ([6]). 进一步使用有限单群分类, 完成了多重传递群的分类.

对分数 $k = m + 1/2$, $m = 0, 1, \cdots$, 也定义了 $k$ 传递群. 即, 置换群 $(G, X)$ 称为 $1/2$ 传递的, 若或有 $|X| = 1$ 或者 $(G, X)$ 的轨道有大于 1 的相同长度. 对 $n > 1$, 群 $(G, X)$ 是 $(n + 1/2)$ 传递的, 如果 $(G, X)$ 是传递的且稳定化子 $(G_x, X\backslash\{x\})$ 是 $n - 1/2$ 传递的.

**参考文献**

[1] Curtis, C. W. and Reiner, I., Representation theory of finite groups and associative algebras, Interscience, 1962.

[2] Hall, M., Theory of groups, Macmillan, 1959 (中译本: M. 赫尔, 群论, 科学出版社, 1982).

[3] Wielandt, H., Finite permutation groups, Acad. Press, 1968 (中译本: H. 维兰特, 有限置换群, 科学出版社, 1984)

[4] Passman, D., Permutation groups, Benjamin, 1968.

[5] Higman, D. G., Lecture on permutation representations, Math. Inst. Univ. Giessen, 1977.

[6] Cameron, P. J., Finite permutation groups and finite simple groups, *Bull. London Math. Soc.*, **13** (1981), 1 − 22.

Л. А. Колужнин 撰

【补注】 置换群 $(G, X)$ 的次数 (degree of a permutation group) 是 $X$ 的元素数目. (抽象) 群 $G$ 称为 $k$ 传递群 ($k$-transtive group), 如果它能实现为某 $k$ 重传递置换群 $(G, X)$.

由于有限单群的分类, 已经找出了所有 2 传递置换群. 见 [A1] 中的表和文献.

对传递置换群有一个重要的概念: 置换秩 (permutation rank), 它可定义成 $G$ 在 $X \times X$ 上的轨道数.

用了有限单群的分类已经将置换秩 $\leqslant 3$ 的本原置换群几乎完全地进行了分类 ([A2]).

**参考文献**

[A1] Cohen, A. and Zantema, H., A computation concerning doubly transitive permutation groups, *J. Reine Angew. Math.*, **347** (1984), 196 − 211

[A2] Brouwer, A. E., Cohen, A. M. and Neumaier, A., Distance regular graphs, Springer, 1989, p. 229

【译注】 全体 2 传递置换群的表及其有关的文献也可以在 [6] 中找到.

置换秩 $\leqslant 3$ 的本原置换群已经全部被确定 (参见 [B4], [B5] 和 [B8]), 进一步地, 置换秩 $\leqslant 5$ 的非仿射型本原置换群, 除了个别例外, 也已被确定 (参见 [B1], [B3]).

利用有限单群分类的结果, 近年来本原置换群的研究取得了一系列重要成果. 例如: 确定了全部 $kp$ 次本原置换群, 这里 $p$ 为素数且 $k < p$ (文献 [B6]); 确定了全部奇数次本原置换群 ([B7]) 等. 著名的 Sims 猜想说: 存在一个定义在自然数集合上的函数 $f$, 使得对 $\Omega$ 上任意本原置换群 $G$, 如果 $G_\alpha$, $\alpha \in \Omega$, 在 $\Omega - \{\alpha\}$ 上有一条长度为 $d$ 的轨道, 则 $|G_\alpha| < f(d)$. 这个猜想已被证明是真的 ([B2]). 这一结果的直接推论是: 对于任意给定的度数 ($>2$), 只有有限多个有限连通距离传递图 ([B2, 定理 2]).

**参考文献**

[B1] Bannai, E., Maximal subgroups of low rank of finite symmetric and alternating groups, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, **18** (1972), 475 − 486.

[B2] Cameron, P. J., Praeger, C. E., Saxl, J. and Seitz, G. M., On the Sims conjecture and distance transitive graphs, *Bull. Lond. Math. Soc.*, **15** (1983), 499 − 506.

[B3] Cuypers, H., Geometries and permutation groups of small ranks, Thesis, Rijksuniversiteit, Utrecht, 1989.

[B4] Kantor, W. M. and Liebler, R. A., The rank 3 permutation representations of the finite classical groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **71** (1982), 1 − 71.

[B5] Liebeck, M. W., The affine permutation groups of rank 3, *Proc. Lond. Math. Soc.* (3), **54** (1987), 477 − 516.

[B6] Liebeck, M. W. and Saxl, J., Primitive permutation groups containing an element of large prime order, *J. Lond. Math. Soc.* (2), **31** (1985), 237 − 249.

[B7] Liebeck, M. W. and Saxl, J., The primitive permutation groups of odd degree, *J. Lond. Math. Soc.* (2), **31** (1985), 250 − 264.

[B8] Liebeck, M. W. and Saxl, J., The finite primitive permutation groups of rank three, *Bull. Lond. Math. Soc.*, **18** (1986), 165 − 172.

石生明 译 王 杰 校

**传递性 [transitivity; транзитивность]**

**二元关系**（binary relation）的最重要的性质之一．称集合 $A$ 上的关系 $R$ 是传递的（transitive），如果对任意 $a, b, c \in A$，条件 $aRb$ 和 $bRc$ 蕴涵 $aRc$．等价关系和序关系是传递关系的例子．

Т. С. Фофанова 撰 赵希顺 译

**平移 [translation; трансляция]**

代数系统到其自身上的一个映射，它或是恒等映射、或者可以表示成有限个**主平移**（principal translation）（也称初等平移（elementary translation））的积．一个代数系统上的等价关系是一个**合同（代数学中的）**（congruence (in algebra)），当且仅当它对所有平移（或者只对主平移）都是封闭的．

**参考文献**

[1] Cohn, P. M., Universal algebra, Reidel, 1981.
[2] Мальцев, А. И., Алгебраические системы, М., 1970（英译本：Mal'tsev, A. I., Algebraic systems, Springer, 1973）.

О. А. Иванова 撰 郝钢新 译

**平移不变度量 [translation-invariant metric; трансляционная инвариант метрика]**，不变度量（invariant metric）

【补注】 向量或线性空间 $X$ 上的一个**度量**（metric）$\rho$ 满足 $\rho(x+z, y+z) = \rho(x, y)$ 对所有的 $x, y, z \in X$．一个**范数**（norm）或 $F$ 范数，$\|\ \|$（关于此概念的定义见**万有空间**（universal space）的补注）定义一个平移不变度量 $\rho(x, y) = \|x - y\|$．如果 $(X, \rho)$ 是一度量线性空间（metric linear space），即具有度量的向量空间使得加法和标量乘法是连续的，则存在 $X$ 上一个不变度量 $\rho'$ 等价于原来的那个度量，[A2]．$X$ 上两个度量 $\rho, \rho'$ 是等价的，如果它们导出同样的拓扑．

**参考文献**

[A1] Rolewicz, S., Metric linear spaces, Reidel, 1987, § 1.1.
[A2] Kakutani, S., Über die Metrisation der topologischen Gruppen, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, 12 (1936), 82–84.

葛显良 译 鲁世杰 校

**程序的翻译 [translation of programs; трансляция программ]**

1) **程序设计**（programming）中程序的翻译，也称为程序的编译（compilation of programs），是一个系统过程，它把用输入（input）**算法语言**（algorithmic language）$LI$ 编写的程序 $ip$ 变换成用目标（object）语言 $LO$ 编写的某个程序 $op$；进一步，两个程序 $ip$ 和 $op$ 应该实现同样的功能，即如果 $d$ 是程序的输入数据，则 $ip(d) = op(d)$．

2）在**可计算函数**（computable function）理论和**算法理论**（algorithms, theory of）中，程序的翻译是从可计算函数的一个**枚举**（enumeration）到另一个枚举的任何映射，它保持这样的性质：图象和预图象是同一函数的数目（一个有效的翻译映射的存在也称为从一个枚举到另一个枚举的可归约性（reducibility））．

在程序设计实践中，人们使用的**程序设计语言**（programming language）通常是输入语言，而目标语言通常是由机器程序直接执行的语言．程序翻译本身，通常是自动执行的，即用某个实现语言 $LR$ 写的程序 $t$，称为翻译程序（translator）（或编译程序（compiler）），使 $t(ip) = op$．对某些类语言中的任何输入语言 $LI$ 的翻译程序的系统开发构成**自动程序设计**（automatic programming），这种开发的对应手段称为编译程序构造系统（systems of compiler construction）或编译程序的编译程序（compilers of compilers），$tt$：$tt(LI) = t$．这里，实现语言或者包含目标语言或者和它相符合：$LO \subseteq LR$．

在可计算函数的理论中程序翻译（可归约性）的概念导致主枚举（principal enumerations）的概念，即某个类的任何其他枚举能被归约到主枚举．已经证明对所有可计算函数的具体模型存在主可计算枚举；特别对部分递归函数和对 Turing 机．再有，主可计算枚举的存在来源于可计算函数执行所谓部分计算（partial computations）的能力，即存在一般递归函数（在程序设计中，部分计算机（partial computer）；在可计算函数理论中，一个 $s-m-n$ 函数）$S^m(x_0, \cdots, x_m)$，使得如果 $U^n(x_0, \cdots, x_n)$ 是对 $n$ 个变量的可计算函数的一个通用函数，则对任何 $m+n$ 个变量的可计算函数 $F$ 和数 $NF$，有恒等式

$$F(x_1, \cdots, x_{m+n}) = U^{m+n}(NF, x_1, \cdots, x_{m+n}) =$$
$$= U^n(S_n^m(NF, x_1, \cdots, x_m), x_{m+1}, \cdots, x_{m+n}).$$

从这个恒等式可见，部分计算机由 $m+n$ 个变量的函数的程序和 $m$ 个变量的给定值构成 $n$ 个变量的函数的程序，它是由原来的程序通过把它的 $m$ 个变元同这些给定值联系起来而得到的．部分计算的结果称为程序 $NF$ 在它的 $m$ 个变元的给定值 $x_1, \cdots, x_m$ 上的投影（projection）$NF_{x_1, \cdots, x_m}$．主可计算枚举（见[1]第 1 章，第 2 节）和部分计算机（见[2]，第 65 节）的存在性以及它们的联系（见[3]，第 11 节，定理 3）是可计算函数理论的基本方面之一．

在程序设计的实际翻译问题和部分计算（见[4]）之间有一个直接关系．假定实现语言 $LR$ 有主可计算枚举，设 $NS$ 是用同样语言表达的 $LR$ 的部分计算机的程序．进一步假定输入语言 $LI$ 是由用一

个 $LR$ 的目标子集 $LO$ 表达的通用函数的程序 $NLI$ 定义的，即 $NLI(ip, d)=ip(d)$.（在程序设计中，这种程序称为输入语言的**解释程序**（interpreter）.）则下列关系成立：

$$\forall dNS(NLI, ip, d)=op(d),$$

$$\forall ipNS(NS, NLI, ip)=t(ip),$$

$$\forall NLINS(NS, NS, NLI)=it(NLI),$$

即，对象程序是输入语言的解释程序在输入程序上的投射；编译程序是部分计算机在输入语言解释程序上的投射；而编译程序的编译程序是部分计算机在它自身上的投射.

参考文献

[1] Ершов, Ю. Л., Теория нумераций, М., 1977.

[2] Kleene, S. C., Introduction to metamathematics, North-Holland, 1951.

[3] Успенский, В. А., Лекций о вычислимых функциях, М., 1960.

[4] Ершов, А. П., в кн.: Всесоюзная конференция. Методы математической логики в проблемах искусственного интеллекта и систематическое программирование, Паланга, 3 – 5 сент. 1980, ч. 2, Вильнюс, 1980, 26 – 55.

А. П. Ершов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Jones, N. D., Partial evaluation, self-application and types, in M. S. Paterson (ed.): Automata, Languages and Programming (Proc. ICALP 17, Warwick, July 1990), Lecture notes comp. sc., Vol. 443, Springer, 1990, 639 – 659.

程 虎 译 刘椿年 校

**平移曲面** [**translation surface**; **переноса поверхность**]

曲线 $L_1$ 按如下方式经过平行位移所形成的曲面：$L_1$ 上某一点 $M_0\in L_1$ 沿另外一条曲线 $L_2$ 滑动. 如果 $r_1(u)$ 和 $r_2(v)$ 分别是 $L_1$ 和 $L_2$ 的位置向量，则平移曲面的位置向量为

$$r=r_1(u)+r_2(v)-r_1(u_0),$$

其中 $r_1(u_0)=r_2(v_0)$ 是 $M_0$ 点的位置向量. 曲线 $u=$ 常数和 $v=$ 常数构成了一个**迁移网**（transport net）. 每个直纹曲面都有 $\infty^1$ 个迁移网（Reidemeister 定理（Reidemeister theorem）），而包络平移曲面只能是柱面或平面. 如果曲面有两个迁移网，则这些网中曲线的切线的非奇异点位于一条四次代数曲线上. 平移曲面的一个不变特性是共轭 Чебышев 网（conjugate Chebyshev net）（一个迁移网）的存在. 例如，在极小曲面上的迷向网是一个迁移网，因而此曲面是一个平移曲面. 人们也可以用如下事实来刻画平移曲面，即该曲面上一条迁移曲线在单参数平行位移运动群作用下变成位于同一曲面上的另外一条迁移曲线. 若用任意单参数群 $G$ 来替代平行位移运动群，便导致了**广义平移曲面**（generalized translation surfaces）（[1]）.

参考文献

[1] Шуликовский, В. И., Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении, М., 1963.

И. Х. Сабитов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Darboux, D., Leçons sur la théorie générale des surfaces, 1 – 4, Chelsea, reprint, 1972, 218.

[A2] Blaschke, W., Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie, Affine Differentialgeometrie, 2, Springer, 1923.

[A3] Blaschke, W., Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitatstheorie, Affine Differentialgeometrie, 3, Springer, 1930.

[A4] Struik, D. J., Lectures on classical differential geometry, Dover, 1988, 103; 109; 184.

沈纯理 译

**半群的平移** [**translations of semi-groups**; **сдвиги полугрупп**]

半群的满足如下特殊条件的变换：**半群**（semigroup）$S$ 的**右平移**（right translation）是使得对任意 $x, y\in S$ 有 $(xy)\rho=x(y\rho)$ 的变换 $\rho$；左平移可类似定义. 为方便计，左平移通常写作左算子. 于是，$S$ 的**左平移**（left translation）是使得对任意 $x, y\in S$ 有 $\lambda(xy)=(\lambda x)y$ 的变换 $\lambda$. 两个左平移（见**变换半群**（transformation semigroup））的连续作用从右到左写. 半群的两个左（右）平移的积自身也是左（右）平移，从而 $S$ 的所有左（右）平移的集合 $\Lambda(S)$ $(P(S))$ 形成对称半群 $\mathcal{I}_S$ 的一个子半群. 对任意 $a\in S$，由 $\lambda_a x=ax$ $(x\rho_a=xa)$ 定义的变换 $\lambda_a$ $(\rho_a)$ 是相应于 $a$ 的左（右）平移，称为**内左（右）平移**（inner left (right) translation）. $S$ 的所有内左（右）平移的集合 $\Lambda_0(S)(P_0(S))$ 形成 $\Lambda(S)(P(S))$ 的一个左（右）理想.

$S$ 的左平移 $\lambda$ 和左平移 $\rho$ 称为**连接的**（linked），如果对任意 $x, y\in S$ 有 $x(\lambda y)=(x\rho)y$；此时，偶对 $(\lambda, \rho)$ 称为 $S$ 的**双平移**（bi-translation）. 对任意 $a\in S$，$(\lambda_a, \rho_a)$ 是一个双平移，称为相应于 $a$ 的**内双平移**（inner bi-translation）. 在且仅在具有恒等元的半群中，每个双平移是内的. $S$ 的所有双平移的集合 $T(S)$ 形成 Descartes 积 $\Lambda(S)\times P(S)$ 的一个子半群，称为 $S$ 的**平移包**（translation hull）. 所有内双平

移的集合 $T_0(S)$ 形成 $T(S)$ 的一个理想，称为 $T(S)$ 的内部（inner part）. 由 $\tau(a)=(\lambda_a,\rho_a)$ 定义的映射 $\tau:S\to T_0(S)$ 是 $S$ 到 $T_0(S)$ 上的同态，称为典范同态（canonical homomorphism）. 半群 $S$ 称为弱约化的（weakly reductive），如果对任意 $a,b\in S$，由关系 $ax=bx$ 与 $xa=xb$ 关于所有 $x\in S$ 成立可推出 $a=b$，即 $S$ 的典范同态是一个同构. 若 $S$ 是弱约化的，则 $T(S)$ 等于 $T_0(S)$ 在 $\Lambda(S)\times P(S)$ 中的理想化子，即 $\Lambda(S)\times P(S)$ 的包含 $T_0(S)$ 作为理想的最大子半群.

半群的平移，特别地，平移包在半群的理想扩张（见**半群的扩张**（extension of a semi-group））的研究中起着重要作用，其中平移包的作用在一定程度上类似于群论中**群的全形**（holomorph of a group）的作用.

**参考文献**


[1] Clifford, A. H. and Preston, G. B., The algebraic theory of semi-groups, I, Amer. Math. Soc., 1961.

[2] Petrich, M., Introduction to semigroups, C. Merrill, 1973.

[3] Petrich, M., The translational hull in semigroups and rings, *Semigroup Forum*, 1 (1970), 283－360.


Л. Н. Шеврин 撰　郑恒武　田振际 译　郭聿琦 校

## 求和法的传递性 [translativity of a summation method; транслятивность метода суммирования]

将级数增加或减少有限项后，仍保持可和性的求和法的一个性质. 更具体地说，求和法 $A$ 称为传递的（translative），如果级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k$$

可和于 $S$，蕴涵级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k$$

依同样方法可和于 $S-a_0$，反之亦然. 对于将序列 $\{S_n\}$ 变成序列或者函数这种变换所定义的求和法 $A$，传递性这个性质就是下面两个条件

$$A-\lim S_n=S$$

与

$$A-\lim S_{n+1}=S$$

等价. 若求和法由正则矩阵 $\|a_{nk}\|$（见**正则求和法**（regular summation methods））所定义，则它意味着

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}a_{nk}S_k=S \qquad (1)$$

总是蕴涵

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}a_{nk}S_{k+1}=S, \qquad (2)$$

反之亦然. 这时，如果上式仅在一个方向成立，那么当 (1) 蕴涵 (2) 而反之不成立时，称这个方法为右传递的（right translative），当 (2) 蕴涵 (1) 而反之不成立时，称之为左传递的（left translative）.

传递性被相当广泛地应用于求和法中；例如，$k>0$ 时的 **Cesàro 求和法**（Cesàro summation methods）$(C,k)$，$k>0$ 时的 **Riesz 求和法**（Riesz summation method）$(R,n,k)$ 及 **Abel 求和法**（Abel summation method）都是传递的；**Borel 求和法**（Borel summation method）是左传递的.

**参考文献**


[1] Cooke, R. G., Infinite matrices and sequance spaces, MacMillan, 1950.

[2] Барон, С., Введение в теорию суммируемости рядов, 2 изд., Таллин, 1977.


И. И. Волков 撰　罗嵩龄 译

## 传输条件 [transmission, condition of; трансмиссии условие]

对有边光滑流形上的**伪微分算子**（pseudo-differential operator）所加的一个条件，其作用是，若一函数在流形边缘之外拓展为 0 后能够光滑到边，此条件保证在以伪微分算子作用后仍能光滑到边。这里拓展为 0 只需在原流形之某个邻域中进行即可，原流形被看作是嵌入在一个较大的无边流形之中，因而原流形边上之点是较大流形的内点。

若已给的伪微分算子的象征在边缘的某邻域的一个局部坐标中可以用正齐次函数 $a_\alpha(x,\xi)$ 作渐近展开（$\alpha$ 是齐次性次数），则传输条件可以写成关于函数 $a_\alpha$ 的如下条件：

$$\partial_x^\gamma\partial_\xi^\beta[a_\alpha(x,\xi',\xi_n)+ \\ -e^{-i\pi\alpha}a_\alpha(x,-\xi',-\xi_n)]\Big|_{x_n=0,\ \xi'=0}=0,$$

$\gamma,\beta$ 是任意的重指标，在边界点邻域中 $x$ 的坐标要这样选取，使 $\{x_n=0\}$ 是边缘的方程，$x_n\geqslant 0$ 即流形自身；而 $\xi=(\xi',\xi_n)$ 是对偶于 $x=(x',x_n)$ 的坐标.

**参考文献**


[1] Эскин, Г. И., Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений, М. 1973（英译本：Eskin, G. I., Boundary value problems for elliptic pseudodifferential equations, Amer. Math. Soc. 1986）.

[2] Boutet de Monvel, L., Boundary problems for pseudo-differential operators, *Acta Math.*, 126 (1971), 1/2, 11－51.

[3] Rempel, S. and Schulze, B. -W., Index theory of elliptic boundary problems, Akademie-Verlag, 1982.

[4] Hörmander, L., The analysis of linear partial differential

operators, 3. Springer, 1985.

[5] Grubb, G., Functional calculus of pseudo-differential boundary problems, Birkhäuser, 1986.

M. A. Шубин 撰 齐民友 译

**信道传输速率 [transmission rate of a channel; канала пропускная способность]**

信息论中，关于**通信信道**（communication channel）信息传输能力的度量. 设 $\eta$ 和 $\widetilde{\eta}$ 为通信信道 $(Q, V)$ 中的一对相连接的随机变量. 这时，这个信道的传输速率 $C$ 定义为：

$$C = \sup I(\eta, \widetilde{\eta}), \tag{1}$$

其中，$I(\eta, \widetilde{\eta})$ 为 $\widetilde{\eta}$ 中含有的 $\eta$ 的**信息量**（information, amount of），上确界是在信道 $(Q, V)$ 中所有相连接的随机变量对 $(\eta, \widetilde{\eta})$ 上取的. 当输入信号 $\eta = \{\eta(t): -\infty < t < \infty\}$ 和输出信号 $\widetilde{\eta} = \{\widetilde{\eta}(t): -\infty < t < \infty\}$ 为连续或离散时间的随机过程时，信道传输速率通常解释为单位时间内或传输信号中单位符号上的信道平均传输速率（mean transmission rate of the channel），即令

$$C = \lim_{T-t\to\infty} \frac{1}{T-t} \sup I(\eta_t^T, \widetilde{\eta}_t^T), \tag{2}$$

如果这种极限存在的话. 其中，上确界是在给定信道的相应时间段上相连接的所有可能随机过程对 $\eta_t^T = \{\eta(s): t < s \leqslant T\}$, $\widetilde{\eta}_t^T = \{\widetilde{\eta}(s): t < s \leqslant T\}$ 上取的. (2) 式中极限的存在性已在很广泛的一类信道上得到证实，例如，对一个具有非零**转移概率**（transition probabilities）的**齐次有限记忆信道**（channel with a finite memory）.

已经知道对充分广泛的一类信道（例如前面提到的有限记忆信道），下面的公式是成立的：

$$C = \sup\left(\lim_{T-t\to\infty} \frac{1}{T-t} I(\eta_t^T, \widetilde{\eta}_t^T)\right), \tag{3}$$

其中，上确界是对所有平稳相关随机过程对 $\eta(t)$, $\widetilde{\eta}(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ 而取的，而对任何 $-\infty < t < T < \infty$，随机变量 $\eta_t^T = \{\eta(s): t < s \leqslant T\}$ 和 $\widetilde{\eta}_t^T = \{\widetilde{\eta}(s): t < s \leqslant T\}$ 在所考虑的信道相应时间段上是相连接的. 因此，(3) 式表明信道传输速率与这条信道上的最大**信息传输速率**（information, transmission rate of）是相同的.

传输速率的精确计算是相当有趣的. 例如，设信道 $(Q, V)$ 的输入、输出信号分别取值于 $n$ 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$，转移函数 $Q(y, \cdot)$ 由密度 $q(y, \widetilde{y})$（Lebesgue 可测）决定，$y, \widetilde{y} \in \mathbf{R}^n$，约束 $V$ 指输入信号均方能量有界，即 $\mathsf{E}|\eta|^2 \leqslant S$（其中 $|\eta|$ 指 $\mathbf{R}^n$ 中向量 $\eta$ 的长度），常数 $S > 0$. 这时有下面的结果（见 [1]）：

1) 令 $q(y, \widetilde{y}) = q(\widetilde{y} - y)$，即这里考虑的是一种带可加噪声的信道，输出信号 $\widetilde{\eta}$ 为输入信号 $\eta$ 与噪声 $\zeta$（$\eta$ 与 $\zeta$ 相互独立）之和：$\widetilde{\eta} = \eta + \zeta$，令 $\mathsf{E}|\zeta|^2 = N$. 则 $N \to 0$ 时（在一个弱的附加条件下），有下面的渐近公式：

$$C = -h(\zeta) + \frac{n}{2} \log \frac{2\pi e S}{n} + \frac{n \log e}{2S} N + o(N),$$

其中，$h(\zeta)$ 为 $\zeta$ 的**微分熵**（differential entropy），且当 $N \to 0$ 时，$o(N)/N \to 0$. 这个公式是在小噪声的条件下成立的.

2) 令 $q(y, \widetilde{y})$ 是任意的，但 $S \to 0$. 则

$$C = \left(\sup_{y} \frac{\varphi(y)}{|y|}\right) S + o(S),$$

其中

$$\varphi(y) = \int_{R^n} q(y, \widetilde{y}) \log \frac{q(y, \widetilde{y})}{q(0, \widetilde{y})} \, d\widetilde{y}.$$

**参考文献**

[1A] Прелов, В. В.,《Пробл. передачи информ.》, 5 (1969), 2, 31 – 36.

[1B] Прелов, В. В.,《Пробл. передачи информ.》, 8 (1972), 4, 22 – 27.

亦见**通信信道**（communication channel）中引用的 [1], [3] – [6].  Р. Л. Добрушин В. В. Прелов 撰

**【补注】**

**参考文献**

[A1] Billingsley, P., Ergodic theory and information, Wiley, 1965.

[A2] Ash, R. B., Information theory, Interscience, 1965.

[A3] Yaglom, A. M. and Yaglom, I. M., Probabilité et information, Dunod, 1959 (译自俄文).

**【译注】** 参考文献见 **Shannon 定理**（Shannon theorem）译注之参考文献.  骆源 符方伟 沈世镒 译

**输运方程，数值方法 [transport equations, numerical methods; переноса уравнения, численные методы решения]**（输运方程亦称迁移方程）

关于描述粒子或辐射输运的积分微分方程的求解方法.

对于定态问题，方程取下列形式

$$\Omega \cdot \nabla\varphi + \Sigma\varphi = \\ = \int dv' \int d\Omega' \varphi w(\mathbf{x}, \Omega, \Omega', v, v') + f, \tag{1}$$

其中 $\mathbf{x} = (x, y, z)$, $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ 是单位向量，$\varphi = \varphi(\mathbf{x}, \Omega, v)$ 是具有速度 $v\Omega$ 的粒子在点 $\mathbf{x}$ 的粒子流，正函数 $\Sigma$ 和 $w$ 描述粒子与物质的相互作

用，而 $f$ 是源．考虑下列两个基本方面：1) 在 (凸) 区域 $D(x, y, z)$ 中求 (1) 的解，使得在区域边界 $\Gamma$,

$$\varphi(\mathbf{x}, \Omega, v) = 0 \text{ 对 } (\Omega, \mathbf{n}) < 0, \quad (2)$$

其中 $\mathbf{n}$ 是对 $\Gamma$ 的外法线；和 2) 寻求 (1)－(2) 的最大本征值 $\lambda_1$ 及其相应本征函数，其中

$$f = \frac{1}{\lambda}\int dv' \int d\Omega' \varphi w_1(\mathbf{x}, \Omega, \Omega', v, v'). \quad (3)$$

方程 (1) 包含六个独立变量；因为它本质上是高维方程，必须将其化为较简单方程．在 (1) 和 (3) 中将对 $v'$ 的积分代之以含 $N$ 项的求积公式，并假定散射是各向同性的，它给出一组所谓多速方程 (multi-velocity equations)：

$$\Omega \cdot \nabla\varphi_i + \Sigma_i \varphi_i = = \sum_{j=1}^{N} \Sigma_s^{ij} \varphi_{j0} + f_i, \; i = 1, \cdots, N, \quad (4)$$

其中

$$\varphi_i = \varphi_i(\mathbf{x}, \Omega), \; \varphi_{i0} = \frac{1}{4\pi}\int \varphi_i d\Omega'$$

是零阶矩，而系数 $\Sigma_i$, $\Sigma_s^{ij}$ 和 $f_i$ 通过运用求平均法和应用对共轭问题的解而获得．对于问题 2) 类似地得到

$$f_i = \frac{1}{\lambda}\chi_i Q(\varphi) = \frac{1}{\lambda}\chi_i \sum_{j=1}^{N} \Sigma_{fj}\varphi_{j0}. \quad (5)$$

对于 $N=1$，得到对于函数 $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, \Omega)$ 的单速方程 (single-velocity equation)

$$\Omega \cdot \nabla\varphi + \Sigma\varphi = \Sigma_s \varphi_0 + f. \quad (6)$$

对于平面层 $0 \leqslant x \leqslant H$，方程 (6) 取下列形式

$$\mu l \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi = = c\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \varphi(x, \mu')d\mu' + f_1(x, \mu), \quad (7)$$

其中 $l = 1/\Sigma$, $c = \Sigma_s/\Sigma$, $f_1 = f/\Sigma$；这里的解仅依赖于一个坐标 $x$ 和一个角变量 $\mu$, $|\mu| \leqslant 1$. (6) 式左边的特征线全是直线 $x = x_0 + \xi\Omega$, $x_0 \in D$，并且沿每条特征线，(6) 取下列形式

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \Sigma\varphi = \Sigma_s\varphi_0 + f. \quad (8)$$

如果在 (6) 中作代换 $u = (\varphi(x, \Omega) + \varphi(x, -\Omega))/2$，它变成

$$[-l\Omega \cdot \nabla]^2 u + u = cu_0 + F. \quad (9)$$

对 (9) 的解使二次 Владимиров 泛函 (Vladimirov functional)

$$G(u) = (l\Omega \cdot \nabla u, l\Omega \cdot \nabla u) + (u, u) - (cu_0, u) + + \int_{\Gamma \times \Omega} |(\Omega, u)| u^2 d\Omega d\Gamma - 2(u, F) \quad (10)$$

为极小，其中

$$(u, v) = \int_D \int_\Omega uv dx d\Omega.$$

令边值问题写成算子形式：

$$L\varphi = S\varphi + f. \quad (11)$$

输运问题的一个特征性质，数值算法中要应用的是 $L^{-1}\psi$ 的值可通过涉及将 (8) 沿特征线积分的直接方法由给定 $\psi$ 求出．在此基础上，由 (11) 得到对于零阶矩 $S\varphi$ 的 Peierls 积分方程 (Peierls integral equation)

$$S\varphi = SL^{-1}(S\varphi + f). \quad (12)$$

为了求解输运问题，球面调和函数法 (method of spherical harmonics) (Галеркин 方法的一种形式) 得到极重要发展．求得一个近似解 ($P_n$ 近似) 形式为

$$\varphi^{(n)}(\mathbf{x}, \Omega) = = \sum_{l=0}^{n}(2l+1)\sum_{m=-l}^{l}\varphi_{lm}(\mathbf{x})Y_{lm}(\Omega), \quad (13)$$

其中 $\varphi_{lm}(\mathbf{x})$ 是未知函数而 $Y_{lm}(\Omega)$ 是 $l$ 阶球面调和函数．将 (13) 代入 (6)，其结果乘以 $Y_{lm}$ 并对 $\Omega$ 积分，导致关于 $\varphi_{lm}(\mathbf{x})$ 的偏微分方程组 (见**球面调和函数法** (spherical harmonics, method of))．在 $P_1$ 近似，方程组取下列形式

$$\operatorname{div}\varphi_1 + \Sigma\varphi_0 = f_0, \; \frac{1}{3}\nabla\varphi_0 + \varphi_0 + \Sigma\varphi_1 = f_1,$$
$$2(\varphi_1, n) - \varphi_0|_\Gamma = 0, \quad (14)$$

其中 $\varphi_0 = \varphi_{00}$, $\varphi_1 = (\varphi_{11}, \varphi_{12}, \varphi_{13})$．对于 $f_1 \equiv 0$, (14) 蕴含扩散近似

$$-\operatorname{div}(D\nabla\varphi_0) + \Sigma\varphi_0 = f_0, \; 2D\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi_0|_\Gamma = 0, \quad (15)$$

其中 $D = 1/(3\Sigma)$，它是一个椭圆型问题，可用变分法或网格法予以求解．

为了求解一维情况，曾经发展了基于将解用广义本征函数展开的解析方法．为了寻求复杂多维问题解的泛函，采用**蒙特卡罗方法** (Monte-Carlo method).

有限差分近似方法广泛用于输运方程．例如，可应用对区域 $D$ 的求积公式将 (12) 用线性方程组代替．方程 (4)、(5)、(6) 或 (8) 中的积分算子可通过对球域的求积公式予以近似．对球域的 **Gauss 求积公式** (Gauss quadrature formula) 直至 35 阶代数精度是已知的．在**特征线法** (method of characteristics) 中，通过空间网格每一点，沿着对应于对球域求积的结点的方向画出一族特征线，而将 (8) 中的微分算子 $L$ 用相应差分代替．$S_n$ 方法 ($S_n$ method) 的差分方程、

通过将（6）对相空间网格胞腔积分得到，假定在胞腔内解对独立变量是线性的．在 Галеркин 法（Galerkin method）中，寻求下列形式的解：

$$\varphi = \sum_{n=1}^{N} g_n(\Omega)\varphi_n(\mathbf{x}). \qquad (16)$$

如果给定 $\varphi_n(\mathbf{x})$，则得到对 $g_n(\Omega)$ 的退化积分方程组；如果 $\varphi_n(\mathbf{x})$ 是紧支撑函数，则得到有限元法（finite element method）；如果 $g_n(\Omega)$ 是给定紧支撑函数，并且（16）使（10）为极小，则得到所谓 $P_{NJ}$ 方程（$P_{NJ}$ equations）.

求解差分输运问题的迭代法具有其特点，当 $c \to 1 (c \leqslant 1)$ 时迭代收敛性通常变得更慢，而为推导下一近似 $\varphi^{k+1}$，人们仅应用关于前一近似（实质上很少维数的）$\varphi^k$ 的部分信息——人们仅存储和应用 $\varphi_0^k$ 的值．在迭代法中一个中间运算（运算 $K$）经常是求解下列问题：

$$L\Phi^k = S\varphi^k + f, \ \Phi_0^k = \frac{1}{4\pi}\int \Phi^k d\Omega'. \qquad (17)$$

于是误差 $\varphi - \Phi^k$ 满足（11）带有源为 $S(\Phi^k - \varphi^k)$，它像误差一样也不依赖于 $\Omega$．这个特点使人们能加速其收敛性．考虑对于（7）的周期性问题，带有恒定系数，带有源对 $\mu$ 是偶函数，并令 $H = 2\pi$．在这个应用中，下面来考虑下列迭代法．对于（7）构造这样的网格，$x$ 上有 $N$ 个结点而 $\mu$ 上有 $M$ 个角方向．令

$$r(t) = t^{-1}\arctan t, \ 0 \leqslant r(t) \leqslant 1,$$

$$\varepsilon_0^k = \varphi_0 - \varphi_0^k = \sum_n \varepsilon_n^k e^{inx}$$

$$\|\varepsilon_0^k\| = \max_n |\varepsilon_n^k|.$$

对于收敛的迭代法，$\|\varepsilon_0^{k+1}\| \leqslant q\|\varepsilon_0^k\|$，其中 $0 \leqslant q < 1$．令 $P_0$ 为运算 $K$ 中的价值（运算数），而 $P$ 为完全迭代的价值及 $\Delta = P - P_0$．适用于各种方法的有下列关系

1）简单迭代（simple iteration）：$\varphi_0^{k+1} = \Phi_0^k$，其中 $\Delta = 0$ 和 $q = c$.

2）Люстерник 法（Lyusternik method）：对于某个 $k$，应用简单迭代

$$\varphi_0^{k+1} = \Phi_0^k + (\lambda_1 - 1)^{-1}(\Phi_0^k - \varphi_0^k),$$

其中 $\lambda_1 > 1$ 是 $L\varphi = \lambda S\varphi$ 的最大本征值；于是 $\Delta = O(N)$ 和 $q = cr(l)$ （$q \to 1$ 对 $c \to 1, l \to 0$）.

3）估计迭代偏差的方法（method of estimating iterative deviations）：$\varphi_0^{k+1} = \Phi_0^k + W_0^k$，其中 $W^k$ 是方程

$$l\mu\frac{\partial W^k}{\partial x} + (1-c)W^k = c(\Phi_0^k - \varphi_0^k)$$

的解；于是

$$\Delta = O(NM), \ q = \max\left[cr(l), \ \frac{\pi\sqrt{2}\,c^2}{12}\right]$$

（$q \to 1$ 当 $c \to 1, l \to 0$）.

4）平衡乘子法（balancing multiplier method）：$\varphi_0^{k+1} = \delta^k\Phi_0^k$，其中

$$\delta^k = \frac{\int_0^H f_0 dx}{\int_0^H (1-c)\Phi_0^k dx}.$$

这里 $\Delta = O(N)$ 和 $q = cr(l)$ （$q \to 1$ 当 $c \to 1, l \to 0$）.

5）平均流法（mean-flux method）（重平衡法（rebalancing method））：

$$\varphi^{k+1}(x, \mu) = (1 + v^k(x))\Phi^k,$$

其中选择函数 $v^k$ 使泛函（10）为极小或者使它在某个有限维子空间中为极小：$v^k = \sigma_i a_i \psi_i$，于是 $a_i$ 满足一定的方程组.

6）拟扩散法（quasi-diffusion method）：

$$-l\frac{d}{dx}\,l\frac{d}{dx}\,D^k\varphi_0^{k+1} + (1-c)\varphi_0^{k+1} = f_0,$$

其中

$$D^k = \frac{\int_{-1}^{1}\Phi^k\mu^2 d\mu}{\Phi_0^k};$$

于是 $\Delta = O(NM)$.

7）分裂法（splitting methods）：

$$(I + \tau\Lambda_2)(I + \tau\Lambda_1)\varphi^{k+1} =$$

$$= (I + \tau\Lambda_2)(I - \tau\Lambda_1)\varphi^k + 2\tau f;$$

其中

$$\Lambda_1 = I - \frac{c}{2}\int_{-1}^{1}(\cdots)d\mu, \ \ \Lambda_2 = l\mu\frac{d}{dx}.$$

方法 4）－6）是非线性的，当 $c \to 1$ 和 $l \to 0$ 时，其收敛性可能变慢；方法 7）要求 $\varphi^k(x, \mu)$ 的存储（$q \to 1$ 当 $c \to 1, l \to 0$）.

8）$KP$ 法（$KP$-methods）：校正 $W^k$ 作为边值问题在 $D$ 中的解予以确定

$$Q_n W^k = P_n c(W^k + \Phi_0^k - \varphi_0^k), \qquad (18)$$

其中 $Q_n$，$P_n$ 是二阶线性微分算子，并令 $\varphi_0^{k+1} = \Phi_0^k W^k$．在 $KP$ 方法的一种变型中，（18）取下列形式

$$-\frac{g_k}{3}\left(l\frac{d}{dx}\right)^2 W^k + (1-c)W^k = c(HI_0^k - \varphi_0^k). \qquad (19)$$

于是对（19）有 $\Delta = O(N)$；对 $g_k = 0.843$ 有 $q =$

$0.186c$，而对 $g_k=(1+y_k)/2$，其中 $y_k$ 是 Jacobi 多项式 $P^{(-1/2)(N+\beta)-2/3)}$，$\beta>0$，$q$ 对 $N$ 次迭代的几何平均接近于 $0.15c$．在 $KP$ 方法中，迭代的收敛性当 $c\to 1$，$l\to 0$ 时并不减慢．

为了求解多速问题（4）应用 Seidel 迭代法（Seidel iteration method）：

$$\Omega\cdot\nabla\varphi_i^{k+1}+\Sigma_i\varphi_i^{k+1}=$$

$$=\sum_{j=1}^{i}\Sigma_i^{ij}\varphi_{j0}^{k+1}+\sum_{j=i+1}^{N}\Sigma_i^{ij}\varphi_{j0}+f,$$

$$i=1,\cdots,N, \tag{20}$$

而（20）的每个方程中的解 $\varphi_i^{k+1}$ 通过单速方程的一个迭代法予以求解．

为了求解（4）和（5）的本征值的多速问题，这两个迭代循环还要补充一个外循环用以求最大本征值 $\lambda=\lambda_1$ 及相应本征函数 $\varphi$．如果 $x=Q(\varphi)$ 和 $A=Q(L-S)^{-1}\chi$，则问题（4），（5）变成

$$Ax=\lambda x. \tag{21}$$

为了求 $\lambda_1$ 和 $\varphi$，应用带有 Чебышев 参数的迭代法

$$u^{k+1}=Ax^k-\beta_{k+1}x^k,\ x^{k+1}=\frac{u^{k+1}}{Q(u^{k+1})}, \tag{22}$$

其中

$$\beta_k=\frac{1}{2}(M+m+(M-m)\cos\pi\omega_k), \tag{23}$$

$\omega_k\in[0,1]$ 而 $M$ 和 $m$ 是参数．假定谱是非负的，首先求 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$，它们是（21）的最大本征值，认为 $m=0$，$M=a$，其中 $a\geqslant 0$ 是 $\lambda_1$ 的下界，并取 $\omega_k$ 为一个 $T$ 序列（见下面）．$\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 的值由考虑到位移 $\beta_k$ 的广义 Aitken 法（generalized Aitken method）予以确定．当求得 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 后，则由（22）和（23）取 $M=\lambda_2$ 来求 $\varphi$．无穷 $T$ 序列（$T$-sequence）相应地则由第一类 Чебышев 多项式的根的特定顺序形成 $T_{2\cdot 3^n}(\cos\pi\omega)$，而长度 $2\cdot 3^n$ 的 $T$ 线段的初始线段包括形式为 $(2j_k-1)/4\cdot 3^n$，$1\leqslant j_k\leqslant 2\cdot 3^n$ 的所有数：

$$\frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{12},\ \frac{11}{12},\ \frac{5}{12},\ \frac{7}{12},\frac{1}{36},\ \cdots.$$

长度 $2\cdot 3^n$ 的 $T$ 序列的任一线段保证迭代法（22），（23）中误差的一定意义上的最优抑制以及其迭代稳定性．

对于求解非定态问题

$$\frac{1}{v}\ \frac{\partial\varphi}{\partial t}+L\varphi-S\varphi=f,$$

应用下列方法：（$x$，$t$）空间中的特征线法，Галеркин 法，有限差分方法，后者相当于显式或隐式差分格式，或者相当于算子分裂法．在隐格式的情况，上层的解可由 $KP$ 方法求得．

**参考文献**


[1] Владимиров, В. С., Тр. Матем. ин-та АН СССР, 61 (1961), 1–158.

[2] Марчук, Г. И., Лебедев, В. И., Численные методы в теории переноса нейтронов, 2 изд., М., 1981.

[3] Лебедев, В. И., Финогенов, С. А., Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 16 (1976), 895–907.

[4] Лебедев, В. И., Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 17 (1977), 100–108.


В. И. Лебедев 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Davison, B., Neutron transport theory, Oxford Univ. Press, 1957（中译本：B. 戴维逊，中子迁移理论，科学出版社，1961）.

[A2] Bell, G. and Glasstone, S., Nuclear reactor theory, v. Nostrand, 1971.


徐锡申 译

**迁移网［transport net；переноса сеть］**

仿射（或 Euclid）空间中的二维曲面上的一个共轭的 **Чебышев 网**（Chebyshev net）．带有迁移网的曲面称为**迁移曲面**（translation surface）．

关于迁移网，有 Lie 定理（Lie theorem）：如果一曲面带有两个迁移网，则这些网中的线的切线相交于非奇异的四次平面曲线（[1]）．

**参考文献**


[1] Шуликовский, В. И., Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении, М., 1963.


В. Т. Базылев 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Blaschke, W., Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie. Affine Differentialgeometrie, 2, Springer, 1923.


沈纯理 译

**运输问题［transport problem 或 transportation problem；транспортная задача］**

**线性规划**（linear programming）一般问题的最重要特殊类之一．运输问题陈述如下．

假设在点 $A_1,\cdots,A_m$ 生产某种同样的商品，其中在 $A_i$ 产出的商品量为 $a_i$ 个单位，$i=1,\cdots,m$．在这些生产点上生产的货物应该发送到消费点 $B_1,\cdots,B_n$ 去，其中在 $B_j$ 消费的量为 $b_j$ 个货物单位．假定最终产品的运输可能从任何生产点到任何消费点，而从 $A_i$ 到 $B_j$ 运送单位货物所必须的运输费用为 $c_{ij}$ 个货币单位．于是问题为制定怎样的装运计划，使得总运输费用最小．

形式上，问题是以下列方式提出的．设 $x_{ij}$ 是从 $A_i$ 到 $B_j$ 装运的货物量．要求确定 $mn$ 个量 $x_{ij}$，满

足条件

$$\left.\begin{array}{l}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \cdots, m, \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \cdots, n, \\ x_{ij} \geqslant 0.\end{array}\right\} \tag{1}$$

且使线性形式

$$L(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

最小．

约束（1）反映的事实是从每个生产点装运的量恰好等于在该点的生产量，而在一个消费点收到的量恰好对应其需求量．在这些约束下，运输问题可解的充要条件是下列平衡条件（balance condition）成立：

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{2}$$

下列两个情况是运输问题特有的：a）每个变量 $x_{ij}$ 进入组（1）的两个方程；b）变量在约束中的所有系数取值 0 或 1．条件 a）和 b）使得人们能设计出求解运输问题的算法在本质上比**单纯形法**（simplex method）简单，后者是解线性规划问题的基本方法之一．

这些算法中最著名的是位势法和所谓匈牙利法．位势法（method of potentials）是利用验证最优性的二次对偶性定理来逐次改进（装运）计划的方法（[1]）．匈牙利方法（Hungarian method）是逐次构造容许的计划，使它自动转化为最优计划．匈牙利算法的基础是交替链法（[2]）．

已知有下列两种经典运输问题的推广；它们反映实际中遇到的情况．运输问题的开模型（open model）：这是平衡条件（2）不成立的运输问题；它意味着或者总生产量超过总需求量，或者相反．这个问题通过引入其生产（或消费）能力等于总生产量与总需求量的差的虚拟生产（或消费）点，归结为经典的运输问题．

多指标运输问题（multi-index transportation problem）仍然是一般的运输费用最小的问题，但是考虑货物（产品）的不一致性和运输手段的不一致性．

在非俄文文献中，运输问题有时称为 Hitchcock 问题（Hitchcock problem）．

**参考文献**

[1] Гольштейн, Е. Г., Юдин, Д. Б., Задачи линейного программирования транспортного типа, М., 1969.

[2] Ore, O., Theory of graphs, Amer. Math. Soc., 1963.

[3] Емеличев, В. А., Ковалев, М. М., Кравцов, М. К., Многогранники. Графы. Оптимизация, М., 1981.

В. К. Леонтьев 撰

【补注】

**参考文献**

[A1] Schrijver, A., Theory of linear and integer programming, Wiley, 1986.

[A2] Nemhauser, G. L. and Wolsey, L. A., Integer and combinatorial optimization, Wiley, 1988.

【译注】 关于运输问题的解法应该提到中国运筹学工作者有许多深入研究的表作业法．这种算法与上述位势法密切相关，数学上也等价于单纯形法．但是当变量较少时，它可以在运输计划表上直接操作，有其方便之处．参看，例如，[B1]，[B2]．

**参考文献**

[B1] 李德、钱颂迪主编，运筹学，清华大学出版社，1982．

[B2] 管梅谷、郑绍鼎，线性规划，山东科学技术出版社，1984．

史树中 译

**转置方程（组）[transposed equations; транспонированные уравнения]**

1）一个线性代数系的转置方程（组）是以**转置矩阵**（transposed matrix）作为系数矩阵的线性方程（组）．

2）在线性积分方程（见**积分方程**（integral equation））的情况下，转置方程是具有核 $K(x, y)$ 与核 $K(y, x)$ 的方程．

转置方程（组）也称为伴随方程（组）（adjoint equations）或者相伴方程（组）（associated equations）．

【补注】 一个积分方程的转置方程在 **Fredholm 抉择定理**（Fredholm alternative）中起重要作用．

**参考文献**

[A1] Jörgens, K., Lineare integraloperatoren, Teubner, 1970.

[A2] Smirnov, V. I., A course of higher mathematics, 4, Addison-Wesley, 1964（译自俄文）．

蒋滋梅 译

**转置矩阵 [transposed matrix; транспонированная матрица]**

对换所给（长方或正方）矩阵 $A = \| a_{ik} \|$ $(i = 1, \cdots, m; k = 1, \cdots, n)$ 的行与列的位置后所得的**矩阵**（matrix），即矩阵 $\| a'_{ik} \|$，其中 $a'_{ik} = a_{ki}$ $(i = 1, \cdots, n; k = 1, \cdots, m)$．转置矩阵的行数等于 $A$ 的列数，而其列数等于 $A$ 的行数．矩阵 $A$ 的转置通常记作 $A^T$ 或 $A'$．

О. А. Иванова 撰

【补注】 矩阵转置的若干基本性质是 $(A + B)^T = A^T + B^T$，$(\alpha A)^T = \alpha A^T$，$(AB)^T = B^T A^T$，$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$．

**参考文献**

[A1] Gantmacher, F. R. (Gantmakher, F. R.), The theory of matrices, 1, Chelsea, reprint, 1959, 19（译自俄文）（中译本，Ф. Р. 甘特马赫尔，矩阵论，高等教育出版社，1955）．

蒋滋梅 译

**平延** [**transvection**; **трансвекция**]

除环 $K$ 上(右)向量空间 $V$ 的一个线性映射 $f$ 具有性质:

$$\mathrm{rk}(f-E)=1 \text{ 与 } \mathrm{Im}(f-E)\subset\ker(f-E),$$

其中 $E$ 是恒等线性变换. 一个平延可表为形式

$$f(x)=x+a\alpha(x),$$

其中 $a\in V$, $\alpha\in V^*$ 及 $\alpha(a)=0$.

向量空间 $V$ 的一切平延生成特殊线性群(special linear group)或幺模群(unimodular group) $\mathrm{SL}(V)$. 除 $\dim V=1$ 或 $\dim V=2$ 且 $K$ 是二元域的情况外, 这个群等同于 $\mathrm{GL}(V)$ 的换位子群. 如果 $K$ 是一个域, 那么 $\mathrm{SL}(V)$ 是行列式为 1 的矩阵所组成的群. 在一般情况下(只要 $\dim V\neq 1$), $\mathrm{SL}(V)$ 是满同态

$$\mathrm{GL}(V)\to K^*/(K^*,K^*)$$

的核, 称为 Dieudonné 行列式(Dieudonńe determinant)(见**行列式**(determinant)).

**参考文献**

[1] Dieudonné, J. A., La géométrie des groups classiques, Springer, 1955.

Э. Б. Винберг 撰

【补注】 在射影空间 $P(V)$ 里, 它的点都是 $V$ 的一维子空间, 上述一个平延 $f$ 诱导了一个以 $aK$ 为中心及 $\ker(f-E)$ 为轴的(射影(projective))平延(transvection). 如果取 $\ker(f-E)$ 为 $P(V)$ 里一个无限远超平面, 那么这样一个平延在剩余仿射空间(解释为一个线性空间)里诱导了一个平移 $x\mapsto x+b$. 亦见**移位**(shear).

蒋滋梅 译

**横截椭圆型算子** [**transversal**(或 transversally) **elliptic operator**; **трансверсально эллиптический оператор**]

一个微分算子或**伪微分算子**(pseudo-differential operator)(亦见**微分算子**(differential operator))而与作用在一流形上的某个 Lie 群可交换, 此算子即定义在此流形上, 且在该群轨道的法方向上是椭圆型的. 若此算子作用于向量丛的截面上, 则也假设此 Lie 群 $G$ 的作用可以提升到每一个丛上, 且可进一步拓展到丛的截面上. 若此群是离散的, 则横截椭圆型算子就是与 $G$ 的作用可交换的通常的椭圆型算子. 若 $G$ 在流形 $X$ 上的作用是传递的, 则任一个与 $G$ 的作用可交换的微分算子或伪微分算子都是横截椭圆型算子. 若 $G$ 和 $X$ 为紧的, 则对于横截椭圆型算子可以定义并计算指标. 它是 $G$ 上的一个广义函数. (见**指标公式**(index formulas)). 对于自伴的横截椭圆型算子, 可以考虑 $G$ 的作用而得出其精密的谱特性.

**参考文献**

[1] Atiyah, M. F., Elliptic operators and compact groups, Lecture notes in math., 401, Springer, 1974.
[2] Brüning, J. and Heintze, E., Representations of compact Lie groups and elliptic operators, *Invent. Math.*, **50** (1979), 169 – 203.
[3] Шубин, М. А., Спектральные свойства и функция расположения спектр одного трансверсального эллиптического оператора, 《Труды Семинара им. Петровского》, **8** (1982), 239 – 258.
[4] Смагин, С. А., Шубин, М. А. Цета функция одного трансверсально эллиптического оператора, 《Сиб. рск. Матем. Ж.》, **25** (1984), 6, 158 – 166.

М. А. Шубин 撰

【补注】 于是, 一个(伪)微分算子如果与一群的无穷小作用所定义的向量场之组合构成一个超定椭圆型方程组, 则它是横截椭圆型的(亦见**椭圆型偏微分方程**(elliptic partial differential equation)).

齐民友 译

**横截映射** [**transversal mapping**; **трансверсальное отображение**], 横截正则映射(transversally-regular mapping)

具有**一般位置**(general position)的某些性质的映射.

设 $\xi$ 是有限**胞腔空间**(cellular space) $X$ 上的一个**向量丛**(vector bundle), 而 $\xi$ 的全空间作为开子集嵌入在某个拓扑空间 $Z$ 中. 则连续映射 $f:M\to Z$($M$ 是一光滑流形)称为 $X$ 的横截映射(transversal mapping), 如果 $V=f^{-1}(X)$ 是 $M$ 中具有**法丛**(normal bundle) $\nu$ 的一个光滑子流形及如果 $f$ 限制到 $V$ 在 $M$ 中的**管状邻域**(tubular neighbourhood)上定义了丛的态射 $\nu\to\xi$.

例如, 设 $f:M\to N$ 是光滑流形的一个光滑映射, 又设 $X$ 是 $N$ 的光滑子流形. 如果微分 $df:\tau_M\to\tau_N$(其中 $\tau$ 是切丛)在它的象中包含了在(丛 $\xi$ 的) $N$ 中垂直于 $X$ 的所有向量, 则 $f$ 是横截映射(也见**横截性**(transversality)).

逼近定理(approximation theorem)([1]): 横截映射形成了在所有的连续映射 $M\to Z$ 的集合中的第二范畴的一个集合. 此外, 任何的连续映射同伦于一个横截映射. 这个定理使得人们可将代数不变量(映射的同伦类)与描述几何形式(在横截映射下是原象的流形的某些等价类)相结合. 这个结合也用于其他方面, 即从几何到代数. 沿着这条线, 例如, 各种**下配边**(bordism)群已经算出, 给定同伦型的光滑流形已被分类, 等等.

横截映射的概念可以被引伸到分片线性和拓扑流形的范畴以及 $\mathbf{R}^n$ 丛中. 更进一步, 在分片线性范畴中, 逼近定理成立; 见[3]. 还有, 在拓扑范畴中, 每个连续映射同伦于一个横截映射; 此结果, 根据后来证明的困难的结果([6]), 对 $\dim M\neq 4\neq \dim M-$

$\dim \xi$，在[4]中已经证明，而对 $\dim M = 4$，在[5]中被证明．横截映射的概念对无限维流形也可系统地阐述．

**参考文献**


[1] Thom, R., Un lemma sur les applications différentiables, *Bol. Soc. Mat. Mex.*, 1(1956), 59 – 71.

[2] Browder, W., Surgery on simply connected manifolds, Springer, 1972.

[3] Williamson, R., Cobordism of combinatorial manifolds, *Ann. of Math.*, 83(1966), 1 – 33.

[4] Kirby, R. and Siebenmann, L., Foundational essays on topological manifolds, smoothing, and triangulations, Princeton Univ. Press, 1977.

[5] Sharlemann, M., Transversality theories at dimension 4, *Invent. Math.*, 33(1976), 1 – 14.

[6] Freedman, M., The topology of four-dimensional manifolds, *J. Diff. Geom.*, 17(1982), 357 – 453.


Ю. Б. Рудяк 撰

【补注】 **横截性**（transversality）的概念对光滑流形之间的任意光滑映射 $f: M \to N$ 被定义．如果 $A$ 为 $N$ 的一个光滑子流形，则 $f$ 横截于 $A$，如果对 $A$ 的原象 $V$ 中的每个 $x$，$N$ 在 $f(x)$ 的切空间由 $A$ 在 $f(x)$ 处的切空间和 $M$ 在 $x$ 处的切空间在 $f$ 的微分下的象张成．当这些成立时，则 $V$ 是 $M$ 的光滑子流形，$V$ 在 $M$ 中的法丛是 $A$ 在 $N$ 中的法丛在 $f$ 下的拉回．逼近定理对这样的映射是有效的．横截性在拓扑中的应用见[A1]－[A3]．

**参考文献**


[A1] Pontryagin, L. S., Smooth manifolds and their applications in homotopy theory, Amer. Math. Soc., 1959(译自俄文).

[A2] Thom, R., Quelques propriétés globales des variétés différentiables, *Comment. Math. Helvetica*, 28(1954), 17 – 86

[A3] Hirsch, M. W., Differential topology, Springer, 1976.


徐森林 译

**横截系** [**transversal system**; **трансверсальная система**]，横截设计（transversal design），横截概形（transversal scheme），$T$ 系（$T$-system）．

基数为 $t$ 的 $m$ 个两两不交的子集 $S_1, \cdots, S_m$ 所确定的一组集合 $T_0(m, t)$．即一个**横截系** $T_0(m, t)$ 是 $t^2$ 个子集 $Y_1, \cdots, Y_{t^2}$（区组（block）或横截（transversals））构成的一个系统，每个子集含有 $m$ 个元素并且满足

1．$|Y_j \cap S_i| = 1$；$i = 1, \cdots, m$；$j = 1, \cdots, t^2$；

2．$|Y_j \cap Y_k| \leqslant 1$，$j \neq k$．

在一个横截设计中，任意两个元素 $a \in S_i$ 和 $b \in S_j$，$i \neq j$，同时出现在一个且仅一个区组里．横截设计 $T_0(m, t)$ 的存在性，等价于**正交阵列**（orthogonal array）$\mathrm{OA}(t, m)$ 的存在性．

横截设计被用于区组设计的递归构造（见**区组设计**（block design））．

$T_0(m, t)$ 的 $t$ 个横截的集合称为平行的（parallel），如果这 $t$ 个横截两两不相交．如果一个横截设计 $T_0(m, t)$ 含有 $e$（或更多）个平行集，则记为 $T_e(m, t)$．

横截系的一些基本性质：

a）如果 $T_d(m, s)$ 和 $T_e(m, t)$ 存在，则 $T_{de}(m, st)$ 存在；

b）$T_t(m-1, t)$ 存在，当且仅当 $T_0(m, t)$ 存在．

**参考文献**


[1] Hall, M., Combinatorial theory, Wiley, 1986.

[2] Hanani, H., The existence and construction of balanced incomplete block designs, Ann. Math. Stat., 32(1961), 361 – 386.


В. Е. Тараканов 撰

【补注】 组成设计的有限集 $S_1, \cdots, S_m$ 称为点类（point classes）或点群（point groups）．

存在横截设计 $T_0(m, t)$ 等价于存在 $m-2$ 个 $t$ 阶相互**正交拉丁方**（orthogonal Latin squares）．如果 $T_0(m, t)$ 存在且 $t > 1$，则 $m \leqslant t + 1$．

横截设计（及其推广具有空缺的**横截设计**[A2]）的递归构造和存在性的结果见[A1]－[A3]．

关于横截设计的递归构造的重要结果之一（归功于 R. M. Wilson（[A4]），亦见[A1]）如下：

设 $D$ 是具有点类 $P_1, \cdots, P_k$ 和 $Q_1, \cdots, Q_m$ 的 $T_0(k+m, s)$，$T$ 是 $Q_1 \cup \cdots \cup Q_m$ 的 $t$ 元子集，并且令 $t_i = |T \cap Q_i|$（$i = 1, \cdots, m$），并对 $D$ 的每一个区组 $B$，令 $u_B = |B \cap T|$．假设 $T_0(k, t_i)$ 对 $i = 1, \cdots, m$ 存在，并且对 $D$ 的每一个区组 $B$，$T_{u_B}(k, n + u_B)$ 存在，则 $T_0(k, ns + t)$ 也存在．

横截设计（及其对偶结构，网（net））也具有相当重要的几何和代数意义．例如，一个 $T_0(s+1, s)$ 等价于一个 $s$ 阶的仿射或**射影平面**，并且一个 $T_0(3, s)$ 在根本上和一个 $s$ 阶的**拟群**（quasi-group）相同．因此，横截设计的几何和代数性质（包括对其自同构群的研究）相当有意义，见[A4]．

**参考文献**


[A1] Beth, Th., Jungnickel, D. and Lenz, H., Design theory, Cambridge Univ. Press, 1986.

[A2] Brouwer, A. E., Recursive constructions of mutually orthogonal Latin squares, Ann. Discr. Math., 46(1991), 149 – 168.

[A3] Jungnickel, D., Latin squares, their geometries and their groups: a survey, in D. Ray-Chaudhuri (ed): Coding theory and Design theory, IMA Vol. Math.

and its Appl.. Vol. 21, Springer. 1990, 166 -- 225.

[A4] Wilson. R. M., Concerning the number of mutually orthogonal Latin squares, Discr. Math.. **9** (1974). 181 − 198.

[A5] Hanani, H., Balanced incomplete block designs and related designs, Discrete Math., **11** (1975), 255 − 369.

刘振宏 译　李　乔 校

**横截性 [transversality; трансверсальность]**

对**一般位置** (general position) 的某些思想的一般名字 (也见**横截映射** (transversal mapping)); 线性代数、微分和几何拓扑学中的一个概念.

a) 有限维向量空间 $C$ 的两个向量子空间 $A$, $B$ 称为彼此横截的 (transversal), 如果 $A$ 和 $B$ 生成 $C$, 即如果

$$\dim(A\cap B)+\dim C=\dim A+\dim B.$$

b) 在可微分状态下, 流形 $N$ 的两个子流形 $L$, $M$ 称为在点 $x\in L\cap M$ 处横截的, 如果在该点的切空间 $T_xL$, $T_xM$ 生成了 $T_xN$. 几何上 (对狭义意义下相无边的子流形), 这意味着可以将局部坐标 $x_1,\cdots,x_n$ 引进到 $x$ 在 $N$ 中的某个邻域 $U$ 中, 按照它, $L\cap U$ 和 $M\cap U$ 被表示为 $\mathbf{R}^n$ 的横截向量子空间.

映射 $f:L\to N$ 在点 $x\in f^{-1}(M)$ 处横截于子流形 (transversal to a submanifold) $M\subset N$ (见**横截映射** (transversal mapping)), 如果 $T_xL$ 在 $f$ 的微分下的象在 $T_{f(x)}N$ 中横截于 $T_{f(x)}M$. 两个映射 $f:L\to N$ 和 $g:M\to N$ 在点 $(x,y)\in L\times M$ 是相互横截的 (transversal to each other) (其中 $f(x)=g(y)$), 如果 $T_xL$ 和 $T_yM$ 的象生成 $T_{f(x)}N$. 后两个定义也可从几何上重述 ([1]). 称 $L$ 横截于 $M$, $f$ 横截于 $M$ (在旧的专有名词中, $f$ 沿 $M$ 是 $t$ 正则的), $f$ 横截于 $g$, 如果相应的横截性在所有可能论及的点都成立. 这些概念, 容易相互导出. 例如 $L$ 和 $M$ 的横截性等价于 $L$ 和 $M$ 在 $N$ 中的恒同嵌入的横截性. 共用记号 $L\pitchfork_x M$, $f\pitchfork M$, 等等.

关于带边流形的横截性, 有时需要用到某些加强条件才成立 (见 [3]). 横截性也引伸到无限维的情形 (见 [1], [2]).

在所有这些情形中, 横截性的作用联系到"一般性"和联系到交 $L\cap M$ 的"好"性质, 原象 $f^{-1}(M)$ 和类似的对象 (它形变到相同的"好"对象, 如果在原对象的形变下横截性被保留) (见 [4]).

c) 在分片线性和拓扑的状况中, 子流形的横截性类似于 b) 中的几何定义 (特别普遍的是对余维数子流形的分片线性的描述, 见 [5]). 一般地, 得不到具有 b) 中横截性的性质的完全的模拟 (见 [6], [8]), 因此, 横截性的进一步加以限制的修改已经提出 (见 [7], [9]).

最后, 流形的范畴被说成有横截性的性质, 如果其中的任何映射可由**横截映射** (transversal mapping) 逼近.

**参考文献**

[1] Lang, S., Introduction to differentiable manifolds, Interscience, 1967.

[2] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Differentiable and analytic manifolds, Addison-Wesley, 1966 (译自法文).

[3] Рохлин, В. А., Фукс, Д. Б., Начальный курс топологии. Геометрические главы, М., 1977 (英译本: Rokhlin, V. A. and Fuks, D. B., Beginner's course in topology Geometric chapters, Springer, 1984).

[4] Hirsch, M., Differential topology, Springer, 1976.

[5] Rourke, C. P. and Sanderson, B. J., Introduction to piecewise-linear topology, Springer, 1972.

[6] Lickorish, W. and Rourke, C. P., A counter-example to the three balls problem, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **66** (1969), 13 − 16.

[7] Rourke, C. P. and Sanderson, B. J., Block bundles Ⅱ, transversality, *Ann. of Math.*, **87** (1968), 256 − 278.

[8] Hudson, J. F. P., On transversality, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **66** (1969), 17 − 20.

[9] Mann, A., La transversalité topologique, *Ann. of Math.*, **106** (1977), 2, 269 − 293.

Д. В. Аносов 撰　徐森林 译

**横截性条件 [transversality condition; трансверсальности условие]**

具有可变端点的变分问题中最优性的一个必要条件. **Euler 方程** (Euler equation) 的解依赖的任意常数借助于横截性条件而被决定. 横截性条件是泛函的一阶变分为零的一个必要条件.

对具有可变端点的变分法中最简单的问题,

$$J(x)=\int_{t_1}^{t_2}F(t,x,\dot{x})dt,$$

其中点

$$(t_1,x(t_1),t_2,x(t_2))=(t_1,x_1,t_2,x_2)$$

是不固定的但可属于某一确定的流形, 横截性条件可写成关系式

$$[(F-\dot{x}F_{\dot{x}})dt+F_{\dot{x}}dx]_1^2=0 \qquad (1)$$

的形式, 对边界条件流形的切向微分 $dt_1$, $dx_1$, $dt_2$, $dx_2$ 的任何值它必须被满足.

如果极值曲线的左的和右的端点可以沿着指定曲线 $x=\varphi_1(t)$ 和 $x=\varphi_2(t)$ 移动, 则由于

$$dx_1 = \dot{\varphi}_1(t)dt_1, \quad dx_2 = \dot{\varphi}_2(t)dt_2$$

且变分 $dt_1$ 和 $dt_2$ 是独立的，(1) 蕴涵

$$\left.\begin{aligned} &F(t_1, x_1, \dot{x}_1) + \\ &+[\dot{\varphi}_1(t_1) - \dot{x}_1]F_{\dot{x}}(t_1, x_1, \dot{x}_1) = 0, \\ &F(t_2, x_2, \dot{x}_2) + \\ &+[\dot{\varphi}_2(t_2) - \dot{x}_2]F_{\dot{x}}(t_2, x_2, \dot{x}_2) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

如果左和右的端点沿着它移动的曲线的方程由隐式 $\omega_1(t, x) = 0$ 和 $\omega_2(t, x) = 0$ 给出，则横截性条件 (1) 可写成形式

$$\left.\begin{aligned} \frac{F - \dot{x}F_{\dot{x}}}{\omega_{1t}} &= \frac{F_{\dot{x}}}{\omega_{1x}} \quad \text{在左端点}, \\ \frac{F - \dot{x}F_{\dot{x}}}{\omega_{2t}} &= \frac{F_{\dot{x}}}{\omega_{2x}} \quad \text{在右端点}. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

如果在一个端点上没有约束，则在此端点，由于相应的切微分 $dt$ 和 $dx$ 的独立性，横截性条件取形式

$$F = 0, \quad F_{\dot{x}} = 0. \quad (4)$$

关系式(2)，(3)，(4) 称为横截性条件.

以下，在对条件极值的变分问题的更一般情况下，给出横截性条件．考虑 **Bolza 问题** (Bolza problem)，即在出现等式型的微分约束

$$\varphi(t, x, \dot{x}) = 0, \quad \varphi: \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m, \quad m < n, \quad (5)$$

以及边界条件

$$\psi(t_1, x(t_1), t_2, x(t_2)) = 0, \quad (6)$$

$$\psi: \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p, \quad p \leqslant 2n + 2$$

时，使泛函

$$\left.\begin{aligned} &J(x) = \int_{t_1}^{t_2} f(t, x, \dot{x})dt + g(t_1, x(t_1), \\ &\qquad t_2, x(t_2)), \\ &f: \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, \quad g: \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \\ &\qquad \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

极小化．在这问题中当 $p < 2n + 2$ 时，极值曲线的端点 $(t_1, x_1^1, \cdots, x_1^n)$ 和 $(t_2, x_2^1, \cdots, x_2^n)$ 是不固定的，可沿给定超曲面 $\psi_\mu = 0$ $(\mu = 1, \cdots, p)$ 移动.

按照横截性条件，存在常数 (Lagrange 乘子 (Lagrange multipliers)) $e_\mu$，$\mu = 1, \cdots, p$，以及乘子 $\lambda_0$ 和 $\lambda_i(t)$，$i = 1, \cdots, m$，使得除了边界条件 (6) 以外，对由 (6) 定义的流形的切微分

$$dt_1, \ dx_1^i, \ dt_2, \ dx_2^i, \ i = 1, \cdots, n \quad (8)$$

的任何选取，以下关系式在极值曲线的端点成立:

$$\left[\left(F - \sum_{i=1}^{n} \dot{x}^i F_{\dot{x}^i}\right)dt + \sum_{i=1}^{n} F_{\dot{x}^i} dx^i\right]_1^2 +$$

$$+ \lambda_0 dg + \sum_{\mu=1}^{p} e_\mu d\psi_\mu = 0. \quad (9)$$

在 (9) 中，$F$ 指表达式

$$F = F(t, x, \dot{x}, \lambda) = \lambda_0 f(t, x, \dot{x}) + $$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(t)\varphi_i(t, x, \dot{x}). \quad (10)$$

在大多数实际问题中，由设 $\lambda_0 = 1$ 使 Lagrange 乘子规范化 (值 $\lambda_0 = 0$ 对应于非规范的情形，见 [1])．乘子 $\lambda_i(t)$ $(i = 1, \cdots, m)$ 由 Euler 微分方程组

$$F_{x^i} - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}^i} = 0, \quad i = 1, \cdots, n, \quad (11)$$

和 $m$ 个形如 (5) 的方程

$$\varphi_i(t, x, \dot{x}) = 0, \quad i = 1, \cdots, m,$$

的解与 $x^i(t)$ $(i = 1, \cdots, n)$ 一起被确定．这个含有 $n + m$ 个未知函数 $x^i(t)$，$i = 1, \cdots, n$，和 $\lambda_i(t)$，$i = 1, \cdots, m$ 的 $n$ 个二阶微分方程和 $m$ 个一阶微分方程的方程组的通解依赖于 $2n$ 个任意常数．事实上，如果令

$$\dot{x}^i = u_i, \quad i = 1, \cdots, n, \quad (12)$$

则得到 $2n$ 个一阶常微分方程的组 (11)，(12) 和 $m$ 个有限关系式

$$\varphi_i(t, x, u) = 0, \quad i = 1, \cdots, m. \quad (13)$$

利用 (13) 函数 $u_i$ 中有 $m$ 个可用其他的函数来表示 (在相应的函数行列式不为零的假设下)，再将这些代入 (11)，(12)，得到一个有 $2n$ 个未知函数的 $2n$ 个一阶微分方程的组，其通解依赖于 $2n$ 个任意常数．与值 $t_1$ 和 $t_2$ 一起，给出了 $2n + 2$ 个任意常数，决定变分问题 (5) − (7) 的解．然后借助于横截件条件，得到同样个数的关系式使得能够确定这些任意常数.

在最优控制问题和在 **Понтрягин 最大值原理** (Pontryagin maximum principle) 中，必要的横截性条件可类似于 (9) 写出，只是取代

$$F - \sum_{i=1}^{n} \dot{x}^i F_{\dot{x}^i} \text{ 和 } F_{\dot{x}^i},$$

必须在 (9) 中代入 Hamilton 函数 $H$，取相反符号，

以及共轭变量 $\psi_t$.

为了得出由解带可变端点的变分问题而化成的一个封闭边值问题，必要的横截性条件给出了不足的边界条件.

**参考文献**

[1] Bliss, G. A., Lectures on the calculus of variations, Chicago Univ. Press, 1947.

[2] Лаврентьев, М. А., Люстерник, Л. А., Курс вариационного исчисления, 2 изд., М.-Л., 1950 (中译本: М. А. 拉弗林契叶夫, Л. А. 留斯切尔涅克, 变分学教程, 高等教育出版社, 1955).

И. Б. Ваннярский 撰

【补注】

**参考文献**

[A1] Cesari, L., Optimization-theory and Applications. Problems with ordinary differential equations, Springer, 1983.

[A2] Berkovitz, L. D., Optimal control theory, Springer, 1974.

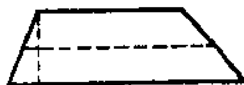
[A3] Elsgolc, L. E., Calculus of variations, Pergamon, 1961 (译自俄文) (中译本: Л. Е. 艾利斯哥尔兹, 变分法, 高等教育出版社, 1960).

[A4] Fleming, W. H. and Rishel, R. H., Determinstic and stochastic optimal control, Springer, 1975.

葛显良 译 吴绍平 校

**梯形** [**trapezium** 或 trapezoid; **трапеция**]

一个凸四边形（见**完全四边形**（quadrangle, complete)），其中两边平行，另两边不平行（见图）. 平行的两边称为梯形的底（bases），不平行的两边称为它的腰（lateral sides）；连接梯形两腰中点的线段称为中线（median line）；梯形的中线平行于两底，并且等于两底之和的一半. 梯形的面积等于梯形中线长度与其高之积，或者等于两对角线之积乘以对角线夹角正弦的二分之一. 两腰相等的梯形称为等腰梯形（equilateral trapezium）.



БСЭ-3 杜小杨 译

**梯形公式** [**trapezium formula**; **трапеций формула**]

**Newton-Cotes** 求积公式（Newton-Cotes quadrature formula）的特殊情况，即取两个结点的情况:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]. \qquad (1)$$

如果被积函数与线性函数差别很大，则公式（1）不是很精确的. 在这种情况，将区间 $[a,b]$ 分成 $n$ 个子区间 $[x_i, x_{i+1}]$, $i=0,\cdots,n-1$, 其步长为 $h=(b-a)/n$, 而且用梯形公式

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \cong \frac{h}{2}[f(x_i)+f(x_{i+1})]$$

计算 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的积分，然后将这个近似方程的左边和右边从 0 到 $n-1$ 对 $i$ 求和，则可得复合梯形公式:

$$\int_a^b f(x)dx \cong h\left[\frac{f(a)}{2}+f(x_1)+\cdots+\right.$$
$$\left.+f(x_{n-1})+\frac{f(b)}{2}\right], \qquad (2)$$

其中 $x_j=a+jh$, $j=0,\cdots,n$, 求积公式（2）也称为梯形公式（不加"合成"这个词）. 求积公式（2）以及（1）的代数精度等于 1. 对三角函数

$$\cos\frac{2\pi}{b-a}kx,\ \sin\frac{2\pi}{b-a}kx,\ k=0,\cdots,n-1,$$

求积公式（2）是精确的. 在 $b-a=2\pi$ 时，对不超过 $n-1$ 阶的所有三角多项式，公式（2）都是精确的；而且，它的三角精度等于 $n-1$.

如果被积函数 $f$ 在 $[a,b]$ 上二次连续可微，则求积公式（2）的误差 $R(f)$，即积分和求积和之差由公式

$$R(f)=-\frac{b-a}{12}h^2f''(\xi)$$

给出，其中 $\xi$ 是 $[a,b]$ 中的一个点.

И. П. Мысовских 撰

【补注】 完全公式

$$\int_a^b f(x)dx = h\left[\frac{f(a)}{2}+f(x_1)+\cdots+\right.$$
$$\left.+f(x_{n-1})+\frac{f(b)}{2}\right]-\frac{b-a}{12}h^2f''(\xi)$$

常常称为梯形法则（trapezoidal rule）.

**参考文献**

[A1] Hildebrand, F. B., Introduction to numerical analysis, Dover, reprint, 1974, 95 ff.

[A2] Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, W. A. and Vetterling, W. T., Numerical recipes, Cambridge Univ. Press, 1986, 105 ff.

袁国兴 张宝琳 译

**行进管法** [**travelling-tube method**; **блуждающей трубки метод**]

求在相坐标和控制函数上具有约束的**最优控制**（optimal control）问题的数值解的一种直接方法. 原来的最优控制问题经离散化（关于时间 $t$ 和相向量 $x$）可简化成形如

$$I(x_0, \cdots, x_N) = \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_i(x_i, x_{i+1})$$

的一个函数的极小化，其中 $x_i$ 是由方程 $t = t_i$ 给出的 $(t, x)$ 空间中的超平面的结点上向量 $x$ 的值．关于 $t$ 和 $x$ 的离散化由给定步长 $\Delta t$ 和 $\Delta x$ 产生．对每一个向量 $(x_0, \cdots, x_N)$ 的集合对应一个通过这些结点的折线，它是原最优控制问题的轨道 $x(t)$ 的逼近表示．这折线的长度 $I(x_0, \cdots, x_N)$ 是各段（广义）长度 $\varphi_i(x_i, x_{i+1})$ 之和．有最短长度的折线是借助于递归关系

$$l_s(i+1) = \min_k (l_k(i) + l_{ks}(i))$$

找到的（见**变分学的数值方法**（variational calculus, numerical methods of））．

在这样得到的图象上寻找总体极小值需要大的运算存储和长的计算时间（特别为得到要求精度的解时与 $\Delta x$ 和 $\Delta t$ 的减小相关）．

如果放弃求总体极值的企图，则所需存储量和运算次数可相当地减少．这时所用方法具有逐次逼近法的特征：最优轨道不是在整个图象上找，而在由包含初始折线的一个"管"中给定的子图象上找；这是初始逼近．该管的每一横截面包含给定数量的结点．被找到的折线取作逐次逼近，此后计算在一个新的子图象上重复．

估算表明在行进管法中运算次数线性地随着关于 $x$ 的网格结点数（随着步长 $\Delta x$ 的减小）的增加而增加，而总体选取法中其增加是按平方的．

行进管法的一个特殊情形是**局部变分方法**（local variations, method of），其中每个横截面中的结点数是极小的（且等于二）．

**参考文献**

[1] Моисеев, Н. Н., Элементы теории оптимальных систем, М., 1975.

И. Б. Вапнярский, И. А. Ватель 撰　葛显良 译　吴绍平 校

## 行进波法 [travelling-wave method; бегущей волны метод]

**变分学**（variational calculus）问题的数值解的一种直接方法．它是用以解小维数而在相坐标和控制函数上具有约束的**最优控制**（optimal control）问题．在该泛函和微分方程组离散化后，原问题化成泛函

$$I = \sum_{k=0}^{N-1} F^0(x_k, x_{k+1}, u_k, t_k, t_{k+1}), \quad (1)$$

$$x_{k+1} - x_k = \tau F(x_k, x_{k+1}, u_k, t_k, t_{k+1}), \quad (2)$$

$$k = 0, \cdots, N-1,$$

$$(x_k, u_k) \in G_k,\ k = 0, \cdots, N \quad (3)$$

的极小化．这里 $x_k$，$u_k$ 分别是在结点 $t_k$ 的相坐标和控制的向量（分别地具有维数 $n$ 和 $m$），$u_k$ 在每一区间 $(t_k, t_{k-1})$ 上看成常量，$G_k$ 是在一个 $(n+m)$ 维空间中的给定区域（$G_0$ 和 $G_N$ 描述边界条件），且 $\tau = (T - t_0)/N$ 是初始区间 $T - t_0$ 的细分步长．

行进波法用于 $n \geq m$ 的情形，这情形在实际问题中是典型的，且由于确定控制函数中的困难工作对它用基于空间状态变分的其他方法是困难的．

给定的满足（2）和（3）的初始逼近 $(x_0^0, \cdots, x_N^0, u_0^0, \cdots, u_{N-1}^0)$，在 $t_k$ 和 $t_{k+p}$ 之间每一段 $(x_k, x_{k+p}$ 是给定的）上在准则（1）的意义下被改进，且每次从该轨道的起点到其终点这一段移动一个结点然后再重复（因此"行进波"这名称）．

对每一个波得到一个非线性规划问题：具有 $p$ 个（2）型约束下且在条件（3）下极小化

$$\Delta I_k = \sum_{l=k}^{k+p-1} F^0(x_l, x_{l+1}, u_l, t_l, t_{l+1}). \quad (4)$$

在行进波法的实际实现中并不试图去解决问题（4）；取而代之，对 $r$ 个自由参数中的每一个，给出增量 $\pm h_i$，且如果 $\Delta I_k$（方程（4）中）减小，条件（3）被满足，则得到一个新的轨道．如果该轨道在该波的一个完全周期中不改变，则 $h_i$ 被它的一个分数取代．

如果 $m = n$，行进波法就与局部变分法一致．

**参考文献**

[1] Моисеев, Н. Н., Элементы теории оптимальных систем, М., 1975.
[2] Ватель, И. А., Кононенко, А. Ф., 《Ж. вычисл. матем. и матем. физ》, 10 (1970), 1, 67－73.
[3] Ватель, И. А., Кононенко, А. Ф., Алгоритмы и программы (Информационный бюллетень), М., 1972, No. 2, 7.

И. Б. Вапнярский, И. А. Ватель 撰　葛显良 译　吴绍平 校

## 树 [tree; дерево]，图论中的

一个连通无向不含圈的图（graph）$G$．一棵树没有重边也没有环．因为它们是最简单的连通图，所以在研究图论中各种问题时，树就成为恰当的模型．$n$ 个顶点的树包含 $n-1$ 条边．$n$ 个标号顶点的不同树的个数是 $n^{n-2}$．具有一个特殊顶点的树称为**有根树**（rooted tree）．

具有 $n$ 个顶点的不同构有根树的数目 $T_n$ 的枚举级数

$$T(x)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n x^n$$

满足函数方程

$$T(x)=x\exp\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}T(x^r).$$

具有 $n$ 个顶点的不同构树的数目 $t_n$ 的枚举级数

$$t(x)=\sum_{n=1}^{\infty}t_n x^n$$

可以用有根树的枚举级数表示为

$$t(x)=T(x)-\frac{T^2(x)-T(x^2)}{2}.$$

对于 $n$ 的具体数值，$T(x)$ 和 $t(x)$ 的函数方程能得到 $T_n$ 和 $t_n$ 的值（例如见[1]）.

已经证明，当 $n\to\infty$ 时，

$$t_n\sim C\frac{\alpha^n}{n^{5/2}}.$$

其中 $C=0.534948\cdots$，$\alpha=2.95576\cdots$([2])．一类特殊类型树的枚举问题产生于化学中同分异构性的研究．

用 0，1 序列可以相当简单地给树编码．例如，考虑一棵树 $D$ 按常规（边不交地）嵌入到平面上（见**图的嵌入**（graph imbedding））．从任一顶点出发，沿 $D$ 的边前进，到达每一顶点后转向其右面的第一条边，当到达树的端点再退回来．在沿某边移动时，若这条边是第一次通过，则记下 0；若是第二次通过（沿相反方向），则记下 1．如果 $m$ 是树的边数，那么进行 $2m$ 步后就回到了出发点，其间每边经过两次．这样得到的长度为 $2m$ 的 0，1 序列（树的码），不仅能用来唯一地重构树 $D$ 自身，并且也给出它的平面嵌入．一棵特定的树对应于若干不同的码．由编码的方式可得下述估计：$t_n<T_n<4^n$．

一棵 $n$ 个顶点的树 $G$，可以由它的 $n-1$ 个顶点的子图 $G-v$ 的集合（在同构意义下）唯一地复原出来，其中 $n-1$ 个顶点的子图 $G-v$ 是由 $G$ 去掉一个顶点 $v$ 而得到．

一棵树也能由它的（1 度）端点之间的距离（最短路长）唯一地确定．

一个图的生成树（spanning tree of a graph）是包含其所有顶点的子图，而该子图本身是一棵树．任意一个无环无重边的连通图的生成树的个数可计算如下：设 $M$ 是将 $G$ 的邻接矩阵中每一元素变为其相反数，然后用 $v_i$ 的度代替主对角线上的第 $i$ 个元素而得到的矩阵，那么 $M$ 的主对角线上每一元素的余子式都相等，并且等于 $G$ 的生成树的个数．例如生成树被用于在电路中求独立圈这样的问题．

在每边赋权的连通图中，求其边权之和最小的生成树问题在应用上具有重要意义．例如，在设计通信网络时就出现这样的问题．[3]，[4]给出了求解最短生成树问题（shortest spanning tree problem）的算法．从顶点 $v_0$ 长出的一棵树是对有向图而言的，它是（不计定向的）一棵根为 $v_0$ 的有根树，其中对每个顶点 $v_i$，连接 $v_0$ 到 $v_i$ 的唯一的链是 $v_0$ 到 $v_i$ 的有向路．

这类树被用于诸如确定性函数的描述、信息搜索系统中的信息表示等问题．

森林的概念是树的概念的推广．一个森林（forest）就是一个无圈（但不一定连通的）图．

**参考文献**


[1] Harary, F., Graph Theory, Addison-Wesley, 1969.

[2] Otter, R., The number of trees, *Ann. of Math.*, **49** (1948), 3, 583－599.

[3] Prim, R. C., Shortest connection networks and some generalizations, *Bell Systems Techn. J.*, **36** (1957), 6, 1389－1401.

[4] Kruskal, J. B., On the shortest spanning subtree of a graph and the travelling salesman problem, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 7 (1956), 48－50.


В. Б. Алексеев 撰

【补注】 一棵有向树（directed tree）就是这样一个有向图，它是以 $r$ 为根的树，使得对每一顶点 $v$，从 $r$ 到 $v$ 有一条有向路．因此除 $r$ 外，每一顶点的入度恰为 1，而 $r$ 的入度为 0 且称为源（source）．另一种等价的定义（反转方向）是，一棵有向树是以 $r$ 为根的树，使得每一个顶点的出度为 1（而 $r$ 的出度为 0 且称为汇（sink））．在文献中这两种定义都有．有时用有根树（rooted tree）这个词表示有向树．

**参考文献**


[A1] Chen, W. K., Applied graph theory, North-Holland, 1971.

[A2] Comtet, L., Advanced combinatorics, Reidel, 1974（译自法文）.

[A3] Goudran, M. and Minoux, M., Graphes et algorithmes, Eyrolles, 1979, Chapt. 4.


【译注】 树的概念和若干性质已推广到拟阵里，而求最小权树等价于求一个拟阵的最小权基（见[B1]），求最小有向树的算法可见[B2]．求最小权有向树可化为求两个拟阵的最小权最大交．

**参考文献**


[B1] Welsh, D. J. A., Matroid theory, Acad. Press, 1976.

[B2] Chu Y. J. and Liu C. H., The shortest arborescence of a directed graph, Sci. Sinica **14** (1965), 1394－1400.

[B3] Tarjan, R. E. Finding Optimum branchings, Networks, 1977, 25－35.


刘振宏 译 李 乔 校

**Trefftz 法 [Trefftz method; Треффца метод]**

解边值问题的一种变分法．假定人们要求解的边值问题是

$$\Delta u = 0,\ u|_S = \varphi, \qquad (*)$$

其中 $S$ 是区域 $\Omega \subset \mathbf{R}^m$ 的边界．问题 (*) 的解就是在满足边界条件 $u|_S = \varphi$ 的所有函数中使泛函

$$J(u) = \int_\Omega (\operatorname{grad} u(x))^2 dx$$

达到极小的函数．Trefftz 法可叙述如下：假定在 $\Omega$ 中给出一个调和函数序列 $w_1, w_2, \cdots$，它们和它们的一阶导数在 $\Omega$ 中平方可和．为寻找形如

$$u_n = \sum_{j=1}^{n} c_j w_j$$

的近似解，可由条件 $J(u_n - u)$ 达极小来确定系数 $c_i$，其中 $u$ 是 (*) 的精确解．这样就得到下面关于 $c_1, \cdots, c_n$ 的方程组：

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \int_S w_j \frac{\partial w_i}{\partial v} dS = \int_S \varphi \frac{\partial w_i}{\partial v} dS,\ i = 1, \cdots, n,$$

其中 $v$ 是 $S$ 的外法向．

Trefftz 法可以推广到各种边值问题（见[2]－[4]）．

这个方法是由 E．Trefftz 提出的（见[1]）．

**参考文献**


[1] Trefftz, E., Ein gegenstück zum ritzschen verfahren, in verhandl. 2er Internat. Kongress, Techn. Mechanik Zurich, 1926, 12－17 Sept., Füssli, 1927, 131－137.

[2] Михлин, С. Г., Вариационные методы в математической физике, 2 изд., М., 1970.

[3] Крылов, В. И., Бобков, В. В., Монастырный, П. И., Вычислительные методы высшей математики, т. 2, Минск, 1975.

[4] Бирман, М. Ш., 《Вестн. ЛГУ. Сер. матем., механ. и астр.》, 13(1956), 3, 69－89.


Г. М. Вайникко 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Rektorys, K., Applicable mathematics, Iliffe, 1969, 1056－1058.


袁国兴 张宝琳 译

**三角组 [triads; триада]**，亦称三联组

四元组 $(X; A, B, x_0)$，其中 $X$ 是**拓扑空间** (topological space)，$A$ 和 $B$ 是 $X$ 的子空间，并且满足 $X = A \cup B$，$x_0 \in A \cap B$．三角组的同伦群 $\pi_n(X; A, B, x_0)$，$n \geqslant 3$（$n = 2$ 时，它仅是一个集合），有定义，并被用于证明同伦切除定理．也有一个正合 Mayer-Vietoris 序列连接空间 $X, A, B, A \cap B$ 的**同调群** (homology group)．　Ю. Б. Рудяк 撰

【补注】 若在空间的三元组 $(X; A, B)$ 中，$A, B$ 是 $X$ 的两个子空间，则定义道路空间 $\Omega(X; A, B)$ 为 $X$ 中起点与终点分别落在 $A$ 和 $B$ 中的所有道路的全体：

$$\Omega(X; A, B) = \{p: [0, 1] \to X: p(0) \in A, p(1) \in B\}.$$

若在 $A \cap B$ 指定一个点 *，* 处的常值道路便指定为 $\Omega(X; A, B)$ 中的基点（也记为 *）．

相对**同伦群** (homotopy group) $\pi_n(X, A, *)$，$* \in A \subset X$，也可定义为 $\pi_n(\Omega(X; A, *), *)$．若 $(X; A, B, *)$ 为三角组，则它的同伦群定义为相对同伦群

$$\pi_n(X; A, B, *) = \pi_{n-1}(\Omega(X; B, *), \Omega(A; A \cap B, *), *).$$

用三元组 $(\Omega(X; B, *), \Omega(A; A \cap B, *), *)$ 的同伦长正合列可得到三角组的（第一个）**同伦正合列** (homotopy sequence of a triad)

$$\cdots \to \pi_{n+1}(X; A, B, *) \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, A \cap B, *) \to$$
$$\cdots \to \pi_n(X, B, *) \to \pi_n(X; A, B, *) \xrightarrow{\partial} \cdots,$$

因此三角组的同伦群在**同伦切除同态** (homotopy excision homomorphism)

$$\pi_n(A, A \cap B, *) \to \pi_n(X, B, *)$$

不是同构时，可以提供新信息．三角组的同伦群也可定义为

$$\pi_n(X; A, B, *) = \pi_{n-1}(\Omega(X; A, B), *).$$

**参考文献**


[A1] Hu, S.-T., Homotopy theory, Acad. Press, 1955, Chapt. V, § 10.

[A2] Gray, B., Homotopy theory. An introduction to algebraic topology, Acad. Press, 1975, p. 88.

[A3] Switzer, R. M., Algebraic topology-homotopy and homology, Springer, 1975, § 6.17.


潘建中 译　沈信耀 校

**三角形 [triangle; треугольник]**，Euclid 平面上的

三个点（顶点）和以这三个点为端点的三条直线段（边）．有时把三角形定义为平面上由三角形的边围成的凸区域（**实心三角形** (solid triangle)）．

在一些不同于 Euclid 平面的流形中也能引入三角形的概念．三角形通常定义为三个点和以这三个点为端点的三条测地线段．例如，**球面几何学** (spherical geometry) 中的球面三角形，以及双曲平面或 Лобачевский 平面上的三角形，都是如此（见**非 Euclid 几何学** (non-Euclidean geometries)）．

**参考文献**


[1] Coxeter, H. S. M. and Greitzer, S. L., Geometry

revisited, Math. Assoc. Amer., 1975.
[2] Coxeter, H. S. M., Introduction to geometry, Wiley, 1969.
[3] Зетель, С. И., Новая геометрия треугольника, 2 изд., М., 1962.
[4] Hadamard, J., Leçons de géométrie élémentaire, Géométrie plane, J. Gabay, reprint, 1990.
[5] Ефремов, Д., Новая геометрия треугольника, Одесса, 1902.

А. Б. Иванов 撰 杜小杨 译

**三角角朒[triangle, defect of a 或 angular defect; дефект треугольника]**

Лобачевский 平面上的三角形内角之和小于两直角所差之量. 三角形的角朒正比于此三角形的面积. 如果一个三角形的所有顶点都在无穷远点处, 则其角朒达到最大值, 此最大值等于两直角.

А. Б. Иванов 撰

【补注】 对于一般负曲率曲面上测地三角形的相应概念包含于 Gauss-Bonnet 公式中(见 **Gauss-Bonnet 定理**(Gauss-Bonnet theorem)).

**球面几何学**(spherical geometry)中的三角形情形相反, 其内角之和大于两直角, 所差之量为球面角盈(spherical excess)或角盈(angular excess).

三角角朒也称双曲角朒(hyperbolic defect).

**参考文献**

[A1] Berger, M., Geometry, II, Springer, 1987, § 19.5 (中译本: M. 贝尔热, 几何, 第二卷, 科学出版社, 1989).
[A2] Coxeter, H. S. M., Introduction to geometry, Wiley, 1969. § 16.5.

沈永欢 译

**三角阵列[triangular array; серий схема]**

同级数序列(sequence of series).

**三角形元[triangular element; треугольный элемент]**

见可三角化元(trigonalizable element).

**三角形群[triangular group; треугольная группа], 可三角化群(triangulable group).**

同超可解 Lie 群(Lie group, supersolvable).

**三角形矩阵[triangular matrix; треугольная матрица]**

主对角线以下(或以上)的所有元素均为零的方阵(见**矩阵**(matrix)). 在第一种情况下, 该矩阵称为上三角形矩阵(upper triangular matrix), 在第二种情况下, 该矩阵称为下三角形矩阵(lower triangular matrix). 一个三角形矩阵的行列式等于它的对角线上所有元素的乘积.

О. А. Иванова 撰

【补注】 一个能使之成为三角形形式的矩阵称为可三角化矩阵(trigonalizable matrix), 见**可三角化元**(trigonalizable element).

任意秩为 $r$ 的 $(n\times n)$ 矩阵 $A$, 如果它的前 $r$ 个顺序的主子式均不为零, 那么 $A$ 可以表成一个下三角形矩阵 $B$ 与一个上三角形矩阵 $C$ 的乘积. ([A1]).

任一实矩阵 $A$ 可以分解为形如 $A=QR$, 其中 $Q$ 是正交矩阵, $R$ 是上三角形矩阵, 称为 $QR$ 分解($QR$-decomposition), 或者分解为形如 $A=QL$, 其中 $Q$ 是正交的, $L$ 是下三角形的, 称为 $QL$ 分解($QL$-decomposition). 这样的分解在数值计算法中起重要作用, ([A2]), ([A3]) (例如对于计算本征值).

如果 $A$ 是非奇异的, 且要求 $R$ 的对角线上的元素均为正数, 那么 $QR$ 分解 $A=QR$ 是唯一的, ([A3]), 且由 Gram-Schmidt 标准正交化过程给出, 见**正交化**(orthogonalization); **岩沢分解**(Iwasawa decomposition).

**参考文献**

[A1] Gantmacher, F. R. [Gantmakher, F. R.], The theory of matrices, Chelsea, reprint, 1959, p. 33ff (译自俄文)(中译本: Ф. Р. 甘特马赫尔, 矩阵论, 高等教育出版社, 1955).
[A2] Young, D. M. and Gregory, R. T., A Surve of numerical mathematics, 2, Addison-Wesley, 1973, p. 921 ff.
[A3] Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A. and Vetterling, W. T., Numerical recipes, Cambridge Univ. Press, 1986, p. 357 ff.

蒋滋梅 译

**三角形数[triangular number; треугольное число]**

见**等差数列**(arithmetic series).

**三角求和法[triangular summation method; треугольный метод суммирования]**

用**三角形矩阵**(triangular matrix)

$$A=\|a_{nk}\|,\ n,k=1,2,\cdots$$

定义的一种**矩阵求和法**(matrix summation method), 三角形矩阵就是当 $k>n$ 时 $a_{nk}=0$ 的矩阵. 三角求和法是**行有限求和法**(row-finite summation method)的一种特殊情形. 三角形矩阵 $A$ 称为正规的(normal), 如果对于所有 $n$, $a_{nn}\neq 0$. 由正规三角形矩阵 $A$ 得到的变换

$$\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}a_{nk}s_k$$

有一个逆

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_{nk}^{-1} \sigma_k,$$

其中 $A^{-1} = \| a_{nk}^{-1} \|$ 是 $A$ 的逆．这个事实可从由正规三角形矩阵所决定的矩阵求和法若干定理的证明中看出．与三角求和法有关的，例如 **Cesàro 求和法**（Cesàro summation methods）及 **Voronoi 求和法**（Voronoi summation method）．

**参考文献**


[1] Hardy, G. H., Divergent series, Clarendon, 1949.

[2] Cooke, R. G., Infinite matrices and sequence spaces, MacMillan, 1950.

[3] Барон, С., Введение в теорию суммируемости рядов, Таллин, 1977.


И. И. Волков 撰　罗嵩龄 译

## 三角剖分［triangulation; триангуляция］

1) 多面体的三角剖分（triangulation of a polyhedron）或直线三角剖分（rectilinear triangulation），是作为几何的**单纯复形**（simplicial complex）$K$ 的空间的多面体（见**抽象多面体**（polyhedron, abstract））的一个表示，即它到闭单形中的一个分解，使得任何两个单形或者不相交或者沿一个公共面相交．多面体的直线三角剖分作为研究它们的主要工具．任何的多面体有三角剖分，它的任何两个三角剖分有共同的重分．

单形 $\sigma$ 在三角剖分 $T$ 中的闭星形（closed star）$\mathrm{St}(\sigma, T)$ 是 $T$ 的包含 $\sigma$ 的单形的并．存在单形 $\sigma \in T$ 的闭星形的表示 —— $\sigma$ 和它的**链环**（link）的并（或统联，见**集合的并**（union of sets））：$\mathrm{St}(\sigma, T) = \sigma^* \mathrm{lk}(\delta, T)$．特别地，一个顶点的星形是它的链环的锥（cone）．如果单形 $\sigma \in T$ 被表示为它的两个面 $\delta$ 和 $\gamma$ 的统联，则 $\mathrm{lk}(\sigma, T) = \mathrm{lk}(\delta, \mathrm{lk}(\gamma, T))$．单形的链环不依赖于 $T$：如果 $\sigma$ 是同一个多面体直线三角剖分 $T_1, T_2$ 中的一个单形，那么，多面体 $|\mathrm{lk}(\sigma, T_1)|$ 和 $|\mathrm{lk}(\sigma, T_2)|$ 是 PL 同胚的．单形 $\sigma \in T$ 的开星形（open star）定义成包含 $\sigma$ 作为一个面的那些单形的内点的并．多面体 $P$ 的三角剖分的顶点的开星形形成 $P$ 的一个开覆盖．覆盖神经（见**集族的神经**（nerve of a family of sets））单纯地同构于三角剖分．多面体 $P_1$ 和 $P_2$ 的两个三角剖分 $T_1$ 和 $T_2$ 是组合等价的，如果它们的某个重分是单纯同构的．为使两个三角剖分 $T_1$ 和 $T_2$ 组合等价，$P_1$ 和 $P_2$ PL 同胚是必要和充分的．一个流形的三角剖分说成是组合的，如果它的顶点的任何一个星形组合等价于一个单形．在此情形中，三角剖分的任何单形的星形也组合等价于一个单形．

如果 $P$ 是多面体 $Q$ 的一个闭子多面体，则 $P$ 的任何一个三角剖分 $K$ 可以扩张成 $Q$ 的某个三角剖分 $L$．这种情形就称几何单纯复形对 $(L, K)$ 三角剖分了偶对 $(Q, P)$．两个单形 $\sigma \in \mathbf{R}^m$，$\delta \in \mathbf{R}^n$ 的直积 $\sigma \times \delta \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$ 的三角剖分可如下构造．三角剖分的顶点是点 $c_{ij} = (a_i b_j)$，$0 \leqslant i \leqslant \dim \sigma$，$0 \leqslant j \leqslant \dim \delta$，其中 $a_i$ 是 $\sigma$ 的顶点，$b_j$ 是 $\delta$ 的顶点．顶点 $c_{i_0 j_0}, \cdots, c_{i_k j_k}$，其中 $i_0 \leqslant \cdots \leqslant i_k$ 张成 $k$ 维单形，当且仅当这些顶点没有一个是重合的以及 $j_0 \leqslant \cdots \leqslant j_k$．两个具有有序顶点的单纯复形的直积的三角剖分可用同样的方法产生．

2) 拓扑空间的三角剖分（triangulation of a topological space）或曲线三角剖分（curvilinear triangulation）是一对 $(K, f)$，其中 $K$ 是几何的单纯复形，$f: |K| \to X$ 是同胚．空间 $X$ 的两个三角剖分 $(K, f)$ 和 $(L, g)$ 相合，如果 $g^{-1} f: |K| \to |L|$ 是一个单纯同构．如果 $\sigma$ 是复形 $K$ 的一个单形，$(K, f)$ 是 $X$ 的一个三角剖分，则赋于同胚 $f|_\sigma: \sigma \to f(\sigma)$ 的空间 $f(\sigma)$ 称为拓扑单形（topological simplex）．一个三角剖分的拓扑空间的拓扑单形的星形和链环是用与在直线三角剖分的情形下同样的方法定义的．如果点 $a \in X$ 是 $X$ 的三角剖分 $(K, f)$ 和 $(L, g)$ 的一个顶点，那么，在这些三角剖分中，它的链环是同伦等价的．

**参考文献**


[1] Александров, П. С., Комбинаторная топология, М.-Л., 1947（英译本：Aleksandrov, P. S., Combinatorial topology, Graylock, Rochester, 1956）.

[2] Рохлин, В. А., Фукс, Д. Б., Начальный курс топологии. Геометрические главы, М., 1977（英译本：Fuks, D. B. and Rokhlin, V. A., Beginner's course in topology, Geometric chapters, Springer, 1981）.


С. В. Матвеев 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Zeeman, E. C., Seminar on combinatorial topology, IHES, 1963.

[A2] Seifert, H. and Threlfall, W., Lehrbuch der Topologie, Chelsea, reprint, 1970.

[A3] Singer, I. M. and Thorpe, J. A., Lecture notes on elementary topology and geometry, Springer, 1967.

[A4] Glaser, L. C., Geometric combinatorial topology, 1–2, V. Nostrand, 1970.


徐森林 译

## Tricomi 方程［Tricomi equation; Трикоми уравнение］

形如

$$y u_{xx} + u_{yy} = 0$$

的微分方程，它是具有两个自变量和一个抛物退化的非特征开区间的二阶椭圆 - 双曲混合型偏微分方程的简单模型．Tricomi 方程对 $y > 0$ 是椭圆的，对 $y < 0$ 是双曲的，且在 $y = 0$ 线上退化为抛物型方程（见[1]）．Tricomi 方程是 Chaplygin 方程（Chaplygin equa-

tion)

$$k(y)u_{xx}+u_{yy}=0$$

的原型，其中 $u=u(x,y)$ 是平面平行定态气流的流函数．$k(y)$ 和 $y$ 是流速的函数，它们在亚音速时为正，在超音速时为负，$x$ 是速度向量的倾角（见[2]，[3]）．

连续介质力学中许多重要问题都可化为 Tricomi 方程的边值问题，特别是带有形成局部亚音速区的混合流动（见[3]，[4]）．

**参考文献**


[1] Tricomi，F．，Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di $2^{o}$ ordine di tip misto，Mem．Lincei，1923，ser．VXIX fasc．Ⅶ，134－247（中译本：F．特里谷米，论二阶混合型线性偏微分方程，科学出版社，1957）．

[2] Чаплыгин，С．А．，О газовых струях，М．-Л．，1949．

[3] Франкль，Ф．И．，Избр．труды по газовой динамике，М．，1973．

[4] Бицадзе，А．В．，Некоторые классы уравнений в частных производных，М．，1981（英译本：Bitsadze，A．V．，Some classes of partial differential equations，Gordon & Breach，1988）． A．М．Нахушев 撰


【补注】 其他参考文献亦见 **Tricomi 问题**（Tricomi problem）和**混合型微分方程**（mixed-type differential equation）．

**参考文献**


[A1] Courant，R．and Hilbert，D．，Methods of mathematical physics．Partial differential equations，2，Interscience，1965（中译本：R．柯朗，D．希尔伯特著，数学物理方法Ⅱ，科学出版社，1977）．


孙利生 译　陆柱家 校

**Tricomi 问题 [Tricomi problem；Трикоми задача]**

有关两个自变量的椭圆－双曲混合型微分方程在特殊形状的开域 Ω 中的解的存在性问题．区域 Ω 可以被一光滑的简单曲线 $AB$ 分解为两个子域 $\Omega_1$ 和 $\Omega_2$ 的并，曲线 $AB$ 的端点 $A$ 和 $B$ 是 $\partial\Omega$ 上不同的点．方程在 $\Omega_1$ 中是椭圆型的，在 $\Omega_2$ 中是双曲型的，且在曲线 $AB$ 上退化为抛物型．边界 $\partial\Omega_1$ 是曲线 $AB$ 和一光滑简单曲线 $\sigma$ 的并，而边界 $\partial\Omega_2$ 则是特征线 $AC$，$BC$ 和曲线 $AB$ 的并．要求的解必须在 $\sigma$ 上和只在特征线 $AC$ 和 $BC$ 之一上取给定值（见**混合型微分方程**（mixed-type differential equation））．

**Tricomi** 方程（Tricomi equation）

$$Tu\equiv yu_{xx}+u_{yy}=0 \tag{1}$$

的 Tricomi 问题是由 F．Tricomi（[1]，[2]）首先提出并研究的．区域 Ω 由具有端点 $A(0,0)$，$B(1,0)$ 的光滑曲线 $\sigma\subset\{(x,y):y>0\}$ 和特征线 $AC$，$BC$：

$$AC:x=\frac{2}{3}(-y)^{3/2}，BC:1-x=\frac{2}{3}(-y)^{3/2}$$

所围．

在关于已给函数的光滑性和解 $u$ 的导数 $u_y$ 在点 $A$ 及点 $B$ 处的指定的限制下，方程（1）的 Tricomi 问题

$$u|_{\sigma}=\varphi，u|_{AC}=\psi \tag{2}$$

可化为求方程（1）的解 $u=u(x,y)$，它在区域 $\Omega'=\Omega\cap\{(x,y):y>0\}$ 中是正则的，且满足边界条件

$$u|_{\sigma}=\varphi, \tag{3}$$

$$u_y(x,0)=\alpha D_{0x}^{2/3}u(x,0)+\psi_1(x)，0\leqslant x\leqslant 1,$$

其中 $\alpha=$ 常数 $>0$，$\psi_1(x)$ 由 $\psi$ 唯一确定，$D_{0x}^{2/3}$ 是（在 Riemann-Liouville 意义下的）2/3 阶分数阶微分算子（fractional differentiation operator）：

$$D_{0x}^{2/3}\tau(x)=\frac{1}{\Gamma(1/3)}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{\tau(t)dt}{(x-t)^{2/3}},$$

$\Gamma(z)$ 是 Euler Γ **函数**（gamma-function）．

解问题（1），（3）化为从某个**奇异积分方程**（singular integral equation）求函数 $v(x)=u_y(x,0)$．在 $\sigma$ 是曲线

$$\sigma_0=\{(x,y):(x-\frac{1}{2})^2+\frac{4}{9}y^3=\frac{1}{4}，y\geqslant 0\}$$

的情形下，这个奇异积分方程具有形式

$$v(x)+\frac{1}{\pi\sqrt{3}}\int_0^1\left(\frac{t}{x}\right)^{2/3}\left(\frac{1}{t-x}+\right.$$

$$\left.-\frac{1}{t+x-2xt}\right)v(t)dt=f(x),$$

其中 $f(x)$ 是用 $\varphi$ 和 $\psi$ 明显地表达的，且积分是理解为在 Cauchy 主值意义下的（见[1]－[4]）．

在 Tricomi 问题解的唯一性和存在性的证明中，除了 Бицадзе 极值原理（见**混合型微分方程**（mixed-type differential equation））和积分方程方法外，还使用了所谓的 $abc$ 方法（$abc$ method），它的本质是对一个具有定义域 $D(L)$ 的已给的二阶微分算子 $L$（例如，$T$）去构造一个一阶**微分算子**

$$l=a(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial}{\partial y}+c(x,y),$$

$$(x,y)\in\Omega,$$

它使得

$$\int_{\Omega}lu\cdot Lu\,dxdy\geqslant C\|u\|^2，对所有\ u\in D(L),$$

其中 $C$ = 常数 $>0$, $\|\cdot\|$ 是某个范(见[5]).

Tricomi 问题已被同时推广到具有抛物退化曲线的混合型微分方程情形(见[6])和双曲-抛物混合型方程情形(见[7]).

**参考文献**


[1] Tricomi, F., Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine di tip misto, *Mem. Lincei*, 1923, ser VXIX fasc. Ⅶ, 134 - 247 (中译本: F. 特里谷米, 论二阶混合型线性偏微分方程, 科学出版社, 1957).

[2] Tricomi, F., Equazioni a derivate parziale, Cremoneze, 1957.

[3] Бицадзе, А. В., К проблеме уравнений смешанного типа, М., 1953 (中译本: A. B. 比察捷, 混合型微分方程, 科学出版社, 1955).

[4] Бицадзе, А. В., Уравнения смешанного типа, М. 1959 (英译本: Bitsadze, A. V., Equations of the mixed type, Pergamon, 1964).

[5] Bers. L., Mathematical aspects of subsonic and transonic gas dynamics, Wiley, 1958.

[6] Нахушев, А. М., 《Докл АН СССР》, **170** (1966), 38 - 40.

[7] Джураев, Т. Д., Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов, Ташкент, 1979.


A. M. Нахушев 撰

【补注】 S. Agmon ([A5]) 利用泛函分析方法研究了更一般的方程. R. J. P. Groothuizen ([A2]) 利用了 Fourier 积分算子.

其他的参考文献亦见**混合型微分方程**(mixed-type differential equation).

**参考文献**


[A1] Garabedian, P. R., Partial differential equations, Wiley, 1964.

[A2] Groothuizen, R. J. P., Mixed elliptic hyperbolic partial differential operators: a case study in Fourier integral operators, Free University Amsterdam, 1985, Thesis.

[A3] Smirnov, M. M., Equations of mixed type, Amer. Math. Soc., 1978 (译自俄文).

[A4] Gramtcheff, T. V., An application of Airy functions to the Tricomi problem, *Math. Nachr.*, **102** (1981), 169 - 181.

[A5] Agmon, S., Boundary value problems for equations of mixed type, in G. Sansone (ed.): Convegno Internaz. Equazioni Lineari alle Derivati Parziali (Trieste, 1954), Cremonese, 1955, 65 - 68.


孙和生 译 陆柱家 校

**可三角化元** [**trigonalizable element; треугольный элемент**], 三角形元 (triangular element)

1) 域 $k$ 上有限维向量空间 $V$ 的自同态代数 End $V$ 的一个可三角化元, 是其一切本征值都属于 $k$ 的元素 $X\in \mathrm{End}\, V$. 如果 $k$ 是代数闭的, 则 End $V$ 的每一个元素都是可三角化的. 对于一个可三角化元 $X$ (并且只对于这样的元素)来说, 在 $V$ 中存在一个基, 自同态 $X$ 关于这个基的矩阵是三角形的(或者, 同样的说法是, 在 $V$ 中存在一个对 $X$ 不变的完全旗). 一个可三角化元在 $k$ 上有一个 **Jordan 分解** (Jordan decomposition). End $V$ 中可三角化元的概念在 $V$ 是无限维的情形下有若干推广(见[2]).

2) 域 $k$ 上有限维代数 $A$ 的一个可三角化元 $a\in A$ 是这样一个元素, 用 $a$ 右乘(或左乘, 视所考虑的情形而定)算子是代数 $\mathrm{End}_k A$ 内一个可三角化元. 如果 $A$ 同构于域 $k$ 上某一有限维向量空间 $V$ 上自同态代数 End $V$, 则这两个(形式上是不同的)定义归结为同一概念.

在 Lie 代数里, 一个元素 $x\in A$ 可三角化, 意味着自同态 $\mathrm{ad}_x$ 可三角化(这里 $\mathrm{ad}_x(y)=[x,y]$). 一般来说, 一个 Lie 代数里所有可三角化元的集合对于加法和换位运算不是封闭的(例如, 对于迹为 0 的 2 阶实矩阵所构成的单 Lie 代数 $\mathfrak{gl}(2, \mathbf{R})$). 然而, 在一个可解 Lie 代数 $A$ 的情形下, 这个集合甚至还是 $A$ 的一个特征理想.

3) 在一个连通有限维 Lie 群 $G$ 内, 一个可三角化元 $g\in G$ 指的是, $\mathrm{Ad}_g$ 是 End $\mathfrak{g}$ 内的可三角化元(这里 $\mathrm{Ad}: G\to \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ 是 Lie 群 $G$ 在它的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的自同构群 $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}\subset \mathrm{End}\,\mathfrak{g}$ 内的伴随表示). 如果 $\exp: \mathfrak{g}\to G$ 是指数映射而 $X\in\mathfrak{g}$ 是一个可三角化元(在 2) 的意义下), 则 $\exp(X)$ 是 $G$ 的一个可三角化元. 反过来一般不成立.

Lie 代数和 Lie 群, 如果其中所有元素都是可三角化的, 就分别称为可三角化代数和可三角化群. 对于超可解 Lie 代数也有相应的概念(见**超可解 Lie 代数**(Lie algebra, supersolvable); **超可解 Lie 群**(Lie group, supersolvable)).

**参考文献**


[1] Borel, A., Linear algebraic groups, Second enlarged ed., Springer, 1991.

[2] Плоткин, Б. И., Группы автоморфизмов алгебраических систем, М., 1966 (英译本: Plotkin, B. I., Groups of automorphisms of algebraic systems, Wolters-Noordhoff, 1972).

[3] Постников, М. М., Линейная алгебра и дифференциальная геометрия, М., 1979.


В. В. Горбацевич 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Bourbaki, N., Elements of mathematics, Lie groups and Lie algebras, Addison-Wesley, 1975 (译自法文).


郝钢新 译

**三角函数 [trigonometric functions; тригонометрические функции]**

一类初等函数，包括正弦、余弦、正切、余切、正割、余割；它们分别记为：$\sin x$, $\cos x$, $\tan x$（或 $\operatorname{tg} x$），$\cot x$（或 $\operatorname{ctg} x$），$\sec x$, $\csc x$（或 $\operatorname{cosec} x$）.

**实变量的三角函数**．设 $\alpha$ 是一个实数，而 $A=(x_\alpha, y_\alpha)$ 是单位圆 $x^2+y^2=1$ 上起点为 $B=(1,0)$，长度为 $|\alpha|$ 的弧的终点（见图 1）．如果 $\alpha\geqslant 0$，则从 $B$ 到 $A$ 的弧 $\widehat{BA}$ 取反时针方向；如果 $\alpha<0$，则 $\widehat{BA}$ 取顺时针方向；如果 $\alpha=0$，则 $A=B$．例如，如果 $\alpha=(-7\pi)/2$，则 $A=(0,1)$.

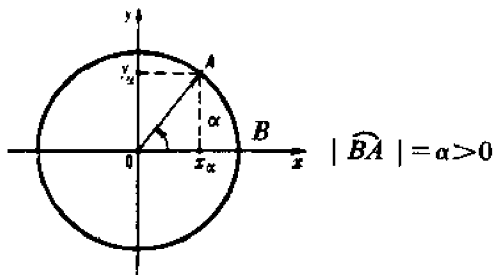



图 1

基本三角函数正弦和余弦在 $\alpha$ 处由公式

$$\sin\alpha = y_\alpha,\ \cos\alpha = x_\alpha$$

来定义．其余的三角函数可以由公式

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha},\ \csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}$$

来定义.

所有的三角函数都是周期的．三角函数的图形如图 2 所示．

三角函数的主要性质：定义域、值域、奇偶性、单调区间，在下表中给出．

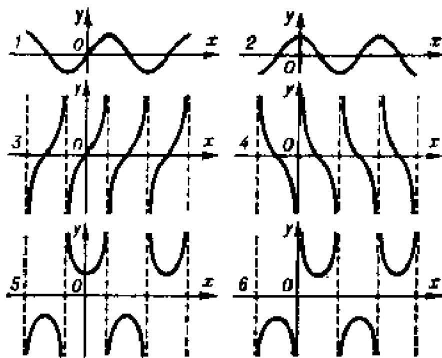



图 2

每个三角函数在其定义域的每一点上都是连续的、无限可微的；三角函数的导数是

$$(\sin x)'=\cos x,\ (\cos x)'=-\sin x,$$

$$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x},\ (\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

三角函数的积分是

$$\int \sin x\,dx=-\cos x+C,\ \int\cos x\,dx=\sin x+C,$$

$$\int\tan x\,dx=-\ln|\cos x|+C,$$

$$\int\cot x\,dx=\ln|\sin x|+C.$$

所有的三角函数都具有幂级数展开式：

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+$$

$$+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,\ |x|<\infty;$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+$$

| 函数 | 定义域 | 值域 | 奇偶性 | 单调区间 |
|---|---|---|---|---|
| $\sin x$ | $-\infty<x<+\infty$ | $[-1,+1]$ | 奇 | 当 $x\in((4n-1)\pi/2,(4n+1)\pi/2)$ 时增加<br>当 $x\in((4n+1)\pi/2,(4n+3)\pi/2)$ 时减小 |
| $\cos x$ | $-\infty<x<+\infty$ | $[-1,+1]$ | 偶 | 当 $x\in((2n-1)\pi,2n\pi)$ 时增加<br>当 $x\in(2n\pi,(2n+1)\pi)$ 时减小 |
| $\tan x$ | $x\neq\pi/2+n\pi$ | $(-\infty,+\infty)$ | 奇 | 当 $x\in((2n-1)\pi/2,(2n+1)\pi/2)$ 时增加 |
| $\cot x$ | $x\neq n\pi$ | $(-\infty,+\infty)$ | 奇 | 当 $x\in(n\pi,(n+1)\pi)$ 时减小 |
| $\sec x$ | $x\neq\pi/2+n\pi$ | $(-\infty,-1]\cup[+1,+\infty)$ | 偶 | 当 $x\in(2n\pi,(2n+1)\pi)$ 时增加<br>当 $x\in((2n-1)\pi,2n\pi)$ 时减少 |
| $\csc x$ | $x\neq n\pi$ | $(-\infty,-1]\cup[+1,+\infty)$ | 奇 | 当 $x\in((4n+1)\pi/2,(4n+3)\pi/2)$ 时增加<br>当 $x\in((4n-1)\pi/2,(4n+1)\pi/2)$ 时减小 |

$$+(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots, |x|<\infty;$$

$$\tan x = x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{7}{315}x^7+\cdots$$

$$+\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)|B_n|}{(2n)!}x^{2n-1}+\cdots, |x|<\pi/2;$$

$$\cot x=\frac{1}{x}\cdot\left[\frac{x}{3}+\frac{x^3}{45}+\frac{2x^5}{945}+\right.$$

$$\left.+\frac{x^7}{4725}+\cdots+\frac{2^{2n}|B_n|}{(2n)!}x^{2n-1}+\cdots\right],$$

$0<|x|<\pi$ ($B_n$ 是 **Bernoulli 数**(Bernoulli numbers)。

函数 $x=\sin y$ 的反函数 $y$ 定义为一个 $x$ 的多值函数，记为 $y=\arcsin x$. 其他三角函数的反函数也类似地定义；它们都称为**反三角函数**(inverse trigonometric functions).

**复变量的三角函数.** 复变量 $z=x+iy$ 的三角函数定义为相应的实变量的三角函数在复平面上的解析延拓(analytic continuation).

例如，$\sin z$ 和 $\cos z$ 可以借助于上面给出的 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的幂级数来定义. 这些级数在整个复平面上收敛，因此 $\sin z$ 和 $\cos z$ 是**整函数**(entire function).

三角函数正切和余切由下列公式来定义:

$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z}, \cot z=\frac{\cos z}{\sin z}.$$

三角函数 $\tan z$ 和 $\cot z$ 是**亚纯函数**(meromorphic function). $\tan z$ 的极点都是(一阶)单极点，并且处于点 $z=\pi/2+n\pi, n=0,\pm1,\cdots$.

关于实变量的三角函数的一切公式，对于复变量三角函数仍然成立.

与实变量的三角函数不同，函数 $\sin z$ 和 $\cos z$ 取一切复数值：对于任何复数 $a$，方程 $\sin z=a$ 和 $\cos z=a$ 都有无穷多个解:

$$z=\arcsin a=-i\ln(ia\pm\sqrt{1-a^2}),$$

$$z=\arccos a=-i\ln(a\pm\sqrt{a^2-1}).$$

三角函数 $\tan z$ 和 $\cot z$ 取除 $\pm i$ 以外一切复数值：对于任何复数 $a\neq\pm i$，方程 $\tan z=a$ 和 $\cot z=a$ 都有无穷多个解:

$$z=\arctan a=\frac{i}{2}\ln\frac{1-ia}{1+ia},$$

$$z=\operatorname{arccot} a=\frac{i}{2}\ln\frac{ia+1}{ia-1}.$$

三角函数可以通过**指数函数**(exponential function)来表示:

$$\sin z=\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz}),$$

$$\cos z=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz}), \tan z=\frac{1}{i}\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}},$$

和通过**双曲函数**(hyperbolic functions)来表示:

$$\sin z=-i\sinh iz, \cos z=\cosh iz, \tan z=-i\tanh iz.$$

В. Н. Битюцков 撰

【补注】 三角函数也称为圆函数(circular functions).

$\sin z$ 和 $\cos z$ 的(不依赖于图形的)形式定义可由幂级数给出如下. 首先，不难证明，由上述 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的直观定义可以得出

$$\arcsin x=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

这可取作 $\arcsin x$ 的形式定义，而 $\arcsin x$ 的反函数可以取作 $\sin x$ 的形式定义.

如果 $z$ 是复数 $x+iy$，其中 $x$ 和 $y$ 是实数，则可定义 $e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$，然后对于复数 $z$，定义

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}, \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}.$$

**参考文献**

[A1] Apostol, T. M., Calculus, I, Blaisdell, 1967.

[A2] Churchill, R. V., Brown, J. W. and Verhey, A. R. F., Complex variables and applications, McGraw-Hill, 1974

[A3] Abramowitz, M. and Stegun, I. A. (eds.), Handbook of mathematical functions, Dover, reprint, 1972.

杜小杨 张鸿林 译

**三角插值** [**trigonometric interpolation**; **тригонометрическое интерполирование**]

用形式

$$T(x)=A+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

的**三角多项式**(trigonometric polynomial)近似表示函数 $f$，并要求在预先指定的一些点上，它的值与函数 $f$ 的值相同. 事实上，总能选取 $n$ 阶三角多项式 $T$ 的 $2n+1$ 个系数 $A, a_k, b_k (k=1,\cdots,n)$，使得它在事先给定的区间 $[0,2\pi)$ 中的 $2n+1$ 个点 $x_k$ 上的值等于函数值 $y_k$. 此时，三角多项式 $T(x)$ 的形式为

$$T(x)=\sum_{k=0}^{2n}y_k t_k(x), \qquad (*)$$

其中,

$$t_k(x)=\frac{\Delta(x)}{\Delta'(x)2\sin(x-x_k)/2},$$

$$\Delta(x)=\prod_{k=0}^{2n}2\sin\frac{x-x_k}{2}.$$

在等距节点 $x_k=2k\pi/(2n+1)$ 的情形，多项式的

形式将特别简单，它的系数由下面的公式给出：

$$A = \frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} y_k,$$

$$a_m = \frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} y_k \cos m x_k,$$

$$b_m = \frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} y_k \sin m x_k,\ 1 \leqslant m \leqslant n.$$

В. И. Битюцков 撰

【补注】 上面给出的在节点 $x_k$ 处取预先给定的值 $y_k$ 的三角多项式的公式（*），称为 Gauss 三角插值公式（Gauss formula of trigonometric interpolation）（[A2]）.

参考文献

[A1] Zygmund, A., Trigonometric series, 2, Cambridge Univ. Press, 1988.

[A2] Davis, Ph. J., Interpolation and approximation, Dover, reprint, 1975, p. 29, 38. 朱学贤 译

**三角多项式** [**trigonometric polynomial**; **тригонометрический полином**]，有限三角和（finite trigonometric sum）

形式为

$$T(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

的表示式，具有实系数 $a_0, a_k, b_k, k = 1, \cdots, n$；数 $n$ 称为三角多项式的阶（order of the trigonometric polynomial）（如果 $|a_n| + |b_n| > 0$）. 三角多项式能写成复数形式：

$$T(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx},$$

其中

$$2c_k = \begin{cases} a_k - ib_k, & k \geqslant 0\ (b_0 = 0), \\ a_{-k} + ib_{-k}, & k < 0. \end{cases}$$

三角多项式是**函数逼近**（approximation of functions）的一种重要工具.

В. И. Битюцков 撰

【补注】 亦见**三角级数**（trigonometric series）.

杜小杨 译

**三角级数** [**trigonometric series**; **тригонометрический ряд**]

由倍角的正弦和余弦构成的级数，即形式为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \qquad (1)$$

的级数，或者写成复数形式，即级数

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx},$$

其中的 $a_k, b_k$ 及相应的 $c_k$ 称为三角级数的系数（coefficients of the trigonometric series）.

三角级数首先出现在 L. Euler (1744) 的工作中. 他得到了下列展开式：

$$\frac{\pi - x}{2} = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots$$

$$(0 < x < 2\pi),$$

$$\frac{1 - r\cos x}{1 - 2r\cos x + r^2} = 1 + r\cos x + r^2 \cos 2x + \cdots,$$

$$\frac{r\sin x}{1 - 2r\cos x + r^2} = r\sin x + r^2 \sin 2x + \cdots.$$

18世纪中叶，与弦的自由振动问题的研究有关，出现了这样一个问题：是否可以将刻画弦的初始位置的函数“表示”成三角级数的和的形式？这一问题在当时的一些最优秀的分析学者，例如 D. Bernoulli，J. d'Alembert，J. L. Lagrange 和 Euler 之间引发了一场激烈的争论并持续了数十年. 他们的争论涉及到函数概念的本质. 在那个时代，函数通常是与它们的解析表达式联系在一起的，因而导致了只考虑解析的或分段解析的函数. 但这里出现的要求是构造一个三角级数，用以“表示”一个函数，而这个函数的图象可能是一条相当随意的曲线.

但是，这场争论的意义极为重大. 事实上，由于这些讨论，引出了许多主要是与数学分析最重要的概念和思想有关的问题. 例如，用 **Taylor 级数**（Taylor series）“表示”函数，函数的**解析延拓**（analytic continuation），**发散级数**（divergent series）的应用，交换极限次序，无穷方程组，用多项式插值函数，等等.

随后，如同在这初始时期一样，三角级数理论成了数学分析新思想的源泉并影响了它的其他分支的发展. 在 Riemann 积分和 Lebesgue 积分的建立过程中，三角级数的研究起了重要的作用. 实变函数论的诞生及其以后的发展都与三角级数理论紧密相关. 作为三角级数理论的推广，出现了 Fourier 积分、殆周期函数、一般正交级数以及抽象调和分析. 对于三角级数的深入研究成为集合论创立的一个出发点. 三角级数是表示函数和研究函数的一个强有力的工具.

在 18 世纪引发数学家们争论的问题是由 J. Fourier 于 1807 年解决的，他给出了计算应该用以“表示”$(0, 2\pi)$ 上的函数 $f$ 的三角级数（1）中的系数的公式：

$$\left.\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx, \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

并将它们应用于解热传导问题. 虽然在更为早些的时

候、A. Clairaut(1754)和 Euler(1777)利用逐项积分已经得到了公式(2)，但它仍被称为 Fourier 公式(Fourier formulas). 系数由(2)定义的三角级数(1)称为函数 $f$ 的 Fourier 级数(Fourier series)，数 $a_k$, $b_k$ 称为 $f$ 的 Fourier 系数(Fourier coefficients).

所得结果的性质依赖于如何理解用一个级数"表示"函数以及如何理解(2)中的积分. 三角级数理论的现代形式是在 **Lebesgue 积分**(Lebesgue integral)出现之后建立起来的.

三角级数理论可以按条件分成两个主要分支: **Fourier 级数**(Fourier series)理论和一般三角级数理论，前者假定级数(1)是某个函数的 Fourier 级数，而后者没有这个假定. 下面给出一般 Fourier 级数理论中的一些主要结果(其中，集合的测度以及函数的可测性都是 Lebesgue 意义下的).

B. Riemann(1853)的论文是对三角级数的第一次系统研究，而且其中没有假定这些级数是 Fourier 级数. 因此，一般三角级数理论有时也称为 Riemann 三角级数理论(Riemann theory of trigonometric series).

为了研究系数趋于零的任意三角级数(1)的性质，Riemann 考虑了连续函数 $F$，它是一致收敛的三角级数

$$\frac{a_0}{4}x^2-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k\cos kx+b_k\sin kx}{k^2}$$

的和函数，而这一级数是由对级数(1)作两次逐项积分后得到的. 如果级数(1)在某点 $x$ 处收敛到 $s$，则 $F$ 在该点的**对称导数**(symmetric derivative)存在且等于 $s$，即

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+2h)-2F(x)+F(x-2h)}{4h^2}=s.$$

因为

$$\frac{F(x+2h)-2F(x)+F(x-2h)}{4h^2}$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sin kh}{kh}\right)^2(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

所以这就导得了由因子 $(\sin kh/kh)^2$ 产生的级数(1)的和，称为 Riemann 求和法(Riemann summation method). 利用函数 $F$，Riemann 提出了局部化原理(localization principle)，根据这一原理，级数(1)在 $x$ 点的性质仅与函数 $F$ 在该点的一个任意小的邻域内的性质有关.

如果三角级数在一个正测度集上收敛，则它的系数收敛到零(Cantor-Lebesgue 定理(Cantor-Lebesgue theorem)). 也可从三角级数在一个第二范畴集上收敛推出它的系数收敛到零(W. Young, 1909).

一般三角级数理论的核心问题之一是用三角级数"表示"一个任意函数. 对 Н. Н. Лузин(1915)的关于函数用按 Abel-Poisson 求和法和 Riemann 求和法都几乎处处可和的三角级数表示的结果进行强化，对于 $f$ 的表示理解为三角级数几乎处处收敛到 $f$ 这一最重要的情形，Д. Е. Меньшов(1940)证明了下面的定理: 对于任意几乎处处有限的以 $2\pi$ 为周期的可测函数 $f$，都存在一个几乎处处收敛到它的三角级数(Меньшов 定理(Men'shov theorem)). 应该注意到，即使函数 $f$ 是可积的，一般说来也不能选择 $f$ 的 Fourier 级数作为此级数，因为存在几乎处处发散的 Fourier 级数.

Меньшов 定理能改进如下: 如果以 $2\pi$ 为周期的函数 $f$ 可测且几乎处处有限，则存在连续函数 $\varphi$ 使得 $\varphi'=f$ 几乎处处成立，而且逐项求导 $\varphi$ 的 Fourier 级数后所得的级数几乎处处收敛到 $f$(Н. К. Бари, 1952).

直至 1984 年,仍不知道是否可以将 Меньшов 定理中 $f$ 几乎处处有限这一条件去掉，特别地，仍不知道是否存在几乎处处发散到 $+\infty$ 的三角级数.

因此，关于在正测度集上取无穷值的函数的表示问题，是对于这样一种情形进行研究的: 几乎处处收敛被更弱的条件即依测度收敛代替. 依测度收敛于能取无穷值的函数的定义如下: 三角级数的部分和序列 $s_n$ 依测度收敛于函数 $f$，如果

$$s_n(x)=f_n(x)+\alpha_n(x),$$

其中，$f_n$ 几乎处处收敛到 $f$ 而序列 $\alpha_n$ 依测度收敛到零. 在这种提法下，函数用三角级数表示的问题被彻底地解决了: 对于任意以 $2\pi$ 为周期的可测函数，存在一个依测度收敛到它的三角级数(Меньшов, 1948).

有许多研究是讨论三角级数的唯一性问题的: 两个不同的三角级数有否可能收敛到同一个函数? 或者换一种提法: 如果一个三角级数收敛到零，是否可以推出它的所有系数都是零? 这里指的可以是在所有的点或除了某个集合以外的所有点上收敛. 设级数在某个集合的外部收敛，则上述问题的回答本质上依赖这个集合的性质.

以下术语已经建立. 集合 $E\subset[0,2\pi]$ 称为**唯一性集**(uniqueness set, 或 set of uniqueness)或 $U$ 集($U$-set)，如果一个三角级数在 $[0,2\pi]$ 的也许除了 $E$ 以外的每个点上都收敛到零，则它的系数全为零. 不是 $U$ 集的集合称为多重性集(set of multiplicity)或 $M$ 集($M$-set). G. Cantor(1872)证明: 空集和有限集是 $U$ 集. 任意可数集也是 $U$ 集(Young, 1909). 但是，每一个正测度集都是 $M$ 集.

存在零测度的 $M$ 集，这是由 Меньшов(1916)建立的，他构造了第一个具有这种性质的**完满集**(per-

fect set）．这是唯一性问题中最重要的结果．由零测度 $M$ 集的存在性推出：如果函数用几乎处处收敛的三角级数表示，则这些级数当然不是唯一确定的．

完满集也可以是 $U$ 集（Н．К．Бари；A．Rajchman，1921）．在唯一性问题中，非常准确地刻画零测度集的特征是十分重要的．区分零测度集是 $U$ 集还是 $M$ 集的一般性的问题仍没有解决（1984）．同样的问题甚至对完满集也没有解决．

下面的问题与唯一性问题有关．如果一个三角级数收敛到函数 $f\in L(0,2\pi)$，那么它是否一定是 $f$ 的 Fourier 级数？在 $f$ 是 Riemann 可积而且级数在所有点上都收敛到 $f$ 的情形，P．du Bois-Reymond（1877）对于这一问题给出了正面的回答．从 Ch．J．de la Vallée-Poussin（1912）的结论可以推出：如果级数除了一个可数点集外处处收敛到一个有限和，则问题的回答也是肯定的．

如果三角级数在点 $x_0$ 绝对收敛，则它的收敛点以及它的绝对收敛点是关于 $x_0$ 对称分布的（P．Fatou，1906）．

根据 **Denjoy-Лузин 定理**（Denjoy-Luzin theorem），如果三角级数（1）在一个正测度集上绝对收敛，则级数 $\sum_k(|a_k|+|b_k|)$ 收敛，因而（1）对所有 $x$ 绝对收敛．第二范畴的集合以及某些零测度集也具有这一性质．

以上只是概述了一维三角级数（1）的有关内容．对于多元一般三角级数，有许多不一样的结果．但在许多场合中同样需要找到问题的最自然的提法．

**参考文献**


[1] Бари，Н．К．，Тригонометрические ряды，М．，1961（英译本：Bary，N．K．[N．K．Bari]，A treatise on trigonometric series，Pergamon，1964）．

[2] Zygmund，A．，Trigonometric series，1－2，Cambridge Univ．Press，1988．

[3] Лузин，Н．Н．，Интеграл и тригонометрический ряд，М．-Л．，1951．

[4] Riemann，B．，Ueber die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe，in H．Weber（ed．），Mathematische Werke，Dover，reprint，1953，227－265


С．А．Теляковский 撰

【补注】关于 **Fourier 级数**（Fourier series）的收敛性，也见 **Carleson 定理**（Carleson theorem）．

上文中提到，与 Меньшов 定理（Men'shov theorem）有关的一些问题直至 1984 年还未解决，但现在已经解决了．在[A1]中，С．В．Конягин 证明了下面这一非常漂亮的定理中的必要性部分（充分性部分已由 Д．Е．Меньшов 证明（见[A2]或[1]的第 II 卷第 437 页））．

Меньшов-Конягин 定理（Men'shov-Konyagin theorem）．设 $F$ 和 $g$ 是 $[-\pi,\pi]\to[-\infty,+\infty]$ 的可测函数．存在三角级数（1）（$S_n$ 是其部分和）使得

$$g(x)=\varliminf_{n\to\infty}S_n(x),\quad F(x)=\varlimsup_{n\to\infty}S_n(x)$$

对几乎处处 $x\in[-\pi,\pi]$ 成立的充分必要条件是：存在可测集 $E\subset[-\pi,\pi]$，对于几乎处处 $x\in E$ 有 $-\infty<g(x)\leqslant F(x)<\infty$，同时对于几乎处处 $x\in[-\pi,\pi]\setminus E$ 有 $g(x)=-\infty$ 和 $F(x)=+\infty$．

特别地，不存在一个三角级数在一个正测度集的每一点上都发散到 $+\infty$．

**参考文献**


[A1] Konyagin，S．V．，Limits of indeterminacy of trigonometric series，*Math．Notes*，**44**（1988），910－920．（*Mat．Zametki*，**44**（1988），770－784）．

[A2] Men'shov，D．E．，On limits of indeterminacy of Fourier series，*Mat．Sb*．**30**（1952），601－650（俄文）．


朱学贤 译 程民德 校

**三角和**［**trigonometric sum**；**тригонометрическая сумма**］

形如

$$S=\sum_{x=1}^{P}e^{2\pi iF(x)}$$

的有限和 $S$，其中 $P\geqslant1$ 为整数，$F$ 为 $x$ 的实值函数．下形之更一般的和 $\widetilde{S}$ 也称为三角和：

$$\widetilde{S}=\sum_{x_1=1}^{P_1}\cdots\sum_{x_r=1}^{P_r}\Phi(x_1,\cdots,x_r)e^{2\pi iF(x_1,\cdots,x_r)},$$

其中 $F$ 为一实值函数，而 $\Phi$ 为任意复值函数．

若 $F$ 为一多项式，则 $S$ 称为 **Weyl 和**（Weyl sum）；若多项式 $F$ 有有理系数，

$$F(x)=\frac{a_nx^n+\cdots+a_1x}{q},\ (a_n,\cdots,a_1,q)=1,$$

则 $S$ 称为有理三角和（rational trigonometric sum）；若 $P=q$，则 $\widetilde{S}$ 称为完全三角和（complete trigonometric sum）；若 $r=1$ 且当 $x_1$ 为素数时有 $\Phi(x_1)=1$，而当 $x_1$ 为合数时有 $\Phi(x_1)=0$，那么 $\widetilde{S}$ 就称为过素数的三角和（trigonometric sum over prime numbers）；若 $r\geqslant1$，$\Phi\equiv1$ 且 $F$ 为多项式，则 $\widetilde{S}$ 称为多重 Weyl 和（multiple Weyl sum）．三角和理论中的一个基本问题是求 $S$ 与 $\widetilde{S}$ 的模之上界．

**参考文献**


[1] Виноградов，И．М．，Избранные труды，М．，1952（英译本：Vinogradov，I．M．，Selected works，Springer，1985）．

[2] Виноградов，И．М．，Метод тригонометрических сумм в теории чисел，М．，1971（中译本：伊·马·维诺格拉多夫，数论中的三角和方法，数学进展，1（1955），3－106）．

[3] Виноградов, И. М., Особые варианты метода тригонометрических сумм, М., 1976.

[4] Hua, L.-K., Abschätzungen von Exponentialsummen und ihre Anwendung in der Zahlentheorie, in Enzykl-opaedie der Mathematischen Wissenschaften mit Eins-chluss ihrer Anwendungen, Vol. I, Teubner, 1959. Heft 13, Teil 1 (中译本: 华罗庚, 指数和的估计及其在数论中的应用, 科学出版社, 1963).

[5] Titchmarsh, E. C., The theory of the Riemann zeta-function, 2nd edition (revised by D. R. Heath-Brown), Clarendon Press, Oxford, 1986.

[6] Архипов, Г. И., Карацуба, А. А., Чубариков, В. Н., Кратные тригонометрические суммы, М., 1980 (英译本: Archipov, G. I., Karatsuba, A. A. and Chubarikov, V. N., Multiple trigonometric sums, Amer. Math. Soc., 1982).

А. А. Карацуба 撰

【补注】 "三角和"也称为"指数和"(exponential sum). 二次完整指数和

$$S(q)=\sum_{x=1}^{q} e^{2\pi i \frac{ax^2}{q}}$$

称为 **Gauss 和** (Gauss sum). **Kloosterman 和** (Kloosterman sum) 是形如

$$K(u,v,q)=\sum_{\substack{x=1\\(x,q)=1}}\exp\left(\frac{2\pi i}{q}\left(ux+\frac{v}{x}\right)\right),$$

$$u, v\in\mathbf{Z}$$

的一种指数和. 对它有 Weil 估计 (Weil estimate) $|K(u,v,p)|\leqslant 2\sqrt{p}$.

除了在数论中(亦见**三角和法** (trigonometric sums, method of)), 指数和在其他领域(如代数几何、模函数、求积公式及单值化)中也起着重要的作用, 见[A1], [A2]及[A3].

**参考文献**

[A1] Коробов, Н. М., Тригонометрические суммы и их приложения, Москва, Наука, 1989 (英译本: Korobov, N. M., Exponential sums and their applications, Kluwer, 1992).

[A2] Katz, N. M., Sommes exponentielles, Soc. Math. de France, 1980.

[A3] Katz, N. M., Gauss sums, Kloosterman sums, and monodromy groups, Princeton Univ. Press, 1988.

张明尧 译 戚鸣皋 校

**三角和法** [**trigonometric sums, method of**; **тригонометрических сумм метод**]

**解析数论** (analytic number theory) 中一种一般性的方法. 三角和方法的产生源于数论中的两大问题: 多项式的分数部分的分布问题(见**分数部分** (fractional part)) 和表正整数为指定形式的项之和的问题(加性数论问题, 见**加性数论** (additive number theory)).

设 $f(x)$ 为一实值函数, $x=1,\cdots,P$, $P\to+\infty$. 称 $f(x)$ 的分数部分是一致分布的, 如果对任何 $\alpha$ 与 $\beta\,(0\leqslant\alpha<\beta<1)$, $f(x)$ 的分数部分在区间 $(\alpha,\beta)$ 中出现的个数 $\sigma$ 都与此区间之长度成比例, 即

$$\sigma=(\beta-\alpha)P+o(P).$$

现在令 $\psi(x)$ 为区间 $(\alpha,\beta)$ 之特征函数, 即

$$\psi(x)=\begin{cases}1, & 若\ \alpha<x<\beta,\\ 0, & 若\ 0\leqslant x\leqslant\alpha,\ \beta\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

把 $\psi(x)$ 周期延拓到整个实轴上, 即令 $\psi(x+1)=\psi(x)$, 就得到

$$\sigma=\sum_{x=1}^{P}\psi(\{f(x)\}).$$

把 $\psi(x)$ 展成 **Fourier 级数** (Fourier series) 即得

$$\psi(x)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}c(m)e^{2\pi imx},\ c(0)=\beta-\alpha.$$

从而

$$\sigma=(\beta-\alpha)P+\sum_{\substack{m=-\infty\\m\neq 0}}^{+\infty}c(m)\sum_{x=1}^{P}e^{2\pi imf(x)}.\qquad(1)$$

最后这个关系式一般不成立, 因为可能有 $x$ 使 $\{f(x)\}=\alpha$ 或 $\{f(x)\}=\beta$; 但是 $\alpha$ 和 $\beta$ 可用很接近的 $\alpha'$ 与 $\beta'$ 代替之, 对它们有: $\{f(x)\}\neq\alpha'$ 与 $\{f(x)\}\neq\beta'$ 对一切 $x=1,\cdots,P$ 成立; 这种替代实际上不改变公式的精确程度, 从而公式为真. 完全同样地可将函数 $\psi(x)$ "光滑化" ("矫正"), 以使 $\sigma$ 的大小实际上不改变, 且其 Fourier 级数的系数 $c(m)$ 随 $m$ 增加而迅速减少, 即使得级数

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty}|c(m)|$$

迅速收敛.

等式(1)中第二项的绝对值不超过 $\kappa$, 其中

$$\kappa=\sum_{\substack{m=-\infty\\m\neq 0}}^{\infty}|c(m)|\left|\sum_{x=1}^{P}e^{2\pi imf(x)}\right|.$$

如果已知

$$|S|=\left|\sum_{x=1}^{P}e^{2\pi imf(x)}\right|\leqslant P\Delta,\qquad(2)$$

其中 $\Delta=\Delta(P)\to 0$ (当 $P\to+\infty$ 时), 那么可对 $\sigma$ 得到

$$\sigma=(\beta-\alpha)P+o(P),\ o(P)=cP\Delta.$$

这就是说, $f(x)$ 的分数部分是一致分布的. 于是, 必须对三角和的模给出上界估计. 由于 $S$ 中每一项的模为1, $|S|$ 的一个平凡上界就是 $P$, 此即和 $S$ 中

的项数．一个形如（2）的估计称为是非平凡的，如果 $\Delta<1$，此时的 $\Delta$ 称为一个约化因子（reducing factor）．

在 $f(x)$ 的分数部分这个问题中，在必要时可把 $\psi(x)$ 光滑化，使得仅对 $m$ 的"比较少"的值有估计式（2）成立，比方说对区间 $0<|m|<(\ln P)^A$ 中的 $m$，这里 $A>0$ 是一个常数．

类似的方法适用于求和式

$$\sum_{x=1}^{P}\{f(x)\}$$

的渐近公式，这种和式出现在平面及空间区域中整点个数的问题中．

在加性数论问题中，三角和以下列方式出现．

对整数 $m$ 成立下述公式：

$$\int_0^1 e^{2\pi i\alpha m}d\alpha=\begin{cases}1 & 若\ m=0,\\ 0 & 若\ m\neq 0.\end{cases}$$

因此，若 $I(N)$ 表示方程

$$N=u_1+\cdots+u_k,\ u_\nu\in U_\nu,\ \nu=1,\cdots,k,$$

的解数，其中 $U_\nu$ 是某种自然数的集合，那么

$$I(N)=\int_0^1 S_1(\alpha)\cdots S_k(\alpha)e^{-2\pi i\alpha N}d\alpha,$$

其中 $S_\nu(\alpha)=\sum_{u_\nu\in U_\nu}e^{2\pi i\alpha u_\nu}$，$\nu=1,\cdots,k$．特别地，令 $U_\nu=U=\{1^n,2^n,\cdots\}$ 就得到 **Waring 问题**（Waring problem）；对 $k=3$，令 $U_\nu=U=\{2,3,5,7,11,\cdots,p,\cdots\}$，就得到三元 **Goldbach 问题**（Goldbach problem）等等．如同在关于分数部分的分布问题中那样，这里的主要问题是寻求 $S_\nu(\alpha)$ 的模的上界，此即 $|S_\nu(\alpha)|$ 的上界问题．

因此，数论中的各种问题都可以统一地用三角和的语言来表述．

第一个非平凡的三角和出现在 1811 年 C．F．Gauss 关于**二次互反律**（quadratic reciprocity law）的一个证明之中：

$$S=\sum_{x=1}^{P}e^{2\pi iF(x)},\ F(x)=\frac{ax^2}{P}.$$

Gauss 计算了 $S$ 的精确值：

$$S=\begin{cases}(1+i)\sqrt{P}, & 若\ P\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4);\\ \sqrt{P}, & 若\ P\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4);\\ 0, & 若\ P\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 4);\\ i\sqrt{P}, & 若\ P\equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 4);\end{cases}$$

20 世纪初出现了一系列应用三角和的相互独立的文章．

H．Weyl 研究了实系数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的多项式

$$f(x)=\alpha_1x+\cdots+\alpha_nx^n$$

的分数部分之分布，并考虑了带有形如 $F(x)=mf(x)$ 的函数 $F(x)$ 的和 $S$，其中 $m$ 为一非零整数．1917 年 И．М．Виноградов 在研究平面及空间区域中的整点分布时，考虑了带函数 $F(x)$ 的和 $S$，对 $F(x)$ 仅要求其二阶导数满足条件

$$\frac{c_1}{A}\leqslant F''(x)\leqslant\frac{c_2}{A},$$

其中 $c_1$ 与 $c_2$ 是正的绝对常数，而 $A=A(P)\to+\infty$．1918 年 G．H．Hardy 与 J．E．Littlewood 在求得 Riemann $\zeta$ 函数的近似函数方程时，研究了带有形如

$$F(x)=t\ln x$$

的函数 $F(x)$ 的和 $S$，其中 $t$ 是实参数，$t=t(P)$．

在所有这些论文中，都需要求出和 $S$ 的模的最好可能的界限．

用三角和方法研究数论中这些问题的一般方案如下．把要研究的方程之解数，或所研究的函数的分数部分落在给定区间中的个数，或给定区域中之整点个数的精确表达式用三角和之积分，或系数为三角和之级数表示出来．这一精确表达式表成两项之和：主项和次要项（例如，如果考虑的是一个区间的特征函数之 Fourier 级数，那么主项即为 Fourier 级数中零系数所给出的项）；主项给出渐近公式的主要项，而次要项则给出余项．在诸如 Waring 问题、Goldbach 问题等这样的问题中，主项是用与 Hardy-Littlewood-Ramanujan 的圆法很接近的方法来研究的（此法称为 Виноградов 三角和形式下的**圆法**（circle method））．在大多数其他问题中（分数部分之分布及区域中整点等），主项均可平凡地求得．这就提出了估计余项的问题．如果能证明余项的大小比主项有较低的阶，那么渐近公式就证明了．

估计余项的主要问题是有无可能对三角和得到更精确的估计．关于估计三角和的方法，见**三角和**（Trigonometric sum），也见 **Виноградов 法**（Vinogradov method）；**Waring 问题**（Waring problem）；**Goldbach 问题**（Goldbach problem）及**加性问题**（additive problem）．

参考文献见三角和（trigonometric sum）．

А．А．Карацуба 撰 张明尧 译 戚鸣皋 校

**三角函数系［trigonometric system；тригонометрическая система］**

最重要的正交函数系之一（见**正交系**（orthogonal system））．三角函数系中的函数

$$1,\cos x,\sin x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots$$

在任何形如 $[a-\pi,a+\pi]$ 的区间上是正交的，而函

数

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \cdots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \cdots,$$

在这个区间上是规范正交的．三角函数系在空间 $L_p[-\pi, \pi]$ $(1 \leqslant p < \infty)$ 中是完全的和闭的，在周期为 $2\pi$ 的连续周期函数的空间 $C_{2\pi}$ 中也是连续的和闭的．这一函数系构成空间 $L_p[-\pi, \pi]$ $(1 < p < \infty)$ 中的**基**（basis）．在**三角级数**（trigonometric series）的理论中，研究三角函数系构成的级数．

除三角函数系外，复三角函数系 $\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ 也有广泛应用．这两个函数系中的函数由 **Euler 公式**（Euler formulas）彼此相联系．

**参考文献**


[1] Бари, Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961（英译本：Bary, N. K., A treatise on trigonometric series, Pergamon, 1964）.

[2] Zygmund, A., Trigonometric series. 1 – 2, Cambridge Univ. Press, 1988.


Б. И. Голубов 撰　杜小杨 译

## 三角学 [trigonometry; тригонометрия]

几何学的一个分支，其中用三角函数来描述三角形的元素之间的度量关系（例如见**余弦定理**（cosine theorem）；**正弦定理**（sine theorem）；**正切公式**（tangent formula））．并且建立了三角函数之间的一些公式（所谓的测角术（goniometry））．三角学既可在 Euclid 几何学中又可在**非 Euclid 几何学**（non-Euclidean geometries）中来考虑．Euclid 空间中球面上的三角学称为**球面三角学**（spherical trigonometry）．

А. Б. Иванов 撰

【补注】　亦见**平面三角学**（plane trigonometry）．

杜小杨 译

## 三重正交曲面系 [triorthogonal system of surfaces; триортогональная система поверхностей]

三维空间中的一个曲面集，它可分裂成三个单参数族，使得属于不同族的任意两个曲面在其交线的每一点处构成直角．假定三重正交系的曲面是正则曲面，在这种情况下，三重正交系中的曲面相交于曲面的曲率线（Dupin 定理（Dupin theorem））．

三重正交曲面系是由空间的正交曲线坐标系中的坐标曲面系给出的．因此，在球面坐标系中，一个三重正交曲面系构成如下：以坐标原点为球心的一族球面，第二族曲面是旋转锥面，其顶点在原点，其旋转轴被第三个坐标曲面族中的平面所通过．每一个三重正交曲面系都与空间的某些正交曲线坐标系相联系着．在正交坐标 $u$, $v$, $w$ 中，空间的线元具有下列形式：

$$ds^2 = H_1^2 du^2 + H_2^2 dv^2 + H_3^2 dw^2,$$

这里 $H_i(u, v, w)$ $(i = 1, 2, 3)$ 是所谓的 Lamé 函数（Lamé functions），此时空间形式的 Riemann 张量恒为零．一个三重正交曲面系由上述函数决定，至多差一个平移（或反射）．一个三重正交曲面系可以与任何正则曲面相联系，而后者可以呈现为曲面系的组成部分．如果在三重正交曲面系的组合中出现的一个单参数正则曲面族已经给定，而且这个曲面族中至少有一个曲面既不是平面也不是球面，那么包含此单参数正则曲面族的整个三重正交曲面族被完全确定．

Euclid 空间中的一个二次曲面的共焦曲面构成了一个三重正交曲面系；在 Descartes 坐标系中此三重正交曲面系的方程为

$$\frac{x^2}{a+\lambda} + \frac{y^2}{b+\lambda} + \frac{z^2}{c+\lambda} = 1,$$

这里 $a$, $b$, $c$ 是常数，且 $0 < c < b < a$，$\lambda$ 是一个参数．对 $\lambda < c$，此方程定义了一族椭圆面，对 $c < \lambda < b$，定义了一族单叶双曲面，对 $b < \lambda < a$，定义了一族双叶双曲面．此曲面系的三种曲面（单叶双曲面、双叶双曲面和椭圆面）通过空间中的每一点．球面变换是 Euclid 空间中三重正交曲面系的自同构．

**参考文献**


[1] Darboux, G., Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonées curvilignes, Gauthier-Villars, 1910.

[2] Каган, В. Ф., Основы теории поверхностей в тензорном изложении, ч. 1 – 2, М.-Л., 1947 – 1948.


Л. А. Сидоров 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Berger, M. and Gostiaux, B., Differential geometry, Springer, 1988（译自法文）.

[A2] Hilbert, D. and Cohn-Vossen, S., Geometry and the imagination, Chelsea, reprint, 1952（译自德文）.


沈纯理 译

## 三元组 [triple; тройка]，单子（monad），范畴 $\mathfrak{R}$ 上的

范畴 $\mathfrak{R}$ 上全体自同态函子**范畴**（category）中的一个**幺半群**（monoid）．换言之，范畴 $\mathfrak{R}$ 上的一个三元组是一个共变函子 $T: \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$，连同两个自然变换 $\eta$: $\mathrm{Id}_{\mathfrak{R}} \to T$，以及 $\mu: T^2 \to T$（此处 $\mathrm{Id}_{\mathfrak{R}}$ 记 $\mathfrak{R}$ 上的恒等函子），使得下面的图形交换：

$$\begin{array}{ccccc} T(X) & \xrightarrow{T(\eta_X)} & T^2(X) & \xleftarrow{\eta_{T(X)}} & T(X) \\ & {\scriptstyle 1_{T(X)}} \searrow & \downarrow {\scriptstyle \mu_X} & \swarrow {\scriptstyle 1_{T(X)}} & \\ & & T(X) & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} T^3(X) & \xrightarrow{T(\mu_X)} & T^2(X) \\ \downarrow{\scriptstyle \mu_{T(X)}} & & \downarrow{\scriptstyle \mu_X} \\ T^2(X) & \xrightarrow[\mu_X]{} & T(X) \end{array}$$

一个三元组有时称为一个标准构造(standard construction),见[2].

对于任意一对伴随函子 $F:\mathfrak{R}\to\mathfrak{L}$,和 $G:\mathfrak{L}\to\mathfrak{R}$(见**伴随函子**(adjoint functor)),设它们带有伴随单位 $\eta:\mathrm{Id}_{\mathfrak{R}}\to GF$,和余单位 $\varepsilon:FG\to\mathrm{Id}_{\mathfrak{L}}$,函子 $T=GF:\mathfrak{R}\to\mathfrak{R}$,连同 $\eta:\mathrm{Id}_{\mathfrak{R}}\to T$,和 $\mu=G(\varepsilon_F):T^2\to T$ 是 $\mathfrak{R}$ 上的一个三元组.反之,给出任意一个三元组 $(T,\eta,\mu)$,必存在伴随函子 $F$ 和 $G$ 的对,使得 $T=GF$,且变换 $\eta$ 和 $\mu$ 由上面刻画的伴随单位及余单位得到.一个三元组的这种不同的分解可以组成一个真类.在这个类中,存在一个最小元(Kleisli 构造(Kleisli construction)),和一个最大元(Eilenberg-Moore 构造(Eilenberg-Moore construction)).

例 1)在集范畴中,将任意集合送到它的全体子集集的函子有三元组结构.一个集合 $X$ 自然地嵌入它的子集集中,且 $X$ 的每一个子集集可以对应到这些子集的并.

2)在集范畴中,每一个表示函子 $H_A(X)=H(A,X)$ 给出了一个三元组:映射 $\eta_X:X\to H(A,X)$,将任意 $x\in X$ 送到值为 $x$ 的常函数 $f_x:A\to X$;映射 $\mu_X:H(A,H(A,X))\simeq H(A\times A,X)\to H(A,X)$ 将每一个双变元函数送到它在对角线上的限制函数.

3)在拓扑空间范畴中,任意有单位元 $e$ 的拓扑群 $G$ 可以定义一个函子 $T_G(X)=X\times G$,它给出一个三元组:元素 $x\in X$ 对应到 $(e,x)$,而映射 $\mu:X\times G\times G\to X\times G$ 定义为 $\mu_X(x,g,g')=(x,gg')$.

4)在交换环 $R$ 上的模范畴中,每一个(结合的,有 1 的)$R$ 代数 $A$ 给出一个函子 $T_A(X)=X\otimes_R A$,它可与例 3)类似定义一个三元组结构.

**参考文献**


[1] Adams, J. F., Infinite loop spaces, Princeton Univ. Press, 1978.

[2] Godement, R., Topologie algébique et théorie des faisceaux, Hermann, 1958.

[3] Итоги науки и техники, Алгебра. Топология. Геометрия, т. 13, М., 1975.

[4] MacLane, S., Categories for working mathematician, Springer, 1971.

[5] Manes, E. G., Algebraic theories, Springer, 1976.


М. Ш. Цаленко 撰

【补注】 本条目中非描述性的名称"三元组"现已普遍被"单子"一词取代,尽管有少数固执的范畴学家仍继续使用它.范畴 $\mathfrak{R}$ 上的一个余单子(comonad)(或余三元组(cotriple))是 $\mathfrak{R}^{op}$ 上的一个单子,换言之,它是一个函子 $T:\mathfrak{R}\to\mathfrak{R}$,连同自然变换 $\varepsilon:T\to\mathrm{Id}_{\mathfrak{R}}$,和 $\delta:T\to T^2$,满足上述交换图的对偶图.每一个函子伴随对 $(F\dashv G)$ 给出合成 $FG$ 上的余单子结构,以及 $GF$ 上的单子结构.

给出余单子结构的函子的一个重要例子是 $\Lambda:\mathrm{Ring}\to\mathrm{Ring}$,$\Lambda(A)=1+tA[[t]]$,或等价地,大 Witt 向量函子,见 $\lambda$ 环($\lambda$-ring);**Witt 向量**(Witt vector).自然变换 $W(A)\to\Lambda(W(A))$ 在代数数论中的一个特殊情况是 Artin-Hasse 指数(Artin-Hasse exponential),[A5].

集范畴中的单子可以等价地用 $n$ 元算子集来刻画,其中 $n$ 是任意基数(或集合);$\eta_n:n\to T(n)$ 给出投影算子 $(x_1,x_2,\cdots)\mapsto x_i$,而 $\mu$ 给出了算子的合成法则.见[5]或[A1].这种方法可拓广至任意范畴的单子,但在一般情况下,它不像在集范畴或接近集范畴时那样有用.

上文所述从一个给定的单子构造伴随对的两种典型方法中,Eilenberg-Moore 构造(或 $T$ 代数范畴(category of $T$-algebras))是最重要的.给出范畴 $\mathfrak{R}$ 上的一个单子 $(T,\eta,\mu)$,$\mathfrak{R}$ 中的一个 $T$ 代数是一个对 $(A,\alpha)$,其中 $\alpha:TA\to A$ 是一个态射,使得图

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\eta_A} & TA & \xleftarrow{\mu_A} & T^2A \\ & {\scriptstyle 1_A}\nwarrow & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle T\alpha} \\ & & A & \xleftarrow[\alpha]{} & TA \end{array}$$

是交换的.一个 $T$ 代数同态 $(A,\alpha)\to(B,\beta)$ 是 $\mathfrak{R}$ 中的一个态射 $f:A\to B$ 使得图形

$$\begin{array}{ccc} TA & \xrightarrow{Tf} & TB \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \beta} \\ A & \xrightarrow[f]{} & B \end{array}$$

是交换的;这样就有一个 $T$ 代数范畴 $\mathfrak{R}^T$,和一个显然的遗忘函子 $G^T:\mathfrak{R}^T\to\mathfrak{R}$.函子 $G^T$ 有左伴随 $F^T$,将 $\mathfrak{R}$ 的对象 $A$ 送到 $T$ 代数 $(TA,\mu_A)$,且由伴随对 $(F^T\dashv G^T)$ 诱导的单子就是最初给定的单子.

$(T,\eta,\mu)$ 的 Kleisli 范畴(Kleisli category)是由对象 $F^T(A)$ 组成的 $\mathfrak{R}^T$ 的满子范畴:自由代数范畴(category of free algebras)(亦见**范畴**).

对于 $\mathfrak{R}$ 上的单子 $(T,\eta,\mu)$,在 Kleisli 构造中,范畴 $\mathfrak{L}$ 的对象与 $\mathfrak{R}$ 的对象一致,hom 集是

$$\mathfrak{L}(A,B)=\mathfrak{R}(A,TB).$$

给出 $f\in\mathfrak{L}(A,B)$,$g\in\mathfrak{L}(B,C)$,$\mathfrak{L}$ 中的合成法则由 $\mathfrak{R}$ 中的合成

$$[A\xrightarrow{f}TB\xrightarrow{T(g)}TTC\xrightarrow{\mu_C}TC]\in\mathfrak{L}(A,C)$$

确定；恒等映射 $1_A \in \mathfrak{L}(A,A)=\mathfrak{R}(A,TA)$ 是 $\mathfrak{R}$ 态射 $\eta_A:A \to TA$.

伴随对 $F:\mathfrak{R}\to\mathfrak{L}$，$U:\mathfrak{L}\to\mathfrak{R}$ 给出如下：对 $A\in\mathfrak{R}$，$F(A)=A$，对 $f\in\mathfrak{R}(A,B)$，

$$F(f)=\eta_B \circ f:A\to B\to TB\in\mathfrak{R}(A,TB)= \\ =\mathfrak{L}(A,B),$$

对 $B\in\mathfrak{L}$，$U(B)=TB$，对 $g\in\mathfrak{L}(B,C)=\mathfrak{R}(B,TC)$，$U(g)=\mu_C\circ T(g)$.

此时 $\eta$ 是伴随对的单位，而余单位 $\varepsilon:FU\to \mathrm{Id}_{\mathfrak{L}}$ 由

$$\varepsilon_B=\mathrm{Id}_{T(B)}\in\mathfrak{R}(TB,TB)=\mathfrak{L}(FUB,B)$$

给出．

余代数（co-algebras）可用同样的方法定义．特别地，余代数经常重叠在代数上出现；在某类代数范畴 $\mathfrak{R}$ 上构造的余单子 $G$ 可导出一个双代数（bi-algebra）范畴 $^G\mathfrak{R}$．这种情况的一个重要类型由定义在同一范畴 $\mathfrak{R}$ 上的单子 $T$ 和余单子 $G$ 给出．$G$ 在 $\mathfrak{R}^T$ 上有一个标准提升，得到 $\mathfrak{R}^T$ 上的余单子 $G^*$．一个 $TG$ 双代数（$TG$-bi-algebra）意味着 $^{G^*}(\mathfrak{R}^T)$ 中的一个对象，相反的顺序也有可能，但极少出现，且对象不叫双代数．

余单子在（代数的）上同调理论中的作用见**代数的上同调**（cohomology of algebras）和 [A2]，[A3]；特别是 [A2] 中有明确的解释．

一个伴随对叫作**可单子化的**（monadic 或 monadable），是指它所诱导的单子的 Eilenberg-Moore 构造导出的伴随对等价于原来给定的伴随对．许多重要的伴随对是可单子化的；例如对任意**泛代数簇**（variety of universal algebras），从簇到集范畴的遗忘函子及其左伴随（自由代数函子）构成一个可单子化的伴随对．

若 $\mu$ 是一个同构，则单子 $(T,\eta,\mu)$ 叫作**幂等的**（idempotent）．在这种情况下，对象 $A$ 的任意 $F$ 代数结构 $\alpha$ 必须是 $\eta_A$ 的双边逆．因此 $\mathfrak{R}^T$ 同构于满子范畴 $\mathrm{Fix}(T)\subset\mathfrak{R}$，$\mathrm{Fix}(T)$ 由使 $\eta_A$ 是同构的所有对象 $A$ 组成．$\mathrm{Fix}(T)$ 是 $\mathfrak{R}$ 的**自反子范畴**（reflective subcategory），嵌入函子的左伴随是 $T$ 本身．反之，对 $\mathfrak{R}$ 的任意自反子范畴，由嵌入函子及其左伴随诱导的 $\mathfrak{R}$ 上的单子是幂等的；于是，对应于自反子范畴的伴随对是可单子化的．

**参考文献**


[A1] Barr, M., Wells, C., Toposes, monads, and theories, Springer, 1985.

[A2] Duskin, J. W., $K(\pi,n)$-torsors and the interpretation of "monad" cohomology, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 71(1974), 2554 – 2557.

[A3] Duskin, J. W., Simplicial methods and the interpretation of "monad" cohomology, *Mem. Amer. Math. Soc.*, 3(1975).

[A4] Adamek, J., Herrlich, H. and Strecker, G. E., Abstract and concrete categories, Wiley-Interscience, 1990.

[A5] Hazewinkel, M., Formal groups, Acad. Press, 1978, Sects. 14.5; 16.2, E2.

[A6] Appelgate, H., et al. (eds.), Seminar on monads and categorical homology theory ETH 1966/7, Lecture notes in math., 80, Springer, 1969.

[A7] Eilenberg, S. and Moore, J. C., Adjoint functors and monads, III. *J. Math.*, 9(1965), 381 – 398.

[A8] Eilenberg, S., et al. (eds.), Proc. conf. categorical algebra (La Jolla, 1965), Springer, 1966.


张英伯 译

## 三等分角问题 [trisection of an angle; трисекция угла]

把任意角 $\varphi$ 分成三个相等的部分；古代三大经典尺规作图问题之一．三等分角问题的解决归结为求三次方程 $4x^3-3x-\cos\varphi=0$（其中 $x=\cos(\varphi/3)$）的有理根；一般地说，这个方程是不能用根式求解的．因此，正如 P. Wantzel 于 1837 年所证明的，三等分角问题不能用直尺和圆规来解决．但是，对于角 $m\,90^\circ/2^n$，其中 $n$，$m$ 是整数，或者采用其他作图工具（例如，**Dinostratus 割圆曲线**（Dinostratus quadratrix）或**蚌线**（conchoid）），这种作图是可能的．

**参考文献**


[1] Энциклопедия элементарной математики, кн. 4, Геометрия, М., 1963.


Е. Г. Соболевская 撰

【补注】 同倍立方问题（duplication of the cube）一样，三等分角问题是 **Galois 理论**（Galois theory）中研究的问题之一，亦见 [A3].

关于三等分三角形三个角的一个著名结果是 F. Morley 定理（F. Morley theorem）（1899）：对于任意三角形三个角的三等分线，其中相邻的三等分线的三个交点构成一个等边三角形（见 [A1]）.

**参考文献**


[A1] Coxeter, H. S. M., Introduction to geometry, Wiley, 1961.

[A2] Ball, W. W. R. and Coxeter, H. S. M., Mathematical recreations and essays, Dover, reprint, 1987.

[A3] Stewart, I., Galois theory, Chapman & Hall, 1973.


杜小杨　张鸿林 译

## 三向量 [trivector; тривектор]

仿射空间 $A$ 中从一个共同原点发出的三个向量 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ 的有序族 $[\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}]$．一个三向量等于零，如果定义它的向量是共面的（线性相关）．一个非零的三向量决定了支撑它的三维空间．如果 $A$ 具有有限维

数 $n$ 且在某个基 $e=(\mathbf{e}_1,\cdots,\mathbf{e}_n)$ 下这三个向量是

$$\mathbf{u}=\sum_{i=1}^{n}u^i\mathbf{e}_i,\ \mathbf{v}=\sum_{i=1}^{n}v^i\mathbf{e}_i,\ \mathbf{w}=\sum_{i=1}^{n}w^i\mathbf{e}_i,$$

那么量

$$a^{ijk}=\begin{vmatrix}u^i & v^i & w^i\\ u^j & v^j & w^j\\ u^k & v^k & w^k\end{vmatrix}=3!\,u^{[i}v^jw^{k]}\ (1\leqslant i,j,k\leqslant n)$$

称为三向量 $[\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}]$ 关于基 $e$ 的坐标．这个坐标关于任何一对指标是反对称的；在 $A$ 的基变换时，它们和一个三次反变张量的坐标一样变换．这些坐标中，$n(n-1)(n-2)/6$ 个是本质的．如果两个三向量在 $A$ 的任何基下的坐标是相等的，则称它们是相等的．相等的三向量的一个类称为一个自由三向量（free trivector）．

在 $A$ 中存在标量积的情形下，向量代数的一些度量概念能够应用于三向量．三向量 $[\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}]$ 的测度（measure of a trivector）是从一个共同原点发出的形如 $\mathbf{h}=x\mathbf{u}+y\mathbf{v}+z\mathbf{w}$（这里 $0\leqslant x,y,z\leqslant 1$）的向量的端点的集合所形成的平行六面体的三维体积．当 $\dim A=3$ 的情形，三向量的测度等于向量 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ 的三重标量积．两个三向量的标量积（scalar product of two trivectors）是一个数值等于它们的测度与支撑它们的平面之间夹角的余弦的乘积．标量积是其因子的坐标的一个双线性型．如果 $\dim A=4$，那么三向量 $[\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}]$ 可以等同于 $A$ 的一个向量，称为 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ 的向量积（vector product）．

张量分析中的三向量（trivector in tensor calculus）是任意三阶反变斜对称张量（即（3，0）型张量）．每个这种张量可以表示为一些张量的和，它们对应于具有不同支撑平面的三向量．

亦见双向量（bivector）；外积（exterior product）；多向量（poly-vector）；**Plücker 坐标**（Plücker coordinates）．

Л．П．Купцов 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Schouten, J. A., Ricci-calculus, Springer, 1954, § 1.7.

[A2] Hestenes, D. and Sobszyk, G., Clifford algebra to geometric calculus, Reidel, 1984, p.4.

[A3] Sauer, R. and Szabo, I. (eds), Mathematische Hilfsmittel des Ingenieurs, Ⅲ, Springer, 1970, p.174.


林向岩 译 陆珊年 校

## 次摆线 [trochoid; трохоида]

一条平面曲线，它是当一个圆沿着另一个固定的圆滚动时，滚动圆内或外的一点 $M$ 所描绘的平面曲线．一条次摆线称为长短幅圆外摆线（epitrochoid）（图 1a，1b）还是长短幅圆内摆线（hypotrochoid）（图 2a，2b），取决于滚动圆在固定圆的外部还是内部与其相切触．

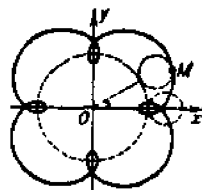



图 1a

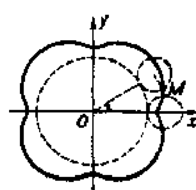



图 1b

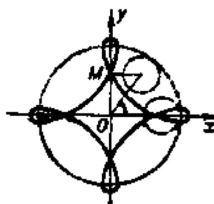



图 2a

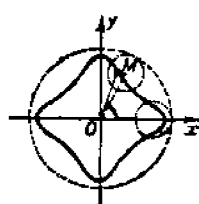



图 2b

长短幅圆外摆线的方程是

$$x=(R+mR)\cos mt-h\cos(t+mt),$$

$$y=(R+mR)\sin mt-h\sin(t+mt);$$

长短幅圆内摆线的方程是

$$x=(R-mR)\cos mt+h\cos(t-mt),$$

$$y=(R-mR)\sin mt-h\sin(t-mt);$$

其中 $r$ 是滚动圆的半径，$R$ 是固定圆的半径，$m=R/r$ 是次摆线的模数（modulus），$h$ 是描绘出次摆线的点 $M$ 与滚动圆中心的距离．如果 $h>r$，则次摆线称为长幅的（elongated）（图 1a，2a）；如果 $h<r$，则称为短幅的（shortened）（图 1b，2b）；如果 $h=r$，则称为**外摆线**（epicycloid）或**内摆线**（hypocycloid）．

如果 $h=R=r$，则该次摆线称为次摆线玫瑰线（trochoidal rosette）；在极坐标中它的方程是

$$\rho=a\sin\mu\varphi.$$

对于有理值 $\mu$，次摆线玫瑰线是**代数曲线**（algebraic curve）．如果 $R=r$，则次摆线称为 **Pascal 蚶线**（Pascal limaçon）；如果 $R=2r$，则为**椭圆**（ellipse）．

次摆线与**旋轮类曲线**（cycloidal curve）有关．次摆线有时也称为长幅的或短幅的摆线．

**参考文献**


[1] Савелов, А. А., Плоские кривые, М., 1960.


Д．Д．Соколов 撰

【补注】 次摆线在运动学中起着重要作用．它们被用于齿轮和发动机设计（见[A2]）．在历史上，在 N．

Copernicus 和 J. Kepler 成功地确立太阳系动力学以前，次摆线曾是用来描述行星运动的工具.

**参考文献**


[A1] Fladt, K., Analytische Geometrie spezieller ebener Kurven, Akad. Verlagsgesellschaft, 1962.

[A2] Müller, H.-R., Kinematik, de Gruyter, 1963.

[A3] Lawrence, J. D. A catalog of plane curves. Dover, reprint, 1972.

[A4] Berger, M., Geometry, Springer, 1987(中译本: M. 贝尔热, 几何, 第一 — 五卷, 科学出版社, 1987 — 1991).

[A5] Gomes Teixeira, F., Traite des courbes, 1 — 3, Chelsea, reprint, 1971.


杜小杨 张鸿林 译

## Trotter 积公式 [Trotter product formula]

【补注】 两个不必交换的算子的指数公式:

$$\exp(A+B)=\lim_{n\to\infty}(\exp(A/n)\exp(B/n))^n. \quad (A1)$$

最容易的是将此视为 $Q$ 上以 $A$ 和 $B$ 为变量的自由结合代数(关于增广理想)的完全化中的(形式)恒等式，这里 $A$ 和 $B$ 给定次数 1.

当 $A$ 和 $B$ 是 $(n\times n)$ 矩阵时，(A1) 由 S. Lie 给出，并简称为矩阵指数的积公式(product formula for matrix exponentials).

在理论物理中重要的型

$$\exp(it(A+B))=$$
$$=s-\lim_{n\to\infty}(\exp(itA/n)\exp(itB/n))^n$$

中公式成立，例如当 $A$ 和 $B$ 是可分 Hilbert 空间上的自伴算子，且定义在 $A$ 和 $B$ 的定义域的交上的算子 $A+B$ 是本质自伴随的. 在形式

$$\exp(-t(A+B))=$$
$$=s-\lim_{n\to\infty}(\exp(-tA/n)\exp(-tB/n))^n$$

中，当 $A$ 和 $B$ 有下界时(对正数 $t$)，公式成立.

所有这些结果(及更不同的一些)通常称为 Trotter-加藤定理(Trotter-Kato theorem).

Trotter 积公式可以在量子论的理论和模拟研究中找到许多应用(例如量子自旋系统).

**参考文献**


[A1] Trotter, H., On the product of semigroups of operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **10** (1959), 545 — 551.

[A2] Kato, T., Trotter's product formula for an arbitrary pair of self-adjoint contraction semigroups, in I. Gohberg and M. Kac (eds.), Topics in Functional Analysis, Acad. Press, 1978, 185 — 195.

[A3] Simon, B., Functional integration and quantum physics, Acad. Press, 1979.

[A4] Davies, E. B., One-parameter semigroups, Acad. Press, 1980.


蔡传仁 译

## 槽谷 [trough; желоб]

一个环形的双连通曲面 $S$，它包含一条平面闭曲线 $L$，且在 $L$ 的所有点处，$L$ 所在的平面 $P$ 与 $S$ 相切，沿着 $L$，曲面 $S$ 的 **Gauss 曲率** (Gaussian curvature) $K$ 为零. 在此情况下，如果 $L$ 将 $S$ 分成 Gauss 曲率为常号的两部分，那么，$S$ 的这两部分称为正半槽谷和负半槽谷. 槽谷的一个例子是环面沿着它的一条闭的抛物平行线的一个窄带.

槽谷在"整体"和"局部"几何学的研究对象中处于一个中间的位置，由于槽谷包含一条特殊闭曲线 $L$，因此槽谷不能任意小，但在与 $L$ 横截的方向，其维数可以任意小. 对槽谷研究的兴趣来自于下列事实: 沿着一闭抛物线具有交错曲率的曲面的足够窄的带常常是槽谷，由于这个原因，知道了槽谷在各种形变下的性质，有时能够得到关于曲面"全局"的相应信息.

对所谓的平面槽谷(这时曲线 $L$ 是凸的，而槽谷 $S$ 本身沿着 $P$ 的一边以一阶切触的方式放置)和旋转槽谷(这时 $L$ 是旋转曲面的一条平行线)已有了更为详尽的研究. 对于平面解析槽谷，有关二阶无穷小解析形变的刚性也已被证明. 对于旋转槽谷，有关一阶和二阶无穷小形变的研究已推广到 $C^1$ 正则类([4]). 从微分方程的观点来看，槽谷的研究可化为混合型方程的研究.

**参考文献**


[1] Ефимов, Н. В., «Успехи матем. наук», **3** (1948), 2, 47 — 158.

[2A] Кон-Фоссен, С. Э., «Успехи матем. наук», 1 (1936), 33 — 76.

[2B] Cohn-Vossen, S. E., Die parabolische Kurve, *Math. Ann.*, **99** (1928), 273 — 308.

[3A] Rembs, E., Über die Verbiegbarkeit der Rinnen, *Math. Z.*, **71** (1959), 1, 89 — 93.

[3B] Rembs, E., Über die Verbiegbarkeit der Rinnen II, *Math. Z.*, **73** (1960), 4, 330 — 332.

[4A] Сабитов, И. Х., «Матем. сб.», **98** (1975), 1, 113 — 129.

[4B] Сабитов, И. Х., «Матем. сб.», **99** (1976), 1, 49 — 57.


И. Х. Сабитов 撰

【补注】 关于槽谷的原始(德文)术语是"Flächenrinne"(曲面槽).

沈纯理 译

## 截尾分布 [truncated distribution; усеченное распределение]

由给定的概率分布把给定区间外部的负荷转到这个区间的内部所得到的一种概率分布(probability distribution). 设用分布函数 $F$ 给定了直线上的一个概率

分布，与 $F$ 所对应的截尾分布（truncated distribution）理解为分布函数

$$F_{a,b}(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant a,\\ \dfrac{F(x)-F(a)}{F(b)-F(a)}, & a<x\leqslant b,\\ 1 & x>b,\ a<b.\end{cases} \quad (1)$$

在 $a=-\infty\ (b=\infty)$ 的特殊情形截尾分布称为右截尾的（right truncated）(左截尾的（left truncated）).

与 (1) 一起还考虑如下的截尾分布函数:

$$F_{a,b}(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant a,\\ F(x)-F(a), & a<x<c,\\ F(x)+1-F(b), & c\leqslant x<b,\\ 1, & x\geqslant b,\end{cases} \quad (2)$$

$$F_{a,b}(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ F(x), & a\leqslant x<b,\\ 1, & x\geqslant b,\end{cases} \quad (3)$$

在 (1) 中分布在 $[a,b]$ 之外的负荷分配在整个区间 $[a,b]$ 上，在 (2) 中放在了点 $c\in(a,b]$ 上（在这种情形，当 $a<0<b$ 时，通常取 $c=0$)，而在 (3) 中负荷放在两个端点 $a$ 和 $b$ 上．

可如下解释形如 (1) 的截尾分布：设 $X$ 是具有分布函数 $F$ 的随机变量，截尾分布与该随机变量在给定条件 $a<x\leqslant b$ 之下的条件分布相同．

截尾分布的概念与截尾随机变量的概念紧密相连：如果 $X$ 是一随机变量，则截尾随机变量理解为

$$X^d=\begin{cases}X, & \text{如果 } |X|\leqslant d,\\ 0, & \text{如果 } |X|>d.\end{cases}$$

$X^d$ 的分布是与 $X$ 分布对应的 (2) 型截尾分布，在 (2) 中取 $a=-d,\ b=d$，而 $c=0$.

截尾运算 —— 取截尾分布或截尾随机变量，是一个非常广为使用的技巧性手法．它通过对初始分布作较小的改变便可能得到分析性质 —— 各阶矩的存在．

**参考文献**


[1] Прохоров, Ю. В., Розанов, Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд, М., 1973 (英译本: Proherov, Yu. V. and Rozanov, Yu. A., Probability theory, Springer, 1969).

[2] Cramér, H., Mathematical methods of statistics, Princeton Univ. Press, 1946 (中译本: H. 克拉美，统计学数学方法，上海科学技术出版社，1960).

[3] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, 1－2, Wiley, 1957－1971 (中译本: W. 费勒，概率论及其应用，第一卷，上、下册，科学出版社，1964, 1979；第二卷，科学出版社，1994).

[4] Loève, M., Probability theory, Springer, 1977 (中译本: M. 洛易甫，概率论，上册，科学出版社，1965).


Н. Г. Ушаков 撰

【译注】 俄文文献中，分布函数多为左连续的；西方（尤其是近代）文献中多为右连续的．本条在定义截尾分布函数时有些混淆：(1) 具有和 $F$ 相同的单侧连续性，(2) 破坏了 $F$ 的单侧连续性，而 (3) 则只保持 $F$ 的右连续性．

刘秀芳 译 陈培德 校

**真假值表 [truth table; истинностная таблица]**

用构成复合命题的简单命题的真假值表示复合命题真假值的表（见**真假值**(truth value))．真假值表有如下形式，其中 $T$ 表示“真”，$F$ 表示“假”．表中 $A_1, \cdots, A_n$ 是命题变元，$\mathfrak{A}(A_1,\cdots,A_n)$ 是**命题公式**（propositional formula)，并且 $\mathfrak{A}(A_1,\cdots,A_n)$ 的真假值由 $A_1,\cdots,A_n$ 的真假值确定．表中每行对应于 $n$ 个命题的真假值的 $2^n$ 种可能组合中的一种．而且 $V_i$ 是 $\mathfrak{A}(A_1,\cdots,A_n)$ 的真假值，如果 $A_1,\cdots,A_n$ 有第 $i$ 行表示的真假值．

| $A_1$ | $\cdots$ | $A_n$ | $\mathfrak{A}(A_1,\cdots,A_n)$ |
|---|---|---|---|
| $T$ | $\cdots$ | $T$ | $V_1$ |
| $T$ | $\cdots$ | $F$ | $V_2$ |
| • | $\cdots$ | • | • |
| • | $\cdots$ | • | • |
| $F$ | $\cdots$ | $F$ | $V_{2^n}$ |

在数理逻辑中，对应于逻辑联结词如否定、合取、析取、蕴涵和等价的真假值函数是用真假值表定义的．在经典命题演算中，真假值表用于验证公式的普遍有效性：一个公式是普遍有效的，当且仅当其真假值表的最后一列所有 $V_i$ 均为 $T$．

В. Е. Плиско 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Kleene, S. C., Introduction to metamathematics, North-Holland, 1951 (中译本: S. C. 克林，元数学导论，科学出版社，上册 1984，下册 1985).

[A2] Hatcher, W. S., Foundations of mathematics, Saunders, 1968.


别荣芳 译 罗里波 校

**真假值表可归约性 [truth-table reducibility; табличная сводимость]**，$tt$ 可归约性（$tt$-reducibility)，图表可归约性（diagram reducibility）

一种特殊类型的**算法可归约性**（algorithmic reducibility)．设 $A$ 和 $B$ 是两个自然数的集合．称 $A$ 真假值表可归约（truth-table reducible）到 $B$（记为 $A\leqslant_{tt}B$)，是指存在一个算法 $f$，使得对于任何自然数 $a$，该算法构造一个 Boole 函数 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)$（例如，这个函数由它的表给出：这个函数的变元数目可以依赖于 $a$) 和数 $b_1,\cdots,b_n$，使得 $a\in A$ 等价于 $\varphi(b_1\in$

$B$, …, $b_n \in B$) 的真假值.

关系 $\leqslant_{tt}$ 是自然数集所有子集的集上的拟序. 关系 $\leqslant_{tt}$ 对应于等价关系 $\equiv_{tt}$, 即如果 $A \leqslant_{tt} B$ 且 $B \leqslant_{tt} A$ 则 $A \equiv_{tt} B$. 这种关系的等价类被称为真假值表度 (truth-table degrees) (或 $tt$-度 ($tt$-degrees)); 它们形成一个上半格.

在算法理论中还有许多特殊类型的 $tt$ 可归约性被研究, 例如, 有界的 $tt$ 可归约性 (bounded $tt$-reducibility) ($btt$ 可归约性 ($btt$-reducibility)), 其定义是附加函数 $\varphi$ 的变元个数不依赖于 $a$ 的条件. 如果简单地将函数 $\varphi$ 取为 $x_1$, 这种可归约性被称为多一可归约性 (many-one reducibility) (记号 $\leqslant_m$). 在 $\leqslant_{tt}$ 和 $\leqslant_m$ 之间的中间可归约性 (intermediate reducibility), 特别是上面所有提到的可归约性, 有时被称为真假值表型的可归约性 (reducibilities of truth-table type) ([2]).

**参考文献**


[1] Rogers, jr., H., Theory of recursive functions and effective computability, McGraw-Hill, 1967.

[2] Дегтев, А. Н., 《Успехи матем. наук》, 34 (1979), 3, 137 – 168.


А. Л. Семенов 撰

【补注】 递归论中各种可归约性概念均可在计算复杂性理论中找到它们资源有界的类似的概念. 在这些理论中算法 $f$ 满足它可在多项式时间内或甚至在对数空间内计算的进一步的要求.

**参考文献**


[A1] Ladner, R. E., Lynch, N. A. and Selman, A. L., A comparison of polynomial time reducibilities. *Theor. Comp. Sc.*, 1 (1975), 103 – 123.

[A2] Soare, R. I., Recursively enumerable sets and degrees, Springer, 1987.


丁德成 译

**真假值 [truth value; истинностное значение]**

"真" ($T$) 或 "假" ($F$) 之一, 是给定逻辑公式在所考虑的解释 (模型) 中可能的取值. 有时在文献中真假值 $T$ 用 1 或 $t$ 表示, $F$ 用 0 或 $f$ 表示. 如果初等公式的真假值在模型 $\mathfrak{M}$ 中已定义, 那么任意公式 $A$ 的真假值 $\|A\|$ 可如下递归确定 (对经典逻辑):

$$\|B \& C\| = T \Longleftrightarrow \|B\| = T \text{ 和 } \|C\| = T,$$

$$\|B \vee C\| = T \Longleftrightarrow \|B\| = T \text{ 或 } \|C\| = T,$$

$$\|B \supset C\| = T \Longleftrightarrow \|B\| = F \text{ 或 } \|C\| = T,$$

$$\|\neg B\| = T \Longleftrightarrow \|B\| = F,$$

$$\|\forall x B(x)\| = T \Longleftrightarrow \text{对 } \mathfrak{M} \text{ 中任何 } a: \|B(a)\| = T,$$

$$\|\exists x B(x)\| = T \Longleftrightarrow \text{对 } \mathfrak{M} \text{ 中某个 } a: \|B(a)\| = T.$$

有时需要考虑另外的解释, 在其中逻辑公式的取值除 $T$ 和 $F$ 外还有其他 "中间" 值. 在这种解释中, 公式的真假值可以是诸如 Boole 代数元素 (对经典逻辑亦称 **Boole 值模型** (Boolean-valued model)), 伪 Boole 代数元素 (亦称 Heyting 代数, 见**伪 Boole 代数** (pseudo-Boolean algebra)), 拓扑空间的开集 (对直觉主义逻辑) 或拓扑 Boole 代数元素 (对**模态逻辑** (modal logic $S4$) (见 [2]). 在 Boole 值模型中, 如果初等公式的真假值已定义, 那么复合公式的真假值如下确定:

$$\|B \& C\| = \|B\| \cap \|C\|,$$

$$\|B \vee C\| = \|B\| \cup \|C\|, \quad \|B \supset C\| = \overline{\|B\|} \cup \|C\|,$$

$$\|\neg B\| = \overline{\|B\|}, \quad \|\forall x B(x)\| = \bigcap_{a \in \mathfrak{M}} \|B(a)\|,$$

$$\|\exists x B(x)\| = \bigcup_{a \in \mathfrak{M}} \|B(a)\|,$$

其中 $\overline{\|B\|}$ 是元素 $\|B\|$ 的补. 例如在直觉主义逻辑的拓扑模型中, 复合公式的真假值如下确定:

$$\|B \& C\| = \|B\| \cap \|C\|, \quad \|B \vee C\| =$$

$$\|B\| \cup \|C\|, \quad \|B \supset C\| = \operatorname{Int}(\overline{\|B\|} \cup \|C\|),$$

$$\|\neg B\| = \operatorname{Int}(\overline{\|B\|}),$$

$$\|\forall x B(x)\| = \operatorname{Int}\left[\bigcap_{a \in \mathfrak{M}} \|B(a)\|\right],$$

$$\|\exists x B(x)\| = \bigcup_{a \in \mathfrak{M}} \|B(a)\|,$$

其中 $\operatorname{Int}(X)$ 表示集合 $X$ 的内部.

**参考文献**


[1] Новиков, П. С., Элеменны математической логика, 2 изд., М., 1973 (英译本: Novikov, P. S., Elements of mathematical logic, Oliver & Boyd and Acad. Press, 1964).

[2] Rasiowa, H. and Sikorski, R., The mathematics of metamathematics, PWN, 1963.


С. К. Соболев 撰 别荣芳 译 罗里波 校

**Цирелсон 空间 [Tsirelson space; Цирелсова пространство]**

【补注】 自反 **Banach** 空间 (Banach space) (见**自反空间** (reflexive space)) 的一个特殊的例子, 它不包含一个嵌入的 $l_p$ 空间或嵌入的 $c_0$ 空间. 另一方面, 经典的 Banach 空间, 如其 $p$ 次幂可积的可测函数的等价类的空间 $L_p(\mu) = L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ 和具有上确界范数的 $K$ 上连续标量值函数的空间 $C(K)$ 都包含 $c_0$ 或 $l_p$ 的一个拷贝, 以及所有 **Orlicz 空间** (Orlicz space) 也是如此.

关于不包含 $l_p$ 或 $c_0$ 的 Banach 空间的结果的选录见 [A3], Sect. 2e.

参考文献


[A1] Tsirelson, B. S., Not every Banach space contains an imbedding of $l_p$ or $c_0$. *Funct. Anal. Appl.*, **8** (1974), 2, 138 – 141 (*Funkts Anal Prilozhen*, **8** (1974), 2, 57 – 60).

[A2] Casazza, P. G. and Shura, Th. J., Tsirelson's space. Lecture notes in math., 1363, Springer, 1989.

[A3] Lindenstrauss, J. and Tzafriri, L., Classical Banach spaces, I, Sequence spaces, Springer, 1977.

[A4] Dulst, D. van, Characterization of Banach space not containing L, CWI, Amsterdam, 1989.


葛显良 译 鲁世杰 校

**管状区域** [**tube domain**; **трубчатая область**], 管 (tube)

复空间 $\mathbf{C}^n$ 中的区域 $T$

$$T = B + i\mathbf{R}^n = \{z = x + iy: x \in B, |y| < \infty\},$$

其中 $B$ 是实子空间 $\mathbf{R}^n \subset \mathbf{C}^n$ 中的一区域，称为管状区域 $T$ 的底 (base of the tube domain $T$)．形如 $\mathbf{R}^n + iB$ 的区域也称为管状区域．任一管状区域的**全纯包络** (holomorphic envelope) 和它的凸包是相同的；特别地，每一在管状区域 $T$ 全纯的函数都可拓展到一在 $T$ 的凸包是全纯的函数．一管状区域称为径向的 (radial)，如果它的底是 $\mathbf{R}^n$ 中的一连结锥．

参考文献


[1] Владимиров, В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964 (英译本: Vladimirov, V. S., Methods of the theory of functions of many complex variables, M. I. T., 1966).


Е. М. Чирка 撰

【补注】

参考文献


[A1] Hörmander, L., An introduction to complex analysis in several variables, North-Holland, 1973.


钟同德 译

**管状邻域** [**tubular neighbourhood**; **трубчатая окрестность**]

光滑子流形 $N$ 在光滑流形 $M$ 中的一个邻域，即是一个 $N$ 上具有纤维 $\mathbf{R}^d$ 的纤维化，其中

$$d = \dim M - \dim N.$$

假设在 $M$ 中，选定一个 Riemann 度量，并考虑从 $N$ 中开始且垂直于 $N$ 的测地线段．如果 $N$ 是紧的，则存在 $\varepsilon > 0$，使得没有从 $N$ 中不同的点出发的长度 $\leqslant \varepsilon$ 的两条线段相交．所有这样长度 $< \varepsilon$ 的线段的并是 $N$ 的开邻域 $U$，称为 $N$ 的管状邻域．对一个非紧的 $N$，通过用可数个紧体族覆盖 $N$ 和当覆盖的元素数目增加时，减少 $\varepsilon$ 来构造一个管状邻域是可能的．存在一个**形变收缩核** (deformation retract) $r: U \to N$，它将 $U$ 的每个点联系到含该点的测地线的始点．该收缩决定了一个具有纤维 $\mathbf{R}^d$ 的向量丛，这个向量丛同构于嵌入 $N \to M$ 的**法丛** (normal bundle) $\nu$．在此方法中，商空间 $\bar{U}/\partial\bar{U}$ 同胚于 $\nu$ 的 **Thom 空间** (Thom space)．

对拓扑流形，也可引进管状邻域的概念的类似物 (这里，必须考虑局部平坦嵌入，[2])．

参考文献


[1] Thom, R., Quelques propriétés globales des variétés différentiables, *Comm. Math. Helv.*, **28** (1954), 17 – 86.

[2] Kirby, R. and Siebenmann, L., Foundational essays on topological manifolds, Princeton Univ. Press, 1977.


Ю. Б. Рудяк 撰

【补注】 管状邻域是由 H. Whitney 在他的微分流形的论述中引进的 (关于一些历史，见[A2])．

参考文献


[A1] Hirsch, M., Differential topology, Springer, 1976.

[A2] Dieudonné, J., A history of algebraic and differential topology: 1900 – 1960, Birkhauser, 1989, Chapt. III.


薛春华 译

**多元组** [**tuple**; **кортеж**]

某一集合 $X$ 中元素的一个有限序列 (允许重复)．一个多元组记作 $\langle x_1, \cdots, x_n \rangle$, $(x_i)$, $(x_i)_{i=1}^n$, $(x_i)_1^n$, $(x_i)_{i\in\{1,\cdots,n\}}$, $(x_1, \cdots, x_n)$ 或 $x_1, \cdots, x_n$．数 $n$ 称为它的长度 ($n \geqslant 0$)，$x_i$ 称为这个 $n$ 元组的第 $i$ 项而 $x_i \in X$ ($1 \leqslant i \leqslant n$)．对于 $n = 0$，就得到空多元组，它不含有项．

多元组这个术语有如下的同义语：在**字母表** (alphabet) $X$ 内的一个**字** (word) (这时常假定 $X$ 是有限的)；集合 $X$ 的某个 Descartes 幂的一个元素；由 $X$ 生成的有单位元的自由半群中一个元素；定义在前 $n$ 个自然数 ($n \geqslant 0$) 上取值在 $X$ 内的一个函数．

В. Н. Гришин 撰

【补注】 多元组的典型性质是，一个多元组 $(x_1, \cdots, x_n)$ 等于另一个多元组 $(y_1, \cdots, y_m)$，仅当 $n = m$ 且 $x_i = y_i$ ($i = 1, \cdots, n$) 时．在数学的集合论基础的论述中 (例如，Zermelo-Frankel **集合论** (set theory))，每一个对象都必须是一个集合或一个类，多元组常用以下的归纳过程作为集合来构造：当 $n = 0$ 时 $(x_1, \cdots, x_n)$ 是空集，而 $(x_1, \cdots, x_{n+1}) = \{(x_1, \cdots, x_n), \{x_{n+1}\}\}$．

郝钢新 译

**湍流的数学问题** [**turbulence, mathematical problems in**; **турбулентности математические задачи**]

描述流体和气体的湍流流动（即这样的紊乱流动，其热力学的和流体力学的性质因存在无数各种尺寸的涡旋而经历着无序的起伏，并从而在空间和时间上极无规则地变化着）之方程的推导、分析和求解.

湍流流动的具体实现是由通常的粘性液体的流体力学方程描述的．它们的 Cauchy 问题的唯一性并未得到证明（只对二维流动和在关于运动粘性 $\nu$ 的变化的专门假设下得到了证明）．对应层流流动的定常解，形式上对任何 Reynolds 数 $\mathrm{Re}=UL/\nu$（这里 $L$ 和 $U$ 是长度和速度的尺度）都存在，但当 $\mathrm{Re}>\mathrm{Re}_{cr}$ 时它们是不稳定的．关于形式为

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x},t)=\mathbf{a}(\mathbf{x})\exp(\lambda t)$$

的速度场的小扰动的流体力学不稳定性是被作为 $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ 的相应线性化方程（所谓的 **Orr-Sommerfeld 方程**（Orr-Sommerfeld equation））的本征值问题研究的.

对 $\mathrm{Re}_{cr}$ 的某邻域中的 Reynolds 数 Re 的值，在流动的相空间中存在封闭轨迹的单参数族．若这只发生在 $\mathrm{Re}>\mathrm{Re}_{cr}$ 时，则分岔称为正规的（normal），且封闭轨迹是具有 $(\mathrm{Re}-\mathrm{Re}_{cr})^{1/2}$ 量级的有限振幅和任意相位的 $t$ 的周期解所对应的极限环．按 Л. Д. Ландау（1944）的假设，湍流是一系列正规分岔的结果而形成的并是具有众多数量的不可比振动频率和相应自由度即振动相位的准周期的各态历经的流动.

如果在 $\mathrm{Re}<\mathrm{Re}_{cr}$ 时也出现封闭的相轨迹族，则分岔称为反的（inverse），且极限环是不稳定的（即轨迹从它们上松开）；当 $\mathrm{Re}\to\mathrm{Re}_{cr}-0$ 时，它们紧缩并在极限时消失，而当 $\mathrm{Re}>\mathrm{Re}_{cr}$ 时，扰动随时间而增长并看来迅速具有非周期性质．可能在这情况下相空间里有**奇怪吸引子**（strange attractor）即非游荡点的集合 $\Lambda$（诸点的每个邻域都被某轨迹相交至少两次），这些点有别于不动点和封闭轨迹，并有这样的邻域，在那里所有出现的轨迹都渐近地趋向 $\Lambda$.

有一个假说，在四个分岔之后在液体流动的相空间中出现局部地是二维曲面的 Cantor 集的奇怪吸引子，它到达时就引起流动的混乱即湍流．但是，流体力学系统的分岔理论还尚未建立（见[3]）.

不可压缩流体的湍流流动的最完全的统计学描述是可能速度场 $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ 在泛函空间上的概率量度 $\mathrm{P}(\omega)$ 或者它的称为特征泛函的泛函 Fourier 变换（例如，在谱表示中的 $\Psi[\mathbf{z}(\mathbf{k},t)]$，见[1]）．对该泛函由 **Navier-Stokes 方程**（Navier-Stokes equations）推导出变分微分表示的线性方程（所以湍流的统计动力学便是线性的），它应该对给定的

$$\Psi_0[\mathbf{z}(\mathbf{k})]=\Psi[\mathbf{z}(\mathbf{k})\delta(t-t_0)]$$

求解．特别是，对于给出固定时刻速度场的完全统计描述之空间特征泛函 $\Psi[z(k),t]$，得到了 Hopf 方程（Hopf equation）：

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t}=(H_0+H_1)\Psi;$$

$$H_0=-i\nu\int d\mathbf{k}\,\mathbf{k}^2 z_\alpha(\mathbf{k})D_\alpha(\mathbf{k});$$

$$H_1=\iint d\mathbf{k}'d\mathbf{k}''B_{\alpha,\beta\gamma}(\mathbf{k}'+\mathbf{k}'')z_\beta\cdot$$

$$\cdot(u'+u'')D_\alpha(\mathbf{k}')D_\gamma(\mathbf{k}''),$$

其中

$$B_{\alpha,\beta\gamma}(\mathbf{k})=ik_\alpha(\delta_{\beta\gamma}-k_\beta k_\gamma k^{-2}),$$

和 $D_\alpha(\mathbf{k})$ 是对于 $z_\alpha(\mathbf{k})$ 的变分微分算子．这个方程类似于在具有专门类型强相互作用（两个玻色子合并为一个）的量子化 Bose 场的 Schrödinger 表示中的态 $\Psi$ 的方程：$z_\alpha(\mathbf{k})$ 和 $D_\alpha(\mathbf{k})$ 是具有动量 $\mathbf{k}$ 的量子的生成和消亡算子，而 Reynolds 数 Re 充当相互作用常数．求解变分微分的线性方程的一般方法还未建立．当 $\mathrm{Re}\gg 1$ 时，扰动理论不起作用，虽然对 Feynman 图的部分求和是可能的（见[2]）．解 $\Psi$ 可以写成泛函积分的形式，但计算这种积分的一般方法还没有．尽管如此，可以用对 Navier-Stokes 方程的 Галеркин 近似构造概率量度 $\mathrm{P}_e(\omega)$ 来当作求找描述湍流流动的概率量度 $\mathrm{P}(\omega)$ 的一般方法：对量度族 $\{\mathrm{P}_e\}$ 已证明了弱紧密性（见[6]），特别是，用这方法已证明了解 $\Psi$ 的某些唯一性和存在定理.

湍流流动的完全统计描述的等价表述在于对空-时点 $M_m(\mathbf{x}_m,t_m)$ 的所有可能有限集合上速度场的值 $\mathbf{u}_m=u(M_m)$ 确定所有有限维的概率密度 $f_n=\mathrm{P}_{m_1\cdots m_n}(\mathbf{u}_1,\cdots,\mathbf{u}_n)$．对它们由 Navier-Stokes 方程（见[5]）导出线性方程

$$\frac{\partial f_n}{\partial t_k}=-\left[\frac{\partial u_{k\alpha}f_n}{\partial x_{k\alpha}}+\frac{\partial w_{k\alpha}f_n}{\partial u_{k\alpha}}\right],$$

其中 $\mathbf{w}_k$ 是在值 $\mathbf{u}_1=\mathbf{u}(M_1),\cdots,\mathbf{u}_n=\mathbf{u}(M_n)$ 固定的条件下点 $(\mathbf{x},t_k)$ 上的加速度变换到点 $M_k$ 的条件数学期望．量 $w_{k\alpha}f_n$ 包含 $f_{n+1}du_{n+1}$ 的积分，所以 $f_n$ 的方程组成一个无穷系列（类似于 **Боголюбов 方程系列**（Bogolyubov chain of equations））．对 $\partial f_n/\partial t_k$ 的方程相对于 $F(u_1,\cdots,u_n)d\mathbf{u}_1\cdots d\mathbf{u}_k$ 求积分就得到广义 Freedman-Keller 方程（generalized Freedman-Keller equation）

$$\frac{\partial\overline{F}}{\partial t_k}=\overline{\frac{\partial u_{k\alpha}F}{\partial x_{k\alpha}}}+\overline{w_{k\alpha}\frac{\partial F}{\partial u_{k\alpha}}},$$

式中横线代表数学期望．这方程是对 $F=u_{1\alpha_1}^{m_1}\cdots u_{p\alpha_p}^{m_p}$ 导出的，所以 $\overline{F}$ 是 $N=m_1+\cdots+m_n$ 阶速度场的 $n$ 点的统计动量．动量的方程组成无穷链（它的可求解

性借助 Navier-Stokes 方程的 Галеркин 近似可得到证明).

当 $N=1$ 时, 这些方程 (Reynolds 方程 (Reynolds equations)) 由直接平均 Navier-Stokes 方程得到, 并因出现附加未知量即所谓的 Reynolds 应力 (Reynolds stresses) —— 一点的第二动量 $\tau_{jl}=-\rho\overline{u_j' u_l'}$ (其中 $\rho$ 是流体密度, 撇代表对数学期望的偏差) 而不同于平均速度场 $\bar{\mathbf{u}}$ 的同样方程. 封闭 Freedman-Keller 方程组的最简单方法是将 $\tau_{jl}$ 表示为 $\partial\bar{u}_i/\partial x_k$ 的函数形式. 在所谓的半经验湍流理论中这些函数取为线性的, 它们的系数 (有湍流粘性系数的意义) 遵从一些附加假设 (例如, 正比于 $lb^{1/2}$, 这里 $l$ 和 $b$ 是单位质量湍流的尺度和动能, 对它们构造了补充方程: 这使平均流动的描述是非线性的和产生特别的效应).

当 $N=2$ 时, 得到速度场的两点相关函数 $\overline{u_{1\alpha}' u_{2\beta}'}$ 的方程 (或它们的关于 $(M_1-M_2)$ 谱函数的 Fourier 变换). 为使其封闭, 必须有关于出现的第三动量的补充假设 (见 [1], [5]). 为构造湍流谱封闭方程的最自然的方法是由截断部分求和的 Feynman 图获得.

实质性的几何简化是在均匀的和各向同性的湍流情况下得到的. 这模型重要, 因为任何具有大 Reynolds 数的实际湍流原来就是局部稳定的、局部均匀的和局部各向同性的. 而且, 在动能 $\varepsilon$ 的固定耗散速率下, 具有非常大 Reynolds 数的三维湍流流动的统计结构在足够小尺度时完全由两个参量 $\varepsilon$ 和 $\nu$ 决定, 所以, 例如在 $r \ll L$ 时速度的结构函数应有形式

$$\overline{[u_\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{r},t)-u_\alpha(\mathbf{x},t)]^2}=(\varepsilon r)^{2/3}\varphi\left(\frac{r}{\lambda}\right),$$

其中 $L$ 是整体上流动的尺度, $\lambda=\varepsilon^{1/4}\nu^{-3/4}$ 是 Колмогоров 内尺度; 在所谓的惯性区域 $L \gg r \gg \lambda$ 内, 参量 $\nu$ 消失, 函数 $\varphi$ 变为常数. 另一方面, 如果考虑场 $\varepsilon$ 的起伏, 则 Колмогоров 相似性变成不完全的且结构函数获得一个带小指数 $m$ 的修正因子 $(r/L)^m$.

在二维流动中, 除能量外还有均方涡量即涡似能 (enstrophy) 也是运动的绝热积分 (所以涡线不拉伸), 除了参量 $\varepsilon$ 和 $\nu$, 还出现涡似能的衰变率 $\varepsilon_\omega$. 在这里按 Колмогоров 定律能量由供能涡的尺度传向大尺度区域, 而按非局部谱定律涡似能则是传向小尺度区域 (见 [4]):

$$E(k)=C_\omega\varepsilon_\omega^{2/3}k^{-3}\left[\ln\frac{k}{k_0}\right]^{-1/3}.$$

由天气涡旋和 Rossby 波形成的大气中和在海洋里大尺度准二维湍流就具有这些性质. 二维流动的涡旋的作用在这里由所谓的有势涡旋即绝对速度的涡旋与熵的梯度之标量积来实现. 它的方程在类地转近似时得到形式

$$\frac{\partial\mathscr{L}\psi}{\partial t}+J(\psi,\mathscr{L}\psi)+\beta\frac{\partial\psi}{\partial x}=F;$$

$$\mathscr{L}=\Delta+\frac{\partial}{\partial z}\frac{H^2}{L_R^2}\frac{\partial}{\partial z},$$

其中 $\psi$, $\Delta$, $J$ 分别是水平向流函数、Laplac 算子和 Jacobi 式, $z$ 是纵向坐标, $H$ 和 $L_R=HN/f$ 分别是层的厚度和 Rossby "形变半径" ($N$ 是 Waissala-Brent 频率, $f$ 是 Coriolis 参量), $x$ 是赤道圆的弧, $\beta$ 是 $f$ 沿经线的导数, $F$ 描述非绝热因素. 在 $L \ll L_R$ 区域内, 获得了二维湍流的常微分方程, 波数 $k_\beta=((\beta/2)U)^{1/2}$ (其中 $U$ 是典型速度) 把涡旋 $(k>k_\beta)$ 与 Rossby 波 $(k<k_\beta)$ 分开. 初始小涡旋有随时间的增长而沿垂线拉直的趋势 ("正压化"), 朝西面移动和沿纬线圆延伸.

不可压缩流体中的湍流的重要普遍化是有浮力的成层流体中的湍流和磁流体力学湍流.

**参考文献**


[1] Монин, А. С., Яглом, А. М., Статистическая гидромеханика, ч. 1-2, М., 1965-1967 (英译本: Monin, A. S. and Yaglom, A. M., Fluid mechanics, 1-2, M. I. T., 1971-1975).

[2] Гледзер, Е. Б., Монин, А. С., 《Успехи матем. наук》, **29** (1974), 3, 111-159.

[3] Монин, А. С., 《Успехи физич. наук》, **125** (1978), 1, 97-122.

[4] Мирабель, А. П., Монин, А. С., 《Успехи механики》, 2 (1979), 3, 47-95.

[5] Монин, А. С., Озмидов, Р. В., Океанская турбулентность, Л., 1981 (英译本: Monin, A. S. and Ozmidov, R. V., Turbulence in the ocean, Reidel, 1985).

[6] Вишик, М. И., Фурсиков, А. В., Математические задачи статистической гидромеханики, М., 1980 (英译本: Vishik, M. I. and Fursikov, A. V., Mathematical problems of statistical hydromechanics, Kluwer, 1988).


А. С. Монин 撰

【补注】 在 1883 年 O. Reynolds 用实验研究了圆截面管道中的流体流动, 发现了由定常层流流动向后来称为湍流 (turbulent) 的无规则流动的过渡. 但是, 所有后来按线性稳定性分析所做的计算表明, 基本层流到无限小扰动时是稳定的. 所以, 以下结论不对: 对任何层流都有一个临界的 $\mathrm{Re}_{cr}$, 大于它则流动不稳定. 事实上, 基础的 Reynolds 实验还难以就分岔分析做所有的尝试.

Orr-Sommerfeld 方程不是线性流体力学稳定性分析的普遍方程, 它只适用于所谓的剪切流动 (例如见 [A10]).

Ландау 关于向湍流转变的假设有历史的意义, 而现在 (1991) 一般已被放弃了.

关于均匀湍流的公认的参考文献仍是 [A11].

在最近十年里下列主要课题有所发展. 在统计近

似方面沿 Колмогоров 开创的路线有贡献，见[A1]，[A2]．假定动能 $e(t)\approx U^2$ 以常速率 $e'(t)=-\varepsilon$ 衰减，就有 Колмогоров 关系 $\varepsilon\approx U^3/L$，这里 $L$ 和 $U$ 是涡旋的长度和速度的尺度，涡旋衰减的时间尺度等于 $L/U$．

Navier-Stokes 方程中非线性性对自由边界的波形状的影响由诸如 Boussinesq 方程（Boussinesq equation）和 Burgers 方程（Burgers equation）等近似方程研究，后一方程有形式

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

这方程有严格解．动用布线模型可由 Kelvin-Helmholtz 问题（Kelvin-Helmholtz problem）得以理解：在有切向流的自由边界上线性波表明是不稳定的．不稳定性（Eckhaus 不稳定性（Eckhaus instability））的非线性分析已用非线性调制方程作为起点做过了．关于所谓的 Ginzburg-Ландау 方程（Ginzburg-Landau equation）的理论见[A3]．

湍流是由于在流动的动力学中存在奇怪吸引子所致的想法是第一次在[A4]中表达的，关于这话题的介绍说明还可见[A5]．在[A6]中给出了估计吸引子部分尺寸的方法．

**参考文献**


[A1] Tennekes, H. and Lumley, J. L., A first course in turbulence, M. I. T., 1972.

[A2] Hinze, J. O., Turbulence, McGraw-Hill, 1975.

[A3] Iooss, G., Mielke, Y. and Denay, Y., Theory of steady Ginzburg-Landau equation in hydrodynamic stability problems, *Eur. J. Mech. B./Fluid*, **8** (1989), 229 – 268.

[A4] Ruelle, D. and Takens, F., On the nature of turbnlence, *Comm. Math. Phys.*, **20** (1971), 167 – 192.

[A5] Berge, P., Pomeau, Y. and Vidal, C., Order within chaos, Wiley, 1984.

[A6] Constantin, P. and Foias, C., Navier-Stokes equations, Univ. Chicago Press, 1988.

[A7] Lesieur, M., Turbnlence in fluids, Kluwer, 1990.

[A8] Lander, B. E. and Spalding, D. B., Mathematical models of turbulence, Acad. Press, 1972.

[A9] Landahl, M. T. and Mollo-Christensen, E., Turbulence, Cambridge Univ. Press, 1986.

[A10] Lin, C. C., The theory of hydrodynamic stability, Cambridge Univ. Press, 1955.

[A11] Batchelor, G. K., The theory of homogeneous turbulence, Cambridge Univ. Press, 1956.


李维新 译

**湍流系统[turbulent system; бушующая система]**，激流系统（surging system）

状态空间含有湍流流形（turbulence manifold）的动力系统（dynamical system）．湍流流形就是这样的流形，穿过它以后，控制该系统的运动的规律将发生变化．$\mathbf{R}^n$ 中的湍流系统 $S$ 由几个微分方程组

$$(S_i): \dot{x}=f_i(t),\ x\in\mathbf{R}^n,\ \dot{x}=\frac{dx}{dt}$$

和几个曲面

$$M_i\subset\mathbf{R}^n,\ i=1,2,\cdots,m$$

来表示．当 $S$ 的一个轨道在区域 $(S_i)$ 中与 $M_i$ 相遇时，就发生一个湍流（turbulence），即系统 $(S_i)$ 要由 $(S_{i+1})$ 代替，而 $(S_{m+1})$ 与 $(S_1)$ 相同（详见[3]）．在湍流系统的定义中出现了几个微分方程组 $(S_i)$ 使得这种系统的相图十分多种多样．例如，设一个湍流系统由两个定常的线性微分方程组

$$\dot{x}_1=a_i+b_ix_1+c_ix_2,$$

$$\dot{x}_2=\beta_ix_1+\gamma_ix_2,\ i=1,2,$$

给出，且以直线 $x_2=0$ 作为湍流流形 $M_1=M_2$，它就可能有**极限环**（limit cycle）（[3]，[4]）．湍流系统给出了非线性振动的特定的模型，使人们可以描述"滞后现象"．

**参考文献**


[1] Vogel, T., Sur les systèmes déferlants, *Bull. Soc. Math. France*, **81** (1953), 63 – 75.

[2] Vogel, T., Systèmes déferlants, systèmes héréditaires. systèmes dynamiques, in Qualitative Methods in Nonlinear Vibration Theory (Proc. Internat. Symp. Nonlinear Vibrations, 1961) Vol. 2, Kiev, 1963, 123 – 130.

[3] Мышкис, А. Д., Хохряков, А. Я., 《Матем. сб.》, **45** (1958), 3, 401 – 414.

[4] Gh'derman, J. I., On the limit eycles of piecewise affine systems. *Soviet Math. Dokl*, **17** (1976), 5, 1328 – 1332 (《Докл. АН СССР》, **230** (1976), 3, 512 – 515).


Ю. С. Богданов 撰

【补注】"湍流系统"一词在英文文献中并不用来表示上述概念．（事实上，除了在[1]－[3]中以外，上面讲的系统并没有专门的名词．）

关于流体中的湍流，见**湍流中的数学问题**（turbulence, mathematical problems in）．

在控制理论与统计学中有类似的概念．在控制理论中要考虑这样的控制系统，它在状态空间的不同的体制（regime）下，其动力学由不同的（微分）方程给出，而这不同的方程又常是同一个非线性控制系统在状态空间的不同部分用不同的线性化来近似．在这种情况下，有时用"滑动控制"（sliding control）或"控制安排"（control scheduling）这样的名词．

在统计学和控制理论中，都要考虑由几个可能的规律来控制的随机过程，而且可能由一个规律突然转变到另一个规律．在统计学中，察觉这种变化是否发

生就称为变化点侦察(change-point detection).

【译注】 译者认为英译本把标题译错了.俄文 бушующая 是由 бушовать 一词变来,是波涛汹涌之意.因此英文另译为 surging system 是对的,中文译"激变系统"与原意较合,而与湍流(turbulent)没有关系.所引文献[1]称为 déferlant,是由法文 déferler 一词变来,原意也是汹涌激荡.英译法使人与流体力学的湍流混淆,补注中有说明. 齐民友 译

**Turing 机[Turing machine; Тьюринга машина]**

与一种特殊类型的**抽象计算机**(computer, abstract)相联系的机器的名称.这种类型的机器概念起源于 20 世纪 30 年代中期 A. M. Turing 的[1],此文是 Turing 分析一个人根据预先设计的计划实行某种计算行为的结果,所谓计算机就是对符号的复合逐次施行变换.他做这种分析的目的是为了对于**算法**(algorithm)的笼统直观思想找到一个确切的等价的数学定义,以解决当时紧迫的问题.在**算法理论**(algorithms, theory of)的发展过程中,Turing 原来的定义经过了若干次修改.此处给出的定义可以追溯到 E. Post([2]);Turing 机的这种定义是广泛流行的形式(Turing 机已有详细的刻画,例如在[3]和[4]中).

把 Turing 机视为一个具有有个限内部状态(internal state)和无穷个外部存储(称为带子(tape))能力的自动工作系统是方便的.有两种特殊的状态:初始状态(initial state)和终止状态(final state).带子分成许多方格,并且左右皆无界.某一个有限**字母表**(alphabet) $A$ 的任一字母都可以打印到带子的每一方格内(为了一致起见,可把空格看作打印了一个空白字母是方便的).在离散时间的每一时刻,Turing 机处于它的一个状态,当它扫描到带子上的一个方格时,就接受打印在该方格内的符号(字母表 $A$ 的一个字母或空白字母).

如果 Turing 机在某一时刻处于非终止状态,那么它完成由它当时的状态和当时在带子上接受的符号所完全决定的一个步骤(step).一个步骤由下列内容构成:1)在扫描的方格内打印一个新符号,这个新符号可能与原有符号相同,也可能是一个空白;2)过渡到一个新状态,这个新状态可能与原有状态相同,也可能是一个终止状态;3)把带子左移或右移一个方格,或带子保持不动.Turing 机所有可能的步骤的清单依赖于"非终止状态+接受的符号"所能表达的当时的组合,例如,给定 Turing 机可用具有两个输入的一个特殊的表称为程序(program)或模式(scheme))给出.机器对应于步骤的码称为它的指令(command),置于这个表的方格中.Turing 机的程序是具有特定结构的一种对象,并且人们可以约定 Turing 机与其程序是等同的.如果希望强调该 Turing 机与字母表的联系,那么人们通常说这个机器是字母表 $A$ 上的一个 Turing 机(Turing machine in the alphabet).

Turing 机的瞬时状态由其构形(configuration)完全刻画出,给定时刻的构形由下列信息构成:1)印在带子的方格中的实际符号;2)机器当时扫描的方格;3)机器的内部状态.对应于 Turing 机终止状态的构形也称终止的(final).

如果 Turing 机的某一非终止的构形和初始构形一样是固定的,那么这个机器的运行将由(逐步的)序列变换构成,根据 Turing 机的程序变换由一个初始构形开始,直到达到一个终止构形.这以后,Turing 机的运行终止,并且把终止构形的出现视为机器运行的结果.一般说来,自然不是对每一个初始构形 Turing 机的运行都会终止的.

Turing 机的概念可以用来使得一个给定字母表上的算法的一般思想精确化,做法如下:字母表 $A$ 上的一个 Turing 算法(Turing algorithm in an alphabet $A$)是指如下类型的任意算法 $\mathfrak{A}$.在字母表 $A$ 上取一个固定的 Turing 机 $\mathfrak{M}$.设 $\mathscr{P}$ 是 $A$ 中对于算法 $\mathfrak{A}$ 作为原始数据的字.机器 $\mathfrak{M}$ 的初始构形为:1)字 $\mathscr{P}$ 无空格地印在带子上,其余方格空着(即保留空白字母);2)机器 $\mathfrak{M}$ 准备扫描字 $\mathscr{P}$ 的第一个字母所在的方格;3) $\mathfrak{M}$ 处于初始状态(如果 $\mathscr{P}$ 是空字,那么带子也是空的,并且可以扫描任一方格).假定 $\mathfrak{M}$ 从这个初始构形开始完成其运行,考虑在终止构形下 $\mathfrak{M}$ 扫描带子上的方格,如果打印在这个方格上的是空白字母,那么 $\mathfrak{A}(\mathscr{P})$ 是空字.否则,$\mathfrak{A}(\mathscr{P})$ 是打印在带子上的字,它包含其扫描的方格上的字母,但不含任一空白字母的最大截段的字.

有种种强有力的理由认为,用 Turing 机概念使字母表上**算法**(algorithm)的一般概念精确化是适宜的.即它保证了,对于某些字母表上的每一个算法 $\mathfrak{A}$,可以构造一个 Turing 算法,使得在与算法 $\mathfrak{A}$ 有相同初始数据下得到相同结果.这个约定在算法论中称为 Turing 论题(Turing thesis).Turing 论题的可接受性等价于对于部分递归函数的 **Church 论题**(Church thesis)或对于**正规算法**(normal algorithm)的正规化原理的可接受性.然而,与后而两个论题相比较,Turing 论题有更强的说服力.事实上,根据一个选好的计划进行计算,数学家的行为在某种程度上类似于 Turing 机:在考虑他的某些书写位置和某种现有"意向状态"时,由于受到新的"意向状态"的刺激,他在书写中作出必要的改变,并且进一步仔细考虑下一步的书写,他完成了比 Turing 机更复杂的步骤这个事实原则上似乎没有重要意义.

根据描述的结构和运行的类型,Turing 机是非常

一般的一类自动机，因此 Turing 机的思想在很大程度上促进了抽象自动机理论的产生，并且大量地预见了它们特有的性质（见**自动机**（automaton）；**自动机理论**（automata, theory of））.

Turing 机有过多次修改．流行最广的是多带 Turing 机（multi-tape Turing machine），它的每一条带上有一个或几个读头．读头的运动和在带子上打印字母是依据控制系统的程序同时进行的．多带 Turing 机用于相对算法的形式化是方便的．于是一个函数 $f$ 相对于一个函数 $g$ 是（算法）可计算的，如果存在一个计算 $f$ 的多带 Turing 机，而这个计算是在任一初始构态下，$g$ 的所有值按一个固定次序打印于一条带子上的条件下进行的．用这种方式，依据相对计算，人们可以引进算法论中的重要概念：Turing 可归约性，以及**算法可归约性**（algorithmic reducibility）的其他形式．用多带 Turing 机形式化概率算法（probabilistic algorithm）概念是自然的．通常的方法是：一个随机序列打印在多带 Turing 机的一条带子上；Turing 机每一个时刻恰好处理这个序列的一个符号．另一个方法是 Turing 机的控制系统的程序允许存在左侧相同的几个指令，选择指令中的这个或那个用于处理给定的概率．非确定性 Turing 机（non-deterministic Turing machine）概念基于类似的思想．这里仍旧是控制系统的程序可以有几个左侧相同的指令．在这两种情况下，代替对给定输入的单独计算，还考虑与程序相容的所有可能的计算的类．对于概率 Turing 机，这种计算的概率是要考虑的；对于非确定性 Turing 机，计算自身的可能性要考虑．

亦见**算法的描述复杂性**（algorithm, complexity of description of an）；**算法的计算复杂性**（alogorithm, computational complexity of an）；**可计算函数**（computable function）；**机器**（machine）.

**参考文献**


[1A] Turing, A. M., On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem, *Proc. London Math. Soc.*, (2), **42** (1937), 230 – 265.

[1B] Turing, A. M., On computable numbers with an application to the Entscheidungsproblem, a correction, *Proc. London Math. Soc.* (2), **43** (1937), 544 – 546.

[2] Post, E. L., Finite combinatory processes - formulation 1, *J. Symbolic Logic*, **1** (1936), 3, 103 – 105.

[3] Kleene, S. C., Introduction to metamathematics, North-Holland, 1951（中译本：S. C. 克林，元数学导论（上、下），科学出版社，上册 1984，下册 1985）.

[4] Мальцев, А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965（英译本：Mal'tsev, A. I., Algorithms and recursive functions, Wolters-Noordhoff, 1970）.

[5] Mendelson, E., Introduction to mathematical logic, v. Nostrand, 1964.

[6] Minsky, M. L., Computation: finite and infinite machines, Prentice-Hall, 1967.

[7] Машины Тьюринга и рекурсивные функции, пер. с нем., М., 1972（译自德文）.


Н. М. Нагорный, С. С. Марченков 撰

【补注】 亦见**复杂性理论**（complexity theory）；**形式语言和自动机**（formal languages and automata）；**不可判定性**（undecidability）．对于 Turing 机作为直观算法概念的形式化和 Church 论题的重要性参阅 [A1] 和 [A2]．对于 Turing 机和复杂性理论的关系也参阅 [A1] 和 [A2]．

**参考文献**


[A1] Salomaa, A., Formal languages, Acad. Press, 1973.

[A2] Salomaa, A., Computation and automata, Cambridge Univ. Press, 1985.

[A3] Davis, M., Computability and unsolvability, McGraw-Hill, 1958（中译本：M. 戴维斯，可计算性与不可解性，北京大学出版社，1984）.

[A4] Hopcroft, J. E. and Ullman, J. D., Introduction to automata theory, languages and computation, Addison Wesley, 1979.

[A5] Lewis, H. R. and Papdimitriou, C. H., Elements of the theory of computation, Prentice-Hall, 1981.


卢景波 译 罗里波 校

**孪生素数** [**twins** 或 prime twins; **близнецы**]

一对素数，相差为 2．广义孪生素数（generalized twins）是一对相继的素数，相差为 $2m$，其中 $m$ 为给定的自然数．查阅素数表，很容易发现孪生素数的例子．例如，3 和 5，5 和 7，11 和 13，17 和 19．广义孪生素数，对于 $m=2$，例如有 13 和 17，19 和 23，43 和 47．直到现在，还不知道孪生素数的集合，甚至对于任何给定的 $m$，广义孪生素数的集合，是否为无穷的．这就是孪生素数问题（twin problem）.

**参考文献**


[1] Hua, L.-K., Abschätzungen von Exponentialsummen und ihre Anwendung in der Zahlentheorie, in Enzyklopadie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, Vol. I, Teubner, 1959, Helft 13, Teil 1（中译本：华罗庚，指数和的估计及其在数论中的应用，科学出版社社，1963）.

[2] Trost, E., Primzahlen, Birkhäuser, 1953.


Н. И. Климов 撰

【补注】 已经知道，无穷和 $\sum 1/p$ 是有限的，其中 $p$ 取遍所有孪生素数对中的第一个素数，见 **Brun 筛法**（Brun sieve）；**Brun 定理**（Brun theorem）.

【译注】 已有的大量资料说明，似乎存在无穷多对孪生素数，例如，已知在小于 $10^5$ 的自然数中有 1224

对孪生素数，当小于 $10^6$ 时有 8169 对，当小于 $3.3\times10^7$ 时有 152，892 对．目前已知当小于 $1.37\times10^{14}$ 时共有 182，312，485，795 对孪生素数，而目前已知的最大孪生素数对是

$$570918348\times10^{5120}\pm1,$$

共 5129 位（见［B1］）．

**参考文献**


［B1］Ribenboim，P．，The new book of prime number records．Springer，1996．

［B2］王元，素数，九章出版社，1997．


杜小杨　张鸿林 译

## 二体问题［two-body problem；двух тел задача］

两个分别具有质量 $m_1$ 和 $m_2$ 的质点 $P_1$ 和 $P_2$ 在 Newton 引力的相互作用下，在三维 Euclid 空间 $E^3$ 中运动的问题．这个问题是 $n$ 体问题的一个特例．$n$ 体问题可用 $6n$ 个常微分方程的方程组来描写，有 10 个独立积分：即 6 个积分描写惯性中心的运动，3 个积分描写面积定律（相当于角动量守恒定律），和一个积分描写能量守恒定律（［1］）．二体问题还有三个 Laplace 积分（其中一个是独立于上面列出的积分的），而且是完全可积的（［2］）．

在特殊的坐标系内采用这些积分会使二体问题的积分变得容易．如果将 Descartes 坐标 $x$，$y$，$z$ 的原点置于质心 $(m_1\vec{r_1}+m_2\vec{r_2})/(m_1+m_2)$ 而 $z$ 轴指向相对的角动量向量，则相对位置向量 $\vec{r_1}-\vec{r_2}=(x,y,z)$ 的运动就处于 $z=0$ 的平面之内，并满足下面的方程：

$$\mu\ddot{x}=-fxr^{-3},\ \mu\ddot{y}=-fyr^{-3},\qquad(1)$$

其内 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，$\mu=m_1m_2/(m_1+m_2)$ 为折合质量，$f$ 为引力常数．（1）式有四个积分：

$$x\dot{y}-y\dot{x}=c\ (\text{面积定律}),$$

$$\frac{1}{2}\mu(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-fr^{-1}=h\ (\text{能量}),$$

$$\mu^2c\dot{y}-\mu fxr^{-1}=\lambda_1 \text{ 和 } \mu^2c\dot{x}-\mu fyr^{-1}=-\lambda_2$$

（Laplace）．

这些方程之间有如下关系：

$$\lambda_1^2+\lambda_2^2=2\mu^3hc^2+\mu^2f^2.$$

这里

$$c^2=\lambda_1x+\lambda_2y+\mu r,\qquad(2)$$

也就是说，相对位置向量的轨道是参数为 $p=c^2/\mu$ 的圆锥截线，其长半轴 $a=-\mu/(2h)$，偏心距为 $e=\mu^{-1}\sqrt{1+2hc^2}$，近中心点黄经（longitude of pericentre）为 $\omega$（$\lambda_1=\mu e\cos\omega$，$\lambda_2=\mu e\sin\omega$），而焦点在坐标原点．相对位置向量在轨道上的位置由真近点距（true anomaly）$v$ 确定，从其指向近中心点（pericentre）的方向计算；于是（2）式意味着 $r=p/(1+e\cos v)$．如果 $c\neq0$，则可能有下面三种轨道：

Ⅰ）当 $h<0$ 当为椭圆．

Ⅱ）当 $h>0$ 当为双曲线．

Ⅲ）当 $h=0$ 当为抛物线．

如果 $c=0$，则运动轨道是直线．二体问题描写了行星相对于太阳或卫星相对于行星等等的未受干扰的 Kepler 运动．

**参考文献**


［1］Siegel，C．L．，Vorlesungen über Himmelmechanik，Springer，1956．

［2］Абалакин，В．К．（и др．），Справочник по небесной механике и астродинамике，М．，1971．


А．Д．Брюно 撰

【补注】

**参考文献**


［A1］Poincaré，H．，Les methodes nouvelles de la méchanique celeste，Gauthiers-Villars，1899．

［A2］Siegel，C．L．and Moser，J．，Lectures on celestial mechanics，Springer，1971．

［A3］Arnol'd，V．I．，Mathematical methods of classical mechanics，Springer，1978（中译本：В．И．Арнольд，经典力学的数学方法，高等教育出版社，1992）．

［A4］Abraham，R．and Marsden，J．E．，Foundations of mechanics，Benjamin，1978．


王克仁 译　诸德超 校

## 二常数定理［two-constants theorem；двух констант теорема］

设 $D$ 是 $z$ 平面内一有限连通 Jordan 区域，$w(z)$ 是 $D$ 内的正则解析函数满足不等式 $|w(z)|\leqslant M$，且在边界 $\partial D$ 的某个弧 $\alpha$ 上满足关系式

$$\varlimsup_{z\to\zeta}|w(z)|\leqslant m<M,\ z\in D,\ \zeta\in\alpha.$$

则在集合

$$\{z\in D:\ 0<\lambda\leqslant\omega(z;\alpha,D)<1\}$$

的每一点 $z$ 有不等式

$$|w(z)|\leqslant m^{\lambda}\cdot M^{1-\lambda},$$

其中 $\omega(z;\alpha,D)$ 是弧 $\alpha$ 关于 $D$ 在 $z$ 点的**调和测度**（harmonic measure）．若对（满足条件 $\omega(z;\alpha,D)=\lambda$）的某点 $z$ 等号成立，则对所有的 $z\in D$ 及所有的 $\lambda$，$0\leqslant\lambda\leqslant1$，等式均成立，而且在这种情形函数 $w(z)$ 具有如下形式：

$$w(z)=e^{ia}m^{\varphi(z)}M^{1-\varphi(z)},$$

其中 $a$ 是实数，$\varphi(z)$ 是 $D$ 内的解析函数，满足 $\mathrm{Re}\,\varphi(z)=\omega(z;\alpha,D)$ ([1],[2]).

二常数定理给出解析函数由其边界值所唯一确定的定量表达式，并且在函数论中有重要应用([3]). Hadamard 的三圆定理可作为一种特殊情形从该定理得出(见 **Hadamard 定理**(Hadamard theorem)). 对于二常数定理在空间调和函数情形的令人满意的类似结果可见[4],[5].

**参考文献**


[1] Nevanlinna, F. and Nevanlinna, R., Über die Eigenschaften einer analytischen Funktion in der Umgebung einer singulären Stelle oder Linie, *Acta Soc. Sci. Fennica*, 5 (1922), 5.

[2] Ostrowski, A., Über allgemeine Konvergenzsätze der komplexen Funktion entheorie, *Jahresber. Deutsch. Math. Ver.*, 32 (1923), 9 – 12, 185 – 194.

[3] Nevanlinna, R., Analytic functions, Springer, 1970 (译自德文).

[4] Мергелян, С. Н., 《Успехи матем. наук》, 11 (1956), 5, 3 – 26.

[5] Соломенцев, Е. Д., 《Докл. АН Арм. ССР》, 42 (1966), 5, 274 – 278.


Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 有一个更为一般的 $n$ 常数定理($n$-constants theorem)([A2]): 设 $f(z)$ 在区域 $D$ 内全纯，该区域的边界是 $n$ 条不同的可求长弧 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的并集；假定对每个 $j$ 存在常数 $M_j$ 使得当 $z$ 趋于 $\alpha_j$ 的任一点时，$f(z)$ 的绝对值的极限不超过 $M_j$. 则对于每个 $z\in D$ 有

$$\log|f(z)|\leqslant\sum_{j=1}^{n}\omega(z;\alpha_j,D)\log M_j.$$

**参考文献**


[A1] Markushevich, A. I., Theory of functions of a complex variable, 2, Chelsea. reprint, 1977, 210 – 214(译自俄文).

[A2] Hille, E., Analytic function theory, 2, Chelsea, reprint, 1987, 409 – 410.


杨维奇 译

## 二维圆环 [two-dimensional annulus; двумерное кольцо], 拓扑学中的

平面上含在两个非恒同的同心圆之间的闭的部分的拓扑象. 二维圆环是具有两个边界分支的亏格零的可定向**二维流形**(two-dimensional manifold).

А. В Чернавский 撰

【补注】 因此，一个 2 维圆环同胚于 $S^1\times I$，其中 $S^1$ 是圆，$I$ 是区间. 一个 $n$ 维圆环($n$-dimensional annulus)是同胚于 $S^{n-1}\times I$ 的空间. $n$ 维圆环猜想(annulus conjecture)指出，对任何使得 $h(B^n)\subset\mathrm{Int}(B^n)$ ($B^n$ 的内部)的同胚 $h:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$，闭差

$$B^n\setminus h(\mathrm{Int}(B^n))$$

同胚于圆环 $S^{n-1}\times I$. 这里 $B^n=\{x\in\mathbf{R}^n:\|x\|\leqslant1\}$.

稳定同胚猜想(stable homeomorphism conjecture)断言，任何保持定向的同胚 $h:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 可以写成有限积 $h=h_1\cdots h_m$，其中每个 $h_i$ 在 $\mathbf{R}^n$ 的某个开子集上为恒同.

对维数 $n$ 的稳定同胚猜想蕴涵着维数 $n$ 的圆环猜想.

稳定同胚猜想(因此圆环猜想)最后已对所有的 $n$ 建立: $n=1$，经典的; $n=2$ ([A6]); $n=3$ ([A4]); $n\geqslant5$ ([A3])和最后 $n=4$ ([A2])作为维数 5 中特殊的受控 $h$ 配边($h$-cobordism)理论的应用，称为薄 $h$ 配边定理(thin $h$-cobordism theorem)或 Quinn 薄 $h$ 配边定理(Quinn thin $h$-cobordism theorem).

**参考文献**


[A1] Edwards, R. D., The solution of the 4-dimensional annulus conjecture (after Frank Quinn), *Contemporary Math.*, 35 (1984), 211 – 264.

[A2] Quinn, F. Ends of maps Ⅲ: dimensions 4 and 5, *J Diff. Geom.*, 17 (1982), 503 – 521.

[A3] Kirby, R., Stable homeomorphisms and the annulus conjecture, *Ann. of Math.*, 89 (1969), 575 – 582.

[A4A] Moise, E. E., Affine structures in 3-manifolds Ⅰ, *Ann. of Math.*, 54 (1951), 506 – 533.

[A4B] Moise, E. E., Affine structures in 3-manifolds Ⅱ, Ⅲ, *Ann. of Math.*, 55 (1952), 172 – 176. 203 – 222.

[A4C] Moise, E. E., Affine structures in 3-manifolds Ⅳ, *Ann. of Math.*, 56 (1953), 96 – 114.

[A5] Brown, M. and Gluck, H., Stable structures on manifolds Ⅰ – Ⅲ, *Ann. of Math.*, 79 (1974), 1 – 58.

[A6] Radó, T., Über den Begriff der Riemannsche Fläche, *Acta Univ. Szeged*, 2 (1924 – 1926), 101 – 121.


徐森林 译

## 二维胞腔 [two-dimensional cell; двумерная клетка]

**圆盘**(disc)的拓扑象(亦见**拓扑圆盘**(disc, topological)).

## 二维纽结 [two-dimensional knot; двумерный узел]

二维球面 $S^2$ 在四维球面 $S^4$ 中的合痕嵌入的类. 局部可平面化的条件通常被强加上. 研究的方法在于通过三维平行平面的丛考虑 $S^2$ 的截面. 基本的问题是: 当纽结的群 $\pi_1(S^4\setminus S^2)$ 同构于 $\mathbf{Z}$ 时，该纽结是否会是平凡的. 已经知道，在这样的情况中，余集 $S^4\setminus S^2$ 有 $S^1$ 的同伦型.

$S^4$ 中的一个 3 带 (ribbon) 是浸入 $\varphi:\Delta^3\to S^3$ 的象 $D^3$，其中 $\Delta^3$ 是三维圆盘，使得：1) $\varphi|_{\partial\Delta^3}$ 是一个嵌入；2) $\varphi$ 的自交由有限个两两不交的二维圆盘 $D_1,\cdots,D_n$ 所组成；3) 每个圆盘 $D_i$ 的原象 $\varphi^{-1}(D_i)$ 是两个圆盘 $D_i'$ 和 $D_i''$ 的并，使得

$$D_i'\cap D_i''=\varnothing,\ D_i'\subset \mathrm{int}\ \Delta^3,\ \partial D_i''=D_i''\cap\partial\Delta^3.$$

边界 $\partial\Delta^3$ 的象是 $S^4$ 中的二维纽结．这样得到的纽结称作带状纽结 (ribbon knots)．这是最彻底地研究二维纽结的类的一种．任何二维带状纽结是球面 $S^4$ 上的某个三维子流形的边界，它或者同胚于圆盘 $\Delta^3$ 或者同胚于一些 $(S^1\times S^2)\setminus\Delta^3$ 的连通和．二维带状纽结是平凡的，当且仅当它的余集的基本群同构于 $Z$．群 $G$ 是 $S^4$ 中某个二维带状纽结的群，当且仅当它有 Wirtinger 表现 (Wirtinger presentation) (即表现 $|x_1,\cdots,x_n;r_1,\cdots,r_m|$，其中每个关系有形式 $x_i=\omega_{i,j}x_j\omega_{i,j}^{-1}$)，在表现中，关系的数目小于生成元个数且 $G/[G,G]=\mathbf{Z}$.

所有二维纽结的群的类还没有完全被描述．已知这类广于 $S^3$ 中的一维纽结的类但小于 $S^{k+2}(k\geqslant 3)$ 中的 $k$ 维纽结的群的类．后面的类已被完全刻画了特征 (见**多维纽结** (multi-dimensional knot))．下面的性质由二维纽结群所展示 (但一般不被 $S^5$ 中的三维纽结的群所展示)：

$$\dim H_2(G',\mathbf{Q})\leqslant\dim H_1(G',\mathbf{Q}),$$

其中 $G'=[G,G]$ 是换位子群：在有限群 $T=\mathrm{Tors}(G'/G'')$ 上，存在一个非退化对称形式 $L:T\otimes T\to\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$，使得对任何 $m\in G$，$x,y\in T$ 有 $L(x,y)=L(\tau x,\tau y)$，其中 $\tau:T\to T$ 是 $G$ 中由与元素 $m$ 共轭导出的自同构．

$\pi_2(S^4\setminus S^2)$ 的计算只对特殊类型的二维纽结做过，例如那些通过 Artin 构造得到的带状纽结和纤维纽结．

А. В. Чернавский, М. Ш. Фарбер 撰　徐森林 译

**二维流形** [**two-dimensional manifold**; **двумерное многообразие**]

一个**拓扑空间** (topological space)，它的每一个点都有一个同胚于平面或闭半平面的邻域．它是最容易想象的一类流形；它包括球面，圆盘，Möbius 带，射影平面，Klein 瓶等等．

只有同胚于一个半平面邻域的那些点 (如果有) 形成了流形的边界 (boundary of the manifold)．

最重要的一类二维流形是闭可定向的二维流形 (closed orientable two-dimensional manifolds)，或闭曲面 (closed surface)．最简单的二维流形，球面 $S^2$，是亏格零的曲面 (见**曲面的亏格** (genus of a surface))．一个亏格 $g$ 的曲面从 $S^2$ 通过将 $2g$ 对不交圆盘的切除和将每对边界圆与弯曲的圆柱面的边界叠合而得到 (图 1)．这个过程就是熟知的环柄的粘合 (glueing of handles)，而亏格 $g$ 的闭曲面就是有 $g$ 个环柄的球面 (sphere with $g$ handles) (图 2).



图 1



图 2

更广泛的二维流形类由紧可定向二维流形 (compact orientable two-dimensional manifolds)，或带边界曲面 (surface with boundary) 组成，该带边曲面可以从任何闭曲面通过切除有限个不交圆盘的内点得到．它们的边界形成了这样产生的二维流形的边界．这个流形的亏格被认为是原来曲面的亏格 (图 3)．亏格零的带边二维流形是一个圆盘或有孔圆盘．

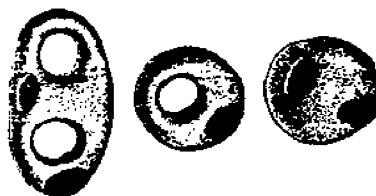


图 3

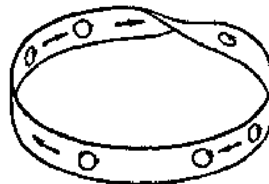


图 4

另一类二维流形是紧不可定向二维流形 (compact non-orientable two-dimensional manifolds)，它们也可以是闭的或有边界的．最简单的这样的流形是 **Möbius**

带(Möbius strip)(图 4). 它不能定向, 即不可能在这条带上同时围绕每一点转一圈而选定一个方向使得这些方向连续地彼此从一个进入另一个. 另一个例子是**射影平面**(projective plane)$\mathbf{R}P^2$. $\mathbf{R}P^2$ 中的任何射影直线的每一个邻域包含 Möbius 带, 并且因为这个理由, $\mathbf{R}P^2$ 也是不可定向的. 在一般情形中, 紧不可定向二维流形可从闭曲面通过消除不交的圆盘的内点和用 Möbius 带代替它们中的某些(或全部)(图 5 表示作为交叉覆叠的 Möbius 带, 即在一线段上有自交). 射影平面 $\mathbf{R}P^2$ 可以从球面上用 Möbius 带代替圆盘之一得到. 如果用 Möbius 带代替两个圆盘, 就得到一个 **Klein 曲面**(Klein surface)(图 6), 它也能方便地表示为一个具有不同定向的环柄的球

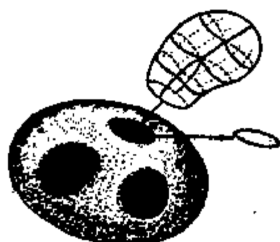


图 5

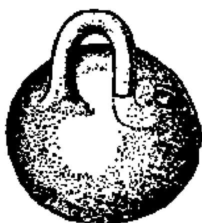


图 6



图 7

面. 一般地, 两个 Möbius 带的粘贴可用一个不可定向的环柄的粘贴来代替且反之亦然. 另一方面, 如果一个通常的环柄的一端沿一个 Möbius 带的中间线移动, 那么环柄将变成不可定向的(图 7). 因此, 在一个不可定向的二维流形中, 任何环柄可以被二个 Möbius 带代替, 反之亦然.

带环柄的球面或带 Möbius 带的球面, 可能还有带被切除了圆盘的球面说明了所有紧连通(由一片组成)二维流形. 非紧的二维流形, 例如平面 $\mathbf{R}^2$, 半平面 $\mathbf{R}^2_+$, 一般地, 任一紧二维流形的任何开真子集可能有非常复杂的结构. 因此, 如果取 $\mathbf{R}^2$ 中无穷多个圆盘移开到无穷且用环柄或 Möbius 带替代它们, 所得到的二维流形将不是任何紧二维流形的开子集(图 8). 无边的非紧二维流形称作开的(open).

研究二维流形的一个方法是组合方法, 在该方法

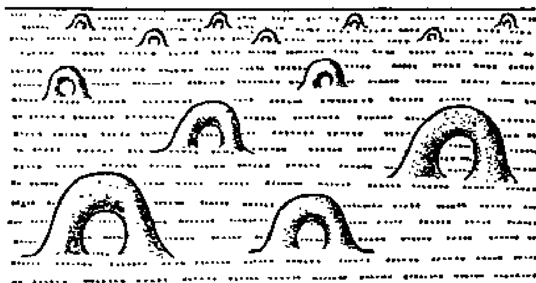


图 8

中, 流形当作从凸多边形(面体)通过公共边毗连到另一个被建立起来. 以三角形作为面的二维流形的**三角剖分**(triangulation)特别重要. 如果两个二维流形被三角剖分, 它们的三角剖分称为是组合等价的(combinatorially equivalent), 如果它们有同构的重分, 对它, 建立元素之间的一一对应是可能的, 在此对应下, 各自面的毗邻性被保持着. 在一个已三角剖分的二维流形的二维复形(complex)中间, 挑选出那些, 对于它, 每个边有一个相邻的面(该边在边界上)或两个面, 且对于它, 这些面形成了面的循环(星形), 它们绕每个三角剖分的顶点顺序地从一个面到相邻的另一个面(图 9). 如果顶点不在边界 ($a$) 上, 则该循环是闭的, 而如果顶点在边界 ($b$) 上, 则它不是闭的. 二维流形的紧性等价于任何三角剖分的面的数量的有限性, 而连通性等价于通过边的链连接任何两个顶点的可能性. 在连通的二维流形中, 任何两个面由一条面的链相互连接的, 在该链中, 两个相邻的面有一条公共边. 不可定向性等价于包含一个 Möbius 带的链的存在性.

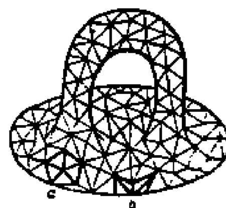



图 9

三角剖分是引进不变量(invariant)的一个方便的方法, 这不变量也就是在组合等价的二维流形中相同的特征. 最重要的不变量是 **Euler 示性数**(Euler characteristics)$\chi(M)$, 对已给的三角剖分, 它等于数 $V-E+F$, 其中 $V,E,F$ 分别是三角剖分的顶点、边和面的数目. $\chi$ 在重分下不变, 结果是: 如果 $\chi(M_1)\neq\chi(M_2)$, 那么 $M_1$ 和 $M_2$ 不组合等价. 对具有 $g$ 个环柄的球面, $\chi(M)=2-2g$; 特别地, 就球

面而言，它等于 2，对环面，它等于 0，对射影平面，它等于 1，对 Klein 瓶，它等于 0，对具有 $k$ 个 Möbius 带的球面，它等于 $2-k$. 如果从一个二维流形 $M$ 中切除 $k$ 个圆盘的内部，则 $\chi(M)$ 将随 $k$ 减少．如果给一个紧连通的二维流形指定三个数

$$\{\varepsilon, \chi, k\},$$

其中 $\varepsilon=\pm 1$，依赖于定向性，$\chi=\chi(M)$ 和 $k$ 是有界分支的数目，则可以得到至多差一个组合等价的二维紧流形的完全的描述．这就是为什么这些三元组对于上面所描述的二维流形（带环柄的球面、带 Möbius 带的球面及可能带细孔的也一样）是不同的，而任何紧连通二维流形组合等价于这些流形中的一个（[1]，[3]）．开二维流形的分类也就得到了，但由于在此情形中的曲面是不可数的，问题就更为复杂（[5]）．

作为二维流形的纯拓扑的研究，**Jordan 定理**（Jordan theorem）是十分重要的．设 $C$ 是一条无自交点的曲线，它连接流形 $M$ 的边界上的两点，或者是一条封闭曲线；这称为 $M$ 的截线（section）．如果 $M$ 上任何两点用一条不与这条截线 $C$ 相交的弧连接，则截线 $C$ 不将 $M$ 分开．不分开 $M$ 的截线的最大数目再加 1 就是皆知的 $M$ 的连通数（connectedness number）．因此，根据 Jordan 定理，球面和圆盘是单连通的．亏格 $g$ 的闭曲面的连通数是 $2g+1=3-\chi$. 对这样的曲面，可以选择 $2g$ 条截线，从同一点发出的所有的截线重分成偶对以便每个偶对实现为一个环柄的截线．这样的选择称为 $M$ 的一个典范截线（canonical section）：如果将 $M$ 沿所有这些截线切开，就得到一个圆盘．不可定向的二维流形的典范截线（沿 Möbius 带的中间线）的状况是相似的．对于带边的二维流形，从基点到边界的每一个分支附加截线是需要的．反过来，如果将一个圆盘的边界给重分成一些段，将这些段成对地粘合起来，就产生出一个二维流形．如果粘合像图 10 显示的那样作出，则得

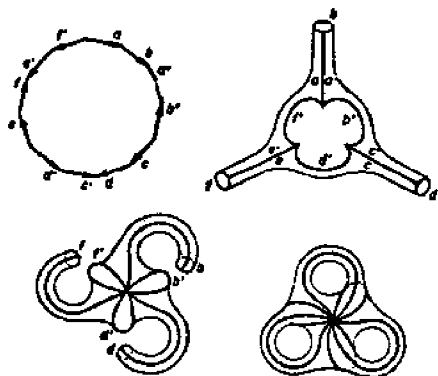


图 10

到一个定向的二维流形，如果像图 11 中那样实现，则流形是不可定向的．（段 $x$ 与 $x'$ 粘合在一起、使得箭头的方向恰好重合．）如果有几段保留不粘合，则边界就得到了．

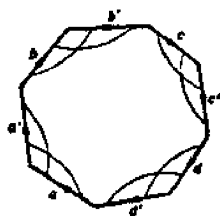


图 11

Jordan 定理也使给出二维流形的拓扑特征化成为可能．特别地，球面是包含一个圆的拓扑象的唯一的**局部连通连续统**（locally connected continuum），它被一个圆的任何象断开，任何点对不断开．一般地，二维流形与其他对象的区别在于局部连通的连续统的分类，它是由事实：它们不被任何点对断开而被足够小的圆断开（Wilder 定理（Wilder theorem），1949）．

因为对同胚的二维流形，任何两个三角剖分是组合等价的，故二维流形的组合分类是纯拓扑性质的分类．与紧的二维流形唯一地有 $\varepsilon$, $\chi$, $k$ 的特征的同时，另外的拓扑不变量在研究二维流形的性质中也是重要的．首先是一维**同调群**（homology group）$H_1(M)$ 和**基本群**（fundamental group）$\pi_1(M)$. 对于亏格 $g$ 的闭曲面，$H_1(M)$ 等于 $2g$ 个整数群 $\mathbf{Z}$ 的直和；$g$ 对典范截线通常取作生成元．对具有连通数 $s$ 的不可定向闭二维流形，$H_1(M)$ 是 $s-1$ 个群 $\mathbf{Z}$ 与一个 $\mathbf{Z}_2$ 的和．取的生成元是典范截线（除一个外）的截和无定向的道路（在与某个二维流形交后，该道路变成可定向的了）．$\pi_1(M)$ 的一个**表示**（presentation）是借助于一个典范截线最方便地得到的：它的截取作生成元，而关系通过横截（从截得到的）圆盘的边界而得到．在可定向的情形中，可得到表示

$$\{a_1, b_1; \cdots; a_g, b_g : a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1\},$$

而在不可定向情形中，得到表示

$$\{a_1, \cdots, a_s : a_1^2 \cdots a_s^2 = 1\}.$$

注意到这样一个重要事实：平面 $\mathbf{R}^2$ 是任何无边的连通的二维流形（除 $S^2$ 和 $\mathbf{R}P^2$ 外）的**万有覆叠**（universal covering），而相应的**单值群**（monodromy group）由 Euclid 或 Лобачевский 平面的运动实现．因此，环面通过平面中将彼此相差 $m\mathbf{v}_1+n\mathbf{v}_2$ 的所有点叠合而得到的，其中 $\mathbf{v}_1$ 和 $\mathbf{v}_2$ 是两个给定的向量，

$m$ 和 $n$ 是整数．在应用中，分支覆叠也是重要的．考虑映射 $f: M_1 \to M_2$，其中 $M_1$ 和 $M_2$ 是闭的三角剖分了的二维流形，该映射将 $M_1$ 中的每个面线性地映入 $M_2$ 中的某个面，且对 $M_1$ 中的每一条边 $l$，两个毗邻的面映入 $M_2$ 中毗邻于边 $f(l)$ 的两个不同的面．对于不是顶点的每个点 $x \in M_1$，可以找到它在 $M_1$ 中的一个邻域，使得通过 $f$ 一对一地变到 $M_2$ 中点 $f(x)$ 的一个邻域．如果对 $M_1$ 的一个顶点 $v$，循环地穿过所有相邻的面，则对 $M_2$ 中各自的面将绕 $M_2$ 中的 $f(v)$ 循环地穿过一个整数 $k$ 次．如果 $k=1$，则 $v$ 是寻常点 (ordinary point)；如果 $k>1$，则 $v$ 是一个分支点 (branch point)，而 $k$ 是 $v$ 处的分支的重数 (multiplicity of branching)．如果对 $w \in M_2$，$f^{-1}(w)$ 不包含分支点，$w$ 也称作寻常点 (ordinary point)．因为 $M_2$ 中寻常点附近的原象由同样数的点组成，所以由连续性，该数对所有的寻常点是相同的．称为覆叠层数 (number of covering sheets)．对可定向的二维流形，这个数 $d$ 就等于映射 $f$ 的度 (见**映射的度** (degree of a mapping)) (在不可定向的情形，必须变成模 2 的)．如果 $f^{-1}(w)$ 包含具有重数 $k_1, \cdots, k_l$ 的支点，那么 $f^{-1}(w)$ 包含 $\sum(k_i-1)$ 个点．它少于寻常点原象的数目 (这里和取在所有 $M_1$ 中的支点上)．因为顶点的数目 $V(M_1)$ 是 $\sum(k_i-1)$，它低于 $d \cdot V(M_2)$，而边和面数目由 $E(M_1)=d \cdot E(M_2)$ 和 $F(M_1)=d \cdot F(M_2)$ 给出，所以有

$$\chi(M_1)=d \cdot \chi(M_2)-\sum(k_i-1),$$

这就是 Riemann-Hurwitz 公式 (Riemann-Hurwitz formula)．

从微分几何观点看来，二维流形可以看作是具有附加结构 (例如度量，联络等等) 的光滑流形，或也可看作嵌入 (可能具有自交性) 到 Euclid 空间中．一个光滑二维流形可以三角剖分使得边是光滑的弧和所有的角是非零的 (Cairns 定理 (Cairns theorem), 1934)．这里，组合等价的三角剖分相当于微分同胚的二维流形，反之亦然．因此二维流形的分类对于光滑二维流形同样成立．有关具有微分几何性质的二维流形的拓扑特征的定理的一个例子是 **Gauss-Bonnet 定理** (Gauss-Bonnet theorem) ([3])：闭曲面的曲率的积分 (更精确地，由某个 **Riemann 联络** (Riemann connection) 定义的 Gauss 曲率，而该 Riemann 联络总可在一个光滑的二维流形上定义) 等于 $2\pi\chi(M)$．这个事实，以及利用到 Grassmann 流形中的所谓 Gauss 映射 (特别地，**球面映射** (spherical map)) 的解释一样，如果流形是浸入在 Euclid 空间中，则被推广到**示性类** (characteristic class) 的理论中．另一个定理 (它也是该理论的源泉之一) 指出：闭曲面上的任何向量场的奇点的指标 (index) 的总和等于 $\chi(M)$．

二维流形在复变函数论中起着重要的作用．这里，这样的流形有一个复结构，即点的邻域中的局部坐标由解析函数相关联，并称为 **Riemann 曲面** (Riemann surface) ([4])．它们都是可定向的．闭 Riemann 曲面是**复代数曲线** (algebraic curve) 的几何模型．二维流形上的一个复结构不为它的微分拓扑结构所唯一确定．例如在亏格 $g$ 的曲面上，如果 $g>1$，则复结构形成了一个维数为 $6g-6$ 的连续统 Teichmüller 定理 (Teichmüller theorem, 1940) (见 **Teichmüller 空间** (Teichmüller space))．

有时给二维流形的定义强加上特殊的要求，例如，作为拓扑空间，它是 Hausdorff 的或有可数基．特别地，后一个条件对于流形可三角剖分是基本的：不可三角剖分的二维 Hausdorff 流形存在 (见 **Prüfer 曲面** (Prüfer surface))．

**参考文献**


[1] Александров, П. С., Ефремович, В. А., Очерк основных понятий топологий, М.-Л., 1936.

[2] Hilbert, D. and Cohn-Vossen, S., Geometry and the imagination. Chelsea, reprint, 1956 (译自德文).

[3] Бакельман, И. Я., Вернер, А. Л., Кантор, Б. Е., Введение в дифференциальную геометрию "в целом", М., 1973.

[4] Springer, G., Introduction to Riemann surfaces, Addison-Wesley, 1957.

[5] Stoilow, S., Le ons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques, Gauthier-Villars, 1938.


А. В. Чернавский 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Hirsch, M. W., Differential topology. Springer, 1976.

[A2] Moise, E. M., Geometric topology in dimensions 2 and 3, Springer, 1977.

[A3] Forster, O., Lectures on Riemann surfaces, Springer, 1977 (译自德文).

[A4] Borisovich, Yu., Bliznyakov, N., Izrailevich, Ya. and Fomenko, T., Introduction to topology, Kluwer, 1993 (译自俄文).

[A5] Millman, R. S. and Parker, G. D., Elements of differential geometry, Prentice-Hall, 1977.


薛春华 译

**有界曲率的二维流形 [two-dimensional manifold of bounded curvature; двумерное многообразие ограниченной кривизны]**

一个度量空间，它是一个具有度量的二维流形 (two-dimensional manifold)，与二维 Riemann 几何学中的概念相类似，在此度量下，诸如一条曲线的长

度和全曲率，集合的面积和全 Gauss 曲率都已被定义.

二维 Riemann 空间和三维 Euclid 空间中的多面体曲面是有界曲率的二维流形的特殊情形，在一般情形，有界曲率的二维流形类可看成是二维 Riemann 流形类在适当的极限过程下的闭包.

设 $M$ 是一个二维 Riemann 流形. 令 $K(x)$ 为 $M$ 在点 $x$ 处的 **Gauss 曲率**（Gaussian curvature），$\sigma(E)$ 为集合 $E \subset M$ 的面积，则 $E \subset M$ 的全曲率为

$$\omega(E)=\iint_E K(x)d\sigma(x),$$

它的全绝对曲率为

$$|\omega|(E)=\iint_E |K(x)|d\sigma(x);$$

$E$ 的全曲率的正部分为

$$\omega^+(E)=\iint_E K^+(x)d\sigma(x),$$

这里 $K^+(x)=\max\{0, K(x)\}$. 设 $x$, $y$ 是 Riemann 空间 $M$ 中的两点，记 $\rho(x, y)$ 为 $M$ 中连结点 $x$ 和 $y$ 的曲线长度的下界. 函数 $\rho$ 是一个**内度量**（internal metric），它也被称为 $M$ 上的自然度量（natural metric）.

设 $M$ 是一个具有度量 $\rho$ 的任意二维流形，如果带有度量 $\rho$ 的流形 $M$ 等距于某个带有自然度量的二维 Riemann 空间，则称度量 $\rho$ 是 Riemann 的（Riemannian）.

具有度量 $\rho$ 的二维流形 $M$ 称为一个有界曲率的二维流形，如果下列条件成立：存在一列定义在 $M$ 上的 Riemann 度量 $\rho_n$, $n=1, 2, \cdots$，使得对于任一紧集 $A\subset M$，一致地有 $\rho_n \to \rho$（即在集合 $A\times A$ 上函数 $\rho_n(x, y)$ 一致收敛于函数 $\rho(x, y)$），而且序列 $|\omega_n|(A)$ $(n=1, 2, \cdots)$ 是有界的；这里 $|\omega_n|$ 是 Riemann 度量 $\rho_n$ 的全绝对曲率. 有界曲率的二维流形可公理化地定义.

在上述所给出的有界曲率的二维流形定义中的充分条件在一定程度上可以减弱. 即一个带有度量 $\rho$ 的二维流形 $M$，如果对流形上任一点，总可以确定其邻域 $U$ 和 $V$，这里 $V\subset U$，以及一列定义在 $U$ 上的 Riemann 度量 $\rho_n$, $n=1, 2, \cdots$，使得在 $V$ 上一致地有 $\rho_n \to \rho$，而且序列 $\{\omega_n^+(V)\}$ 是有界的，则它是一个有界曲率的二维流形.

对任意有界曲率的二维流形，可定义完全可加的集函数 $\sigma(E)$ 和 $\omega(E)$，它们分别是集 $E$ 的面积和曲率. 与 Riemann 的情形相对照，$\omega(E)$ 关于 $\sigma(E)$ 不必是绝对连续的. 对于有界曲率的二维流形，也可定义曲线的旋转的概念；它类似于曲线的全测地曲率的概念.

三维 Euclid 空间中任一凸曲面是一个有界曲率的二维流形. 在此情形，一个集合的全曲率总是非负的.

有界曲率的二维流形可以有奇点，如锥顶点 $p$（对这种点，$\omega(\{p\})$ 是非零的），棱，具有柱形底的边缘，等等.

**参考文献**


[1] Александров, А. Д, Залгаллер, В. А., Двумерные многообразия ограниченной кривизны, М.-Л., 1962.

[2] Александров, А. Д., Залгаллер, В. А., Двумерные многообразия ограниченной кривизны, ч. 2, М.-Л., 1965 (Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 76)


Ю. Г. Решетняк 撰

【补注】 也常使用术语诱导度量（induced metric）和内蕴度量（intrinsic metric）来代替自然度量.

**参考文献**


[A1] Aleksandrov, A. D. and Zalgaller, V. A., Intrinsic geometry of surfaces, Amer. Math. Soc., 1967 (译自俄文).

[A2] Rinow, W., Die innere Geometrie der metrischen Räume, Springer, 1961


沈纯理 译

**断裂力学中的二维问题** [**two-dimensional problems in fracture mechanics; двумерные задачи в механике разрушения**]

【补注】

此属可变形固体力学的一类问题，它研究的是具有（轴向）贯穿裂纹（或类似裂纹的缺陷）的柱体内的应力和位移，其内应力和位移的模式在平行于物体截面的各平面内都是相同的，也就是说，对于一个有穿透裂纹的薄板，或者满足在面内载荷（广义平面应力）作用下的平面应变条件，或者满足在面外弯曲载荷（薄板弯曲）作用下的纵向剪切条件. 同时也确定了这样的物体的极限平衡条件.

断裂力学中的二维问题，根据所考虑有裂纹物体的性质（例如，线弹性或弹塑性材料，粘弹性介质），以及外部作用的类型（例如，载荷、温度或电磁场），采用弹性力学、热弹性力学、粘弹性力学、塑性力学等不同的理论（流变模型）加以研究. 这些问题又可以分为动力学（dynamic）问题，即物体的几何形状和外载是与时间有关的（例如，扩展中的裂纹），以及静力学（static）问题，即物体的几何形状和外载是与时间无关的. 研究得最为广泛的是断裂力学的线性的、静力学的二维问题.

**裂纹体弹性力学理论的平面问题**. 当作用于物体的外力垂直于柱体的轴，而且在所有横截面上都相同时，或者是对于作用于其面内的广义平面应力（即在

受力的作用下薄板的变形，亦见**弹性理论的平面问题**(elasticity theory, planar problem of))的情况，固体的平衡可用弹性力学平面问题的，即柱形物体平面应变的方程来描写．如果采用 Descates 坐标，使 $xy$ 平面与柱体的横截面(对于平面应变问题)或中面平面(对于平面应力问题)相重合，问题的解就归纳为确定应力张量的三个分量 $\sigma_x$, $\sigma_y$, $\tau_{xy}$ 以及位移向量的两个分量 $u$ 和 $v$．对于均匀的各向同性物体，在没有体力作用的情况下，这些应力分量和位移分量可以用复变量 $\zeta=x+iy$ 的两个解析函数 $\Phi(\zeta)$ 和 $\Psi(\zeta)$ (复势)通过 Колосов-Мусхелишвили 公式(Kolosov-Muskhelishvili formulas)加以描写：

$$\sigma_x+\sigma_y=2[\Phi(\zeta)+\overline{\Phi(\zeta)}],$$

$$\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}=2[\bar{z}\Phi'(\zeta)+\Psi(\zeta)],$$

$$2G(u+iv)=\chi\varphi(\zeta)-\zeta\overline{\Phi(\zeta)-\Psi(\zeta)}.$$

$$\Phi(\zeta)=\varphi'(\zeta),\ \Psi(\zeta)=\psi'(\zeta);$$

其中，$G$ 为剪切模量，对于平面应变，$\chi=3-4\mu$，对于广义的平面应力 $\chi=(3-\mu)/(1+\mu)$，$\mu$ 为 Poisson 比．

对于一弹性平面，有一沿着光滑曲线 $L$ 的裂纹，在裂纹面上作用有下面的任意载荷：

$$N^{\pm}+iT^{\pm}=p(t)\pm q(t),\ t\in L, \qquad (A1)$$

且在无穷远处无应力作用，这时复势可以表示为：

$$\Phi(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_L\frac{Q(t)dt}{t-\zeta},$$

$$Q(t)=g'(t)-\frac{2iq(t)}{1+\chi}, \qquad (A2)$$

$$\Psi(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_L\left[\frac{\overline{Q(t)}-2\overline{iq(t)}}{t-\zeta}\overline{dt}-\right.$$

$$\left.-\frac{\bar{t}Q(t)}{(t-\zeta)^2}dt\right],$$

其中，$N$ 和 $T$ 分别是外应力的法向和切向分量，"+"和"−"表明相应的量从回线 $L$ 的左边和右边趋于该回线时所取的极限值；未知密度函数 $g(t)$ 可以用位移在 $L$ 上的跳跃值来表示：

$$g(t)=\frac{2iG}{1+x}\frac{d}{dt}[(u+iv)^+-(u+iv)^-],$$
$$t\in L$$

由(A2)式，边值问题(A1)可以化为相对于 $g(t)$ 的奇异积分方程：

$$\frac{1}{\pi}\int_L\left\{\frac{Q(t)+iq(t)}{t-t'}dt+k_1(t,t')[Q(t)+\right.$$

$$\left.+2iq(t)]dt+k_2(t,t')\overline{Q(t)dt}\right\}=p(t'),\ t'\in L, \qquad (A3)$$

其中，积分核分别由下式给出：

$$k_1(t,t')=\frac{1}{2}\frac{d}{dt'}\ln[(t-t')(\bar{t}-\overline{t'})];$$

$$k_2(t,t')=-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\frac{t-t'}{\bar{t}-\overline{t'}}\right].$$

方程(A3)有解，它存在于 $L$ 两端点处具有可积奇异性的函数类中，且在下面补充条件下是唯一的：

$$\int_L g'(t)dt=0, \qquad (A4)$$

这保证在跟踪 $L$ 一周时位移的单值性．

应力和位移在裂纹尖端附近的分布由应力强度因子 $K_{\rm I}$ (在对称的情况)和 $K_{\rm II}$ (在反对称的情况)来决定．应力强度因子与函数 $g(t)$ 的关系如下：

$$K_{\rm I}^{\pm}-iK_{\rm II}^{\pm}=\mp\lim_{t\to l^{\pm}}[\sqrt{2\pi|t-l^{\pm}|}\ g'(t)],$$

其中上标为"−"的值指裂纹起始点($\zeta=1^-$)；上标为"+"的值指裂纹终止点($\zeta=1^+$)．

对于在弹性平面中有 $N$ 条曲线裂纹 $L_n(n=1,\cdots,N)$ 的情况，边值问题(A1)也可化为积分方程(A2)，其中 $L$ 为全部回线 $L_n$ 的集合，但条件(A4)应代之以 $N$ 个类似的条件，以保证位移在每个回线 $L_n$ 上的单值条件．

如裂纹处于一个有界的弹性区域内，复势的积分表示式(A2)可以用不同的方式推广到一个多连通区域，而在其封闭的边界回线上有未知的密度．对于这样的区域，弹性力学的边值问题可以化为沿着开口回线(裂纹)和闭合回线(孔和外边界)的积分方程组．

基于经典的 Kirchhoff-Love 理论来解含裂纹薄板的弯曲问题，与裂纹的数学理论中的平面问题极为相似．这些问题也可以用各种更精确的薄板弯曲理论来作为基础加以分析，这样作自然会大大增加其解的复杂程度．

**裂纹体的纵向剪切**．纵向剪切，或称反平面变形，是柱体在顺着柱体母线且顺着母线保持不变的载荷的作用下所引起的应力状态．当变形轴沿着 Descartes 坐标系($x$, $y$, $z$)的 $z$ 轴指向时，其解可以化为确定应力张量的两个分量 $\tau_{xz}$，$\tau_{yz}$ 和位移向量的一个分量 $w$．对于一个均匀的各向同性体，当无体力作用时，上述值可由复变量 $\zeta$ 的一个任意的解析函数

$F(\zeta)$ 来加以表示:

$$2Gw = f(\zeta) + \overline{f(\zeta)},$$

$$\tau_{xz} - i\tau_{yz} = f'(\zeta) = F(\zeta).$$

对于一个弹性体具有沿着一个（在平面截面内的）曲线回线 $L$ 的贯穿裂纹的情况，如有下列任意的剪切载荷作用于裂纹面上:

$$\tau_{nz}^{\pm} = \tau(t) \pm \mu(t),\ t \in L, \qquad \text{(A5)}$$

且在无穷远处无应力作用，则函数 $F(\zeta)$ 有如下形式:

$$F(\zeta) = \frac{2}{\pi i}\int_L \frac{H(t)dt}{t-\zeta},$$

$$H(t) = \gamma'(t) + i\mu(t)\frac{ds}{dt'}, \qquad \text{(A6)}$$

其中 $s$ 为在 $L$ 上的弧长参数，而未知函数 $\gamma'(t)$ 可以用位移在 $L$ 上的跳跃来表示:

$$\gamma'(t) = (G/2)\frac{d}{dt}(w^{+} w^{\pm}),\ t \in L$$

利用(A6)，边值问题(A5)可以化为关于函数 $\gamma'(t)$ 的奇异积分方程

$$\mathrm{Im}\left[\frac{1}{\pi i}\frac{dt}{ds}\int_L \frac{H(t)dt}{t-t'}\right] = \tau(t'),\ t' \in L.$$

该方程有解，它存在于在 $L$ 两端点处具有可积奇异性的函数类中，且在下面补充条件下是唯一的:

$$\int_L \gamma'(t)dt = 0.$$

该条件保证当跟踪 $L$ 一周时位移的单值性.

在纵向剪切裂纹尖端附近的应力和位移的分布由应力强度因子 $K_{\mathrm{III}}$ 来决定，它与函数 $\gamma'(t)$ 的关系如下:

$$K_{\mathrm{III}}^{\pm} = \mp \lim_{t \to l^{\pm}}\left[\sqrt{2\pi|t-l^{\pm}|}\ \gamma'(t)\frac{dt}{ds}\right].$$

应力强度因子 $K_{\mathrm{I}}$、$K_{\mathrm{II}}$、$K_{\mathrm{III}}$ 是线弹性力学的主要参数. 在一个三维体内的任意裂纹边缘附近的应力和位移的分布可用这些应力强度因子来描写. 它们经常用于各种断裂准则之中.

**边值问题的解法**. 用解析函数来表示的一个弹性体内的位移和应力方法常常用于求解一些特殊问题的显式解. 对位于同一直线上或同一圆弧上的裂纹系，可以通过将它化为线性共轭问题（见 **Riemann-Hilbert 问题（解析函数）**(Riemann-Hilbert problem (analytic functions))而得到其解. 当用保角变换的方法求解问题时，也可以采用解析函数. 这种方法对于具有边裂纹的单连通区域，也对于有尖锐张开的无限大角（裂纹类型缺陷），特别适用.

一些裂纹问题可以表述为弹性力学的混合型问题. 对于这些问题作积分变换，可以有机会将其化为对偶的积分方程. 如果在这些方法中用的是 Fourier 级数，最终得到的将是对偶的级数方程.

奇异积分方程的方法有广泛的应用. 用这种方法，已经得到了一些问题的精确解或近似解. 在有些情况下，积分方程可有效地用数值方法求解. 在求解积分方程时，通过选择函数的类，可以把裂纹尖端的奇异性自然地考虑进去. 线性问题的数值解也可以通过边界配置法、体力法、边界法或有限元法得到.

边界元法和有限元法可用来求解弹塑性体断裂力学的二维问题. 可以取得解析解的仅是一些特例，即塑性变形集中在从裂纹尖端开始的一条线上的情况. 特别是，当（在对称的情况下）用裂纹延长线上的法向位移的跳跃来模拟塑性变形时，在解析解或数值解中，都常采用 $\delta_c$ 模型.

对于三维问题，见**断裂的数学问题**(fracture, mathematical problems of).

**参考文献**


[A1] Panasyuk, V. V., Limit equilibrium of brittle bodies with cracks, Kiev, 1968(俄文).

[A2] Черепанов, Г. П., Механика хрупкого разрушения, М., 1974(中译本: Г. П. 切列帕诺夫, 脆性断裂力学, 科学出版社, 1990).

[A3] Panasyuk, V. V., Savruk, M. P. and Datsyshin, A. P., Stress distribution near cracks in plates and shells, Kiev, 1975(俄文).

[A4] Berezhnitskii, L. T., Delyavskii, M. V. and Panasyuk, V. V., Bending of thin plates with crack-like defects, Kiev, 1979(俄文).

[A5] Kaminskii, A. A., Fracture mechanics of viscoelastic bodies, Kiev, 1980(俄文).

[A6] Savruk, M. P., Two-dimensional elasticity problem for bodies with cracks, Kiev, 1981(俄文).

[A7] Kit, G. C. and Krivtsun, M. G., Plane termoelasticity problems for bodies with cracks, Kiev, 1983(俄文).

[A8] Mirsalimov, V. M., Fracture of elastic and elastic-plastic bodies with cracks, Baku, 1984(俄文).

[A9] Morozov, N. F., Mathematical questions of crack theory, Moscow, 1984(俄文).

[A10] Parton, V. Z. and Boriskovskii, V. P., Dynamic fracture mechanics, Moscow, 1985(俄文).

[A11] Panasyuk, V. V. (ed.), Fracture mechanics and materials strength: a reference book, Kiev, 1988–1990(俄文).


В. В. Панасюк, М. П. Саврук 撰 王克仁 译

**等离子体双液体模型[two-liquid plasma model; дву-**

жидкостная модель плазмы]

一种流体动力学模型，在其中等离子体被看作是由两种互相穿透运动的"液体"（电子和离子的液体）组成的．等离子体的电阻被认为是这些液体之间相互摩擦的结果．

按电子只受电子压 $p_e$ 作用而离子只受离子压 $p_i$ 作用的假设，运动方程组有形式

$$\frac{dm\mathbf{V}_e}{dt} = -e\left\{\mathbf{E} - \frac{1}{c}[\mathbf{V}_e \times \mathbf{H}]\right\} + \\ - \frac{\nabla p_e}{n_e} - Rn_i(\mathbf{V}_e - \mathbf{V}_i), \qquad (1)$$

$$\frac{dM\mathbf{V}_i}{dt} = Ze\left\{\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{V}_i \times \mathbf{H}]\right\} + \\ - \frac{\nabla p_i}{n_i} - Rn_e(\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_e). \qquad (2)$$

电子和离子之间的相互作用是通过摩擦力来考虑的，该力正比于速度差与运动减速粒子的浓度之乘积．量 $R$ 称为相互摩擦系数或扩散阻力系数．考虑到等离子体的类中性条件（$n_e = Zn_i = n$），等离子体双液体模型的运动方程化为形式

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{1}{\rho c}[\mathbf{j} \times \mathbf{H}],$$

其中

$$\mathbf{V} = \frac{n_i M\mathbf{V}_i + n_e m\mathbf{V}_e}{Mn_i + mn_e}$$

是平均质量速度，$p = p_i + p_e$ 是总压力，而 $\mathbf{j} = e(Zn_i\mathbf{V}_i - n_e\mathbf{V}_e)$ 是离子流．如果 $m/M \ll 1$，则 $\mathbf{V}_i \approx \mathbf{V}$，$\mathbf{V}_e \approx \mathbf{V} - \mathbf{j}/ne$．

方程（1）和（2）可以利用来获得联系流密度 $\mathbf{j}$ 与其他量的广义 Ohm 定律．如果可忽略形式（$\mathbf{V}_\nabla$）$\mathbf{V}$ 的项（和再如果 $m/M \ll 1$），则广义 Ohm 定律可写为

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} = \frac{ne^2}{m}\left\{\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{V} \times \mathbf{H}]\right\} + \\ - \frac{e}{mc}[\mathbf{j} \times \mathbf{H}] + \frac{e}{m}\nabla p_e - \frac{\mathbf{j}}{\tau},$$

其中 $\tau = 1/\nu_{ei}$ 是所谓的脉冲传输时间，$\nu_{ei}$ 是脉冲传输的有效频率，它由下列表达式决定：

$$R = \frac{m}{n_i}\nu_{ei} = \frac{m}{n_e}\nu_{ie}.$$

**参考文献**


[1] Франк-Каменецкий, Д. А., Лекции по физике плазмы, 2 изд., М., 1968.

[2] Куликовский, А. Г., Любимов, Г. А., Магнитная гидродинамика, М., 1962. В. А. Дородницын 撰


【补注】

**参考文献**


[A1] Kampen, N. G. van and Felderhof, B. U., Theoretical methods in plasma physics, North-Holland, 1967.

[A2] Spitzer, L., Physics of fully ionized gases, Interscience, 1962. 李维新 译


**二人零和对策** [two-person zero-sum game; антагонистическая игра]

由两个有完全对立利益的对手所进行的对策．形式上，这种对立性意味着从一个**对策局势**（game situation）转变到另一个局势时，一个局中人的支付的增加数值上等于另一个局中人的支付的减少，从而在任何局势下，局中人的支付和是常数（可以认为，这个和是零，即一个局中人收到的支付等于另一个局中人的损失）．由于这个原因，二人零和对策也称为具有零和的二人对策（two-person game with zero-sum）或对抗对策（antagonistic game）．二人零和对策的数学概念（它们的两个支付函数在数值上相等在符号上相反）是一个形式概念，它不同于对应的哲学概念．如果在二人零和对策中，局中人之一经营作为协议和谈判的结果使其收到的支付增加一定的货币量，则其对手将有相等金额的损失．因此，任何协议将对局中人之一不利，以至是不可能的．现实中适合用二人零和对策来建模的冲突形势是某些（但不是全部）军事行动、体育比赛和室内博弈，以及在严格竞争下引起双边决策的情形．针对自然所进行的对策以及更一般的在不确定条件下的决策（见统计对策（statistical game））可以看作二人零和对策，如果假定对于局中人来说未知的实际自然规律将产生对局中人最为不利的效果．

正规型二人零和对策（见**对策论**（game, theory of））的定义在于确定局中人 Ⅰ 和 Ⅱ 各自的**策略**集 $A$ 和 $B$，以及确定在所有局势的集合 $A \times B$ 上定义的局中人的支付函数 $H$（局中人 Ⅱ 的支付函数按定义是 $-H$）．形式上，一个二人零和对策 $\Gamma$ 由一个三元组 $\Gamma = \langle A, B, H \rangle$ 所组成．

对策的进行通过局中人间选取他们的策略 $a \in A$，$b \in B$，然后，局中人 Ⅰ 从局中人 Ⅱ 处得到金额 $H(a, b)$．只要适当刻画策略集和支付函数，这样的二人零和对策的定义已足够一般到包括二人零和对策的各种变种，其中包括**动态对策**（dynamic game），**微分对策**（differential games）和**位置对策**（positional game）．在二人零和对策的过程中，局中人的行动（策略）的合理选择基于极小化极大原理：如果

$$\max_{a \in A}\inf_{b \in B} H(a, b) = \min_{b \in B}\sup_{a \in A} H(a, b), \qquad (1)$$

或

$$\sup_{a \in A}\inf_{b \in B} H(a, b) = \inf_{b \in B}\sup_{a \in A} H(a, b), \qquad (1')$$

那么对策 $\Gamma$ 对于两个局中人都有最优策略（相应地，

$\varepsilon$ 最优策略)(见**策略(对策论中的)**(strategy (in game theory))). 方程(1′)的两端的公共值称为对策 Γ 的值(value of the game). 然而, 方程(1)或(1′)甚至在最简单的情形下也可以不成立. 例如, 在具有支付矩阵为

$$\left\|\begin{matrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix}\right\|$$

的**矩阵对策**(matrix game)中, 下列等式成立:

$$\max_i \min_j a_{ij} = -1, \quad \min_j \max_i a_{ij} = 1.$$

由于这个原因, 局中人的策略集被扩充到混合策略集, 它由局中人对初始("纯")策略的随机选择所组成, 而支付函数定义为在应用混合策略的条件下支付的数学期望. 在上述例子中, 两个局中人的最优混合策略是对两个策略各以 1/2 的概率来选取, 对策在混合策略下的值是零. 如果集合 $A$ 和 $B$ 是有限的, 则二人零和对策称为矩阵对策, 其中对策的值和每个局中人的最优混合策略在所有情形下存在. 如果两个集合 $A$ 和 $B$ 都是无限的, 那么最优(甚至 $\varepsilon$ 最优)策略可能不存在(见**无限对策**(infinite game)).

**参考文献**

[1] Karlin, S., Mathematical methods and theory in games, programming and economics, Addison-Wesley, 1959.

[2] Parthasarathy, T. and Raghavan, T. L., Some topics in two-person games, Elsevier, 1971.

Е. Б. Яновская 撰

【补注】

**参考文献**

[A1] Vorob'ev, N. H., Game theory, Springer, 1977(译自俄文).

[A2] Owen, G., Game theory, Acad. Press, 1982.

史树中 译

**两点张量 [two-point tensor; двухточечный тензор]**

依赖于流形 $X$ 上的一对点 $x$, $x'$ 的张量, 即定义在乘积 $X \times X$ 上的张量场 $T(x, x')$. 作为例子, **世界函数**(world function) $\Omega(x, x')$ 的共变导数, 及更一般地, 任意依赖于两点的不变量的共变导数都是两点张量. 这种张量, 特别是当 $x' \to x$ 时, 张量 $T$ 和它的导数的极限

$$[T_{ij'}] = \lim_{x' \to x} \nabla_i \nabla_{j'} T(x, x')$$

的性质被用于变分计算及相对论中.

**参考文献**

[1] Synge, J. L., Relativity: the general theory, North-Holland & Interscience, 1960.

М. И. Войцеховский 撰 沈纯理 译

**双叶双曲面 [two-sheet hyperboloid; двуполостный гиперболоид]**

见**双曲面**(hyperboloid).

**双边估计 [two-sided estimate; двусторонняя оценка]**

对一个已知量 $a$ 的从上和从下的一对估计. 上估计(estimate from above)是形如 $a \leqslant A_1$ 的不等式; 下估计(estimate from below)是不等式 $a \geqslant A_0$. 它们具有相反的意义. 用来对 $a$ 进行估计的量 $A_0$, $A_1$ 通常具有更简单的形式, 或者可以比 $a$ 更容易计算.

**例**. 1) 令 $m, M$ 分别是函数 $f$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上的最小值和最大值. 则积分 $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ 的下列双边估计成立:

$$m(\beta - \alpha) \leqslant \int_\alpha^\beta f(x)dx \leqslant M(\beta - \alpha);$$

其中

$$a = \int_\alpha^\beta f(x)dx,$$

$$A_0 = m(\beta - \alpha),\ A_1 = M(\beta - \alpha).$$

2) **Lebesgue 常数**(Lebesgue constants) $L_n$ $(n = 0, 1, \cdots)$ 的一个双边估计是

$$0.9897\cdots < L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln(2n+1) \leqslant 1.$$

3) 本征值的一个双边估计. 在 Hilbert 空间 $H$, 研究一个线性自伴算子 $T$: $Tu = \lambda u$ 的本征值问题. 构造一个迭代过程 $Tf_{n+1} = f_n$, 其中 $f_0 \neq 0$. 因为算子 $T$ 自伴, 内积 $(f_m, f_k)$ 仅与指标之和 $m + k$ 有关. 数 $a_n = (f_0, f_n) = (f_m, f_{n-m})$ 称作 Schwartz 常数(Schwartz constants), 而数 $\mu_{n+1} = a_n / a_{n+1}$ 称作 Rayleigh-Schwartz 比(Rayleigh-Schwartz ratios). 如果算子 $T$ 是正的, 则 $\mu_n$ 构成一个单调非减收敛序列.

如果 $\lambda_0$ 是 $T$ 的一个本征值, $a < \lambda_0 < b$, $a < \mu_{2k} < b$, 而且区间 $(a, b)$ 不包含 $T$ 的其他谱点, 则

$$\mu_{2k} - \frac{\rho^2}{b - \mu_{2k}} \leqslant \lambda_0 \leqslant \mu_{2k} + \frac{\rho^2}{\mu_{2k} - a},$$

$$\rho^2 = \frac{\mu_{2k-1} - \mu_{2k}}{\mu_{2k}}$$

(Temple 定理(Temple theorem), [3]). 在某些条件下, Rayleigh-Schwartz 比收敛于 $T$ 的一个本征值.

为得到双边估计(双边逼近)的数值方法称为双边法(two-sided methods)([4]). 刚刚叙述的构造 Rayleigh-Schwartz 比的方法是一个双边法的例子. 一些双边法是基于应用其余项有相反的符号的一对逼近公式. 例如, 令函数 $f$ 是在点(插值结点) $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ 用关于结点 $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}$ 的 Lagrange

多项式得到的插值函数，而且令 $L_1(x)$ 是关于结点 $x_1,\cdots,x_n$ 的 Lagrange 插值多项式（见 **Lagrange 插值公式**（Lagrange interpolation formula））. 则余项有下列关系式成立：

$$R_0(x)=f(x)-L_0(x)=\frac{f^{(n)}(\xi_0)}{n!}(x-x_0)\cdots\cdots(x-x_{n-1}),$$

$$R_1(x)=f(x)-L_1(x)=\frac{f^{(n)}(\xi_1)}{n!}(x-x_1)\cdots\cdots(x-x_n),$$

其中 $\xi_0,\ \xi_1\in[x_0,x_n]$. 如果在 $[x_0,x_n]$ 上导数 $f^{(n)}$ 不改变符号，则 $R_0$ 和 $R_1$ 符号相反，下面的双边估计成立：

$$\min(L_0(x),L_1(x))\leqslant f(x)\leqslant\max(L_0(x),L_1(x)).$$

求解常微分方程的双边法现在处于最先进的研究阶段（[5]－[9]）.

双边法使人们可能确认含有问题的解的区域的边界．这就必须要有一个更复杂的算法，而且如果在实际计算中应用这个方法，鉴于包括舍入误差，必须承认算法将更复杂，双边法主要用在要求一个确保误差估计的情形．

**参考文献**


[1] Галкин, П. В., 《Тр. Матем. ин-та АН СССР》, **109**(1971), 3－5.

[2] Collatz, L., Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen, Geest & Portig, 1949.

[3] Collatz, L., Functional analysis and numerical mathematics, Acad. Press, 1966（译自德文）.

[4] Бахвалов, Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975（英译本：Bakhvalov, N. S., Numerical methods: analysis, algebra, ordinary differential equations, Mir, 1977）.

[5] Волков, Е. А., 《Тр. Матем. ин-та АН СССР》, **112**(1971), 141－151.

[6] Ремез, Е. Я., 《Зап. природничотехнічного відділу》, АН УССР, **1**(1931), 1－38（乌克兰文）.

[7A] Горбунов, А. Д., Шахов, Ю. А., 《Ж. вычисл. матем. и матем. физ.》, **3**(1963), 2, 239－253.

[7B] Горбунов, А. Д., Шахов, Ю. А., 《Ж. вычисл. матем. и матем. физ.》, **6**(1964), 3, 426－433.

[8] Деевятко, В. И., 《Ж. вычисл. матем. и матем. физ.》, **3**(1963), 2, 254－265.

[9] Салихов, Н. П., 《Ж. вычисл. матем. и матем. физ.》, **2**(1962), 4, 515－528.


В. В. Поспелов 撰

**【补注】**

**参考文献**


[A1] Collatz, L., Numerical treatment of differential equations, Springer, 1966（译自德文）.

[A2] Rektorys, K.(ed.), Survey of applicable mathematics, Iliffe, 1969.

[A3] Rivlin, T. J., An introduction to the approximation of functions, Dover, reprint, 1969.

[A4] Moore, R., Interval analysis, Prentice-Hall, 1966.

[A5] Young, D. M and Gregory, R. T., A survey of numerical mathematics, Dover, reprint, 1988.


袁国兴 张宝琳 译

**双侧曲面** [**two-sided surface; двусторонняя поверхность**]

见**单侧曲面与双侧曲面**（one-sided and two-sided surfaces）.

**二项同余式** [**two-term congruence** 或 binomial congruence; **двучленное сравнение**]，亦称二项同余方程，幂同余式（power congruence）

形如

$$x^n\equiv a\ (\mathrm{mod}\ m)\qquad(1)$$

的代数同余式，其中 $a,m$ 是互素的整数，而 $n\geqslant2$ 是自然数．如果同余式（1）是可解的，则称 $a$ 为一个模 $m$ 的 $n$ 次幂剩余；否则，称 $a$ 为模 $m$ 的 $n$ 次非剩余．

关于合数模 $m$ 的二项同余式的可解性问题可以归结为素数模 $p$ 的相应问题的研究（见**同余式**（congruence））．对于素数模的幂剩余问题，有一个 Euler 可解性准则：同余式

$$x^n\equiv a\ (\mathrm{mod}\ p)$$

可解，必有

$$a^{(p-1)/\delta}\equiv1\ (\mathrm{mod}\ p),$$

此处 $\delta$ 是数 $n$ 和 $p-1$ 的最大公因数；当这一条件满足时，同余式恰有 $\delta$ 个解．

由 Euler 准则立即可知在数 $1,\cdots,p-1$ 中恰有 $(p-1)/\delta$ 个模 $p$ 的 $n$ 次幂剩余和 $(\delta-1)(p-1)/\delta$ 个非剩余．

复杂得多的是相反的问题：找出所有的模 $p$ 使得给定的数 $a$ 是 $n\geqslant2$ 次剩余（或非剩余）．Euler 指出，同余式 $x^2\equiv a\ (\mathrm{mod}\ p)$ 的可解或不可解问题依赖于素数模 $p$ 是否属于某些算术级数．C. F. Gauss 于 1801 年第一个给出这一结果的严格证明（见[4]和 **Gauss 互反律**（Gauss reciprocity law）；**二次互反律**（quadratic reciprocity law））．Gauss 进一步注意到，对于 $n\geqslant3$，问题的全部解决只有当有理整数环作某些扩张后才有可能．因此，在建立双二次剩余的互反律时，他致力于将有理整数环扩充至复整数环 $\mathbf{Z}[i]$．对于给定的 $\omega\in\mathbf{Z}[i]$，双二次剩余 $x^4\equiv\omega\ (\mathrm{mod}\ p)$

在环 $\mathbf{Z}[i]$ 中的可解或不可解依赖于数 $p$ 对于环 $\mathbf{Z}[i]$ 中某些常数模 $D$ 的剩余的值.

И. М. Виноградов 开创了研究二项同余式及其在其他理论问题中的应用的新阶段，他于 1914 年证明：在数 $1, \cdots, Q(Q \leqslant p-1)$ 中，素数模 $p$ 的二次剩余的个数 $R$ 可由公式

$$R = \frac{1}{2}Q + \theta\sqrt{p}\ln p$$

给出，此处 $|\theta| \leqslant 1$. 接着，Виноградов 又得到了一个更加一般的问题的类似结果，即关于同余式

$$x^n \equiv y\ (\mathrm{mod}\, p),\ n \geqslant 2$$

当 $y$ 遍历一个不完全剩余系 $1 \leqslant y \leqslant Q$ 时的解的个数问题.

**参考文献**

[1] Венков, Б. А., Элементарная теория чисел, М.-Л., 1937 (英译本: Venkov, B. A., Elementary number theory, Wolters-Noordhoff, 1970).

[2] Виноградов, И. М., Основы теории чисел, 8 изд., М., 1972 (中译本: И. М. 维诺格拉陀夫, 数论基础, 高等教育出版社, 1952).

[3] Виноградов, И. М., Избр. труды, М., 1952 (英译本: Vinogradov, I. M., Selected works, Springer, 1985).

[4] Gauss, C. F., Untersuchungen über höhere Arithmetik, Maser, 1889 (译自拉丁文).

С. А. Степанов 撰

【补注】 在 [A2] 中证明：对任意 $\alpha > 1/4\sqrt{e}$，素数模 $p$ 的最小二次非剩余小于 $c(\alpha)p^{\alpha}$.

**参考文献**

[A1] Hardy, G. H. and Wright, E. M., An introduction to the theory of numbers, Oxford Univ. Press, 1979, Chapt. 6.

[A2] Burgess, D. A., The distribution of quadratic residues and non-residues, *Mathematica*, 4 (1957), 106–112.

戚鸣皋 译 潘承彪 校

**二项方程 [two-term equation; двучленное уравнение]**

形式为 $ax^n + b = 0$ 的代数方程，其中 $a$ 和 $b$ 是复数，且 $ab \neq 0$. 二项方程具有 $n$ 个不同的复根

$$x_k = \left|\frac{b}{a}\right|^{1/n} \exp\left[\frac{2\pi k + \varphi}{n} i\right],$$

$$k = 0, \cdots, n-1,\ \varphi = \arg\left[-\frac{b}{a}\right].$$

在复平面上，二项方程的根处在半径为 $|b/a|^{1/n}$、圆心在坐标原点的圆上，对应于内接正 $n$ 边形的顶点 (见正多边形 (regular polygon)).

А. И. Галочкин 撰 杜小杨 译

**二值逻辑 [two-valued logic; двухзначная логика]**

同逻辑代数 (algebra of logic).

**类型论 [types, theory of; типов теория]**

一种一阶形式理论 (见形式系统 (formal system))，它的一个变种是简单类型论 (simple theory of types)，描述如下. "类型论"一词没有严格的固定的含义. 它表示的是如下所述的一种形式理论. 首先，这个形式系统中含有语言工具，可以表示如下用语词描述的关系："序列 $\langle x_1, \cdots, x_n \rangle$ 属于 $y$" 或 "$y$ 执行 $x_1, \cdots, x_n$"；这里就可令 $y(x_1, \cdots, x_n)$ 表示引号中的表达式. 其次，个体域可以分出层 (strata)，或类型 (type)，构成类型的分层 (hierarchy of types) (不一定是线性的，也不一定是可数的)，同时还有类型论的概括公理 (或其等价形式). 如果将在类型 $\sigma$ 的个体中取值的变元记作 $x^{\sigma}, y^{\sigma}, z^{\sigma}, \cdots$ 则类型论概括公理 (type-theoretical comprehension axioms) 可以写成

$$\exists y^{\rho} \forall (x_1^{\sigma_1}, \cdots, x_n^{\sigma_n})\,(y^{\rho}(x_1^{\sigma_1}, \cdots, x_n^{\sigma_n}) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \varphi(x_1^{\sigma_1}, \cdots, x_n^{\sigma_n})), \qquad (*)$$

其中 $\varphi(x_1^{\sigma_1}, \cdots, x_n^{\sigma_n})$ 是这个系统的一个公式，其自由变元是 $x_1^{\sigma_1}, \cdots, x_n^{\sigma_n}$，变元 $y^{\rho}$ 的类型 $\rho$ 的层次要高于类型 $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ 的层次. 通常，类型 $\rho$ 是由 $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ 唯一确定的，记作 $(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$. 这样，在类型论系统中性质 $y$ 和满足这些性质的个体 $x_1, \cdots, x_n$ 一定分属不同的层次. 系统中通常还有外延公理，它把含义相同的性质视为恒等的. 这样的类型论系统就可以看成是集合论系统，因为它满足这样一条原则："一个集合完全由它所含的元素决定".

Russell 发现了集合论的悖论，他就此提出了类型论系统. 他把集合和这个集合中的元素放在不同的层次上，这就给出一种如何看待悖论 (antinomy) 的观点，依照这种观点，悖论的出现可以解释为在集合论定义中用到了非直谓性质. 这里，某个个体的定义称为非直谓的 (non-predicative)，如果在定义中用到了这个个体本身，或者换句话说，如果不先承认这个个体的存在，则这个个体的定义就没有意义. 这样，把 $(*)$ 式看成个体 $y$ 的定义，仍不能完全避免非直谓性，因为公式 $\varphi(x_1^{\sigma_1}, \cdots, x_n^{\sigma_n})$ 中可能有量词，这些量词的取值范围可以与个体 $y$ 属同一个层次. 于是，就有必要考虑直谓类型论系统 (predicative type-theoretic system)，在这样的系统中个体域可以进一步分解. 这一系统中，式 $(*)$ 中的 $y$ 所属的范围必定与 $\varphi(x_1^{\sigma_1}, \cdots, x_n^{\sigma_n})$ 中约束变元取值的范围不同.

类型论系统中类型的序可以是序数的某个初段，可以是（正和负）整数的集合，同时，系统中所有的公式可以都是适定型的个体，系统可以允许无穷长表达式（或者有代替这种表达式的工具，例如同一类型的量词）．二阶或更高阶的逻辑可以看成类型论系统．

**简单类型论**．简单类型论的语言包括：对于每个自然数 $n$，类型为 $n$ 的变元 $x_1^n, x_2^n, \cdots$；二元谓词符号 $\in$；逻辑联接词和量词，$\supset$，$\vee$，&，$\neg$，$\forall$，$\exists$；括号（和）．

简单类型论的公式通常是用归纳定义的方法构成：形如 $(x_i^n \in x_j^{n+1})$ 的表示式是公式；如果 $\varphi$ 和 $\psi$ 是公式，$v$ 是变元，则 $(\varphi\supset\psi)$，$(\varphi\vee\psi)$，$(\varphi\&\psi)$，$\neg\varphi$，$\forall v\varphi$，$\exists v\varphi$ 都是公式．记号 $(\varphi\Longleftrightarrow\psi)$ 是 $((\varphi\supset\psi)\&(\psi\supset\varphi))$ 的简写．

**简单类型论的非逻辑公理**．

A1．概括公理（comprehension axiom）

$$\exists y \forall x(x\in y \Longleftrightarrow \varphi)$$

其中 $x$ 和 $y$ 分别是类型为 $n$ 和 $n+1$ 的变元，$\varphi$ 是简单类型论语言的任意一个公式，其中 $y$ 不是 $\varphi$ 的自由变元．

A2．外延公理（extensionality axiom）：

$$\forall t(t\in x \Longleftrightarrow t\in y \supset \forall z(x\in z\supset y\in z)$$

其中 $t$，$x$，$y$，$z$ 分别是类型为 $n$，$n+1$，$n+2$ 的变元．

A3．无穷公理（infinity axiom）：

$$\exists x(\exists w(w\in x)\&\forall u\in x$$

$$\exists v\in x(u\subseteq v\&\exists t(t\in v\&\neg t\in u))),$$

其中 $x$ 是类型为 2 的变元．其余变元的类型可以从公式中唯一确定．式中记号 $\forall u\in x\varphi$ 和 $\exists v\in x\varphi$ 分别表示公式 $\forall u(u\in x\supset\varphi)$ 和 $\exists v(v\in x\&\varphi)$，表示式 $u\subseteq v$ 是 $\forall z(z\in u\supset z\in v)$ 的简写．

逻辑公理（logical axioms）和推理法则（inference rules）．就是经典谓词演算中的逻辑公理和推理法则（见**推导法则**（derivation rule）），只要就所用的语言作适当的修改．公理和法则决定了简单类型论中可推演的公式，即定理的类．

数学结构 $M=(V_0, V_1, \cdots, \in_M)$ 称为简单类型论模型（model of the simple theory of types），只要它满足简单类型论的所有非逻辑公理．这里 $\in_M\subseteq\bigcup_{n=0}^{\infty}(V_n\times V_{n+1})$．由谓词演算的 Gödel 完全性定理得知简单类型论的定理的类与在简单类型论的所有模型中都真的公式类是一致的．简单类型论是相当强的理论．算术和分析（即二阶算术）都可以嵌入其中．简单类型论中还可以考虑初始序数 $\omega_0, \cdots, \omega_n$，其中 $n$ 是任意预先给定的自然数．简单类型论具有简单的直觉集合论模型．$V_0$ 可以取任意一个无限集，每个后继层次 $V_{n+1}$ 都是由其前一层次 $V_n$ 的一些子集组成．关系 $\in_M$ 是自然而然的．在足够强的公理集合论的框架中，用集合论模型的存在性可以得到简单类型论的**相容性**（consistency）的形式证明．例如，在 Zermelo 系统中就可以建立这样的相容性证明．从 Zermelo-Fraenkel 系统 $ZF$ 出发，去掉替换公理，保留分离公理就得到 Zermelo 系统．

**参考文献**


[1] Whitehead, A. and Russell, B., Principia Mathematica, 1－3, Cambridge Univ. Press, 1910.

[2] Fraenkel, A. A. and Bar-Hillel, Y., Foundations of set theory, North-Holland, 1958.

[3] Barwise, J. (ed.), Handbook of Mathematical logic, North-Holland, 1977.

[4] Takeuti, G., Proof theory, North-Holland, 1975.


В. Н. Гришин 撰　沈复兴 译　罗里波 校

**典型实函数**[typically-real function; типично вещественная функция]，区域中的

在 $z$ 平面的包含实轴的一些线段的某区域 $B$ 内解析的函数 $f(z)$，在这些线段上取实值且当 $\operatorname{Im} z\neq 0$ 时 $(\operatorname{Im} f(z))(\operatorname{Im} z)>0$．基本的典型实函数类是类（class）$T$，它由圆盘 $|z|<1$ 内的正则典型实函数

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}c_n z^n$$

组成（参看[1]）．从类 $T$ 的定义推出当 $n\geqslant 2$ 时 $c_n$ 是实数．类 $T$ 包含由 $|z|<1$ 内正则单叶且具有实系数的函数

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}c_n z^n$$

组成的类 $S_r$（见**单叶函数**（univalent function））．若 $f\in T$，则

$$\varphi(z)=\frac{1-z^2}{z}f(z)\in C_r,$$

反之，若 $\varphi\in C_r$，则

$$f(z)=\frac{z}{1-z^2}\varphi(z)\in T,$$

其中 $C_r$ 是由在 $|z|<1$ 内正则且在 $|z|<1$ 内满足 $\operatorname{Re}\varphi(z)>0$ 的函数

$$\varphi(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n z^n$$

使得当 $n\geqslant 1$ 时 $\alpha_n$ 是实数者所组成的类．

设 $M_1$ 是由满足 $\alpha(1)-\alpha(-1)=1$ 的 $[-1, 1]$ 上非减函数 $\alpha(t)$ 组成的类．类 $T$ 的函数在 $|z|<1$ 内可用 Stieltjes 积分表示（见[2]）：

$$f(z)=\int_{-1}^{1}s(z,t)d\alpha(t), \tag{1}$$

$$s(z,t)=z(1-2tz+z^2)^{-1}, \alpha(t)\in M_1,$$

这就是说对于每个 $f\in T$，存在 $\alpha\in M_1$ 使得 (1) 式成立，反之，对于任何 $\alpha\in M_1$，公式 (1) 确定某个函数 $f\in T$. 对每个固定的 $t\in[-1,1]$ 有 $s(z,t)\in S_r$. 使 $T$ 中每个函数都单叶的最大区域为 $\{|z+i|<\sqrt{2}\}\cap\{|z-i|<\sqrt{2}\}$. 从关于类 $T$ 的表示式 (1) 出发，已得到一系列旋转定理与畸变定理 (见**畸变定理** (distortion theorems); **旋转定理** (rotation theorems)). 在类 $T$ 中下列关系式成立:

$$-n\leqslant c_n\leqslant n, \quad \text{当 } n \text{ 是偶数}, \tag{2}$$

$$k_n=\min_{0\leqslant\theta\leqslant\pi}\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\leqslant c_n\leqslant n, \text{ 当 } n \text{ 是奇数}, \tag{3}$$

$$\left[k_n\sim\frac{-2n}{3\pi}\right],$$

式(2)左端的等号仅对 $s(z,-1)$ 成立，右端的等号仅对 $s(z,1)$ 成立; 式 (3) 左端的等号仅对函数 $f(z)=\lambda s(z,t_n)+(1-\lambda)s(z,-t_n)$ 成立，$t_n\in[-1,1]$ 是某个值，右端的等号仅对 $f(z)=\lambda s(z,1)+(1-\lambda)s(z,-1)$ 成立，$0\leqslant\lambda\leqslant1$.

对于 $T$，数组 $\{c_2,\cdots,c_n\}$, $\{f(z)\}$, $\{f(z), c_2,\cdots,c_n\}$ $(n\geqslant2)$ 的系数域已求得 (见[3]).

**参考文献**


[1] Rogosinski, W., Ueber positive harmonische Entwicklungen und typische-reelle Potenzreihen, *Math. Z*, **35** (1932), 93 – 121.

[2] Голузин, Г. М., 《Матем. сб.》, **27** (1950), 2, 201 – 218.

[3] Голузин, Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966 (英译本: Goluzin, G. M., Geometric theory of functions of a complex variable, Amer. Math. Soc., 1969).


Е. Г. Голузина 撰

**【补注】**

**参考文献**


[A1] Duren, P. L., Univalent functions, Springer, 1983.

[A2] Goodman, A. W., Univalent functions, 1, Mariner, 1983.


杨维奇 译

# U

**超桶型空间** [**ultra-barrelled space**; **ультрабочечное пространство**]

一种具有拓扑 $t$ 的**拓扑向量空间**(topological vector space) $E$, 其中具有由 $t$ 闭集组成的零点的邻域基的任何拓扑 $t'$ 均弱于 $t$. 每一个不是第一范畴集的拓扑向量空间均是超桶型的. 如果一个局部凸空间是超桶型的, 那么它也是桶型的, 但是一个**桶型空间**(barrelled space)不一定是超桶型的.

**参考文献**


[1] Edwards, R., Functional analysis, Holt, Rinehart & Winston, 1965.

[2] Robertson, W. S., Completions of topological vector spaces, *Proc. London Math. Soc.*, **8** (1958), 30, 242-257.


В. И. Ломоносов 撰 葛显良 译 鲁世杰 校

**超有界型空间** [**ultra-bornological space**; **ультраборнологическое пространство**]

一种能表成 Banach 空间的归纳极限的**局部凸空间**(locally convex space). 换言之, 超有界型空间可定义为这样一种局部凸空间 $E$, 其中每一个吸收 $E$ 中任一 Banach 圆盘 $A$ 的绝对凸子集 $U$ 是零的一个邻域. (Banach 圆盘(Banach disk)是一个绝对凸有界集 $A$ 使得它的张成 $E_A = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} nA$ 装备了自然范数 $\|x\|_A = \inf\{\rho > 0: x \in \rho A\}$ 后是一 Banach 空间.) 有界型空间(bornological space)是能表成赋范空间的归纳极限的一种局部凸空间, 或换句话说, 是其中每个吸收任一有界集的绝对凸子集都是零的邻域的这样一种局部凸空间.

**参考文献**


[1] Robertson, A. P. and Robertson, W. S., Topological vector spaces, Cambridge Univ. Press, 1964.


В. И. Ломоносов 撰

【补注】一个超有界型空间是桶型的和有界型的, 但其逆不对. 每一个拟完全有界型空间是超有界型的, 但其逆也不成立.

**参考文献**


[A1] Jachow, H., Locally convex spaces, Teubner, 1981.

[A2] Valdivia, M., Topics in locally convex spaces, North-Holland, 1982.


葛显良 译 鲁世杰 校

**超滤子** [**ultrafilter**; **ультрафильтр**]

在下述意义下的一个极大**滤子**(filter): 包含该滤子的所有滤子都与它相同. 超滤子可以用满足如下三条的子集系定义: 1) 不包括空集; 2) 集系中两个子集之交仍属于它; 3) 任何子集, 或者其自身, 或者其补集属于该集系.

所有超滤子被分成两类: 平凡超滤子(或固定超滤子, 或主超滤子)及自由超滤子. 超滤子称为平凡(trivial)或主(principal)超滤子, 如果它是包含给定点的所有子集组成的集系; 这样的超滤于也称为固定于该点的超滤子. 超滤子称为自由(free)超滤子, 如果它的所有元素之交为空集, 换言之, 它在任何点都不是固定的. 自由超滤子的存在性, 不利用**选择公理**(axiom of choice)就无法证明.

对任何滤子都存在一个包含它的超滤子; 进而, 任何滤子恰为包含它的所有超滤子的交.

**参考文献**


[1] Bourbaki, N., General topology, Elements of mathematics, Springer, 1989. Chapts. 1-2(译自法文).

[2] Kuratowski, K. and Mostowski, A., Set theory, North-Holland, 1968.


В. И. Малыхин 撰

【补注】在一般拓扑学和数理逻辑中, 超滤子是重要的理论部分. 对于拓扑学家, 它们乃是自由紧空间的

元素，即离散空间 $D$ 的 **Stone-Čech 紧化** (Stone-Čech compactification) $\beta D$ 的元素．$\beta D$ 是生成元的集合 $D$ 上的自由紧 Hausdorff 空间，就象是生成元的集合上的一个自由群；它的特征是，从集合 $D$ 到紧 Hausdorff 空间 $X$ 的任何映射 $f$，可唯一扩张成连续映射 $\beta f: \beta D \to X$．

鉴于自由超滤子很难描述，考察将 $\mathbf{N}$ 的每个子集 $A$ 对应于区间 $[0, 1]$ 中一个数 $x_A = \sum_{n\in A} 2^{-n}$ 的映射，若 $u$ 是 $\mathbf{N}$ 中自由超滤子，则集合 $\{x_A: A\in u\}$ 是不可测的．

对于逻辑学家，超滤子乃是在它上面构成超积 (ultraproducts) 的加标结构．在模型论中一些简单而重要的存在性结论，都是用颇为一致的方法证明的：为了建立语句 $S$ 的无穷集上的模型，对 $S$ 的任意大有限子集建立模型（这种可能性常常容易证明），并取它们的任意超积．为了更好地控制构造，可以使用加限制的超滤子，例如，好超滤子 (good ultrafilters) 或一致超滤子 (uniform ultrafilters)，见 [A1]．

关于不用自由超滤子的集合论模型的讨论见 [A8]．

集合上超滤子的同构型，有两个重要的偏序，它们始见于 [A11]：定义在任意集合 $D$ 上的 Rudin-Keisler 序 (Rudin-Keisler order) 以及仅定义在可数集 $\omega$ 上的 Rudin-Frolík 序 (Rudin-Frolík order)．$D$ 上两个超滤子 $p, q$，即 $\beta D$ 的两个点，如果存在映射 $f: D\to D\subset\beta D$，使得 $\beta f(q) = p$，就认为在 Rudin-Keisler 序中有 $p\leqslant q$．若 $p\leqslant q$ 且 $q\leqslant p$，就说 $p, q$ 同型．关系 $p\leqslant q$ 导出型的一个偏序．可类似定义 $\omega$ 上 Rudin-Frolík 序，但要使用具有离散象的映射 $f: \omega\to\beta\omega$．

到 1974 年止，[A1] 是一份比较完整的拓扑方面处理超滤子理论的文献，并且还是介绍超滤子这一学科分支的最好的书．该书用长达 40 页的一章来讨论大基数 (large cardinals)．使这一学科分支自 1974 年以来有了近乎革命性的发展．

设 $\Phi$ 是指标集 $I$ 上的一个超滤子．对每个 $i$，设 $A_i$ 是集合．利用 $\Phi$ 可以如下定义 $\prod A_i$ 上的一个等价关系：$a = (a(i))_{i\in I}$，$b = (b(i))_{i\in I}$ 等价，当且仅当 $\{i: a(i) = b(i)\}\in\Phi$ (记作 $a\equiv b$)．$\prod A_i$ 关于这个等价关系的商 $(\prod A_i)/\Phi$ 称为 $A_i$ (关于超滤子 $\Phi$) 的超积 (ultraproduct)．

对每个 $i$，设 $R_i$ 是 $A_i$ 上的一个 $n$ 元关系（最终对应着语言 $L$ 的一种谓词或相同谓词，其中假定 $(A_i, \{R_i\})$ 是 $L$ 的解释）．那么 $(\prod A_i)/\Phi$ 上对应关系 $R$ 定义为：

$$(\overline{a}_1, \cdots, \overline{a}_n)\in R \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \{i: a_1(i), \cdots, a_n(i)\in R_i\}\in\Phi,$$

其中 $\overline{a}_m$ 是 $a_m$ 在 $(\prod A_i)/\Phi$ 中的等价类．（由超滤子性质，这是良定的．）可以类似定义函数及单个常数．

若所有 $A_i$ 相同，就用超幂 (ultrapowers) 代替超积．

超积在 **Diophantus 方程** (Diophantine equations) 理论和代数数论 (algebraic number theory) 中有着重要的应用．例如，对每个素数 $p$，设 $\mathbf{Q}_p$ 是 $p$ 进数域，$\mathbf{F}_p((t))$ 是有限域 $\mathbf{F}_p = \{0, \cdots, p-1\}$ 上 Laurent 级数的域，则 Ax-Kochen 定理 (Ax-Kochen theorem) 指出，对每个非主超滤子 $\Phi$，

$$\prod_p \mathbf{Q}_p/\Phi \simeq \prod_p \mathbf{F}_p((t))/\Phi.$$

它用定理的形式对关于 Diophantus 方程的 Artin 猜想 (Artin conjecture on Diophantine equations)，给出了一个直接肯定的部分解法：对于每个正整数 $d$，存在素数的有限集 $P(d)$，使 $\mathbf{Q}_p$ 上任何 $d(n>d^2)$ 次齐次多项式 $f(X_1, \cdots, X_n)$，在 $\mathbf{Q}_p$ 中对所有 $p\notin P(d)$ 有非平凡零点．这个结论也可由 Ю. Л. Ершов 的结果导出 ([A6])，该结果的证明也用到超积．更为一般的 Artin 猜想指出，$\mathbf{Q}_p$ 是 $C_2$ 域 ($C_2$-field)，这意味着对于所有 $p$ ($C_2$ 域中的"2"对 $n>d^2$ 中的"2") 结论必然成立．但是，G. Terjanian 在 1966 年用仅有非平凡零点的 $\mathbf{Q}_2$ 上 18 元二次型给出了完整 Artin 猜想的一个反例．

更加精确地，设 $i\geqslant 0$，$d\geqslant 1$ 为整数．如果 $F$ 上任何 $n(n>d^i)$ 元 $d$ 次齐次多项式 $f(X_1, \cdots, X_n)$ 在 $F$ 中有非平凡零点，则称域 $F$ 为 $C_i(d)$ 域 ($C_i(d)$-field)．一个域对所有 $d\geqslant 1$ 是 $C_i(d)$ 域，则称为 $C_i$ 域 ($C_i$-field)．$C_0$ 域是代数闭域．$C_1$ 域也称为拟代数闭的 (quasi-algebraically closed)．代数闭域上一元有理函数组成 $C_1$ 域 (曾 (炯之) 定理 (Tsen theorem))．域 $\mathbf{Q}_p$ 是 $C_2(2)$ 域 (H. Hasse, 1923)，也是 $C_2(3)$ 域 (D. J. Lewis, 1952)．

超积的另一个重要应用是在**非标准分析** (non-standard analysis) 中；特别地，实数，整数等的非标准模型可作为 $\mathbf{R}$，$\mathbf{Z}$ 等的超幂得到．

涉及超滤子和超积的逻辑方面的结论，见**模型论** (model theory) 及 [A2]．

超滤子在拓扑学中有更为重要的应用，见 [A1]，[A7]．

**参考文献**


[A1] Comfort, W. W. and Negrepontis, S., The theory of ultrafilters, Springer, 1974.

[A2] Bell, J. L. and Slomson, A. B., Models and ultraproducts, North-Holland, 1969.

[A3] Ax, J. and Kochen, S., Diophantine problems over local fields I, *Amer. J. Math*, 87 (1965), 605–630.

[A4] Ax, J. and Kochen, S., Diophantine problems over local fields Ⅱ. A complete set of axioms for $p$-adic number theory, *Amer. J. Math.*, **87** (1965), 631 – 648.

[A5] Ax, J. and Kochen, S., Diophantine problems over local fields Ⅲ. Decidable fields, *Ann. of Math.*, **83** (1966), 437 – 456.

[A6] Ershov, Yu. L., On the elementary theory of maximal normal fields, *Soviet Math. Dokl.*, **6** (1965), 1390 – 1393 (*Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **165** (1965), 21 – 23).

[A7] Arkhangel'skiĭ, A. V. and Ponomarev, V. I., Fundamentals of general topology, Reidel, 1984 (译自俄文).

[A8] Jech, T., Set theory, Acad. Press, 1978.

[A9] Mill, J. van, An introduction to $\beta\omega$, in K. Kunen and J. E. Vaughan (eds.), Handbook of Set-Theoretic Topology, North-Holland, 1984.

[A10] Rudin, W., Homogeneity problems in the theory of Čech compactification, *Duke Math. J.*, **23** (1956), 409 – 419.

罗嵩龄 译

**超球多项式** [**ultraspherical polynomials**; **ультрасферические многочлены**], Gegenbauer 多项式 (Gegenbauer polynomials)

区间 $[-1, 1]$ 上的**正交多项式** (orthogonal polynomials) $P_n(x, \lambda)$, 权函数为 $h(x) = (1 - x^2)^{\lambda - 1/2}$; 为 **Jacobi 多项式** (Jacobi polynomials) 当 $\alpha = \beta = \lambda - 1/2$ $(\lambda > -1/2)$ 时的特殊情况; **Legendre 多项式** (Legendre polynomials) 是超球多项式的特殊情况: $P_n(x) = P_n(x, 1/2)$.

超球多项式具有标准化

$$P_n(x, \lambda) \equiv C_n^{(\lambda)}(x) =$$

$$= \frac{(-2)^n}{n!} \frac{\Gamma(n+\lambda)\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(2n+2\lambda)} (1 - x^2)^{-\lambda+1/2} \times$$

$$\times \frac{d^n}{dx^n} [(1 - x^2)^{n-\lambda-1/2}]$$

和表示式

$$C_n^{(\lambda)}(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{\Gamma(n-k+\lambda)}{\Gamma(\lambda)k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}.$$

超球多项式是母函数的幂级数展开

$$\frac{1}{(1 - 2xw + w^2)^\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(\lambda)}(x) w^n$$

的系数. 超球多项式 $C_n^{(\lambda)}(x)$ 满足微分方程

$$(1 - x^2)y'' - (2\lambda + 1)xy' + n(n + 2\lambda)y = 0.$$

更常采用下列公式:

$$(n+1)C_{n+1}^{(\lambda)}(x) =$$

$$= 2(n+\lambda)xC_n^{(\lambda)}(x) - (n + 2\lambda - 1)C_{n-1}^{(\lambda)}(x),$$

$$C_n^{(\lambda)}(-x) = (-1)^n C_n^{(\lambda)}(x),$$

$$\frac{d}{dx}[C_n^{(\lambda)}(x)] = 2\lambda C_{n-1}^{(\lambda+1)}(x),$$

$$C_n^{(\lambda)}(\pm 1) = (\pm 1)^n \frac{2\lambda(2\lambda+1)\cdots(2\lambda+n-1)}{n!} =$$

$$= (\pm 1)^n \begin{bmatrix} n + 2\lambda - 1 \\ n \end{bmatrix}.$$

关于参考文献, 见**正交多项式** (orthogonal polynomials).

П. К. Суетин 撰

【补注】 亦见**球面调和函数** (spherical harmonics).

超球多项式和 Jacobi 多项式通过下列二次变换 (quadratic transfomations) 相联系:

$$C_{2n}^{(\lambda)}(x) = \text{常数} \cdot P_n^{(\lambda-1/2, -1/2)}(2x^2 - 1),$$

$$C_{2n+1}^{(\lambda)}(x) = \text{常数} \cdot xP_n^{(\lambda-1/2, 1/2)}(2x^2 - 1).$$

关于 $q$ 超球多项式, 见 [A1].

**参考文献**

[A1] Askey, R. and Ismail, M. E. H., A generalization of ultraspherical polynomials, in P. Erdős (ed.), Studies in Pure Mathematics to the Memory of Paul Turán, Birkhäuser, 1983, 55 – 78.

杜小杨 张鸿林 译

**脐点** [**umbilical point**; **округления точка**]

曲面的一个**椭圆点** (elliptic point), 在该点**密切抛物面** (osculating paraboloid) 退化成一个旋转抛物面. 在脐点处沿所有方向的法曲率都相同, 而且该点的 **Dupin 标形** (Dupin indicatrix) 是一个圆. 脐点有时也被称为球面点 (spherical point) 或圆点 (circular point).

Д. Д. Соколов 撰

【补注】 在平坦点 (plat point) 处, 密切抛物面退化成一个平面. 平坦点通常也被称为脐点. 但是, Dupin 标形在平坦点处没有定义.

**参考文献**

[A1] Hicks, N. J., Notes on differential geometry, v. Nostrand, 1965.

沈纯理 译

**哑演算** [**umbral calculus**; **теневой анализ**]

【补注】 应用近世代数技术研究某些类型的多项式序列或形式 Laurent 级数的系统理论.

哑 (umbra) 这个词是 J. J. Sylvester 在 19 世纪中期提出的, 而最初是指用于表示一个实数序列 $a_0$, $a_1$, … 的符号 **a**. 因此, 如果序列 **a**, **b** 和 **c** 满足

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}.$$

则可以用哑记号（umbral notation）表示为

$$\mathbf{c}^n = (\mathbf{a} + \mathbf{b})^n$$

然而这个记号现在已经过时.

现代设计的哑演算是研究二项型的多项式序列（polynomial sequences of binomial type）$p_n(x)$，即 $\deg(p_n(x)) = n$ 且

$$p_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k(x)\, p_{n-k}(x)$$

的序列，以及 Sheffer 型的多项式序列（polynomial sequences of Sheffer type）$s_n(x)$，即 $\deg(s_n(x)) = n$ 且

$$s_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} s_k(x)\, p_{n-k}(x)$$

的序列．这里 $p_n(x)$ 是二项型的序列．Sheffer 型序列类还包含与下述人有关的多项式序列，他们是 Ch. Hermite, E. N. Laguerre, J. Bernouli, L. Euler, S. D. Poisson 和 C. Charlier, J. Meixner, F. B. Pidduck. S. Narumi, G. Boole, G. M. Mittag-Leffler, F. W. Bessel, E. T. Bell, N. H. Abel，以及其他一些人.

如果 $P$ 是单变量多项式代数，那么对偶空间 $P^*$ 是众所周知的向量空间．事实上，$P^*$ 借助于映射

$$\sigma(L) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{l(x^k)}{k!} t^k.$$

同构于形式幂级数 $\mathscr{A}$ 的向量空间．因此可以把 $P^*$ 等同于代数 $\sigma(P^*) = \mathscr{A}$，从而允许线性泛函的乘法．代数 $\mathscr{A} = \sigma(P^*)$ 称为哑代数（umbral algebra）.

特别地，对线性泛函 $L$ 和 $M$，几何级数 $M$, $ML$, $ML^2$, $\cdots$ 是有意义的，因此，可以通过 $\deg(s_n(x)) = n$ 定义多项式序列 $S_n(x)$ 和正交性条件（orthogonality conditions）.

$$ML^k(s_n(x)) = n!\,\delta_{n,k}.$$

按这种方式得到的序列恰是 Sheffer 型序列，并称其为 Sheffer 序列（Sheffer sequences）.

在哑演算中最强的一些结果来自于哑代数 $\mathscr{A}$ 上线性算子空间的研究．如果 $T: P \to P$ 是 $P$ 上的线性算子，那么它的伴随 $T^*: \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ 是哑代数 $\mathscr{A}$ 上的线性算子.

$P$ 上最重要的线性算子是对二项型序列 $p_n(x)$ 用

$$\lambda(x^n) = p_n(x)$$

定义的哑算子（umbral operator）和对二项型序列 $p_n(x)$ 用

$$\theta P_n(x) = p_{n+1}(x)$$

定义的哑移位（umbral shift）.

哑演算中两个关键结果是：$P$ 上一个线性算子是哑算子，当且仅当它的伴随是 $\mathscr{A}$ 的一个自同构；$P$ 上一个算子是哑移位，当且仅当它的伴随是 $P$ 上的求导．第一个结果引出了多项式 $P_n(x)$ 的显式表示，而第二个结果导出了 $p_n(x)$ 的递推关系．从而给出了 Hermite, Laguerre, Bernoulli 和其他一些序列的著名递推关系.

近来哑演算在几个方向上已有所扩展．一个方向是关于非 Sheffer 序列研究，如 Чебышев, Gegenbauer 和 Jacobi 多项式序列；另一个方向是所谓的 $q$ 哑演算（$q$-umbral calculus）研究，其中多项式系数用 Gauss 系数（Gaussian coefficients）取代.

Gauss 系数或 $q$ 二项式系数（$q$-binomial coefficients）$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ 定义为：

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(q;q)_n}{(q;q)_k\,(q;q)_{n-k}}.$$

这里所谓的 $q$ 移位阶乘 $(a;q)_m$ 定义为：

$$(a;q)_n = \begin{cases} 1, & \text{若 } n = 0, \\ (1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{n-1}), & \text{若 } n > 0. \end{cases}$$

其中 $q$ 或看成是一个形式变量，或看成是一个绝对值小于 1 的复变量．应用这些 $q$ 二项式系数，可得到 $q$ 二项式公式（$q$-binomial formula）：如果 $x$, $y$ 满足 $yx = qxy$，则有

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-k} y^k = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q y^k x^{n-k}.$$

当前涉及各种经典问题的 $q$ 形式的完整理论正在出现：$q$ 特殊函数，$q$-$\gamma$函数，量子群，$q$ 积分，$q$ 正交多项式，$q$ 超几何级数，$q$-Haar 测度等以 $q$ 形式完善了它们之间的各种相互关系．见**特殊函数**（special functions），**量子群**（quantum groups）的补注以及 [A9]－[A10].

最后，哑演算已推广到研究形式（Laurent）级数序列，其中对数起着关键作用.

**参考文献**


[A1] Loeb, D. and Rota, G.-C., Formal power series of logarithm type, *Adv. Math.*, **75** (1989), 1－118.

[A2] Roman, S., The umbral calculus, Acd. Press, 1984.

[A3] Roman, S. and Rota, G.-C., The umbral calculus, *Adv. Math.*, **27** (1978), 95－188.

[A4] Roman, S., More on umbral calculus, with emphasis on the $q$-umbral calculus, *J. Math. Anal. Appl.*, **107** (1985), 222－254.

[A5] Roman, S.. The logarithmic binomial formula, *Amer. Math. Monthly*. (To appear).

[A6] Roman, S., The harmonic logarithms and the binomial formula. *J. Comb. Theory, Ser. A* (To appear).

[A7] Rota, G.-C., Kahaner, D. and Odlyzko, A., Finite operator calculus, *J. Math. Anal. Appl.*, 42 (1973), 684 – 760.

[A8] Ueno, K., Umbral calculus and special functions, *Adv. Math.*, 67 (1988), 174 – 229.

[A9] Gasper, G. and Rahman, M., Basic hypergeometric series. Cambridge Univ Press, 1990.

[A10] Koornwinder, T., Orthogonal polynomials in connection with quantum groups, in P. Nevai (ed.): Orthogonal polynomials. Theory and practice, Kluwer, 1990, 257 – 292.

S. Roman 撰 刘振宏 译 李 乔 校

**一元代数 [unary algebra 或 unoid; унарная алгебра, уноид]**

具有一族一元运算 $\{f_i: A \to A, i\in I\}$ 的一个**泛代数** (universal algebra) $<A, \{f_i, i\in I\}>$. 一元代数的一个重要的例子产生于由任意群 $G$ 到一个集合 $A$ 的一切置换的群 $S_A$ 内的群同态 $\varphi: G\to S_A$. 这样一个同态称为群 $G$ 在 $A$ 上的作用 (action). 对于每一元素 $g\in G$, 定义一个一元运算 $f_g: A\to A$ 作为 $S_A$ 内在同态 $\varphi$ 之下与元素 $g$ 相对应的置换 $\varphi(g)$, 这就提供了一个一元代数 $<A, \{f_g: g\in G\}>$, 其中

$$f_1(x)=x,\ f_g(f_h(x))=f_{gh}(x),\ x\in A,\ g,\ h\in G.$$

环上每一个**模** (module) 都带有一个一元代数结构. 每一个具有状态集 $S$ 和输入符号 $a_1, \cdots, a_n$ 的确定性半自动机 (见**自动机的代数理论** (automata, algebraic theory of)), 也可以看成一个一元代数 $<S, f_1, \cdots, f_n>$, 这里 $f_i(s)=a_is$ 是状态 $s$ 被输入符号 $a_i$ 作用所映成的状态.

具有单独一个基本运算的一元代数称为单一元的 (mono-unary 或 unar). 一个单一元代数的例子就是 Peano 代数 $<P, f>$, 这里 $P=\{1,2,\cdots\}$ 而 $f(n)=n+1$.

任何一个一元代数的等式只能是以下类型:

$\mathrm{I}_1$. $f_{i_1}\cdots f_{i_k}(x)=f_{j_1}\cdots f_{j_l}(x)$,

$\mathrm{II}_1$. $f_{i_1}\cdots f_{i_k}(x)=f_{j_1}\cdots f_{j_l}(y)$.

$\mathrm{I}_2$. $f_{i_1}\cdots f_{i_k}(x)=x$,

$\mathrm{II}_2$. $f_{i_1}\cdots f_{i_k}(x)=y$,

$\mathrm{I}_3$. $x=x$,

$\mathrm{II}_3$. $x=y$.

等式 $\mathrm{II}_2$ 与 $\mathrm{II}_3$ 等价, 只被一个元素的代数所满足. 一个仅由形如 $\mathrm{I}_1$, $\mathrm{I}_2$ 或 $\mathrm{I}_3$ 所定义的一元代数簇称为正则的 (regular). 在正则的一元代数簇与半群之间存在以下的联系 (见 [1], [3], [4]).

令 $V$ 是由一个函数符号集合 $\{f_i: i\in I\}$, $I\neq\emptyset$, 和一个等式集合 $\Sigma$ 所给出的正则一元代数簇. 每一个符号 $f_i$ 对应于一个元素 $a_i$, 对于 $\Sigma$ 中每一个 $\mathrm{I}_1$ 形式的等式, 写出定义关系

$$a_{i_1}\cdots a_{i_k}=a_{j_1}\cdots a_{j_l}.$$

令 $P$ 是具有生成元 $a_i(i\in I)$ 和以上定义关系的**半群** (semi-group), 又令 $P^1$ 是半群 $P$ 再添上单位元 $e$ 所得的半群. 对于 $\Sigma$ 中每一个形如 $\mathrm{I}_2$ 的关系 (如果有的话) 写出定义关系 $a_{i_1}\cdots a_{i_k}=e$. 由 $P^1$ 通过添加这些定义关系所得到的半群 $P_V$ 称为与簇 $V$ 相关联的. 有许多方法来刻画这个簇. 如果 $\Sigma$ 只含有形式 $\mathrm{I}_1$ 的等式, 那么可以只限于构造 $P$. 在 $P_V$ 内定义一元运算 $f_i(x)=xa_i$, 就得到一个一元代数 $<P_V, \{f_i: i\in I\}>$, 它是一个秩为 1 的 $V$ 自由代数. 一元代数 $<P_V, \{f_i: i\in I\}>$ 的全体自同构的群与半群 $P_V$ 的可逆元素所成的群 $P_V^*$ 同构.

**参考文献**

[1] Мальцев, Д. И., Алгебраические системы, М., 1970 (英译本: Mal'tsev, A. I., algebraic systems, Springer, 1972 – 1973).

[2] Birkhoff, G. and Bartee, T., Modern applied algebra, McGraw-Hill, 1970

[3] Смирнов, Д. М., 《Алгебра и логика》, 15 (1976), 3, 331 – 342.

[4] Смирнов, Д. М., 《Алгебра и логика》, 17 (1978), 4, 468 – 477.

[5] Jónsson, B., Topics in universal algebra, Springer, 1972.

Д. М. Смирнов 撰

【补注】 正则一元代数簇可以用范畴的术语刻画为这样的簇, 它到集合范畴的可遗函子保持上积 (就是说, 这个簇内一族代数的上积被它们的承载集的不相交并集所承载). 与这样一个簇相关联的半群不依赖于 (如上面正文中那样) 这个簇通过运算和等式的特殊表现而范畴地得到: 它是由这个簇到集合范畴的可遗函子的自同态半群.

郝钢新 译

**无偏估计量 [unbiased estimator; несмещенная оценка]**

数学期望等于被估计的量的**统计估计量** (statistical estimator). 假设随机变量 $X$ 取值于样本空间 $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, \mathrm{P}_\theta)$ $(\theta\in\Theta)$; 拟根据 $X$ 的实现估计函数 $f: \Theta\to\Omega$, $f$ 是从参数集 $\Theta$ 到某个集合 $\Omega$ 的映射; 选统计量 $T=T(X)$ 作函数 $f(\theta)$ 的估计量. 如果对于一切 $\theta\in\Theta$, 统计量 $T$ 满足

$$\mathrm{E}_\theta\{T\}=\int_{\mathfrak{X}} T(x)\,d\mathrm{P}_\theta(x)=f(\theta),$$

则称 $T$ 为函数 $f(\theta)$ 的无偏估计量 (unbiased estima-

tor)．常称无偏估计量无系统误差．

例 1．设随机变量 $X_1,\cdots,X_n$ 的数学期望同为 $\theta$，即

$$\mathsf{E}_\theta\{X_1\}=\cdots=\mathsf{E}_\theta\{X_n\}=\theta.$$

这时统计量

$$T=c_1X_1+\cdots+c_nX_n,\quad c_1+\cdots+c_n=1$$

是数学期望 $\theta$ 的无偏估计量．特别地，观测值的算术平均值 $\overline{X}=(X_1+\cdots+X_n)/n$ 是 $\theta$ 的无偏估计量．在该例中 $f(\theta)\equiv\theta$．

例 2．设 $X_1,\cdots,X_n$ 是独立服从同一概率分布的随机变量，其分布函数为 $F(x)$，即

$$\mathsf{P}\{X_i<x\}=F(x),\ |x|<\infty,\ i=1,\cdots,n.$$

这时，由观测值 $X_1,\cdots,X_n$ 建立的经验分布函数 $F_n(x)$，是分布函数 $F(x)$ 的无偏估计，即 $\mathsf{E}\{F_n(x)\}=F(x),\ |x|<\infty$．

例 3．设 $T=T(x)$ 是参数 $\theta$ 的无偏估计量，即 $\mathsf{E}_\theta\{T\}=\theta$，而 $f(\theta)=a\theta+b$ 是 $\theta$ 的线性函数，则 $aT+b$ 是 $f(\theta)$ 的无偏估计量．

下面例 4 表明，可能有这样的情形：无偏估计量存在并且甚至唯一，然而这些估计量有可能毫无用处．

例 4．设 $X$ 是服从几何分布的随机变量，成功的概率为 $\theta$，即对于任意自然数 $k$，有

$$\mathsf{P}\{X=k\mid\theta\}=\theta(1-\theta)^{k-1},\quad 0\leqslant\theta\leqslant1.$$

如果统计量 $T=T(X)$ 是参数 $\theta$ 的无偏估计量，则它应满足无偏性方程 $\mathsf{E}_\theta(T)=\theta$，即

$$\sum_{k=1}^{\infty}T(k)\theta(1-\theta)^{k-1}=\theta,$$

其唯一解是

$$T(X)=\begin{cases}1, & 若\ X=1,\\ 0, & 若\ X\geqslant2.\end{cases}$$

显然，统计量 $T$ 只有当 $\theta$ 十分接近 1 或 0 时才具有好性质，否则不能为参数 $\theta$ 提供任何有用信息．

例 5．假设随机变量 $X$ 服从二项分布，参数为 $n$ 和 $\theta$，即对于任意 $k=0,1,\cdots,n$，

$$\mathsf{P}\{X=k\mid n,\theta\}=\binom{n}{k}\theta^k(1-\theta)^{n-k},\ 0<\theta<1.$$

已知成功概率 $\theta$(在平方风险意义下)的最优无偏估计量是统计量 $T=X/n$．但是，假设 $\theta$ 是无理数，则 $\mathsf{P}\{T=\theta\}=0$．这个例子反映随机变量的这样一条普遍性质，就是随机变量一般未必取其数学期望为值．最后，有时无偏估计量根本不存在．例如，在例 5 的条件下，假设被估计函数为 $f(\theta)=1/\theta$，则 $1/\theta$ 的无偏估计量不存在(见例 7)．

上述各例表明，无偏估计量的概念，尽管它很自然，然而它并不能帮助试验者摆脱建立统计估计时可能遇到的复杂情况，因为无偏估计量既可以是很好的，也可能毫无意义；它既可能不唯一，也可能根本不存在．此外，无偏估计量同任何点估计量一样有如下缺陷：它只能给出被估计的量之真值的某个近似值，而被估计的量在试验前是未知的，而且试验后仍然未知．除了在研究无偏估计量时产生的简单而严整的理论，在建立统计点估计问题中，为在各种情形下力求获得无偏估计量，一般没有严谨的根据．例如，**Rao-Cramér 不等式**(Rao-Cramér inequality)对于无偏估计量有简单的形式．具体地，如果 $T=T(X)$ 是函数 $f(\theta)$ 的无偏估计量，则在分布族 $\{\mathsf{P}_\theta\}$ 和函数 $f(\theta)$ 满足相当广泛的正则性条件下，由 Rao-Cramér 不等式，可见

$$\mathsf{D}\{T\}=\mathsf{E}\{|T-f(\theta)|^2\}\geqslant\frac{1}{I(\theta)}\{f'(\theta)\}^2,\quad(1)$$

其中 $I(\theta)$ 是关于 $\theta$ 的 **Fisher 信息量**(Fisher amount of information)．这样，对于函数 $f(\theta)$ 的无偏估计量的方差存在下界，此下界为 $f'(\theta)/I(\theta)$．特别地，如果 $f(\theta)\equiv\theta$，则由(1)式，有

$$\mathsf{D}\{T\}\geqslant\frac{1}{I(\theta)}.$$

使 Rao-Cramér 不等式达到等式的统计估计量，称为**有效估计量**(efficient estimator)．例如，例 5 中的统计量 $T=X/n$ 是二项分布的参数 $\theta$ 的有效无偏估计量，因为

$$\mathsf{D}\{T\}=\frac{1}{n}\theta(1-\theta)$$

且

$$I(\theta)=\mathsf{E}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\log[\theta^X(1-\theta)^{n-X}]\right]^2\right\}=\frac{n}{\theta(1-\theta)},$$

即在 $\theta$ 的所有无偏估计量类中，$T=X/n$ 在最小平方风险意义下是 $\theta$ 的最优点估计量．

自然，试验者感兴趣的是无偏估计类充分丰富的情形，以便能选取在某种意义下最优的无偏估计量．因而，**Rao-Blackwell-Колмогоров 定理**(Rao-Blackwell-Kolmogorov theorem)有重要作用，利用该定理可以建立最小方差无偏估计量．该定理的结论是：如果分布族 $\{\mathsf{P}_\theta\}$ 有**充分统计量**(sufficient statistics) $\psi=\psi(X)$，而 $T=T(X)$ 是函数 $f(\theta)$ 的任一无偏估计量；设统计量 $T^*=\mathsf{E}_\theta\{T\mid\psi\}$，即 $T^*$ 在固定充分统计量 $\psi$ 下的平均，则在任意凸损失函数下，对于一切

$\theta\in\Theta$，统计量 $T^*$ 的风险不大于统计量 $T$ 的风险．这时，如果分布族 $\{\mathrm{P}_\theta\}$ 是完全的，则统计量 $T^*$ 唯一确定．于是，由 Rao-Blackwell-Колмогоров 定理可见，只要存在充分统计量，无偏估计量仅需要通过充分统计量来求．Rao-Cramér-Колмогоров 定理的实用价值在于，它为建立最优无偏估计量提供具体方法：首先需要建立 $f(\theta)$ 的任一无偏估计量，然后对其关于充分统计量求平均．

例 6．设随机变量 $X$ 服从参数为 $r$ 和 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant1)$ 的 Pascal 分布（负二项分布），即

$$\mathrm{P}\{X=k\mid r,\theta\}=\binom{r+k-1}{k}\theta^r(1-\theta)^k,$$

$$k=r,r+1,\cdots.$$

这时，统计量 $T=(r-1)/(X-1)$ 是参数 $\theta$ 的无偏估计量．因为统计量 $T$ 通过充分统计量 $X$ 表示，而函数组 $1,x,x^2,\cdots$ 在区间 $[0,1]$ 上是完全的，则 $T$ 是唯一无偏估计量，从而是 $\theta$ 的最优估计量．

例 7．设随机变量 $X$ 服从参数为 $n$ 和 $\theta$ 的二项分布，其母函数 $Q(z)$ 为

$$Q(Z)=\mathrm{E}\{z^X\}=(z\theta+q)^n,\ q=1-\theta.$$

由此可见，对于任何整数 $k=1,\cdots,n$，有

$$Q^{(k)}(z)=n(n-1)\cdots(n-k+1)(z\theta+q)^{n-k}\theta^k$$

$$=n^{[k]}(z\theta+q)^{n-k}\theta^k.$$

另一方面，

$$Q^{(k)}(1)=\mathrm{E}[X(X-1)\cdots(X-k+1)]=\mathrm{E}\{X^{[k]}\},$$

从而

$$\mathrm{E}\left\{\frac{1}{n^{[k]}}X^{[k]}\right\}=\theta^k,$$

即统计量

$$T_k(X)=\frac{1}{n^{[k]}}X^{[k]} \tag{2}$$

是 $\theta^k$ 的无偏估计量．由于 $T_k(X)$ 可以通过充分统计量表出，而函数组 $1,x,x^2,\cdots$ 在区间 $[0,1]$ 上是完全的，可见 $T_k(X)$ 是 $\theta^k$ 的唯一的，因此是最优的无偏估计量．

由此例产生如下问题：参数 $\theta$ 的究竟什么样的函数 $f(\theta)$ 容许无偏估计？A. H. Колмогоров 在[1]中证明了，只有 $m(m\leqslant n)$ 阶多项式有无偏估计．例如，如果

$$f(\theta)=a_0+a_1\theta+\cdots+a_m\theta^m,\ 1\leqslant m\leqslant n,$$

则由（2）式可见，统计量

$$T=a_0+\sum_{k=1}^{m}a_kT_k(X)$$

是 $f(\theta)$ 的唯一无偏估计量．特别地，由此可见，函数 $f(\theta)=1/\theta$ 没有无偏估计量．

例 8．设随机变量 $X$ 服从参数为 $\theta$ 的 Poisson 分布，即对于任何整数 $k=0,1,\cdots$

$$\mathrm{P}\{X=k\mid\theta\}=\frac{\theta^k}{k!}e^{-\theta},\ \theta>0.$$

由于 $\mathrm{E}\{X\}=\theta$，故观测值 $X$ 本身就是其数学期望 $\theta$ 的无偏估计量．同样，例如统计量 $X(X-1)$ 是函数 $f(\theta)=\theta^2$ 的无偏估计量．一般，统计量

$$X^{[r]}=X(X-1)\cdots(X-r+1),\quad r=1,2,\cdots$$

是函数 $f(\theta)=\theta^r$ 的无偏估计量．特别地，由此可见，统计量

$$T(X)=1+\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^rX^{[r]}$$

是函数 $f(\theta)=(1+\theta)^{-1}(0<\theta<1)$ 的无偏估计量．一般，如果函数 $f(\theta)$ 有无偏估计量，即满足无偏性方程 $\mathrm{E}\{T(X)\}=f(\theta)$ 或与之等价的方程：

$$\sum_{k=0}^{\infty}T(k)\frac{\theta^k}{k!}e^{-\theta}=f(\theta),$$

则由此可见，对于任何在其定义域 $\Theta\subset\mathbf{R}_1^+$ 内可展为幂级数的函数 $f(\theta)$ 都存在无偏估计量．

例 9．设独立随机变量 $X_1,\cdots,X_n$ 服从参数为 $\theta(\theta>0)$ 的同一 Poisson 分布，其母函数

$$g_z(\theta)=\exp\{\theta(z-1)\}$$

是整解析函数，从而有唯一无偏估计量．这时，$X=X_1+\cdots+X_n$ 是充分统计量，服从参数为 $n\theta$ 的 Poisson 分布．如果 $T(X)$ 是 $g_z(\theta)$ 的无偏估计量，则它应满足无偏性方程

$$\mathrm{E}_\theta\{T(X)\}=g_z(\theta)=e^{\theta(z-1)}.$$

由此可见

$$T(x)=\begin{cases}\binom{X}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k\left(1-\frac{1}{n}\right)^{X-k}, & \text{若 } 0\leqslant k\leqslant X\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

即参数为 $X$ 和 $1/n$ 之二项分布的母函数，是 Poisson 分布母函数的无偏估计量．

例 6－9 表明，在实际中相当常见的情形下，如果局限于无偏估计类，则正是由于无偏估计量的概念，使求最优估计量的问题变得容易解决．A. H. Колмогоров（[1]）研究了建立无偏估计的问题，特别是参数未知时建立正态分布函数的无偏估计量的问题．无偏估计量更一般的定义属于 E. Lehmann．按 E. Lehmann 的定义（见[2]），参数 $\theta$ 的统计估计量 $T=T(X)$ 关于损失函数 $L(\theta,T)$ 称为**无偏的**（unbinsed），如果对于一切 $\theta,\theta'\in\Theta$，有

$$\mathrm{E}_{\theta}\{L(\theta', T(X))\} \geqslant \mathrm{E}_{\theta}\{L(\theta, T(X))\}.$$

此定义的变形见[3]．在相当宽的条件下，Ю．В．Линник及其学生（见[4]）证明了最优无偏估计量与损失函数无关．

**参考文献**


[1] Колмогоров, А. Н., 《Изв. АН СССР, сер. матем.》 **14**(1950), 4, 303 – 326.

[2] Lehmann, E. L., Testing statistical hypotheses, Wiley, 1988.

[3] Клебанов, Л. Б., 《Теория вероятн. и её применения》, **21**(1976), 3, 584 – 598.

[4] Клебанов, Л. Б., Линник, Ю. В., Рухин, А. Л., 《Докл. АН СССР》, **200**(1971), 5, 1024 – 1025.

[5] Zacks, S., The theory of statistical inference, Wiley, 1971.


М. С. Никулин 撰 周概容、王健 译

## 无偏检验[unbiased test; несмещенный критерий]

检定复合假设 $H_0: \theta \in \Theta_0 \subset \Theta$ 对复合备选假设 $H_1: \theta \in \Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$ 的**统计检验**（statistical test），其功效函数（见**检验的功效函数**（power function of a test））$\beta(\cdot)$ 满足

$$\beta(\theta) \leqslant \alpha, \text{ 若 } \theta \in \Theta_0,$$

$$\beta(\theta) \geqslant \alpha, \text{ 若 } \theta \in \Theta_1,$$

其中 $\alpha(0<\alpha<1)$ 是检验的容量（水平）．在许多统计假设检验问题中不存在**一致最大功效检验**（uniformly most-powerful test）．但是，如果局限于无偏检验类，则建立一致最大功效检验的问题可以得到解决．假如假设 $H_0$ 对备选假设 $H_1$ 的检定问题有一致最大功效检验，则它是无偏检验，因为这样检验的功效不低于所谓平凡检验的功效．这里，平凡检验是指临界函数 $\varphi(\cdot)$ 为常数且等于检验容量 $\alpha$ 的统计检验，即满足 $\varphi(X)=\alpha$ 的检验，其中 $X$ 是随机变量，根据其实现检定假设 $H_0$ 对备选假设 $H_1$．

例．假设 $H_0: p=1/2$ 对备选假设 $H_1: p\neq 1/2$ 的检定问题中，其中 $p$ 是二项分布的未知参数，**符号检验**（sign test）是一致最大功效无偏的．

**参考文献**


[1] Lehmann, E., Testing statistical hypotheses, Wiley, 1988.


М. С. Никулин 撰 周概容 译

## 无界算子[unbounded operator; неограниченный оператор]

从**拓扑向量空间**（topological vector space）$X$ 中一集合 $M$ 到拓扑向量空间 $Y$ 中的一个映射 $A$ 使得有一个**有界集**（bounded set）$N \subset M$ 其象 $A(N)$ 是 $Y$ 中无界集．

无界算子的最简单例子是定义在所有连续可微函数的集合 $C^1[a,b]$ 上映入 $a\leqslant t\leqslant b$ 上所有连续函数的空间 $C[a,b]$ 中的微分算子 $d/dt$，因为算子 $d/dt$ 把有界集 $\{\sin nt\}$ 映成无界集 $\{n\cos nt\}$．一个无界算子 $A$ 必须在其定义域的某些（如果 $A$ 是线性的，则在所有的）点上不连续．一个重要的无界算子类是**闭算子**（closed operator）类，因为它们有一种某种程度上代替连续性的性质．

设 $A$ 和 $B$ 是有定义域 $D_A$ 和 $D_B$ 的无界算子．如果 $D_A \cap D_B \neq \emptyset$，则在这交上算子 $(\alpha A+\beta B)x=\alpha Ax+\beta Bx$（$\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$）被定义，且类似地，如果 $D_A \cap A^{-1}(D_B)\neq\emptyset$，则算子 $(BA)x=B(Ax)$ 被定义．特别地，按这种方式无界算子 $A$ 的幂 $A^k$，$k=1,2,\cdots$，被定义．一个算子 $B$ 称为是算子 $A$ 的一个扩张（extension），$B\supset A$，如果 $D_A\subset D_B$ 且对 $x\in D_A$，$Bx=Ax$．这样，$B(A_1+A_2)\supset BA_1+BA_2$．两个算子的交换性通常是对其中之一是有界的情形处理的：一个无界算子 $A$ 与一个有界算子 $B$ 交换，如果 $BA\subset AB$．

对无界线性算子（仍）定义**伴随算子**（adjoint operator）的概念．设 $A$ 是拓扑向量空间 $X$ 中稠密的集合 $D_A$ 上的一个无界算子且映入拓扑向量空间 $Y$ 中，如果 $X^*$ 和 $Y^*$ 分别是 $X$ 和 $Y$ 的强对偶，且如果 $D_{A^*}$ 是这样的线性泛函 $\varphi\in Y^*$ 的集合：对 $\varphi$ 存在一个线性泛函 $f\in X^*$ 使得对所有 $x\in D_A$，$\langle Ax,\varphi\rangle=\langle x,f\rangle$，则对应关系 $\varphi\mapsto f$ 决定了一个在 $Y^*$ 中的 $D_{A^*}$（然而，它可以只由零元素所组成）上算子 $A^*$，即所谓 $A$ 的伴随算子．

**参考文献**


[1] Yosida, K., Functional analysis, Springer, 1980（中译本：吉田耕作，泛函分析，人民教育出版社，1980）．

[2] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear operators. General theory, 1, Interscience, 1958.

[3] Riesz, F. and Szökefalvi-Nagy, Functional analysis, F. Ungar, 1955（译自法文）（中译本：F．黎茨，B．塞克佛尔维-纳吉，泛函分析讲义，科学出版社，第一卷，1963，第二卷，1980）．

[4] Люстерник, Л. А., Соболев, В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965（中译本：Л．А．刘斯铁尔尼克，В．И．索伯列夫，泛函分析概要，第二版，科学出版社，1985）．

[5] Neumann, J. von, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Dover, reprint, 1943.


В. И. Соболев 撰

【补注】从一个拓扑向量空间到另一个中的连续线性算子把有界集映成有界集．对赋范线性空间之间的线性映射其逆也为真．

**参考文献**


[A1] Goldberg, S., Unbounded Linear operators, McGraw-Hill, 1966.

[A2] Gohberg, I., Goldberg, S. and Kaashoek, M. A., Classes of linear operators, I, Birkhäuser, 1991.

葛显良 译 吴绍平 校

**不确定性原理** [**uncertainty principle; неопределенности принцип**], Heisenberg 原理 (Heisenberg principle)

量子力学中最重要原理之一，它断言：一个物理系统，由具有非零对易式 $[\hat{a}, \hat{b}]$ 的不可对易算子 $\hat{a}$ 和 $\hat{b}$ 所描述的两个物理量 $a$ 和 $b$，在任何态中这两个值的离差不可能同时很小.

更精确地，令 $\varphi \in H$, $\|\varphi\| = 1$ 为物理系统的一个态 ($H$ 是这些态的 Hilbert 空间，而 $(\cdot, \cdot)$ 是 $H$ 中的标量积)，并令 $\Delta_\varphi^a = [(\hat{a}^2\varphi, \varphi) - (\hat{a}\varphi, \varphi)^2]^{1/2}$ 为量 $a$ 在态 $\varphi$ 中的离差；$\Delta_\varphi^b$ 类似地予以定义. 则总有

$$\Delta_\varphi^a \Delta_\varphi^b \geqslant \frac{1}{2} |([\hat{a}, \hat{b}]\varphi, \varphi)|. \qquad (1)$$

特别是，一个量子粒子的坐标 $x$, $y$, $z$ 及其动量的分量 $p_x$, $p_y$, $p_z$，在所有量子化标准方式 (即，空间 $H$ 的选择以及把作用于 $H$ 的自伴算子与物理量联系起来的规则) 下由算子 $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ 和 $\hat{p}_x$, $\hat{p}_y$, $\hat{p}_z$ 表示，使得

$$[\hat{p}_x, \hat{x}] = [\hat{p}_y, \hat{y}] = [\hat{p}_z, \hat{z}] = -i\hbar E,$$

其中 $E$ 是 $H$ 上的单位算子，而 $\hbar$ 是 Planck 常数. 因而，对任何 $\varphi \in H$，有

$$\Delta_\varphi^{p_x}\Delta_\varphi^x \geqslant \frac{\hbar}{2}, \ \Delta_\varphi^{p_y}\Delta_\varphi^y \geqslant \frac{\hbar}{2}, \ \Delta_\varphi^{p_z}\Delta_\varphi^z \geqslant \frac{\hbar}{2}. \quad (2)$$

参考文献

[1] Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М., Квантовая механика, 3 изд., М., 1974 (中译本: Л. Д. 朗道, Е. М. 栗弗席茨, 量子力学 (非相对论理论), 人民教育出版社, 上册, 1980, 下册, 1981).

P. A. Минлос 撰

【补注】 W. Heisenberg ([A1]) 1927 年提出这个不确定性原理. 同一年，E. H. Kennard ([A2]) 发现关系式 (2)，而一般关系式 (1) 则是由 H. P. Robertson ([A3]) 于 1929 年予以证明的. 尽管不清楚为什么离差 (标准差) 应是不确定性的正确量度，但几乎量子力学课本的所有著者都应用 (1) 和 (2) 作为 Heisenberg 不确定性原理的数学表述. 然而不难证明，即使在不确定性原理的大多数简单例证中，离差也是发散量. 这使 (1) 和 (2) 变得无意义! (见 [A4] – [A6].) H. J. Landau 和 H. O. Pollak ([A5]) 于 1961 年曾经给出不确定性原理的一个更加令人满意的数学表述. 尽管如此，令人惊奇的是，这个表述迄今尚未进入课本.

文献 [A7] 中可以找到关于不确定性原理的一个优美的全面评述，它还包括大量参考文献.

参考文献

[A1] Heisenberg, W., The physical principles of quantum theory, Dover, reprint, 1949 (译自德文).

[A2] Kennard, E. H., Zur Quantenmechanik einfacher Bewegungtypen, *Z. Physik*, **44** (1927), 326 – 352.

[A3] Robertson, H. P., The uncertainty principle, *Phys. Rev.*, **34** (1929), 163 – 164.

[A4] Hilgevoord, J. and Uffink, J., The mathematical expression of the uncertainty principle, in F. Sellen, A. van der Merwe and G. Tarozzi (eds.), Proc. Internat. Conf. Microphysical Reality and Quantum Description (Urbno, Italy, 1985), Reidel, 1988, 91 – 114.

[A5] Hilgevoord, J and Uffink, J., A new look on the uncertainty principle, in Internat. School of History of Science: Sixty-two Years of Uncertainty: Historical, Philosophical and Physical Inquiries into the Foundations of Quantum Mechanics (Erice, Sicily), 1989.

[A6] Uffink, J. and Hilgevoord, J., Uncertainty principle and uncertainty relations, *Found. Phys.*, **15** (1985), 925.

[A7] Uffink, J., Measures of uncertainty and the uncertainty principle, R. U. Utrecht, 1990, Thesis.

[A8] Lévy-Leblond, J.-M. and Balibar, F., Quantics-rudiments of quantum physics, North-Holland, 1990 (译自法文).

徐锡申 译

**无条件收敛** [**unconditional convergence; безусловная сходимость**]

级数各项任意排列后所成的序列总是收敛的这类级数的性质. 更确切地说，线性空间 $E$ (其上定义了收敛序列的概念) 中元素的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (*)$$

称为无条件收敛 (unconditionally convergent)，如果将其各项任意排列后仍收敛.

与无条件收敛的研究相类似的是度量向量 (或拓扑) 空间中无条件收敛级数的研究 ([1] – [3]). 因此，Banach 空间 $E$ 中元素的级数 (*) 无条件收敛的充要条件是，每一个部分级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_{n_k} (n_1 < n_2 < \cdots)$ 收敛 ([4]) (Orlicz 定理 (Orlicz theorem)). 数项级数的无条件收敛等价于它的绝对收敛 (见关于级数项重新排列的 **Riemann 定理** (Riemann theorem)). 一般地，若 $E$ 是有限维赋范空间，则级数无条件收敛等价于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|_E$ 收敛. 这对无穷维 Banach 空间不成立.

另外的研究方向与无条件几乎处处收敛的函数级数 (或正交级数) 有关 ([5]). 这类性质往往与 Banach 空间中无条件收敛级数性质相距甚远. 例如，与

上述 Orlicz 定理类似的结论对于无条件几乎处处收敛不成立([6]).

参考文献

[1] Banach, S. S., A course of functional analysis. Kiev., 1948 (乌克兰文).
[2] Day, M. M., Normed linear spaces, Springer, 1958.
[3] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear operators. General theory, 1, Interscience, 1958.
[4] Orlicz, W., Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen II, *Studia Math.*, 1 (1929), 241 – 255.
[5] Kaczmarz, S. and Steinhaus, H., Theorie der Orthogonalreihen, Chelsea, reprint, 1951.
[6] Ульянов, П. Л., 《Успехи матем. наук》, 16 (1961), 3, 61 – 142.

Б. И. Голубов 撰 罗嵩龄、罗昕 译

**无条件可和性[unconditional summability; безусловная суммируемость]**

对级数项的所有可能的排列而成级数的可和性. 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (*)$$

称为依某求和法 $A$ 无条件可和(unconditionally summable)(无条件 $A$ 可和), 如果无论怎样改变它的项的次序, 依此法均可和于和 $s$, 这里 $s$ 的值依赖于特殊的排列(见求和法(summation methods)). W. Orlicz([1])最早研究无条件可和性; 特别是他指出, 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, 则级数依线性正则法(见正则求和法(regular summation methods))的绝对可和性蕴涵无条件收敛(unconditional convergence). 他随后指出, 这个条件可以用下面较弱的条件代替: $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = 0$([2]). 依矩阵法的无条件可和性不蕴涵无条件收敛; 事实上, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ 就是一例. 若 $A$ 是正则矩阵求和法(matrix summation method), 且级数(*)无条件 $A$ 可和, 则级数的所有项形如 $a_n = c + \eta_n$, 其中 $c$ 是常数, 以 $\eta_n$ 为项的级数绝对收敛: $\sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n| < \infty$; 此外, 当方法 $A$ 使级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ 没有和时, $c = 0$([3]).

对于函数级数, 依测度可和性, 处处可和性及几乎处处可和性等之间有所不同. 关于函数级数的无条件可和性, 下述断言几乎处处成立: 若集合 $E$ 上可测函数 $f_n$ 的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, 在 $E$ 上几乎处处无条件 $A$ 可和, 则该级数的项形如 $f_n(x) = f(x) + \eta_n(x)$, 其中 $f$ 是 $E$ 上有限可测函数, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(x)$ 在 $E$ 上无条件几乎处处收敛; 若方法 $A$ 使 $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ 没有和, 也取 $f = 0$([2]).

参考文献

[1] Orlicz, W., Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci Math. Astr. Phys., no. 3A (1927), 117 – 125.
[2] Ульянов, П. Л., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, 23 (1959), 5, 781 – 808.
[3] Гапошкин, В. Ф., Олевский, А. М., 《Науч. докл. высш. школы. Физ.-Матем. науки》, 6 (1958), 81 – 86.

И. И. Волков 撰

【补注】

参考文献

[A1] Zeller, K. and Beckmann, W., Theorie der Limitierungsverfahren, Springer, 1970.

罗嵩龄 译

**不可数集[uncountable set; несчетное множество]**

不可数(countable)的无穷集, 即它不与自然数集等势. 例如, 实数集是不可数的, 而有理数集是可数的.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 在文献中, "可数集"有时指"有限或可数无穷集", 有时指"可数无穷集".

实数集的不可数性可由 Cantor 对角线化原理(Cantor diagonalization principle)证明(见 **Cantor 定理**(Cantor theorem)).

参考文献

[A1] Kuratowski, K., Introduction to set theory and topology, Pergamon, 1961, p. 62 ff (译自法文).

赵希顺 译

**不可判定性[undecidability; неразрешимость]**

【补注】 一个算法(algorithm)的不存在性, 或者在一个形式系统(formal system)中证明或否证一个命题的不可能性. 下面分别予以讨论. 解决某一给定问题的算法的不存在性常常称为该问题的**不可解性**(unsolvability). 有时"不可判定性"和"不可解性"看作是同义词. (见**不可解性**(unsolvability).)

在一切数学领域中都可得到判定性结果, 它们可能以算法的直观概念为依据. 由构造一个算法证明一个问题是可判定的, 该算法在接收该问题一个例子的数据后产生对于这个例子的回答. 一个经典例子是求两个自然数的最大公因子的 Euclid 算法.

算法的概念必须形式化才能证明某个问题是不可判定的. 一个问题的不可判定性是指算法原则上不可能存在, ——不仅仅是至今还不知道这样的算法.

在这些形式化中最普通的是 **Turing 机**(Turing machine). 然而, 应该强调, 所有提出的形式化发现都是等价的, 此外, 不可判定问题的存在性是不依赖所用的形式化. 下面将简要阐述这一点.

这样, 必须说明算法这个直观概念的任何形式化如何导致算法不可判定问题. 考虑任何一个这样的形式化. 对任何算法 $A$ 和 $A$ 的任何输入字 $x$. 存在两

种可能性：或者 $A$ 对于 $x$ 停止（halt），即当 $A$ 作用于 $x$ 时得出一个停止的计算；或者 $A$ 对于 $x$ 不停止．在后一种情况下，就说 $A$ 对于 $x$ 循环（loop）．停机问题（halting problem）是对于任何对 $(A, x)$，判定 $A$ 对于 $x$ 是停止还是循环．

停机问题的一个特例是可自应用性问题（self-applicability problem），定义如下．每个算法 $A$ 是由它的Godel字（Gödel word）$g(A)$ 所完全决定的．例如，$g(A)$可定义为 $A$ 中所有指令按顺序的集合．一个算法 $A$ 称为可自应用的（self-applicable），只有当 $A$ 对于 $g(A)$ 停止．自应用问题是判定任一算法是否可自应用的．自应用问题是停机问题的子问题；因此，如果前者是不可判定的，则后者也是不可判定的．

假设存在一个自应用问题的算法 $A_0$．这样，对所有形为 $g(A)$ 的输人，$A_0$ 都停机，且根据 $A$ 是否可自应用产生回答 yes 或 no．现在修改 $A_0$，加上一个由 yes 回答开始的一个非停机的计算．这样，修改过的算法 $A_1$，对于形为 $g(A)$ 的输入循环（或停机），其中 $A$ 是（不是）可自应用的．由对角线化（diagonalizing），对 $A_1$ 考虑输人 $g(A_1)$，得到一个矛盾．这蕴涵了自应用问题是不可判定的．因此，停机问题也是不可判定的．

算法不可判定性的证明或者是直接的（direct），或者是间接的（indirect）．一个直接证明，如上所述，通常用某种形式的对角线法．一个问题 $P$ 的不可判定性的间接证明是将 $P$ 归约到一个其不可判定性已知的问题 $P_1$．将解 $P$ 的算法转化为解 $P_1$ 的算法．不可判定性问题中这样有用的参照点 $P_1$ 是 Hilbert 第十问题（Hilbert tenth problem）和 **Post 对应问题**（Post correspondence problem）．

可判定性对于由一个问题到它的子问题的变换是保持的．类似地，不可判定性对于问题的扩张是保持的．知道可判定性和不可判定性之间的边界线是至关重要的．非常难以精确地确定边界，但可粗略地确定其边界．例如，考虑一由有限多个定义方程定义的群和半群的字问题，也考虑单向字问题（unidirectional word problem），即定义关系只允许关系的右边代换左边，反之则不行．如果也考虑可交换性，则产生八个问题：群对半群，一般的对交换的，方程对单向关系．群的字问题是不可判定的，因此，三个更广泛的问题也是不可判定的．交换半群的单向字问题是可判定的，因此三个上述子问题也是可判定的．这样，在这里，可判定性和不可判定性的边界是已知的．

对于讨论一个形式系统中的不可判定命题，见**不可解性**（unsolvability）；**Gödel 不完全性定理**（Gödel incompleteness theorem）．K．Gödel 证明了不可判定命题的存在性不是任何个别形式系统的缺陷，而是所有形式系统的内在性质．这样的内在的不可判定命题是表示一给定形式系统的相容性的形式命题．后来人们发现（例如，G．Chaitin [A1]，[A2]的工作）不可判定命题不是少有的，而是非常多的，它们通常非常简单，有些属于最初等的算术．不可判定命题不再错认为是"实际数学"中不会遇到的奇异性．如 Chaitin 所述：非线性动力学和量子力学已证明随机存在于自然中．我相信：我已经证明了随机性在纯数学中也存在，事实上，甚至存在于数论的最初等的分支中．

不能忽视不可判定命题，它们不是例外的和病态的，而是大量的，可接近的，并且可感知的．对任何形式系统，存在有真正的算术命题，它的真假值不可能在该系统内证明，尽管看起来这个命题肯定或者为真或者为假．例如：关于一个给定 Diophantus 方程可解性的命题．可以构造一个带参数 $k$ 的具有多个变元的 Diophantus 方程序列．包含在对应于参数 $k$ 的有限多个值的方程解中的信息，通常不可用于解决其他情况．数学形式推理无力将不同情况联系起来．这样，这个特别平常的参数化 Diophantus 方程超越了任何形式系统所能达到的地步．解决不同情况的方法本质上不会好于直接将所要得到的结果放在公理中！

**参考文献**

[A1] Chaitin, G., Algorithmic information theory, Cambrige Univ. Press, 1987.

[A2] Chaitin, G., Incompleteness theorems for random reals, *Adv. Appl. Math.*, 8 (1987), 119 – 146.

G. Rozenberg, A. Salomaa 撰 陆默飞 译

**欠定方程组 [underdetermined system; недоопределенная система]**

一个微分方程组，其中方程的个数少于未知函数的个数．亦见**超定方程组**（overdetermined system）．

А. П. Солдатов 撰 杜小杨 译

**待定系数法 [undetermined coefficients, method of; неопределенных коэффициентов метод]**

以有限或无限个已知函数的精确或近似的线性组合形式确定一未知函数的方法．所指的线性组合带有未知系数，就要用各种方法由所研究的问题的条件确定．通常推导出关于未知系数的一组代数方程．

待定系数法应用的经典例子是，将复数或实数域上的正则有理函数展成基本分式．设 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 是复系数代数多项式，$P(z)$ 的次数 $n$ 小于 $Q(z)$ 的次数 $m$，$Q(z)$ 的最高次项系数为 1，令 $z_i$ 是 $Q(z)$ 的 $\alpha_i$ 重根，$i = 1, \cdots, k$，$\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = m$．因此

$$Q(z) = (z - z_1)^{\alpha_1} \cdots (z - z_k)^{\alpha_k}.$$

正则有理函数 $P(z)/Q(z)$ 可唯一地表示为形式

$$\frac{P(z)}{Q(z)}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{\alpha_i}\frac{A_{i\nu}}{(z-z_i)^{\nu}}, \quad (1)$$

其中 $A_{i\nu}$ 尚是一些未知的复数，$m$ 也未知．为了求它们，把等式右边通分，然后消去非实质项，归并同类项，得到一个两边都是次数最多为 $m-1$ 的多项式的等式；左边的系数已知，右边是未知数 $A_{i\nu}$ 的线性组合．由于 $z$ 的同次幂的系数相等，所以得到 $A_{i\nu}$ 的 $m$ 个线性方程的方程组．因展开式 (1) 的存在性和唯一性，故该方程组有唯一解．有时用稍为不同的做法求系数 $A_{i\nu}$ 更加方便．例如，设 $Q(z)$ 的全部根为单根，这时 (1) 式的形式为

$$\frac{P(z)}{Q(z)}=\sum_{i=1}^{m}\frac{A_i}{z-z_i}.$$

两边通分后简化同类项，得到等式

$$P(z)=\sum_{i=1}^{m}A_i\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{m}(z-z_k).$$

陆续置 $z=z_i$, $i=1,\cdots,m$，容易得到

$$A_i=\frac{P(z_i)}{\prod_{\substack{i=1\\k\neq i}}(z_i-z_k)}.$$

一般情况下，常将这两种方法结合起来求系数 $A_{i\nu}$．

设 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 为实系数多项式，

$$Q(x)=(x-x_1)^{\alpha_1}\cdots(x-x_k)^{\alpha_k}\times$$
$$\times(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}\cdots(x^2+p_lx+q_l)^{\beta_l},$$

其中 $x_1,\cdots,x_k$ 是 $Q(x)$ 的 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 重实根，系数为 $p_j$ 和 $q_j$ 的二次三项式 $x^2+p_jx+q_j$ 是乘积 $(x-z_j)$ $(x-\bar{z}_j)$，其中 $z_j\notin\mathbf{R}$，是 $Q(x)$ 的 $\beta_j$ 重复根，$j=1,\cdots,l$，并且

$$\sum_{j=1}^{k}\alpha_j+2\sum_{j=1}^{l}\beta_j=m.$$

则正则有理函数 $P(x)/Q(x)$ 有一个且仅有一个下列形式的展开式：

$$\frac{P(x)}{Q(x)}= \quad (2)$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\sum_{\mu=1}^{\alpha_i}\frac{A_{i\mu}}{(x-x_i)^{\mu}}+\sum_{j=1}^{l}\sum_{\nu=1}^{\beta_j}\frac{M_{j\nu}x+N_{j\nu}}{(x^2+p_jx+q_j)^{\nu}},$$

其中系数 $A_{i\mu}(\mu=1,\cdots,\alpha_i,\ i=1,\cdots,k)$, $M_{j\nu}$ 和 $N_{j\nu}(\nu=1,\cdots,\beta_j,\ j=1,\cdots,l)$ 都是实数．求它们的方法与上述复数情形相同：等式 (2) 右边进行通分，消去非实质项；归并同类项后，两边 $x$ 的同次幂的系数相等．这样通常得出 $m$ 个未知数 $A_{i\mu}$, $A_{i\nu}$ 的 $m$ 个方程的方程组，它存在唯一的解．

正则有理函数展成基本有理式可应用于，例如，求它们的 **Laurent 级数** (Laurent series) (特别是它们的 **Taylor 级数** (Taylor series)) 以及将其积分．用 **Остроградский 方法** (Ostrogradski method) 求有理函数积分和求形式为 $P(x)/\sqrt{ax^2+bx+c}$ 的函数的积分也用到待定系数法．对后者积分变成

$$\int\frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx=$$

$$=Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad (3)$$

其中多项式 $Q(x)$ 的次数小于 $P(x)$ 的次数．为了求出 $Q(x)$ 的系数和 $\lambda$，对 (3) 式求导．将两边通分，略去非实质项，归并同类项，使 $x$ 的同次幂系数相等．最后又得到具唯一解的线性方程组．类似的积分方法可以在某些其他情况应用．

待定系数法可用于求 (常或偏) 微分方程的幂级数形式的解．为此，在问题涉及的点的邻域内，将带待定系数的幂级数代入所给的方程．有时代入后可得到该级数的系数之间的一些关系式，由这些关系式借助给定的初始条件或边值条件即能求出这些系数，最终得出方程的级数形式的解．例如，当用此法解**超几何方程** (hypergeometric equation) 时，可以得到**超几何函数** (hypergeometric function) 的一种级数展开式．

待定系数法也可以其他方式用于解微分方程，例如，**Галеркин 法** (Galerkin method)，**Ritz 法** (Ritz method) 以及 **Trefftz 法** (Trefftz method)；它也用于数值方法：求得特征方程系数的 Крылов 法和积分方程的近似解法．　　Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】术语“待定系数法”或者 Lagrange 待定系数法，在研究条件极值问题中也常指 **Lagrange 乘子** (Lagrange multipliers) 法，例如见 [A3]．

**参考文献**

[A1] Смирнов, В. И., Курс высшей математики, т. 1, 8 изд., М., 1969 (中译本：В. И. 斯米尔诺夫，高等数学教程，第一卷，人民教育出版社，1958).

[A2] Schröder, K. (ed.), Mathematik für die Praxis, II, Deutsh. Verlag Wissenschaft., 1966, p. 49ff.

[A3] Rektorys, K., Applicable mathematics, Iliffe, 1969, 480 – 481.

[A4] Young, D. M. and Gregory, R. T., A survey of numerical mathematics, 1, Dover, reprint, 1988, 259 – 261.

[A5] Greenberg, M. D., Foundations of applied mathematics, Prentice-Hall, 1978, p. 419 ff.

[A6] Henrici, P., Applied and computational complex analysis, 1, Wiley, 1974, p. 553; 562.

[A7] Маркушевич, А. И., Теория аналитических фу-

нкций, 2 изд., М., 1968 (中译本: А. И. 马库雪维奇, 解析函数论, 高等教育出版社, 1957).

[A8] Zill, D. G. and Cullen, M. R., Advanced engineering mathematics, PWS-Kent, 1992, 139 – 157, 658ff.

沈海玉 译

**单行曲线 [unicursal curve; уникурсальная кривая]**

平面曲线 Γ, 它可以在自相交点只经过二次的条件下被跑遍. 曲线是单行的充要条件是最多只有两个点其上有奇数条道路通过. 如果 Γ 是 $n$ 次平面代数曲线 (algebraic curve), 其上有最大数 $\delta$ 个二重点 (包括假点和虚点), 则 $\delta=(n-1)(n-2)/2$ (这里一个 $k$ 重点被当作 $k(k-1)/2$ 个二重点).

设 $R(x, y)$ 是有理函数, $y$ 是 $x$ 的函数, $y$ 由给出代数单行曲线的方程 $F(x, y)=0$ 定义, 则积分 $\int R(x, y)dx$ 可被约化为有理函数的积分并且可用初等函数表出.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 在代数几何学里, 单行曲线 $U$ 是有理曲线 (rational curve), 即允许有参数表示 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, 且 $\varphi$ 和 $\psi$ 是有理函数的曲线. 这样的曲线是有效亏格 0 的代数曲线. 对于每条不可约曲线 Γ 存在双有理等价的非奇异曲线 $\tilde{\Gamma}$. $\tilde{\Gamma}$ 在相差一个同构的意义下唯一. $\tilde{\Gamma}$ 的亏格称为 Γ 的有效亏格 (effective genus). 单行曲线是有效亏格为 0 的不可约代数曲线. 这与上述的一般几何定义 (或多或少地) 相符合, 参数化提供了"遍历".

**参考文献**

[A1] Walker, R. J., Algebraic curves, Dover, reprint, 1950, 149 – 151.

[A2] Griffiths, Ph. and Harris, J., Principles of algebraic geometry, Wiley-Interscience, 1978.

陈志杰 译

**统一场论 [unified field theories; единые теории поля]**

一个集合名称, 它反映想用把电场和磁场描述为电磁场的表现形式的大致类似方式, 而将全部或某些物理场 (最经常的是将引力场和电磁场) 描述为单一基本场的表现形式的种种尝试. 统一场论可以方便地划分为两种类型: 一种是事件空间中某几何对象的场形成基本场 (例如, A. Einstein 统一场论的各种变型 [1], 和几何动力学 (geometro-dynamics) [2]); 另一种是, 基本场并不具有几何性质 (例如, 非线性旋子场理论). 有些统一场论曾设法获得基本物理常数的成功估计.

目前, 人们曾概括地表述了除引力场以外的基本场的统一理论 (所谓 Weinberg-Salam 理论 (Weinberg-Salam theory)), 并草拟了包括引力场的统一理论的纲要.

这些理论运用来自当代数学的方法和概念的最多变集成. 特别是, T. Kaluza ([3]) 和 O. Klein ([4]) 关于时空可能具有 4 维以上维数的通俗观念得到再度复兴. 这另外的维数几乎从不出现在宏观物理学中, 因为它们被扭曲成为超小相似环面 (紧化概念 (idea of compactification)). 按照近代估计 [5], 这种空间的维数可以是 50 的量级或更大.

**参考文献**

[1A] Einstein, A. and Mayer, W., *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wissenschaft. Phys.-Math. Kl.* (1931), 541 – 547.

[1B] Einstein, A. and Mayer, W., *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wissenschaft. Phys.-Math. Kl.* (1932), 130 – 137.

[2] Wheeler, J. A., Geometrodynamics, Acad. Press, 1962.

[3] Kaluza, T., *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wissenschaft Phys.-Math. Kl.* (1921), 966.

[4] Klein, O., *Z. Physik*, **37** (1926), 895 – 906.

[5] Cremmer, E., Julia, B. and Scherk, J., *Phys. Letters*, *B* **76** (1978), 409.

Д. Д. Соколов 撰

【补注】

**参考文献**

[A1A] Einstein, A., *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wissenschaft. Phys.-Math. Kl.* (1927), 23 – 30.

[A1B] Einstein, A. and Bergmann, P., On a generalization of Kaluza's theory of electricity, *Ann. of Math.*, (2) **40** (1938), 683 – 701.

[A2] Heisenberg, W., The nonlinear theory of elementary particles, Univ. of Rochester, 1960.

[A3] Appelquist, T., Chodos, A. and Freund, P. G. O., Modern Kaluza-Klein theories, Addison Wesley, 1987.

徐锡申 译

**一致代数 [uniform algebra; равномерная алгебра]**

紧统 $X$ 上连续函数的代数 $C(X)$ 的一个子代数 $A$, 关于一致收敛拓扑 (topology of uniform convergence) 闭, 包含所有常函数且分离 $X$ 的点. 最后的条件是指对 $X$ 中每一对不同的点 $x$, $y$ 存在 $A$ 中一个函数 $f$ 使得 $f(x)\neq f(y)$. 一致代数通常赋予上确界范数:

$$\|f\|=\sup_X|f(x)|.$$

这种情况下 $\|f^2\|=\|f\|^2$. 具有单位元素 (即使不假设有交换性) 且有满足上面条件的范数的每一个 Banach 代数同构于一个一致代数.

一致代数构成复数域 **C** 上交换 **Banach 代数** (commutative Banach algebra) 类的一个重要子类.

对每一点 $x\in X$ 有一个由 $\varphi_x(f)=f(x)$ 定义的同态 $\varphi_x$: $A\to\mathbf{C}$. 所以 $X$ 按自然方式拓扑地嵌入 $A$

的极大理想空间 MSpec($A$) 中，且在相应的等同下 $X$ 包含 Шилов 边界 (见**边界 (一致代数理论中的) (boundary (in the theory of uniform algebras)))**. 在一致代数的研究中起重要作用的有峰点 (peak points) (即 $X$ 中这样的点，在其上至少对 $A$ 的一个元素达到严格最大模)，$X$ 上乘性概率测度 (即从 $A$ 到 $\mathbf{C}$ 的同态的表示测度) 和 $X$ 上正交于 $A$ 的测度. 关于一致代数的许多具体结果涉及这些概念之间的关系.

一个一致代数称为对称的 (symmetric)，如果对其中每一函数其复共轭也属于该代数. 按照 **Stone-Weierstrass 定理 (Stone-Weierstrass theorem)**，紧统 $X$ 上任一对称一致代数与 $C(X)$ 重合. 所谓反对称一致代数 (anti-symmetric uniform algebras)，除常数外不含实值函数，构成了相反的一类. 一个典型的例子是在复平面的开单位圆盘上解析而在其闭包上连续的所有函数的代数 (圆盘代数). Шилов-Bishop 定理 (Shilov-Bishop theorem)：任一一致代数可由反对称一致代数按一定方式"粘合"得出. 甚至更精细的分类定理也已经知道. 同时，任意的一致代数不能简化到圆盘代数类型的解析函数代数. 例如，不可能构造一个一维紧统上一致代数，与其极大理想空间重合，使得该紧统所有的点是峰点且同时只有该代数的零元素可在一非空开集上为零.

**参考文献**

[1] Gamelin, T., Uniform algebras, Prentice-Hall, 1969.

Е. А. Горин 撰

【补注】 代替"一致代数"也用"函数代数"这术语.

设 $\xi\in$ MSpec ($A$)，后者是 $A$ 的极大理想空间. 对 $\xi$ 的表示测度 (representing measure) 是 $X$ 上一个正测度 $\mu$ 使得

$$\xi(f)=\int f d\mu,\ f\in A.$$

由 Riesz 表示定理它们是存在的 (见 **Riesz 定理 (Riesz theorem)** 第二条目的补注). 当然有 $\int d\mu=1(f)=1$，所以 $\mu$ 是概率测度. $\xi$ 的一个 Jensen 测度 (Jensen measure) 是 $X$ 上一个正测度 $\mu$ 使得 Jensen 不等式 (Jensen inequality)

$$\log|\xi(f)|\leqslant\int\log|f|d\mu,\ f\in A,$$

成立. Jensen 测度是一种表示测度，且对 $\xi$ 总存在 Jensen 测度.

$X$ 上测度 $\mu$ 正交 (orthogonal) 于 $A$，如果对所有的 $f\in A$，$\int f d\mu=0$.

**参考文献**

[A1] Gamelin, T. W., Uniform algebras and Jensen measures, Cambridge Univ. Press, 1978.

[A2] Leibowitz, G. M., Lectures on complex functions algebras, Foresman, 1970.

[A3] Stout, E. L., The theory of uniform algebras, Bogden & Quigley, 1971.

[A4] Wermer, J., Banach algebras and several complex variables, Springer, 1975.

[A5] Suciu, I., Function algebras, Ed. Acad. Romania, 1973.

[A6] Browder, A., Introduction to function algebras, Benjamin, 1969.

葛显良 译 鲁世杰 校

**一致逼近 [uniform approximation; равномерное приближение]**

同 **Чебышев 逼近 (Chebyshev approximation)**.

**一致有界性 [uniform boundedness; равномерная ограниченность]**，界于上 (下) 的

一族实值函数 $f_\alpha$: $X\to\mathbf{R}$ 的一种性质，这里 $\alpha\in\mathscr{A}$，$\mathscr{A}$ 是一指标集而 $X$ 是一任意集合. 它要求存在常数 $c>0$，使得对所有的 $\alpha\in\mathscr{A}$ 和所有的 $x\in X$ 不等式 $f_\alpha(x)\leqslant c$ (分别地，$f_\alpha(x)\geqslant -c$) 成立.

一族函数 $f_\alpha$: $X\to\mathrm{R}$，$\alpha\in\mathscr{A}$，称为一致有界的 (uniformly bounded)，如果它同时是界于上又界于下地一致有界.

一族函数一致有界性的概念已经推广到赋范空间和赋半范空间中的映射. 当 $X$ 是任意集合而 $Y$ 是具有半范数 (范数) $\|\cdot\|_Y$ 的赋半范 (赋范) 空间，一族映射 $f_\alpha$: $X\to Y$，$\alpha\in\mathscr{A}$，称为一致有界的，如果存在常数 $c>0$，使得对所有的 $\alpha\in\mathscr{A}$ 和 $x\in X$，不等式 $\|f_\alpha(x)\|_Y\leqslant c$ 成立. 如果在有界映射 $f$: $X\to Y$ 的空间 $\{X\to Y\}$ 中由公式

$$\|f\|_{\{X\to Y\}}=\sup_{x\in X}\|f(x)\|_Y$$

引入一个半范数 (范数)，则函数集合 $f_\alpha$: $X\to Y$，$\alpha\in U$ 的有界性是指这集合在空间 $\{X\to Y\}$ 中关于半范数 $\|\cdot\|_{\{X\to Y\}}$ 的有界性.

界于下和上一致有界性的概念已经推广到映射 $f$: $X\to Y$ 的情况，其中 $Y$ 在某种意义下有序.

Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】 一致有界定理 (uniform boundedness theorem) 如下述. 设 $X$ 是一线性拓扑空间，且不是可数多个闭疏集之并. 设 $\{T_\alpha: \alpha\in\mathscr{A}\}$ 是一族由 $X$ 到拟赋范线性空间 $Y$ (见**拟范数 (quasi-norm)**) 中的连续映射. 假设

$$\|T_\alpha(x+y)\|\leqslant\|T_\alpha(x)\|+\|T_\alpha(y)\|,$$

$$\|T_\alpha(ax)\|=a\|T_\alpha(x)\|,\ 对\ a\geqslant 0.$$

现在如果对每一个 $x\in X$，集合 $\{T_\alpha(x): \alpha\in A\}$ 是有界的，则

$$\lim_{t\to 0} T_\alpha(x)=0$$

关于 $\alpha$ 一致地成立. 这里收敛于零是按照强收敛, 即按 $Y$ 的拟范数.

它的一个系是共鸣定理 (resonance theorem) (有时它本身称为一致有界定理): 设 $\{T_\alpha:\alpha\in\mathscr{A}\}$ 是由 Banach 空间 $X$ 到赋范线性空间 $Y$ 中的一族有界线性算子. 则对每个 $x\in X$, $\{\|T_\alpha(x)\|:\alpha\in\mathscr{A}\}$ 的有界性蕴涵 $\{\|T_\alpha\|:\alpha\in\mathscr{A}\}$ 的有界性. 且如果 $\mathscr{A}=\mathbf{N}$ 而 $\lim_{n\to\infty}T_n(x)=T(x)$ 对每一 $x\in X$ 存在, 则 $T$ 也是 $X\to Y$ 的有界线性算子.

亦见 **Banach-Steinhaus 定理** (Banach-Steinhaus theorem) (也称为一致有界原理 (uniform boundedness principle)) 和**等度连续性** (equicontinuity).

**参考文献**

[A1] Yosida, K., Functional analysis, Springer, 1978, p. 68 ff (中译本: 吉田耕作, 泛函分析, 人民教育出版社, 1981).

[A2] Rudin, W., Real and complex analysis, McGraw-Hill, 1966, 98 (中译本: W. 卢丁, 实分析与复分析, 人民教育出版社, 1982).

葛显良 译 鲁世杰 校

**一致连续性** [uniform continuity; **равномерная непрерывность**]

函数 (映射) $f:X\to Y$ 的一种性质, 其中 $X$ 与 $Y$ 为度量空间. 它要求, 对任给正数 $\varepsilon>0$, 有正数 $\delta>0$ 使得对满足 $\rho(x_1,x_2)<\delta$ 的所有 $x_1,x_2\in X$, 均有不等式 $\rho(f(x_1),f(x_2))<\varepsilon$ 成立.

如果映射 $f:X\to Y$ 在 $X$ 上连续, 且 $X$ 为紧统, 那么 $f$ 在 $X$ 上一致连续. 一致连续映射的合成是一致连续的.

映射的一致连续性在拓扑群上也会发生. 例如, 设 $X_0\subset X$, $X,Y$ 为拓扑群, 映射 $f:X_0\to Y$ 称为一致连续的 (uniformly continuous) 是指, 对 $Y$ 的单位元的任意邻域 $U_y$, 存在 $X$ 的单位元的一个邻域 $U_x$, 使得对满足 $x_1x_2^{-1}\in U_x$ (相应地, $x_1^{-1}x_2\in U_x$) 的所有 $x_1,x_2\in X_0$, 关系式 $f(x_1)[f(x_2)]^{-1}\in U_y$ (相应地, $[f(x_1)]^{-1}f(x_2)\in U_y$) 均成立.

一致连续性概念已被推广到**一致空间** (uniform space) 上去.

**参考文献**

[1] Колмогоров, А. Н., Фомин, С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981 (中译本: A. H. 柯尔莫果洛夫, C. B. 佛明, 函数论与泛函分析初步, 上, 下册, 高等教育出版社, 1992).

[2] Понтрягин, Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973 (中译本: Л. С. 邦德列雅金, 连续群, 上, 下册, 科学出版社, 1957 – 1958).

[3] Kelley, J. L., General topology, Springer, 1975 (中译本: J. L. 凯莱, 一般拓扑学, 科学出版社, 1982).

[4] Bourbaki, N., General topology, Elements of mathematics, Springer, 1989 (译自法文).

Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】 拓扑群上有好几种自然的一致结构; 关于它们之间映射一致连续性的上面 (含糊的) 叙述可以用不同的方法来阐明.

**参考文献**

[A1] Roelcke, W. and Dierolf, S., Uniform structures on topological groups and their quotients, McGraw-Hill, 1981.

[A2] Engelking, R., General topology, Heldermann, 1989 (译自波兰文).

王斯雷 译

**一致收敛** [uniform convergence; **равномерная сходимость**], 函数 (映射) 序列的

序列 $f_n:X\to Y(n=1,2,\cdots)$ 收敛于函数 (映射) $f:X\to Y$ 的一种性质 (其中 $X$ 是任意集合, $Y$ 是度量空间), 它要求对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 (与 $x$ 无关的) 数 $n_\varepsilon$, 使得对所有 $n>n_\varepsilon$ 及所有 $x\in X$, 不等式

$$\rho(f(x),f_n(x))<\varepsilon.$$

成立. 它等价于

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in X}\rho(f_n(x),f(x))=0.$$

序列 $\{f_n\}$ 在集合 $X$ 上一致收敛于函数 $f$, 充要条件是存在数列 $\{\alpha_n\}$, $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$, 也就是说, 有一个数 $n_0$, 使得对 $n>n_0$ 及所有 $x\in X$, 不等式

$$\rho(f_n(x),f(x))\leqslant\alpha_n$$

成立.

例 序列 $\{f_n(x)\}=\{x^n\}$ $(n=1,2,\cdots)$ 在任何区间 $[0,a]$ $(0<a<1)$ 上一致收敛, 而在 $[0,1]$ 上不一致收敛.

一致收敛的充要条件不适用于由一致收敛的 **Cauchy 准则** (Cauchy criterion) 给出的极限函数.

**一致收敛序列的性质.** 1. 若 $Y$ 是赋范线性空间, 两个映射序列 $f_n:X\to Y$ 与 $g_n:X\to Y$ 在 $X$ 中一致收敛, 则对任意 $\lambda,\mu\in\mathbf{C}$, 序列 $\{\lambda f_n+\mu g_n\}$ 也在 $X$ 中一致收敛.

2. 若 $Y$ 是线性赋范环, 序列 $f_n:X\to Y(n=1,2,\cdots)$ 在 $X$ 中一致收敛, $g:X\to Y$ 是有界映射, 则序列 $\{gf_n\}$ 也在 $X$ 中一致收敛.

3. 若 $X$ 是拓扑空间, $Y$ 是度量空间, 在 $x_0\in X$ 连续的映射序列 $f_n:X\to Y$ 在 $X$ 中一致收敛于 $f$:

$X\to Y$，则 $f$ 也在 $x_0$ 连续，即

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x_0)=\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x).$$

这个结论中，$X$ 中序列 $\{f_n\}$ 一致收敛这个条件是本质的．在这个意义上，存在着在区间上连续的数值函数序列，它在所有点收敛于在上述区间不连续的函数．例如 $[0,1]$ 上的 $f_n(x)=x^n$，$n=1,2,\cdots$ 连续函数序列的一致收敛不是极限函数连续性的必要条件．但是，若 $X$ 是紧集，$Y$ 是实数集 $\mathbf{R}$，连续函数序列 $f_n: X\to\mathbf{R}$ 中所有函数在所有点 $x\in X$ 同为递增或递减，序列有有限极限：

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x),$$

则 $f$ 在 $X$ 上连续的充要条件是 $\{f_n\}$ 在该集合上一致收敛．连续函数序列极限的连续性，其必要，同时又充分的条件，一般用序列**伪一致收敛**（quasi-uniform convergence）这种说法给出．

4．若 $[a,b]$ 上 Riemann (Lebesgue) 可积函数序列 $f_n:[a,b]\to\mathbf{R}(n=1,2,\cdots)$ 一致收敛于函数 $f:[a,b]\to\mathbf{R}$，则该函数也 Riemann（相应地，Lebesgue）可积，且对任意 $x\in[a,b]$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n(t)dt=\int_a^x f(t)dt=\int_a^x\lim_{n\to\infty} f_n(t)dt, \quad (*)$$

序列 $\{\int_a^x f_n(t)dt\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $\int_a^x f(t)dt$．公式（*）能推广到 **Stieltjes 积分**（Stieltjes integral）的情形．但是，如果 $[a,b]$ 上可积函数序列 $f_n(n=1,2,\cdots)$ 在区间的每一点仅收敛于可积函数 $f$，则（*）未必成立．

5．若 $[a,b]$ 上连续可微函数序列 $f_n:[a,b]\to\mathbf{R}(n=1,2,\cdots)$ 在某点 $x_0\in[a,b]$ 收敛，且导数序列 $\{df_n/dx\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，则序列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上也一致收敛，其极限是区间上连续可微函数，且

$$\frac{d}{dx}\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{df_n(x)}{dx},\ a\leqslant x\leqslant b.$$

设 $X$ 是一个集合，$Y$ 是一个度量空间，函数（映射）族 $f_\alpha: X\to Y(\alpha\in\mathfrak{U}$，$\mathfrak{U}$ 为拓扑空间）称为在 $\alpha\to\alpha_0\in\mathfrak{U}$ 时一致收敛（uniformly convergent）于函数（映射）$f: X\to Y$，如果对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $\alpha_0$ 的一个邻域 $U(\alpha_0)$，使得对所有 $\alpha\in U(\alpha_0)$ 及 $x\in X$，不等式

$$\rho(f(x),f_\alpha(x))<\varepsilon$$

成立．

一致收敛函数族与上述一致收敛函数序列有类似的性质．

映射一致收敛的概念可以推广到 $Y$ 是**一致空间**（uniform space），特别地，$Y$ 为一拓扑群的情形．

**参考文献**


[1] Александров, П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977.

[2] Колмогоров, А. Н., Фомин, С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981（中译本：А. Н. 柯尔莫果洛夫、С. В. 佛明，函数论与泛函分析初步，上、下册，高等教育出版社，1992）．

[3] Kelley, J. L., General topology, Springer, 1975（中译本：J. L. 凯来，一般拓扑学，科学出版社，1989）．


Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】 下述定理：连续函数的单调序列一致收敛于它的点态极限，如果这个极限连续，就是熟知的 Dini 定理（Dini theorem）．

**参考文献**


[A1] Engelking, R., General topology, Heldermann, 1989（译自波兰文）．

[A2] Rudin, W., Principles of mathematical analysis, McGraw-Hill, 1976.


罗嵩龄 译

**均匀分布** [**uniform distribution**; **равномерное распределение**]，在数论中亦称一致分布

一类概率分布的统称，由"等可能结果"的思想到连续情形的推广引起．如同**正态分布**（normal distribution）一样，概率论中均匀分布在某些问题中作为确切分布，在另一些问题中作为极限分布出现．

**在直线的一个区间上的均匀分布（矩形分布）**．在区间 $[a,b]$，$a<b$，上的均匀分布是具有密度

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in[a,b],\\ 0, & x\notin[a,b]\end{cases}$$

的**概率分布**（probability distribution）．$[a,b]$ 上均匀分布的概念与表示从该区间随机选择一个点相对应．均匀分布的数学期望和方差分别等于 $(b+a)/2$ 和 $(b-a)^2/12$．其分布函数是

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\leqslant b,\\ 1, & x>b,\end{cases}$$

其特征函数为

$$\varphi(t)=\frac{1}{it(b-a)}(e^{itb}-e^{ita}).$$

在 $[0,1]$ 上均匀分布的随机变量可由独立随机变量序列 $X_1,X_2,\cdots$，以概率 1/2 取 0 和 1，通过令

$$X=\sum_{n=1}^{\infty} X_n 2^{-n}$$

来构造（$X_n$ 是 $X$ 的二进制展开中的数字）．随机数 $X$ 是在 $[0,1]$ 上均匀分布的．这一事实有着重要的统计应用，例如见**随机数和伪随机数**（random and pseudo - random numbers）．

如果两个独立随机变量 $X_1$ 和 $X_2$ 遵从 $[0,1]$ 上的均匀分布，则它们的和遵从 $[0,2]$ 上的所谓三角分布（triangular distribution），其密度 $u_2(x)=1-|1-x|$，对 $x\in[0,2]$；$u_2(x)=0$ 对 $x\notin[0,2]$．三个遵从 $[0,1]$ 上均匀分布的独立随机变量和遵从 $[0,3]$ 以上

$$u_3(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}, & 0\leqslant x<1,\\ \dfrac{x^2-3(x-1)^2}{2}, & 1\leqslant x<2,\\ \dfrac{x^2-3(x-1)^2+3(x-2)^2}{2}, & 2\leqslant x\leqslant 3,\\ 0, & x\notin[0,3].\end{cases}$$

为密度的分布．一般地，遵从 $[0,1]$ 上均匀分布的独立变量和 $X_1+\cdots+X_n$ 具有密度

$$u_n(x)=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}(x-k)_+^{n-1}$$

对 $0\leqslant x\leqslant n$；$u_n(x)=0$，对 $x\notin[0,n]$；此处

$$z_+=\begin{cases}z, & z>0,\\ 0, & z\leqslant 0.\end{cases}$$

当 $n\to\infty$ 时，和 $x_1+\cdots+x_n$，在其数学期望 $n/2$ 处中心化，用标准差 $\sqrt{n/12}$ 进行尺度变换（即 $(x_1+\cdots+x_n-n/2)/\sqrt{n/12}$）下趋向于参数为 0 和 1 的正态分布（对 $n=3$ 其近似程度对许多实际问题已经令人满意）．

在统计应用中构造具有给定分布 $F$ 的随机变量的过程基于以下事实：设随机变量 $Y$ 在 $[0,1]$ 上均匀分布，设分布函数 $F$ 是连续的且严格递增，则随机变量 $X=F^{-1}Y$ 具有分布函数 $F$（在一般情形必须将 $X$ 定义中的反函数 $F^{-1}(y)$ 代之以它的一个类比，即令 $F^{-1}(y)=\inf\{x:F(x)\leqslant y\leqslant F(x+0)\}$）．

**作为极限分布的区间上的均匀分布**．下面给出一些由极限产生的 $[0,1]$ 上均匀分布的典型例子：

1）设 $X_1,X_2,\cdots$ 是具有同样连续分布函数的独立随机变量，则它们的和 $S_n$，取模 1，即和 $S_n$ 的分数部分 $\{S_n\}$ 的分布收敛到 $[0,1]$ 上的均匀分布．

2）设随机参数 $\alpha$ 和 $\beta$ 有绝对连续联合分布，则当 $t\to\infty$ 时，$\{\alpha t+\beta\}$ 的分布收敛到 $[0,1]$ 上的均匀分布．

3）作为某个在正整数上定义的函数 $g$ 的分数部分的极限分布出现的均匀分布．例如对无理数 $\alpha$，对 $1\leqslant m\leqslant n$ 且满足

$$0\leqslant a\leqslant\{m\alpha\}\leqslant b\leqslant 1$$

的 $m$ 所占的比例，当 $n\to\infty$ 时具有极限 $b-a$．

**$\mathbf{R}^k$ 的子集上的均匀分布**．矩形上的均匀分布的例子已出现在 **Buffon 问题**（Buffon problem）（亦见**几何概率**（geometric probabilities）；**随机几何学**（stochastic geometry））中．在 $\mathbf{R}^k$ 的有界集 $D$ 上的均匀分布定义为具有分布密度

$$p(x_1,\cdots,x_k)=\begin{cases}C\neq 0, & x\in D,\\ 0, & x\notin D\end{cases}$$

的分布，其中 $C$ 是 $D$ 的 $k$ 维体积（或 Lebesgue 测度）的倒数．

关于曲面上的均匀分布也有所讨论．于是，"随机方向"（例如，在 $\mathbf{R}^3$ 中），定义为从原点到单位球面的向量是均匀分布的，其意义是它触及曲面的某一部分的概率正比于那一部分曲面的面积．

正规化 **Haar 测度**（Haar measure）在代数群中起着均匀分布的作用．

**参考文献**


[1] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, 2, Wiley, 1957 – 1971（中译本：W. 费勒，概率论及其应用，第一卷，上、下册，科学出版社，1964，1979；第二卷，科学出版社，1994）．


А. В. Прохоров 撰 刘秀芳 译 陈培德 校

**一致空间［uniform space；равномерное пространство］**

在它上面定义了一致结构的集合．空间 $X$ 上的一致结构（uniform structure；uniformity）由对积空间 $X\times X$ 的子集系 $\mathfrak{U}$ 的描述来定义．这里，集系 $\mathfrak{U}$ 必须是**滤子**（filter）（即对任意 $V_1,V_2\in\mathfrak{U}$，交集 $V_1\cap V_2$ 也属于 $\mathfrak{U}$，且若 $W\supset V$，$V\in\mathfrak{U}$，则 $W\in\mathfrak{U}$，并需满足下列公理：

U1）每个集合 $V\in\mathfrak{U}$ 都包含对角线 $\Delta=\{(x,x):x\in X\}$；

U2）若 $V\in\mathfrak{U}$，则 $V^{-1}=\{(y,x):(x,y)\in V\}\in\mathfrak{U}$；

U3）对任意 $V\in\mathfrak{U}$，存在 $W\in\mathfrak{U}$，使得 $W\circ W\subset V$，这里，$W\circ W=\{(x,y)$：存在 $z\in X$ 满足 $(x,z)\in W,(z,y)\in W\}$．

$\mathfrak{U}$ 的元素称为由 $\mathfrak{U}$ 定义的一致结构的近域（entourage）．

集合 $X$ 上的一致结构也可由对 $X$ 上的覆盖系 $\mathfrak{C}$ 的描述来定义，该覆盖系满足下列公理：

C1）若 $\alpha\in\mathfrak{C}$ 且 $\alpha$ 加细覆盖 $\beta$，则 $\beta\in\mathfrak{C}$；

C2）对任意 $\alpha_1,\alpha_2\in\mathfrak{C}$，存在覆盖 $\beta\in\mathfrak{C}$，星加细（star - refine）$\alpha_1$ 和 $\alpha_2$（即对任意 $x\in X$，$\beta$ 的所有

包含 $x$ 的元素都属于 $\alpha_1$ 和 $\alpha_2$ 的某元素）.

属于 $\mathfrak{C}$ 的覆盖称为 $X$ 的一致覆盖（uniform covering）（相应于 $\mathfrak{C}$ 所定义的一致结构）.

这两种描述一致结构的方法是等价的．例如，若 $X$ 上的一致结构由近域系 $\mathfrak{U}$ 给定，则 $X$ 的一致覆盖系 $\mathfrak{C}$ 可以构造如下．对每个 $V\in\mathfrak{U}$，族 $\alpha(V)=\{V(x): x\in X\}$（这里 $V(x)=\{y:(x,y)\in V\}$）是 $X$ 的一个覆盖．覆盖 $\alpha$ 属于 $\mathfrak{C}$，当且仅当 $\alpha$ 可用形为 $\alpha(V)$ $(V\in A)$ 的覆盖加细．反之，若 $\mathfrak{C}$ 是一致空间的一致覆盖系，则近域系由形为 $U=\{H\times H: H\in\alpha\}$ $(\alpha\in\mathfrak{C})$ 的集合和所有包含它们的集合组成．

$X$ 上的一致结构也可以用伪度量系（见**伪度量**（pseudo-metric））给定．集合 $X$ 上的每个一致结构生成一个拓扑 $T=\{G\subset X$: 对任意 $x\in G$，存在 $V\in\mathfrak{U}$，使得 $V(x)\subset G\}$.

一致空间的性质是**度量空间**（metric space）的一致性质的推广．若 $(X,\rho)$ 是度量空间，则 $X$ 上存在由度量 $\rho$ 生成的一致结构．这个一致结构的近域系由所有包含形为 $\{(x,y):\rho(x,y)<\varepsilon\}$ $(\varepsilon>0)$ 之集合的集合组成．这里，由度量和一致结构诱导的拓扑是相同的．由度量生成的一致结构称为可度量化的（metrizable）.

一致空间是 A．Weil 于 1937 年引入的（[1]）（用近域的方式；用一致覆盖给出一致空间的定义是在 1940 年，见 [4]）．然而，用多重星加细来构造函数的思想始见于 Л．С．Понтрягин 的著作（[5]）（后来，这个思想被用于证明可分一致空间的拓扑的完全正则性）．起初，一致空间被用作研究（由它生成的）拓扑的工具（与此类似，可度量化空间上的度量常常用来研究此空间的拓扑性质）．然而，一致空间理论有其自身的重要性，虽然它与拓扑空间理论的联系密切．

把一致空间 $X$ 映入一致空间 $Y$ 的映射 $f:X\to Y$ 称为一致连续的（uniformly continuous），如果对 $Y$ 的任何一致覆盖 $\alpha$，集系 $f^{-1}\alpha=\{f^{-1}U: U\in\alpha\}$ 是 $X$ 的一致覆盖．对于由 $X$ 和 $Y$ 上的一致结构生成的拓扑，每个一致连续映射都是关于该拓扑连续的．如果 $X$ 和 $Y$ 上的一致结构是由度量诱导的，则一致连续映射 $f:X\to Y$ 就是作为度量空间之间映射的经典意义下的一致连续（见**一致连续性**（uniform continuity））.

更有意义的是满足附加的分离公理的一致空间理论：

U4）$\bigcap_{V\in\mathfrak{U}} V=\Delta$（用近域方式），或

C3）对任意两点 $x,y\in X$，$x\neq y$，存在 $\alpha\in\mathfrak{C}$，使得 $\alpha$ 没有同时包含 $x$ 和 $y$ 的元素（用一致结构的方式）.

从现在起，我们只讨论具有分离一致结构的一致空间．$X$ 上由分离一致结构生成的拓扑是完全正则的，反之，$X$ 上的每个完全正则拓扑都是由某个分离一致结构生成的．往往存在多种不同的一致结构，它们生成 $X$ 上的相同拓扑．特别地，可度量化拓扑可以由不可度量化的分离一致结构生成．

一致空间 $(X,\mathfrak{U})$ 是可度量化的，当且仅当 $\mathfrak{U}$ 具有可数基．这里，一致结构的基（用近域方式）是满足下列条件的子系 $\mathfrak{B}\subset\mathfrak{U}$：对任意 $V\in\mathfrak{U}$，存在 $W\in\mathfrak{B}$ 使得 $W\subset V$．或（用一致覆盖方式）存在子系 $\mathfrak{A}\subset\mathfrak{C}$，使得对任意 $\alpha\in\mathfrak{C}$ 有 $\beta\in\mathfrak{A}$ 加细 $\alpha$．一致空间 $(X,\mathfrak{U})$ 的权（weight of a uniform space）是一致结构 $\mathfrak{U}$ 的基的最小基数．

设 $M$ 是一致空间 $(X,\mathfrak{U})$ 的子集．近域系 $\mathfrak{U}_M=\{(M\times M)\cap V: V\in\mathfrak{U}\}$ 定义 $M$ 上的一致结构．偶对 $(M,\mathfrak{U}_M)$ 称为 $(X,\mathfrak{U})$ 的子空间（subspace）．把一致空间 $(X,\mathfrak{U})$ 映入一致空间 $(Y,\mathfrak{U}')$ 的映射 $f: X\to Y$ 称为一致嵌入（uniform imbedding），如果 $f$ 是一一的一致连续映射且 $f^{-1}:(fX,\mathfrak{U}'_{fX})\to(X,\mathfrak{U})$ 也是一致连续的．

一致空间 $X$ 称为完全的（complete），如果 $X$ 中的每个 Cauchy 滤子（即包含每个一致覆盖的某个元素的滤子）都有聚点（即属于滤子诸元素之闭包的交集的点）．可度量化一致空间是完全的，当且仅当生成其一致结构的度量是完全的．任何一致空间 $(X,\mathfrak{U})$ 都可以作为一个处处稠密子集一致嵌入唯一一个完全一致空间 $(\widetilde{X},\widetilde{\mathfrak{U}})$（准确到一致同构），后者称为 $(X,\mathfrak{U})$ 的完全化（completion）．一致空间 $(X,\mathfrak{U})$ 的完全化 $(\widetilde{X},\widetilde{\mathfrak{U}})$ 的拓扑是紧的，当且仅当 $\mathfrak{U}$ 是准紧一致结构（precompact uniformity）（即使得任一一致覆盖都能加细一个有限一致覆盖）．这时，空间 $\widetilde{X}$ 是 $X$ 的紧化，称为 $X$ 关于一致结构 $\mathfrak{U}$ 的 Samuel 扩张（Samuel extension）．对 $X$ 的每个紧化 $bX$，存在唯一的 $X$ 上的准紧一致结构，其 Samuel 扩张与 $bX$ 一致．于是，所有的紧化都可以用准紧一致结构的语言来描述．在紧空间上存在唯一的一致结构（完全且准紧的）.

集合 $X$ 上的每个一致结构 $\mathfrak{U}$ 都按下列公式诱导出一种**邻近关系**（proximity）$\delta$：对所有 $V\in\mathfrak{U}$,

$$A\delta B \Leftrightarrow (A\times B)\cap V\neq\varnothing .$$

这里，由一致结构 $\mathfrak{U}$ 生成的 $X$ 上的拓扑和邻近关系 $\delta$ 一致．任何一致连续映射都是关于按一致结构生成的邻近关系的邻近连续映射．往往存在多种不同的一致结构，它们生成 $X$ 上同一种邻近关系．而且，$X$ 上的一致结构的集合分为若干等价类（两个一致结构是等价的，如果它们诱导的邻近关系相同）．一致结构的每一个等价类恰好含有一个准紧一致结构；并

且，关于这些一致结构的 Samuel 扩张，与关于由这类一致结构诱导的邻近关系的 Смирнов 扩张相同（见**邻近空间**（proximity space））．在 $X$ 上一致结构的集合上存在自然的偏序：$\mathfrak{U} \supset \mathfrak{U}'$ 则 $\mathfrak{U} > \mathfrak{U}'$．在 $X$ 上生成一固定拓扑的所有一致结构中有一个最大者，称为泛一致结构（universal uniformity）．它诱导出 $X$ 上的 Stone - Čech 邻近关系．每个准紧一致结构都是其等价类中的最小元素．若 $\mathfrak{C}$ 是 $X$ 上某一致结构的一致覆盖系，则等价的准紧一致结构的一致覆盖系由 $X$ 的这样一些覆盖组成，它们加细 $\mathfrak{C}$ 的有限覆盖．

一致空间 $(X_t, \mathfrak{U}_t)$ $(t \in T)$ 的积（product of uniform spaces）是一致空间 $(\prod X_t, \prod \mathfrak{U}_t)$，这里 $\prod \mathfrak{U}_t$ 是 $\prod X_t$ 上的一致结构，它的基是形为

$$\{(\{x_t\},\{y_t\}):(x_{t_i}, y_{t_i}) \in V_{t_i},\ i = 1, \cdots, n\},$$

$$t_i \in T,\ V_{t_i} \in \mathfrak{U}_{t_i},\ n = 1, 2, \cdots$$

的近域集合．

由一致结构 $\prod \mathfrak{U}_t$ 诱导的 $\prod X_t$ 上的拓扑与空间 $X_t$ 的拓扑的 **Тихонов** 积（Tikhonov product）相同．乘积到分支上的投影是一致连续的．每个重数为 $\tau$ 的一致空间都可以嵌入一个可度量化一致空间之 $\tau$ 重积．

把拓扑空间 $X$ 映入一致空间 $(Y, \mathfrak{U})$ 的连续映射族 $F$ 称为（关于一致结构 $\mathfrak{U}$）等度连续的（equicontinuous），如果对任意 $x \in X$ 和任意 $V \in \mathfrak{U}$，存在邻域 $O_x \ni x$，使得对 $x' \in O_x$ 和 $f \in F$ 有 $(f(x), f(x')) \in V$．经典的 Ascoli 定理的下列推广成立：设 $X$ 为 $k$ 空间，$(Y, \mathfrak{U})$ 为一致空间，$Y^X$ 为具有紧开拓扑的把 $X$ 映入 $Y$ 的连续函数的空间．闭子集 $F \subset Y^X$ 为紧集的充要条件是，$F$ 关于一致结构 $\mathfrak{U}$ 是等度连续的且所有集合 $\{f(x): f \in \mathrm{F}\}$ $(x \in X)$ 在 $Y$ 中有紧闭包．（$k$ 空间（$k$-space）是这样的 Hausdorff 空间，它是局部紧空间的商象；$k$ 空间类包含所有满足第一可数性公理的 Hausdorff 空间以及所有局部紧 Hausdorff 空间．）

据 Stone 定理，可度量化一致空间的拓扑是仿紧的．而且，关于可度量化一致空间的一致仿紧性的 Isbell 问题已经否定地解决．已经构造出一个具有一致覆盖的可度量化一致空间的实例，该一致覆盖没有局部有限一致加细（[3]）．

在一致空间的维数论中，类似拓扑维数 dim 定义的一致维数不变量 $\delta$d 和 $\Delta$d（$\delta$d 用有限覆盖定义，$\Delta$d 用所有一致覆盖定义）以及一致归纳维数 $\delta$ Ind 是基本的．维数 $\delta$ Ind 的定义类似于大归纳维数 Ind，是用关于不同（在由一致结构诱导的邻近关系的意义下）集合之间邻近性分划的维数的归纳法来定义的．在这里，集合 $H$ 称为 $A$ 和 $B(A\delta B)$ 之间的邻近性分划（proximity partition），如果对 $H$ 的任一满足 $\mathring{U} \cap (A \cup B) \neq 0$ 的邻域 $U$，有 $X \setminus U = A' \cup B'$，这里 $A' \bar{\delta} B'$，$A \subset A'$、$B \subset B'$（如果 $H \bar{\delta} (X \setminus U)$，$U$ 称为 $H$ 的 $\delta$ 邻域）．于是，维数 $\delta$ Ind（和 $\delta$d 一样）不仅是一致的不变量，也是一个邻近性不变量．一致空间 $(X, \mathfrak{U})$ 的维数 $\delta$d 与 Samuel 扩张的普通维数 dim 相同，Samuel 扩张是关于等价于 $\mathfrak{U}$ 的准紧一致结构构造的．如果 $\Delta\mathrm{d}X$ 是有限的，则 $\Delta\mathrm{d}X = \delta\mathrm{d}X$．不过，可能出现 $\delta\mathrm{d}X = 0$ 而 $\Delta\mathrm{d}X = \infty$ 的情形．对于可度量化一致空间，$\delta\mathrm{d}X \leqslant \delta\,\mathrm{Ind}\,X = \Delta\mathrm{d}X$（若 $\Delta\mathrm{d}X < \infty$，则 $\delta\mathrm{d}X = \delta\,\mathrm{Ind}\,X = \Delta\mathrm{d}X$）．对于任何一致空间，等式 $\delta\mathrm{d}X = 0$ 和 $\delta\,\mathrm{Ind}\,X = 0$ 等价．若一致空间是可度量化的，则等式 $\delta\mathrm{d}X = 0$ 和 $\Delta\mathrm{d}X = 0$ 也是等价的．若一致空间 $X'$ 是一致空间 $X$ 的处处稠密子集，则 $\delta\,\mathrm{Ind}\,X' \geqslant \delta\,\mathrm{Ind}\,X$．恒有 $\delta\,\mathrm{Ind}\,X \leqslant \mathrm{Ind}\,X$．对于维数 $\delta$d，有一个与分划定理类似的结论．

对一致性公理加以削弱，便得到一致空间的各种各样的推广．例如，拟一致结构的公理系统中包括了对称性公理（[8]）．对于广义一致结构（[10]）（$f$一致结构），用来代替一致覆盖的 $X$ 的一致子集族通常并不是覆盖（在由 $f$ 一致结构生成的拓扑下，这类子集族大多数是处处稠密的）．一致结构推广之一是所谓 $\theta$ 一致结构（$\theta$-uniformity），它与一致空间上的拓扑有关，由 Hausdorff 空间的 $\theta$ 覆盖族定义；$\theta$ 覆盖（$\theta$-covering）是满足下列条件的典范的开集族 $\eta$：对任意 $x \in X$，存在 $V_1, \cdots, V_n \in \eta$，使 $x \in \mathrm{int} \bigcup_{i=1}^{n} [V_i]$．

**参考文献**


[1] Weil, A., Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale, Hermann, 1938.

[2] Bourbaki, N., General topology, Elements of mathematics, Springer, 1989（译自法文）.

[3] Шегин, Е. В.,《Докл. АН СССР》, **222** (1975), 3, 541 – 543.

[4] Tukey, J., Convergence and uniformity in topology, Princeton Univ. Press, 1940.

[5] Понтрягин, Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973（中译本：Л. С. 邦德列雅金，连续群（上、下），科学出版社，1957 – 1958）.

[6] Isbell, J., Uniform spaces, Amer. Math. Soc., 1964.

[7] Samuel, P., Ultrafilters and compactification of uniform spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **64** (1948), 100 – 132.

[8] Császár, A., Foundations of general topology, Pergamon, 1963

[9] Федорчук, В. В.,《Докл. АН СССР》, **192** (1970), 6, 1228 – 1230.

[10] Kulpa, W., A note on the dimension dind, *Colloq.*

*Math*., 25(1972), 227 – 240.

А. В. Иванов, Н. С. Стреколовская 撰

【补注】 准紧一致空间也称为全有界的(totally bounded). 泛一致结构也称为加细一致结构(fine uniformity).

$k$ 空间的另一种描述如下: Hausdorff 空间 $X$ 是 $k$ 空间($k$-space), 当且仅当它满足下列条件: $X$ 的子集闭于 $X$ 的充要条件, 是它与 $X$ 的每个紧子集的交集都是闭的.

Е. В. Шепин([3]) 和 J. Pelant([A1]) 各自独立地构造出非一致仿紧的可度量化一致空间(即没有(一致)局部有限一致覆盖的基). 在[A1]中还证明了, 在某些集合论模型(ZFC)中, 势至多为 $\aleph_1$ 的一致空间的一致覆盖不一定构成一致结构的基.

**参考文献**

[A1] Pelant, J., Cardinal reflections and point-character of uniformities-counterexamples, in Sem. Uniform Spaces (Prague, 1973 – 1974), Mat. Ustav. ČSAV, Prague, 1975, 149 – 158.

[A2] Engelking, R., General topology, Heldermann, 1989.

白苏华, 胡师度 译

**一致稳定性[uniform stability; равномерная устойчивость]**

对于初始时刻为一致的 **Ляпунов 稳定性**(Lyapunov stability). 微分方程组

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x \in \mathbf{R}^n$$

的解 $x_0(t)(t \in \mathbf{R}^+)$ 称为一致稳定的(uniformly stable), 如果对任一 $\varepsilon > 0$ 均有 $\delta > 0$ 存在, 使得对每一个 $t_0 \in \mathbf{R}^+$ 和方程组的每一个满足以下不等式的解 $x(t)$,

$$|x(t_0) - x_0(t_0)| < \delta,$$

下面的不等式对一切 $t \geqslant t_0$ 均成立:

$$|x(t) - x_0(t)| < \varepsilon.$$

自治微分方程组 $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$ 的 Ляпунов 稳定的不动点都是一致稳定的, 但一般说来, Ляпунов 稳定的解却不一定是一致稳定的. 例如方程

$$\dot{x} = [\sin \ln(1+t) - \alpha]x \tag{1}$$

的解 $x(t) = 0 (t \in \mathbf{R}^+)$ 当 $\alpha \in (1/\sqrt{2}, 1)$ 时是稳定的, 但对于这些 $\alpha$ 却非一致稳定.

设有线性微分方程组

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbf{R}^n, \tag{2}$$

其中 $A(\cdot)$ 是一映射 $\mathbf{R}^+ \to \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ 且在每个区间上均为可和的.

为使(2)之解 $x=0$ 为一致稳定, 必须(2)的**上奇异指数**(singular exponent) $\Omega^0(A)$ 小于或等于零. 例如, 方程(1)的上奇异指数 $\Omega^0(A) = 1 - \alpha$, 而 **Ляпунов 特征指数**(Lyapunov characteristic exponent) $\lambda_1(A) = (1/\sqrt{2}) - \alpha$. 为使这样的 $\delta > 0$ 存在, 以致任一方程组

$$\dot{x} = A(t)x + g(t, x), \quad x \in \mathbf{R}^n$$

只要适合

$$|g(t, x)| < \delta |x|,$$

则其满足 Cauchy 问题解的存在唯一性定理条件的解 $x = 0$ 均为一致稳定, 其必要充分条件是上奇异指数 $\Omega^0(A)$ 小于零.

**参考文献**

[1] Персидский, К., «Матем. сб.», 40 (1933), 3, 284 – 293.

[2] Демидович, Б. П., Лекции по математической теории устойчивости, М., 1967.

[3] Далецкий, Ю. Л., Крейн, М. Г., Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, М., 1970 (英译本: Daletskiĭ Yu. L. and Kreĭn, M. G., Stability of solutions of differential equations in Banach spaces, Amer. Math. Soc., 1974).

В. М. Миллионщиков 撰

【补注】 上奇异指数又称 Bohl 指数(Bohl exponent), 亦见**奇异指数**(singular exponent).

**参考文献**

[A1] Rouché, N., Habets, P. and Laloy, M., Stability theory by Liapunov's direct methods, Springer, 1977.

[A2] Hale, J. K., Ordinary differential equations, Wiley (Interscience), 1969.

[A3] Coppel, W. A., Stability and asymptotic behavior of differential equations, D. C. Heath, 1965.

齐民友 译

**一致子群[uniform subgroup; равномерная подгруппа]**, *局部紧拓扑群 G 的*

一个闭子群 $H \subset G$, 使得商空间 $G/H$ 是紧的. 与这个概念密切相关的是 $G$ 的拟一致子群(quasi-uniform subgroup)的概念, 就是 $G$ 的这样一个闭子群 $H$, 在 $G/H$ 上有一个 $G$ 不变测度 $\mu$ 且 $\mu(G/H) < \infty$. 例如, $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ 的子群 $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ 就是拟一致的, 但不是一致的. 另一方面, $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ 内一切上三角形矩阵所成的子群 $T$ 是 $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ 的一个一致子群, 但不是拟一致的(在 $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})/T$ 上没有 $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ 不变测度). 然而, 一个 Lie 群 $G$ 的每一个连通拟一致子群都是一致子群(见[1]), 而 $G$ 的每一个离散一致

子群都是拟一致的([2])(关于 Lie 群的离散一致子群的论述,见**离散子群**(discrete subgroup)). 如果 $G$ 是一个连通 **Lie 群**(Lie group), 而 $H$ 是 $G$ 的一个一致子群, 则 $H$ 内单位元的连通分支 $H^0$ 在 $G$ 内的正规化子 $N_G(H^0)$ 包含 $G$ 的一个极大连通三角形子群(见[3]). 一个连通代数复线性 Lie 群 $G$ 的一个代数子群 $H$ 是一致子群, 当且仅当 $H$ 是 $G$ 内一个**抛物子群**(parabolic subgroup)). 半单 Lie 群的所有连通一致子群已被描述(见[4]). 一个连通半单 Lie 群 $G$ 的非离散一致子群 $H$ 具有强刚性(strong rigidity)(见[5]), 这就是在 $G$ 内存在有限个子群 $H_i (i=1,\cdots,m)$, 使得任意同构于 $H$ 的子群 $H'\subset G$ 都与子群 $H_i$ 中之一共轭. 一致和拟一致子群的重要例子是如下构造的. 令 $G$ 是定义在有理数域 $\mathbf{Q}$ 上的一个**线性代数群**(linear algebraic group), 令 $G_A$ 是阿代尔群, 又令 $G_\mathbf{Q}\subset G_A$ 是主阿代尔群. 则 $G_\mathbf{Q}$ 是 $G_A$ 内的离散子群, 而且 $G_\mathbf{Q}$ 是 $G_A$ 的一个一致子群, 当且仅当: 1) $G$ 没有定义在 $\mathbf{Q}$ 上的非平凡有理特征标; 2) $G_\mathbf{Q}$ 的所有幂幺元素都属于它的根(见[6], [7]). 特别地, 如果 $G$ 是定义在 $\mathbf{Q}$ 上的一个幂幺代数群, 则 $G_\mathbf{Q}$ 是 $G_A$ 的一个一致子群. 条件 1) 对于 $G_\mathbf{Q}$ 和 $G_A$ 的拟一致性来说是必要且充分的.

**参考文献**


[1] Mostow, G. D., Homogeneous spaces with finite invariant measure, *Ann. of Math.*, **75**, (1962), 1, 17 – 37.

[2] Raghunathan, M. S., Discrete subgroups of Lie groups, Springer, 1972.

[3] Онищик, А. Л., 《Матем. сб.》, **71** (1966), 4, 483 – 494.

[4] Онищик, А. Л., 《Матем. сб.》, **74** (1967), 3, 398 – 416.

[5] Goto, M. and Wang, H. C., non-discrete uniform subgroups of semisimple Lie groups, *Math. Ann.*, **198** (1972), 4, 259 – 286.

[6] Borel, A., Some properties of adele groups attached to algebraic groups, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **67** (1961), 6, 583 – 585.

[7] Mostow, G. D. and Tamagawa, T., On the compactness of arithmetically defined homogeneous spaces, *Ann. of Math.*, **76** (1962), 3, 446 – 463.


В. Л. Попов 撰 郝钢新 译

**一致拓扑** [**uniform topology**; **равномерная топология**]

由一致结构生成的拓扑. 详细地说, 设 $X$ 是具有一致结构(uniform structure) $U$ 的集合(即**一致空间**(uniform space)), 并且对每个 $x\in X$, 设 $B(x)$ 表示 $X$ 中子集 $V(x)$ 的集合, $V$ 遍取 $U$ 的近域, 则在 $X$ 中存在一个, 实际上也只有一个拓扑(称为一致拓扑), 对于它, $B(x)$ 对任意 $x\in X$ 是在 $x$ 处的邻域**滤子**(filter). 如果存在可以生成这个拓扑的一致结构, 此拓扑就称为可一致化的(uniformizable). 并不是所有拓扑空间都可一致化; 例如非正则空间.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 参考文献见**一致空间**(uniform space).

罗嵩龄 译

**单值化** [**uniformization**; **униформизация**] 集合 $A\subset\mathbf{C}^N$(或 $A\subset\mathbf{C}P^N$)的

三元组 $(f, D, G)$, 这里 $f=(f_1,\cdots,f_N)$ 是区域 $D\subset\mathbf{C}^N$(相应地, $D\subset\mathbf{C}P^N$)内亚纯函数系, 定义了一个全纯**覆叠**(covering) $D_0\to f(D_0)$, 使 $f(D_0)$ 在 $A$ 内稠密, $G$ 是 $D$ 的双全纯自同构的真不连续群, $G$ 限制于 $D_0$ 是这个覆叠的覆叠同胚群, 即 $D_0/G$ 双全纯等价于 $f(D_0)$.

因此可以讨论多值解析函数 $w=F(z):\mathbf{C}^n\to\mathbf{C}^m$ 的单值化(uniformization of multi-valued analytic functions), 把它理解为集 $A=\{(z,w)\}$ 的单值化, 这对应于把 $F$ 用单值亚纯函数作参数化.

例如 $\mathbf{C}^2$ 中的复曲线 $z^2+w^2=1$ 可用三元组 $((z,w), \mathbf{C}, G)$ 作单值化, 这里 $z=\cos t$, $w=\sin t$, $G$ 是平移群 $t\to t+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, 或用三元组 $((z,w), D, G)$ 作单值化, 这里

$$z=\frac{(1-t^2)}{(1+t^2)},\ w=\frac{2t}{(1+t^2)},$$

$$D=\mathbf{C}\setminus\{i,-i\},$$

$G$ 是平凡群. 一个不那么平凡的例子是三次曲线 $w^2=a_0z^3+a_1z^2+a_2z+a_3$, 它没有有理参数化, 但可以用**椭圆函数**(elliptic function)作单值化, 即有三元组 $((f_1,f_2), D, G)$, 这里 $f_1$ 和 $f_2$ 是周期为 $\omega_1$ 和 $\omega_2$ 的 Weierstrass $\wp$ 函数及其导函数的有理函数, $G$ 是由平移 $t\to t+\omega_1$, $t\to t+\omega_2$ 生成的群.

在 19 世纪上半叶就已经提出了由一般代数方程

$$P(z,w)=\sum_{j,k}a_{jk}z^jw^k=0, \qquad (*)$$

这里 $P$ 是 $\mathbf{C}$ 上不可约代数多项式, 所定义的任意代**数曲线**(algebraic curve)的单值化问题, 特别是与代数函数的积分相联系. H. Poincaré 提出了形如 $(*)$ 式的任意解析方程的解集的单值化问题, 这里的 $P$ 是两个变量的收敛幂级数, 并考虑所有可能的解析延拓. 代数簇与任意解析簇的单值化构成了 Hilbert 第二十二问题(Hilbert twenty-second problem). 到目前为止(1992)还没有得到单值化问题的完全的解, 只有一维的情形是例外.

在 $\mathbf{C}^2$ 内满足 $(*)$ 的二元组 $(z,w)$ 的集合上利用相应的代数函数 $w(z)$(或 $z(w)$)的元素可以引进

一个复拓扑，从而得到一个紧 **Riemann 曲面**(Riemann surface)；曲线(*)的点的坐标是这个曲面上的亚纯函数．此外所有的紧 Riemann 曲面在差一个共形等价的意义下均可如此得到．因此，代数曲线的单值化问题被包含在 Riemann 曲面的单值化问题之内．

任意 Riemann 曲面 $S$ 的单值化(uniformization of an arbitrary Riemann surface)是一个三元组$(D,\pi,G)$，这里 $D$ 是 Riemann 球面 $\overline{\mathbf{C}}$ 上的一个区域，$\pi$: $D\to S$ 是具有覆叠群 $G$ 的正则全纯覆叠，这里 $G$ 是 $D$ 的共形自同构群．一般的问题在于对一个给定的 Riemann 曲面找出且描述所有这样的三元组．

在 P. Koebe，H. Poincaré 和 F. Klein 的经典论文中得到了单值化一个任意 Riemann 曲面 $S$ 的可能性，原则上给出了问题的解．完全的解已经得到，并给出了曲面 $S$ 的所有可能单值化的描述(见[4]－[6])．Klein-Poincaré 单值化定理(Klein-Poincaré uniformization theorem)(在一般情形下由 Poincaré 证明，见[2])断言：每个 Riemann 曲面 $S$ 共形等价于商空间 $D/G$，$D$ 是三个典范区域之一：Riemann 球面 $\overline{\mathbf{C}}$，复平面 $\mathbf{C}$ 或单位圆盘 $\Delta$，而 $G$ 是 $D$ 的 Möbius(分式线性)自同构的真不连续群，它在 $D$ 的所有 Möbius 自同构的群里定义到差一个共轭．

$D=\overline{\mathbf{C}}$，$\mathbf{C}$ 与 $\Delta$ 的情形是互相排斥的．具有这样的普遍全纯覆叠的曲面 $S$ 分别称为椭圆、抛物或双曲型的．此外 $D=\overline{\mathbf{C}}$ 只发生在 $S$ 本身共形等价于 $\overline{\mathbf{C}}$ 的情形(从而 $G$ 是平凡的)．$D=\mathbf{C}$ 当 $S$ 共形等价于 $\mathbf{C}$，$\mathbf{C}\setminus\{0\}$ 或环面时，这时 $G$ 或是平凡的，或是由平移 $z\mapsto z+\omega(\omega\in\mathbf{C}\setminus\{0\})$ 生成的群，或是由两个平移 $z\to z+\omega_1$，$z\to z+\omega_2$ 生成的群，这里 $\omega_1$，$\omega_2\neq 0$ 是使得 $\operatorname{Im}(\omega_2/\omega_1)\neq 0$ 的复数．在剩下的情形里 $S$ 共形等价于 $\Delta/G$，这里 $G$ 是无挠 **Fuchs 群**(Fuchsian group)．典范投影 $\pi: D\to S$ 是非分歧覆叠而且单值化 $S$ 上所有函数 $f$，使得 $f\circ\pi$ 是 $D$ 上单值函数．对于具有给定分歧次数的分歧覆叠，Klein-Poincaré 定理也有一个推广．

单值化问题的另一个途径依赖于以下原理：如果 Riemann 曲面 $\widetilde{S}$ 同胚于一个区域 $D\subset\overline{\mathbf{C}}$(不必单连通)，则 $\widetilde{S}$ 也共形等价于 $D$．用同样的方法，单值化问题可被归结到以下的拓扑问题：找出一个已知 Riemann 曲面 $S$ 的所有(一般地说是分歧的)平坦覆叠 $\widetilde{S}\to S$．这个问题的解答由以下的 Maskit 定理(theorems of Maskit)给出(见[4]，[5])：

Ⅰ．设 $S$ 是定向曲面，$v_1,\cdots,v_n,\cdots$ 是 $S$ 上两两不相交的闭路的集合．如果 $\widetilde{S}\to S$ 是具有定义子群 $N=\langle v_1^{\alpha_1},\cdots,v_n^{\alpha_n},\cdots\rangle$ 的正则覆叠，$\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\cdots$ 是自然数，则 $\widetilde{S}$ 是平坦覆叠，即同胚于 $\overline{\mathbf{C}}$ 内一个区域．

Ⅱ．设 $\widetilde{S}$ 是平坦曲面，$\widetilde{S}\to S$ 是定向曲面 $S$ 的正则覆叠，其定义子群为 $N$．如果 $S$ 是有限型曲面，即 $\pi_1(S)$ 是有限生成的，则存在两两不相交的简单闭路 $v_1,\cdots,v_n$ 的有限集以及自然数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 使得 $\langle v_1^{\alpha_1},\cdots,v_n^{\alpha_n}\rangle=N$．

Ⅲ．如果 $\widetilde{S}$ 是平坦 Riemann 曲面，$\widetilde{G}$ 是 $\widetilde{S}$ 的共形自同构的真不连续群，则存在共形同胚 $h:\widetilde{S}\to D\subset\overline{\mathbf{C}}$，使得 $hGh^{-1}$ 是具有不变分支 $D$ 的 **Klein 群**(Kleinian group)．

因此每个 Riemann 曲面被一个 Klein 群所单值化．譬如说，如果 $S$ 是亏格 $g\geqslant 1$ 的闭 Riemann 曲面，则它的基本群有以下表述：

$$\pi_1(S)=\{a_1,b_1,\cdots,a_g,b_g:\prod_{j=1}^{g}[a_j,b_j]=1\}.$$

而且由平坦覆叠 $\widetilde{S}$ 定义的正规子群 $N$ 可被取为由 $a_1,\cdots,a_g$(或 $b_1,\cdots,b_g$)生成的最小正规子群．$S$ 现在被亏格 $g$ 的 Schottky 群(Schottky group)$G$，即带 $g$ 个生成元的自由纯斜驶 Klein 群，所单值化(经典的关于分割的 Koebe 定理(Koebe theorem on cross-cuts))．

在有限型 Riemann 曲面的单值化中，可对可能的 Klein 群作分类．为此目的要引进商子群的概念．如果 $G$ 是具有不变分支 $D(G)$ 的 Klein 群，则它的子群 $H$ 称为 $G$ 的商子群(quotient subgroup)；如果 $H$ 是满足下列三个条件的极大子群：a)它的不变分支 $D(H)\supset D(G)$ 是单连通的；b) $H$ 不含随机抛物元(random parabolic elements)(即对于共形同构 $h: D(H)\to\Delta$，使 $h\circ g\circ h^{-1}$ 的象成为双曲的那些抛物元)；c)在 $H$ 的极限集里带有不动点的 $G$ 的抛物元都属于 $H$．举例来说，在 Klein-Poincaré 定理里 $G$ 的每个商子群与 $G$ 自己重合，在关于分割的 Koebe 定理里所有的商子群都是平凡的．设 $D$ 是 $G$ 的不变分支，Riemann 曲面 $S$ 的单值化$(D,\pi,G)$称为标准的(standard)，如果 $G$ 无挠而且不含随机抛物元．对于闭曲面，所有这样的单值化都由以下定理描述(见[6])．

设 $S$ 是亏格 $g>0$ 的闭 Riemann 曲面，$\{v_1,\cdots,v_n\}$ 是 $S$ 上两两不相交的简单闭路的集合，则存在 $S$ 的标准单值化$(D,\pi,G)$，它在共形等价的意义下唯一，使得 $G$ 的商子群或是 Fuchs 的或是初等的，并且覆叠 $\pi: D\to S$ 是由闭路 $v_1,\cdots,v_n$ 张成的 $\pi_1(S)$ 的最小正规子群所构造．

**拟共形映射**(quasi-conformal mapping)和 **Teichmüller 空间**(Teichmüller space)的理论使得人们能证明用单独一个 Klein 群使 $n$ 个 Riemann 曲面同时单值化的可能性以及已知类型的所有 Riemann 曲面的同样问题(见[7])．

参考文献

[1] Klein, F., Neue Beiträge zur Riemannschen Funktionentheorie, *Math. Ann*, 21 (1883), 141 – 218.

[2] Poincaré, H., Sur l'uniformisation des fonctions analytiques, *Acta Math.*, 31 (1907), 1 – 64.

[3A] Koebe, P., Ueber die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven, Nachr. K. Ges Wissenschaft, Göttinger Math. Phys. Kl. (1907), 191 – 210.

[3B] Koebe, P., Ueber die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven Ⅱ, Nachr. K. Ges. Wissenschaft. Göttinger Math. Phys. Kl (1907), 177 – 198.

[3C] Koebe, P., Ueber die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven Ⅲ, Nachr. K. Ges. Wissenschaft. Göttinger Math. Phys. Kl. (1908), 337 – 358.

[3D] Koebe, P., Ueber die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven Ⅳ, Nachr. K. Ges. Wissenschaft. Göttinger Math. Phys. Kl. (1909), 324 – 361.

[4] Maskit, B., A theorem on planar covering surfaces with applications to 3-manifolds, *Ann. of Math.*, 81 (1965), 2, 341 – 355.

[5] Maskit, B., The conformal group of a plane domain, *Amer. J. Math.*, 90 (1968), 3, 718 – 722.

[6] Maskit, B., L. V. Ahlfors, et al. (ed.): Contributions to analysis, Uniformization of Riemann surfaces, Acad. Press, 1974, 293 – 312.

[7] Bers, L., Uniformization, Moduli and Kleinian groups, *Bull London Math. Soc.*, 4 (1972), 257 – 300.

[8] Крушкаль, С. Л., Апанасов, Б. Н., Гусевский, Н. А., Клейновы группы и униформизация в примерах и задачах, Новосиб., 1981 (英译本: Krushkal', S. L., Apanasov, B. N. and Gusevkiĭ, N. A., Kleinian groups and uniformization in examples and problems, Amer. Math. Soc., 1986).

[9] Nevanlinna, R., Uniformisierung, Springer, 1953.

[10] Ford, L. R., Automorphic functions, Chelsea, 1957.

Н. А. Гусевский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Gunning, R. C., On uniformization of complex manifolds: the role of connections, Princeton Univ. Press, 1978.

[A2] Springer, G., Introduction to Riemann surfaces, Addison-Wesley, 1957.

[A3] Apanasov, B. N., Discrete groups in space and uniformization problems, Kluwer, 1991 (译自俄文).

陈志杰 译

**一致化元 [uniformizing element; униформизующий элемент]**

具有素理想 $\mathfrak{p}$ 的离散赋值环 $A$ (见**离散赋范环** (discretely-normed ting)) 中的元素 $\pi$, 它使得 $\mathfrak{p}=A\pi$. 如果 $\pi_1,\pi_2$ 是 $A$ 中的两个一致化元, 则元素 $\pi_1\pi_2^{-1}$ 在 $A$ 中是可逆的. 设 $R$ 是 $A$ 中关于剩余域 $A/\mathfrak{p}$ 的元素的代表系. 则任一元素 $a\in A$ 可以唯一地表示为幂级数 $\sum_{i=0}^{\infty}r_i\pi^i$, 其中 $r_i\in R$, $\pi$ 是一个一致化元. 如果 $A$ 关于该离散赋值是完全的, 则任一上述形状的幂级数表示一个元素 $a\in A$.

如果 $A$ 是一条代数曲线 (algebraic curve) $X$ 的一个单点 $x$ 处的函数的局部环, 则 $\pi$ 是一致化元当且仅当 $\pi$ 在 $x$ 处有一阶零点. Л. В. Кузьмин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Weiss, E., Algebraic number theory, McGraw-Hill, 1963.

赵春来 译

**一致收敛级数 [uniformly-convergent series; равномерно сходящийся ряд]**

具有 (一般地) 复数项的函数级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x),\ x\in X, \tag{1}$$

使得对任意 $\varepsilon>0$, 存在 (与 $x$ 无关) $n_\varepsilon$, 对所有 $n>n_\varepsilon$ 及所有 $x\in X$,

$$|s_n(x)-s(x)|<\varepsilon.$$

其中

$$s_n(x)=\sum_{k=1}^{n}a_k(x),$$

$$s(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k(x).$$

换言之, 部分和序列 $s_n(x)$ 是一致收敛序列. 一致收敛级数的定义与下述条件等价:

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in X}|r_n(x)|=0,$$

它表示级数 (1) 的余项序列

$$r_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k(x),\ n=1,\ 2,\ \cdots,$$

在 $X$ 中**一致收敛** (uniform convergence) 于零.

例. 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=e^z$$

在复平面的每个有界圆盘上一致收敛, 但在整个 $\mathbf{C}$ 上不一致收敛.

级数一致收敛的 **Cauchy 准则** (Cauchy criterion) 给出了级数 (1) 在 $X$ 中一致收敛的条件 (不用级数的和). 级数一致收敛的充分条件由 **Weierstrass 准则 (关于一致收敛的)** (Weierstrass criterion (for uniform convergence)) 给出.

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 称为在集合 $X$ 中正则收敛 (re-

gularly convergent)，如果存在收敛的数值级数 $\sum \alpha_n$ ($\alpha_n \geqslant 0$)，使得对所有 $n=1, 2, \cdots$ 及所有 $x \in X$，

$$|a_n(x)| \leqslant \alpha_n,$$

即(1)满足一致收敛 Weierstrass 准则的条件．这个准则较强的结果是，$X$ 中正则收敛级数在该集合中一致收敛．其逆一般不成立；然而，对 $X$ 中一致收敛的任意级数，将其项逐次组合成为有限个组后所得级数，在 $X$ 中正则收敛．

有些关于级数一致收敛的准则类似于数项级数收敛的 Dirichlet 准则及 Abel 准则．一致收敛的这些判别法，最先出现在 G. H. Hardy 的论文中．若级数

$$\sum a_n(x) b_n(x) \tag{2}$$

中函数 $a_n(x)$ 与 $b_n(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$ 定义在 $X$ 上，序列 $\{a_n(x)\}$ 对每个 $x \in X$ 单调，且在 $X$ 中一致收敛于零，$\sum b_n(x)$ 的部分和序列 $\{B_n(x)\}$ 在 $X$ 中一致有界，则(2)在这个集合中一致收敛．

若序列 $\{a_n(x)\}$ 在 $X$ 中一致有界，且对于每个固定的 $x \in X$ 单调，级数 $\sum b_n(x)$ 在 $X$ 中一致收敛，则(2)也在 $X$ 中一致收敛．

**一致收敛级数的性质．**若两个级数 $\sum a_n(x)$，$\sum b_n(x)$ 在 $X$ 中一致收敛，$\lambda, \mu \in \mathbf{C}$，则级数

$$\sum \lambda a_n(x) + \mu b_n(x)$$

也在 $X$ 中一致收敛．

若级数 $\sum a_n(x)$ 在 $X$ 中一致收敛，$b(x)$ 在 $X$ 中有界，则 $\sum b(x) a_n(x)$ 也在 $X$ 中一致收敛．

级数和的连续性(continuity of the sum of a series)．在函数级数和的研究中，也使用"一致收敛的点"这个概念．设 $X$ 是拓扑空间，级数(1)在 $X$ 中收敛．点 $x_0 \in X$ 称为(1)的一致收敛的点(point of uniform convergence)，如果对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $x_0$ 的一个邻域 $U = U(x_0)$ 及数 $n_\varepsilon$，使得对所有 $x \in U$ 及所有 $n > n_\varepsilon$，不等式 $|r_n(x)| < \varepsilon$ 成立．

若 $X$ 是紧集，则级数(1)在 $X$ 中一致收敛的充要条件是每个点 $x \in X$ 都是一致收敛的点．

若 $X$ 是拓扑空间，级数(1)在 $X$ 中收敛，$x_0$ 是(1)的一致收敛的点，且有如下有限极限．

$$\lim_{x \to x_0} a_n(x) = c_n, \ n = 1, 2, \cdots,$$

则数值级数 $\sum c_n$ 收敛，(1)的和 $s(x)$ 当 $x \to x_0$ 时有极限，同时

$$\lim_{x \to x_0} s(x) = \lim_{x \to x_0} a_n(x) = \sum c_n. \tag{3}$$

即在对于(1)的假定下，可以按公式(3)的意义逐项取极限．由此得出，若(1)在 $X$ 中收敛，且其项在一致收敛的点 $x_0 \in X$ 连续，则它的和也在该点连续：

$$\lim_{x \to x_0} s(x) = \sum \lim_{x \to x_0} a_n(x) = \sum a_n(x_0) = s(x_0).$$

因此，若连续函数的级数在拓扑空间中一致收敛，则它的和在该空间连续．当 $X$ 是紧统且(1)的项在 $X$ 中非负时，(1)的一致收敛也是和在 $X$ 中连续性的必要条件(见 **Dini 定理**(Dini theorem))．

一般情况下，若级数(1)在拓扑空间 $X$ 中收敛，且所有项均在 $X$ 中连续，则级数(1)的和连续的充要条件是，部分和序列 $s_n(x)$ **伪一致收敛**(quasi-uniform convergence)于和 $s(x)$ (Arzelà-Александров 定理(Arzelà-Aleksandrov theorem))．

回答收敛函数级数(这些函数在一区间上连续)一致收敛的点存在性问题，是由 Osgood-Hobson 定理(Osgood-Hobson theorem)给出的：若(1)在区间 $[a, b]$ 中每一点收敛，项 $a_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则存在 $[a, b]$ 中级数(1)一致收敛的点的处处稠密集．由此得出，在某区间收敛的任何连续函数级数的和，在区间的一个稠密集上连续．与此同时，存在在区间中所有点都收敛的连续函数级数，其不一致收敛的点组成该区间中的一个处处稠密集．

一致收敛级数的逐项可积性．设 $X = [a, b]$．若级数

$$\sum a_n(x), \ x \in [a, b] \tag{4}$$

的项在 $[a, b]$ 上 Riemann (Lebesgue) 可积，且(4)在该区间中一致收敛，则其和 $s(x)$ 也在 $[a, b]$ 上 Riemann(Lebesgue)可积，且对任意 $x \in [a, b]$ 有等式

$$\int_a^x s(t) dt = \int_a^x [\sum a_n(t)] dt = \sum \int_a^x a_n(t) dt. \tag{5}$$

上式右端的级数在 $[a, b]$ 上一致收敛．

定理中，(4)在 $[a, b]$ 上一致收敛的条件不能用 $[a, b]$ 上收敛代替，因为有这样的级数，尽管各项是连续函数且有连续和，它在一个区间上收敛，但(5)不成立．与此同时有了各种推广．下面一些结果是对 **Stieltjes 积分**(Stieltjes integral)给出的．

若 $g(x)$ 是 $[a, b]$ 上的递增函数，$a_n(x)$ 是与 $g(x)$ 有关的可积函数，(4)在 $[a, b]$ 上一致收敛，则(4)的和 $s(x)$ 是与 $g(x)$ 有关的 Stieltjes 可积函数，

$$\int_a^x s(t) dg(t) = \sum \int_a^x a_n(t) dg(t).$$

上式右端级数在 $[a, b]$ 上一致收敛．

公式(5)可推广到多变量函数．

级数在一致收敛下逐项微分的条件．若(4)的项在$[a, b]$上连续可微，(4)在区间中某点收敛，(4)的各项导数的级数在$[a, b]$上一致收敛，则级数(4)本身在$[a, b]$上一致收敛，其和$s(x)$连续可微并且

$$\frac{d}{dx} s(x) = \frac{d}{dx} \sum a_n(x) = \sum \frac{d}{dx} a_n(x). \tag{6}$$

定理中，逐项微分所得级数在$[a, b]$上一致收敛的条件不能用收敛代替，因为存在连续可微函数的级数，它在一个区间上一致收敛，逐项微分得到的级数在区间上收敛，但是原级数的和在整个区间上或者不可微，或者虽可微但其导数不等于各项导数的级数之和．

这个方法要求级数有一致收敛的性质，许多方法要求绝对收敛(见**绝对收敛级数**(absolutely convergent series))，允许将关于有限和的一些运算法则移植到级数中：对于一致收敛——可逐项取极限，逐项积分和微分(见(3)－(6))，对于绝对收敛——可以排列级数项的次序而不改变和，级数可逐项相乘．

对于函数级数，绝对收敛的性质与一致收敛的性质互相独立．如级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n},$$

它的所有项非负，故在整个坐标轴上绝对收敛，而$x=0$显然不是一致收敛的点，因为它的和

$$s(x) = \begin{cases} 1+x^2, & 当\ x \neq 0, \\ 0, & 当\ x = 0, \end{cases}$$

在这一点不连续(尽管所有项都连续)．

级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{x^2+n}$$

在整个实数轴上一致收敛，但在任何点不绝对收敛．

参考文献见**级数**(series)．

Л. Д. Кудрявцев 撰　罗嵩龄 译

**一致最大功效检验**[**uniformly most-powerful test**; **равномерно наиболее мощный критерий**]

检定复合假设$H_0$对复合备选假设$H_1$的、具有给定**显著性水平**(significance level)的**统计检验**(statistical test)，其功效不低于检定$H_0$对$H_1$的同样显著性水平任何其他**统计检验的功效**(power of a statistical test)．

假设拟检定复合假设$H_0: \theta \in \Theta_0 \subset \Theta$对复合备选假设$H_1: \theta \in \Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$；给定第一类错误概率的上界$\alpha(0<\alpha<1)$：第一类错误是指在$H_0$本来成立的情形下被统计检验否定而犯的错误；$\alpha$称为检验的显著性水平(significance level of the test)，而称检验本身的水平为$\alpha$．这样，对第一类错误概率的约束，将检定$H_0$对$H_1$的所有统计检验的集合收缩为水平$\alpha$检验类．用**统计检验的功效函数**(power function of a test)$\beta(\theta)$ $(\theta \in \Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1)$，可将固定显著性水平$\alpha$的统计检验表示为

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} \beta(\theta) = \alpha.$$

如果在检定$H_0$和$H_1$的所有水平$\alpha$统计检验类中，存在这样的检验，其功效函数$\beta^*(\theta)$满足条件

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} \beta^*(\theta) = \alpha, \ \beta^*(\theta) \geq \beta(\theta), \ \theta \in \Theta_1,$$

其中$\beta(\theta)$是该类中其他任一检验的功效函数，则这样的检验称为检定$H_0$对$H_1$的水平$\alpha$一致最大功效检验(uniformly most-powerful test)．如果用检验的功效来衡量检验，则一致最大功效检验是最优检验．

**参考文献**

[1] Lehmann, E. L., Testing statistical hypotheses, Wiley, 1988.

М. С. Никулин 撰　周概容 译

**单峰分布**[**unimodal distribution** 或 single-peak distribution; **унимодальное распределение**]

直线上的**概率测度**(probability measure)，对某一实数$a$，其分布函数$F(x)$当$x<a$时为凸而当$x>a$时为凹，此时数$a$称为**众数**(mode)或峰值(peak)，一般而言不是唯一确定的；说得更精确些，一给定单峰分布的众数的集组成一个可能退化的闭区间．

单峰分布的例子包括**正态分布**(normal distribution)，**均匀分布**(uniform distribution)，**Cauchy 分布**(Cauchy distribution)，**Student 分布**(Student distribution)及$\chi^2$**分布**("chi-squared" distribution)．А. Я. Хинчин([1])得到了如下的单峰性准则(unimodality criterion)：函数$f$为一众数为0的单峰分布的**特征函数**(characteristic function)，其必要充分条件是

$$f(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \varphi(u)\,du, \ f(0) = 1,$$

其中$\varphi$是一个特征函数．用分布函数的语言，这个方程等价于

$$F(x) = \int_0^1 G\left(\frac{x}{u}\right) du,$$

其中$F$与$G$对应于$f$与$\varphi$．换句话说，$F$为众数在零点的单峰分布，当且仅当它是两个独立随机变量之

积，其中一个有 $[0, 1]$ 上的**均匀分布**(uniform distribution).

对于一个给定其特征函数的分布(例如**稳定分布**(stable distribution))，其单峰性的证明是一个困难的分析问题. 表示一个给定分布为单峰分布的极限这种似乎是自然的方法并不能达到此目的，因为一般两个单峰分布的卷积并不是单峰分布(虽然对于对称分布，单峰性在卷积下是保持的；而在一个长时期总认为一般也应是如此). 例如，如果 $F$ 是一个在 $5/6$ 处有大小为 $1/6$ 的原子及密度

$$p(x)=\begin{cases}1, & 0<x\leqslant 5/6,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

的分布，那么 $F$ 与其自身的卷积就有两个极大值. 因此引进了强单峰性的概念(见[2])；一个分布称为是强单峰的(strongly unimodal)，如果它与任何单峰分布的卷积仍是单峰的. 每个强单峰分布必是单峰的.

一个在点 $a+hk\ (k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots, h>0)$ 给定概率 $p_k$ 的**格点分布**(lattice distribution)称为单峰的，如果存在整数 $k_0$，使 $p_k$ 作为 $k$ 的函数当 $k\leqslant k_0$ 时是非减的，而当 $k\geqslant k_0$ 时是非增的. 单峰格点分布的例子有 **Poisson 分布**(Poisson distribution)，**二项分布**(binomial distribution)及**几何分布**(geometric distribution).

某些有关分布的结果在单峰性假设下可能得到加强. 例如，对于一个有单峰分布的随机变量 $\xi$，**Чебышев 不等式**(Chebyshev inequality)，可以改进为，对任何 $k>0$，

$$\mathrm{P}\{|\xi-x_0|\geqslant k\zeta\}\leqslant\frac{4}{9k^2},$$

其中 $x_0$ 为众数，$\zeta^2=\mathrm{E}(\xi-x_0)^2$.

**参考文献**

[1] Хинчин, А. Я., Об унимодальных распределениях, 《Изв. НИИ матем. и мех. ун-та》, Томск, **2** (1938), 2, 1-7.

[2] Ибрагимов, И. А., О композиции одновершинных распределений, 《Теор. вероятн. и ее примен.》, **1** (1956), 2, 283-288.

[3] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, 2, Wiley, 1957-1971.

Н. Г. Ушаков 撰

【补注】 一个非退化强单峰分布有一对数凹密度.

**参考文献**

[A1] Dharmadhikari, S., Yong-Dev, K., Unimodality, convexity, and applications, Acad. Press, 1988.

潘一民 译

**幺模元** [**unimodular element**; **унимодулярный элемент**]，幺模向量(unimodular vector)

【补注】 令 $R$ 是有 1 的环，$M$ 是右 $R$ 模. $M$ 的一个元素 $x$ 叫作幺模的，若 $\operatorname{ann}_R(x)=\{r\in R: xr=0\}=0$，且由 $x$ 生成的子模 $<x>$ 在 $M$ 中有一个补 $N$，即存在子模 $N\subset M$，使 $<x>\cap N=\{0\}$，$<x>+N=M$，从而 $<x>\oplus N=M$.

若 $M$ 是自由的，则 $M$ 基底中的元素是幺模的. 元素 $x\in M$ 是幺模的，当且仅当存在模同态 $\rho: M\to R$，使 $\rho(x)=1$. $R$ 上一个**幺模矩阵**(unimodular matrix)的行(或列)都是幺模的. 在**代数 $K$ 理论**(algebraic $K$-theory)中，一个重要的问题是其逆何时真(亦见**稳定秩**(stable rank)).

**参考文献**

[A1] Hahn, A. J. and O'Meara, O. T., The classical groups and $K$-theory, Springer, 1989, p 9, § 141 ff.

张英伯 译

**幺模群** [**unimodular group**; **унимодулярная группа**]

一个**拓扑群**(topological group)，它的左不变 **Haar 测度**(Haar measure)是右不变的(等价的说法是在变换 $a\mapsto a^{-1}$ 之下不变). 一个 Lie 群 $G$ 是幺模的，当且仅当

$$|\det \operatorname{Ad} g|=1\quad (g\in G),$$

这里 Ad 是**伴随表示**(adjoint representation). 对于一个连通 Lie 群 $G$ 来说，这就相当于要求 $\operatorname{tr} \operatorname{ad} x=0$ $(x\in\mathfrak{g})$，这里 ad 是 $G$ 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的伴随表示. 任意紧的，离散的或 Abel 局部紧的群以及任意连通的可简约或幂零 Lie 群都是幺模群.

Л. Л. Онищик 撰

【补注】 有时，比较不常用，幺模群这个词指的是一个环上的幺模矩阵(具有给定阶的)的群，即行列式是 1 的矩阵群，这个群通常称为"特殊线性群"，例如，见[A3].

**参考文献**

[A1] Reiter, H., Classical harmonic analysis and locally compact groups, Clarendon Press, 1968.

[A2] Bourbaki, N., Intégration, Eléments de mathématique, Hermann, 1963, Chap. 7.

[A3] Weyl, H., Classical groups, Princeton Univ. Press, 1946, p. 45.

郝钢新 译

**幺模格** [**unimodular lattice**; **унимодулярная решетка**]

【补注】 $\mathbf{R}^n$ 中适合 $\operatorname{vol}(\mathbf{R}^n|L)=1$ 的格 $L$. 如果 $a_1, \cdots, a_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的 $n$ 个向量，那么当且仅当 $|\det(a_1, \cdots, a_n)|=1$ 时 $a_1, \cdots, a_n$ 张成的格是幺模格. (因为 $\operatorname{vol}(\mathbf{R}^n|L(a_1, \cdots, a_n))=|\det(a_1, \cdots, a_n)|$).

**参考文献**

[A1] Milnor, J. and Husemoller, D., Symmetric bilinear forms, Springer, 1973, p. 16.

朱尧辰 译 戚鸣皋 校

**幺模矩阵** [**unimodular matrix**; **унимодулярная матрица**]

行列式是 ±1 的方阵. 当考虑交换环上的矩阵时, 所谓一个幺模矩阵往往理解为一个可逆矩阵.

О. А. Иванова 撰

【补注】 幺模矩阵也往往指的是其行列式为 1 的矩阵. 在任何意义上, 所有幺模矩阵对于乘法构成一个群. 亦见**幺模变换** (unimodular transformation).

蒋滋梅 译

**幺模变换** [**unimodular transformation**; **унимодулярное преобразование**]

有限维**向量空间** (vector space) 的一个**线性变换** (linear transformation), 其矩阵的行列式是 ±1.

О. А. Иванова 撰

【补注】名称"幺模变换"往往限定指行列式为 1 的线性变换. 在域 $k$ 上向量空间 $V$ 中取定一个 $k$ 基 $a_1$, $\cdots$, $a_n$, 这里 $k$ 是整环 $D$ 的商域, 在此情况下, 一个线性变换称为幺模的 (unimodular), 如果它关于基 $a_1, \cdots, a_n$ 的矩阵的元素在 $D$ 中, 并且其行列式是 $D$ 中的可逆元. 在每一种定义下, 所有幺模变换构成一个群. 在行列式是 1 的线性变换的情形下, 往往称这种群为**幺模群** (unimodular group), 或现在更一般地称为**特殊线性群** (special linear group).

蒋滋梅 译

**集合的并** [**union of sets**; **объединение**], 集合的和 (sum of sets)

集合 (族) 上的一种基本运算. 设 $\mathscr{X}$ 为某集族 (有穷或无穷), 则所有至少属于 $\mathscr{X}$ 中的一个集合的元素组成的汇集称作 $\mathscr{X}$ (中集合) 的并 (union), 个别时候也称作 $\mathscr{X}$ (中集合) 的和 (sum); 记为 $\bigcup\mathscr{X}$.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 在 $\mathscr{X}=\{A_\alpha: \alpha\in I\}$ 的情形, 并也记作 $\bigcup_\alpha A_\alpha$, $\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$, $\bigcup_{A\in\mathscr{X}}A$, 个别时候也记作 $\sum_\alpha A_\alpha$.

在 Zermelo-Fraenkel **集合论** (set theory) 公理系统中, 并集公理 (sum-set axiom) 的表述是集合的并仍是集合.

如果集 $A_\alpha$ 是互不相交的, 则在范畴 Set 中, 对象 $A_\alpha$ 的并就是这些对象在范畴意义下的和. 一般地, 对象 $X_\alpha$ 的和是不相交并 (disjoint union) $\amalg_\alpha X_\alpha=\{(x, \alpha): x\in X_\alpha\}$. 自然嵌入 $i_\alpha: X_\alpha\to\amalg_\alpha X_\alpha$ 由 $i_\alpha(x)=(x, \alpha)$ 给出. 于是 $\amalg X_\alpha$ 及 $i_\alpha, \alpha\in I$, 满足关于范畴和的泛性质 (universal property): 对每一映射族 $f_\alpha: X_\alpha\to Y$, 存在唯一的映射 $f: \amalg_\alpha X_\alpha\to Y$, 使得 $fi_\alpha=f_\alpha$.

参考文献

[A1] Kuratowski, K., Introduction to set theory and topology, Pergamon, 1961, p. 25 (译自法文).

赵希顺 译

**幂幺元** [**unipotent element**; **унипотентный элемент**]

**线性代数群** (linear algebraic group) $G$ 的元素 $g$, 它与其在 $G$ 中的 **Jordan 分解** (Jordan decomposition) 的幂幺部分 $g_u$ 相一致. 如果 $G$ 作为代数闭的基域 $K$ 上有限维向量空间 $V$ 的自同构群 GL($V$) 的闭子群实现, 那么幂幺元 $g$ 恰是满足 $(g-1)^n=0$, $n=\dim V$ 的元素, 或等价地, 关于 $V$ 的某一个基它的矩阵是主对角线全为 1 的上三角阵. $G$ 中所有幂幺元的集合 $U(G)$ 是 Zariski 拓扑闭的, 如果 $G$ 定义在子域 $k\subset K$ 上, 那么 $U(G)$ 也定义在 $k$ 上. 如果 $\operatorname{char} K=0$, 那么每个幂幺元 $g$ 的阶是无限的, 此时 $G$ 中含 $g$ 的最小代数子群是 1 维**幂幺群** (unipotent group). 然而如果 $\operatorname{char} K=p>0$, 那么对某个 $t\geqslant 0$, $g$ 有有限阶 $p^t$ 时, 它恰好就是幂幺元. 一个连通群不包含非平凡的幂幺元 $g\neq e$, 当且仅当它是个**代数环面** (algebraic torus).

非迷向性准则可以通过幂幺元给出, 见**非迷向群** (anisotropic group).

幂幺元在代数群和 Lie 群的**离散子群** (discrete subgroup) 理论中有重要作用. 在具有有限体积的非紧基本域的对称空间的运动的离散群 $\Gamma$ 中, 幂幺元的存在是研究这些群的结构及其基本域的重要工具, 见 [5]; 幂幺元在这样的 $\Gamma$ 中的存在性的证明见 [4].

簇 $U(G)$ 在群 $G$ 的内自同构下不变. 设 $G$ 是连通的和半单的, 则幂幺元的共轭类的数目是有限的, 且对每个单群 $G$ 的幂幺元的共轭类的数目 (及幂幺元的中心化子) 有一个完整的刻画, 见 [7]. 在典型群中, 这个刻画通过矩阵的 Jordan 形式得到, 见 [2]. 例如对群 $G=\mathrm{SL}_n(K)$, 在幂幺元的共轭类与把 $n$ 分成正整数 $m_i$, 使 $m_1\geqslant\cdots\geqslant m_s$ 的分划 $(m_1, \cdots, m_s)$ 之间有一个一一映射. 如果 $\lambda=(m_1, \cdots, m_s)$ 和 $\mu=(l_1, \cdots, l_t)$ 是 $n$ 的两个分划, 那么恰好当 $\sum_{i=1}^j m_i\geqslant\sum_{i=1}^j l_i$ 对所有的 $j$ 成立时, 对应于 $\mu$ 的类会在对应于 $\lambda$ 的闭包中. 对应于分划 $(m_1, \cdots, m_s)$ 的类 (作为代数簇) 的维数等于 $n^2-\sum_{ij}\min(m_i, m_j)$.

代数簇 $U(G)$ 的所有单点的集合形成幂幺元的一个共轭类——正则幂幺元 (regular unipotent element). 如果 $G$ 是单的, 那么簇 $U(G)$ 中奇异点的簇也包含一个幂幺元的 Zariski 开共轭类——次正则幂幺元 (subregular unipotent element). 关于簇 $U(G)$ 中奇异点的研究亦见 [6].

参考文献

[1] Borel, A., Linear algebraic groups, Springer, 1991.

[2] Borel, A. et al. (eds.), Seminar on algebraic groups and related finite groups, Lecture notes in math., 131, Springer, 1970.

[3] Humphreys, J. E., Linear algebraic groups, Springer, 1981.

[4] Каждан, Д. А., Маргулис, Г. А., 《Матем. сб.》, 75 (1968), 1, 163 – 168.

[5] Selberg, A., Recent developments in the theory of discontinuous groups of motions of symmetric spaces, in Proc. 15 Scand. Congress (Oslo, 1968), Lecture notes in math., Vol. 118, Springer, 1970, 99 – 120.

[6] Slodowy, P., Simple singularities and simple algebraic groups, Lecture notes in math., 815, Springer, 1980.

[7] Spaltenstein, N., Classes unipotentes et sousgroupes de Borel, Lecture notes in math., 946, Springer, 1982.

В. Л. Попов 撰

【补注】

**参考文献**

[A1] Springer, T. A., Linear algebraic groups, in W. Jäger, J. Moser and R. Remmert (eds.): Perspectives in Mathematics, Birkhauser, 1984, 455 – 496.

叶家琛 译

## 幂幺群 [unipotent group; унипотентная группа]

**线性代数群** (linear algebraic group) G 的**幂幺元** (unipotent element) 所成的子群 $U$. 如果 $G$ 等同于它在一个适当的有限维向量空间 $V$ 的自同构群 $GL(V)$ 中的同构嵌入的象，那么幂幺群是含在 $V$ 的所有幂幺自同构的集合

$$\{g\in GL(V):(1-g)^n=0\},\ n=\dim V,$$

内的一个子群. 取定 $V$ 的一个基，可把 $GL(V)$ 等同于一般线性群 $GL_n(K)$, 其中 $K$ 是代数闭的基域；于是线性群 $U$ 也称为幂幺群. 幂幺群的一个例子是 $GL_n(K)$ 中所有主对角线全为 1 的上三角阵的群 $U_n(K)$. 如果 $k$ 是 $K$ 的子域，$U$ 是 $GL_n(k)$ 的幂幺子群，那么 $U$ 在 $k$ 上共轭于 $U_n(k)$ 的一个子群. 特别，$U$ 的所有元素在 $V$ 中有一个公共的非零不动点，并且 $U$ 是一个幂零群. 这个定理证明了对不同的 $n$ 幂幺代数群恰是 $U_n(k)$ 的 Zariski 闭子群.

在任意的线性代数群 $H$ 中，存在唯一的连通正规幂幺子群 $R_u(H)$ (幂幺根 (unipotent radical)) 及约化商群 $H/R_u(H)$, 见**约化群** (reductive group). 这样，在某种程度上把对任意代数群的结构的研究归结为对约化群和幂幺群的结构的研究. 与约化群的情形相反，幂幺代数群的分类现在还不清楚.

幂幺代数群的每个子群和商群仍是幂幺的. 如果 char $K=0$, 那么 $U$ 总是连通的；而且指数映射 $\exp:\mathfrak{u}\to U$ 是代数簇的同构 (其中 $\mathfrak{u}$ 是 $U$ 的 Lie 代数). 如果 char $K=p>0$, 那么存在非连通的幂幺代数群，例如基域的加法群 $\mathbf{G}_a$ (它可以等同于 $U_2(K)$) 是一个 $p$ 群且包含一个有限幂幺群. 在连通幂幺群 $U$ 中存在正规子群的序列 $U=U_1\supset\cdots\supset U_s=\{e\}$ 使得每个商群 $U_i/U_{i+1}$ 是 1 维的. 每个连通 1 维幂幺代数群同构于 $\mathbf{G}_a$. 这样，对连通幂幺代数群的研究归结为型 $\mathbf{G}_a$ 的群的累次扩张的描述.

关于交换的幂幺代数群的知识要比一般情形多得多，见 [4]. 如果 char $K=0$, 那么交换幂幺代数群恰好是同构于 $\mathbf{G}_a\times\cdots\times\mathbf{G}_a$ 的代数群，其中同构 $\mathbf{G}_a\times\cdots\times\mathbf{G}_a\to U$ 由指数映射给出. 如果 char $K=p>0$, 那么连通交换幂幺代数群 $U$ 恰是连通交换代数 $p$ 群. 这时，$U$ 未必同构于 $\mathbf{G}_a\times\cdots\times\mathbf{G}_a$, 但它是同构的充分必要条件为 $g^p=e$ 对所有的 $g\in U$ 成立. 在一般情形下，$U$ **同源** (isogeny) 于某些特殊群 (所谓 Witt 群) 的积，见 [2].

如果 $H$ 和 $U$ 是连通幂幺代数群且 $H\subset U$, 那么簇 $U/H$ 同构于一个仿射空间. 仿射代数簇 $X$ 的自同构的幂幺代数群的任一轨道在 $X$ 中闭 ([5]).

**参考文献**

[1] Borel, A., Linear algebraic groups, Springer, 1991.

[2] Serre, J.-P., Groupes algébrique et corps des classes, Hermann, 1959.

[3] Humphreys, J. E., Linear algebraic groups, Springer, 1981.

[4] Kambayachi, T., Miyanishi, M. and Takeuchi, M., Unipotent algebraic groups, Springer, 1974.

[5] Steinberg, R., Conjugacy classes in algebraic groups, Springer, 1974.

В. Л. Попов 撰 叶家琛 译

## 幂幺矩阵 [unipotent matrix; унипотентная матрица]

环上的方阵 $A$, 具有性质 $A-I_n$ 是幂零的，即 $(A-I_n)^n=0$, 这里 $n$ 是 $A$ 的阶. 域上矩阵是幂幺的，当且仅当它的**特征多项式** (characteristic polynomial) 是 $(x-1)^n$.

矩阵群称为幂幺的 (unipotent), 若它的每个矩阵是幂幺的. $GL(n, F)$ 的任何幂幺子群在 $GL(n, F)$ 中共轭于特殊三角群的一个子群 (Kolchin 定理 (Kolchin theorem)), 这里 $F$ 是域. 该结论对除环上的幂幺群也成立，但要求除环的特征为零或大于某 $\gamma(n)$.

Д. А. Супруненко 撰 石生明 译 王 杰 校

## 解析函数的唯一性性质 [uniqueness properties of analytic functions; единственности свойства аналитических функций]

解析函数的一些性质，断言这些函数由它们在其定义域或其边界的某个子集上的值完全确定；在这里可区分内部唯一性性质和边界唯一性性质.

**内部唯一性性质**．设 $D$ 是复平面 $\mathbf{C}=\mathbf{C}^1$ 内的一个区域．对于 $D$ 上的全纯（即单值解析）函数的经典内部唯一性定理（interior uniqueness theorem）断言，如果 $D$ 内的两个全纯函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在某个集合 $E\subset D$ 上相同，而 $E$ 至少含有一个位于 $D$ 内的极限点，则在 $D$ 内处处有 $f(z)\equiv g(z)$．换言之，如果全纯函数 $f(z)$ 在一个集合 $E$ 上等于零，而 $E$ 至少含有一个位于 $D$ 内的极限点，则 $f(z)\equiv 0$．解析函数的这一内部唯一性性质的证明表明，本质上这是单复变量幂级数的唯一性性质．对于 $D$ 内的亚纯函数 $f(z)$ 和 $g(z)$，如果把 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的极点看作函数取 $\infty$ 值的点，则唯一性性质仍然成立．

特别地，如果两个解析函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在某个点的任意小邻域内或某条连续曲线的任意小弧段上相同，则 $f(z)\equiv g(z)$．另一推论：解析函数 $f(z)$ 的 $A$ 点（$A$-point）即使得 $f(z)=A$ 的点 $z$ 的集合（假定 $f(z)\not\equiv A$）在其定义域 $D$ 内不可能有极限点．

Weierstrass 意义下的**完全解析函数**（complete analytic function）$F(z)$，$G(z)$ 一般是多值的，它们有下述唯一性性质：设 $f(z)$，$g(z)$ 是 $F(z)$，$G(z)$ 的分别定义于区域 $D_1$，$D_2$ 内的单值元素或分支，$D_1\cap D_2\neq\Phi$；如果 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在某个集合 $E\subset D_1\cap D_2$ 上相同，而 $E$ 至少有一个极限点 $z_0\in D_1\cap D_2$，则 $F(z)$ 和 $G(z)$ 具有相同的存在域且作为完全解析函数处处相同．

这些唯一性性质的表述不能照搬到多复变量 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ $(n>1)$ 的函数 $f(z)$ 的情形．例如，解析函数 $f(z)=z_1z_2$ 不恒等于零，但在复 $n-1$ 维解析平面 $z_1=0$ 和 $z_2=0$ 上都等于零．对于这样的函数成立下列唯一性性质：

1）如果 $f(z)$ 是复空间 $\mathbf{C}^n$ 的区域 $D$ 上的解析函数，且在某个非空开子集 $U\subset D$ 的所有点处等于零，则在 $D$ 上 $f(z)\equiv 0$．

2）如果 $f(z)$ 是区域 $D\subset\mathbf{C}^n$ 上的解析函数，它连同其偏导数 $\partial^k f/\partial z_1^{k_1}\cdots\partial z_n^{k_n}$ $(k=k_1+\cdots+k_n;\ k_j=0,1,\cdots;\ j=1,\cdots,n)$ 在某点 $z^0\in D$ 处均等于零，则在 $D$ 上 $f(z)\equiv 0$．

3）如果 $f(z)$ 是区域 $D\subset\mathbf{C}^n$ 上的解析函数，并在点 $z^0=x^0+iy^0\in D$ 的一个实邻域 $U_0$ 即在一个集合 $U_0=\{z=x+iy\in\mathbf{C}^n:|x-x^0|<r,\ y=y^0\}$ 上等于零，则在 $D$ 上 $f(z)\equiv 0$．

$n=1$ 与 $n>1$ 两种情形下内部唯一性性质之间的差别来自一元与多元幂级数的不同性态．

**边界唯一性性质**．上述关于单复变量解析函数 $f(z)$ 的唯一性定理可以有下述情形的几种推广，即 $f(z)$ 的零点不是位于解析性区域 $D$ 的内部，而是位于 $D$ 的边界 $\Gamma$ 上．最一般、最深刻的边界唯一性定理是由 Н．Н．Лузин 和 И．И．Привалов 于 1925 年得到的（亦见 **Лузин - Привалов 定理**（Luzin - Privalov theorem））．设 $D$ 是 $z$ 平面上由可求长曲线 $\Gamma$ 所围的区域，$f(z)$ 是 $D$ 内的亚纯函数．再设 $\zeta_0$ 是 $\Gamma$ 上存在切线的一个点；可求长曲线上几乎所有点都具有这一性质．称 $f(z)$ 在 $\zeta_0$ 处具有角边界值（angular boundary value）$A$，如果当 $z$ 保持位于区域 $D$ 与以 $\zeta_0$ 为顶点、以 $\Gamma$ 在 $\zeta_0$ 处的法线为分角线的任一小于 $\pi$ 的角的内部之交中趋于 $\zeta_0$ 时 $f(z)$ 趋向于 $A$．

下述 Лузин - Привалов 关于角边界值的边界唯一性定理（Luzin - Privalov boundary uniqueness theorem）成立：如果 $f(z)$ 在由可求长曲线 $\Gamma$ 所围的区域 $D$ 内亚纯，且在一正 Lebesgue 测度集 $E\subset\Gamma$ 上取零角边界值，则 $f(z)\equiv 0$．一般地说，亚纯函数在 $\Gamma$ 上不一定有边界值；但对相当大的一类亚纯函数，例如对**有界特征函数**（function of bounded characteristic），已证明在 $\Gamma$ 上几乎处处存在角边值．

与此相联，存在单位圆盘 $D$ 内的有界解析函数，它在单位圆周 $\Gamma$ 的一个给定的零测度集 $E$ 上按各种意义趋于零但在 $D$ 内不恒等于零．Лузин 和 Привалов 还进一步构造出单位圆盘 $D$ 内不恒等于零的解析函数的例子，它们在一个全测度集（即测度为 $2\pi$ 的集合）$E\subset\Gamma$ 上具有零径向边界值（radial boundary value）．结果表明，集合的 Baire 范畴概念在唯一性问题中也很重要．事实上，有一条关于径向边界值的 Лузин-Привалов 边界唯一性定理（Luzin-Privalov boundary uniqueness theorem）：如果函数 $f(z)$ 在单位圆盘 $D$ 内亚纯，在位于单位圆周 $\Gamma$ 的弧 $\sigma$ 上的一个集合 $E$ 上具有零径向边界值，且 $E$ 在 $\sigma$ 中为度量稠密并为第二 Baire 范畴，则 $f(z)\equiv 0$．（集合 $E$ 称为在 $\sigma$ 中为度量稠密（metrically dense），如果 $E$ 与 $\sigma$ 的任一子弧之交具有正测度．）

亦见**解析函数的边界性质**（boundary properties of analytic functions）；**极限集**（limit set）．

对于多复变量解析函数边界唯一性性质的研究还没有达到与单变量函数相同程度的完全性（见 [5]，[6]）．

**参考文献**

[1] Маркушевич，А．И．，Теория аналитических функций，2 изд．，т．1，М．，1967，гл．3（中译本：A．И．马库雪维奇，解析函数论，高等教育出版社，1957，第三章）．

[2] Шабат，Б．В．，Введение в комплексный анализ，М．，1969，ч．1，гл．2，ч．2，гл．1 и сл．（第二卷英译本：Shabat，B．V．，Introduction to complex analysis，Part Ⅱ Functions of several variables，Amer．Math．Soc．，1992）．

[3] Привалов，И．И．，Граничные свойства аналити-

ческих функций, 2 изд., М.-Л., 1950 (中译本: И И 普里瓦洛夫, 解析函数的边界性质, 科学出版社, 1956)

[4] Collingwood, E. F., Lohwater, A. J., The theory of cluster sets, Cambridge Univ. Press, 1966.

[5] Rudin, W., Function theory in the polydisc, Benjamin, 1969

[6] Хенкин, Г. М., Чирка, Е. М., 载于 Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 4, М., 1975, 13 - 142 (英译本: Henkin, G. M. [G. M. Khenkin], Čirka, E. M. [E. M. Chirka], Boundary properties of holomorphic functions of several complex variables, *J. Soviet Math.*, 5 (1976), 612 - 687).

[7] Rudin, W., Function theory in the unit ball of $C^n$, Springer, 1980.

[8] Koosis, P., Introduction to $H_p$ Spaces, Cambridge Univ. Press, 1980.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 类似于 Лузин 和 Привалов 的不恒等于零几乎处处具有零径向边值的全纯函数的例子, 也已对 $\mathbf{C}^n$ 中的单位球作出, 见 [A1].

**参考文献**

[A1] Hakim, M., Sibony, N., Boundary properties of holomorphic functions in the ball in $\mathbf{C}^n$, *Math. Ann.*, 276 (1987), 549 - 555.

沈永欢 译

**唯一性集** [**uniqueness set**; **единственности множество**], $U$ 集 ($U$-set)

具有如下性质的集合 $E \subset [0, 2\pi]$: 如果一个三角级数 (trigonometric series) 在 $(0, 2\pi) \setminus E$ 的每一点上都收敛到零, 则它必为零级数. 不是 $U$ 集的集合称为非唯一性集 (set of non-uniqueness) 或 $M$ 集 ($M$-set). 这些概念与函数用可能除了给定集 $E$ 以外处处收敛到它的三角级数表示的唯一性问题有关. G. Cantor (1872) 证明有限集 (包括空集) 是唯一性集, 将这一结果推广到无穷集的企图导致他创立了集合论 (set theory).

具有正 **Lebesgue 测度** (Lebesgue measure) 的集合都是 $M$ 集. 任意可数集都是 $U$ 集. 在零测度的完满集 (perfect set) 中, 既有 $M$ 集 (Д. Е. Меньшов, 1916), 也有 $U$ 集 (Н. К. Бари, 1921); 例如, 以有理常数比 $\theta$ 构造的 **Cantor 集** (Cantor set) 是 $U$ 集, 当且仅当 $1/\theta$ 是整数, 也就是说, 一个数集是 $U$ 集还是 $M$ 集, 依赖于组成该集的数的算术性质. 但是, 存在满测度集 $E \subset [0, 2\pi]$ (所谓的 $U(\varepsilon)$ 集 ($U(\varepsilon)$-set)), 如果一个三角级数在 $[0, 2\pi] \setminus E$ 的每一点上都收敛到零而且它的系数是 $O(\varepsilon_n)$ ($\varepsilon_n \downarrow 0$), 则它必是零级数.

$U$ 集和 $M$ 集的概念能被推广到 Fourier - Stieltjes 级数.

**参考文献**

[1] Бари, Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961 (英译本: Bary, N. K. [N. K. Bari], A treatise on trigonometric series, Pergamon, 1964).

[2] Zygmund, A., Trigonometric series, 1 - 2, Cambridge Univ. Press, 1988.

[3] Бари, Н. К., 《Успехи матем. наук》, 4 (1949), 3 - 68.

В Ф Емельянов 撰

【补注】 $M$ 集也称为多重性集 (set of multiplicity). 集合 $E \subset [0, 2\pi]$ 称为 $U_0$ 集 ($U_0$-set) 或推广唯一性集 (set of extended uniqueness), 如果一个 **Fourier-Stieltjes 级数** (Fourier-Stieltjes series) 在 $(0, 2\pi] \setminus E$ 的每一点上都收敛到零, 则它必为零级数. 不是 $U_0$ 集的集合称为 $M_0$ 集 ($M_0$-set) 或者限制多重性集 (set of restricted multiplicity). 集合 $E$ 是 $U_0$ 集, 当且仅当它不支持非零 Rajchman 测度 (Rajchman measure), 即, 其 Fourier - Stieltjes 系数在无穷远处趋于零的测度. 在现代理论中, $U_0$ 集的作用比 $U$ 集更显突出. 1983 年, R. Lyons 证明了: Rajchman 测度恰好是零化所有 $U_0$ 集的测度. 在 [A1] - [A3] 中给出了更多的结果, 例如将唯一性集与 Helson 集 (Helson set) 以及谱综合集 (set of spectral synthesis) (参见**抽象调和分析** (harmonic analysis, abstract)) 联系起来.

考虑长度为 $l$ 的闭区间 $[x, x+l]$. 设 $\alpha(1), \cdots, \alpha(d)$ $(0 \leqslant \alpha(1) < \alpha(2) < \cdots < \alpha(d) < 1)$ 是 $d$ 个数并考虑 $d$ 个闭区间 $[x + \alpha(j)l,\ x + \alpha(j)l + \eta]$, 其中的 $\eta$ 足够小, 使得这些区间互不相交. 只保留这些区间 (并将剩余的区间去掉). 这一过程称为作型为

$$[d;\ \alpha(1), \cdots, \alpha(d);\ \eta]$$

的剖分. 现在, 从任意一个长度为 $m$ 的区间出发, 作型为 $[d_1;\ \alpha_1(1), \cdots, \alpha_1(d_1);\ \eta_1]$ 的剖分, 然后在得到的每一个小区间上作型为 $[d_2;\ \alpha_2(1), \cdots, \alpha_2(d_2);\ \eta_2]$ 的剖分, 并且继续作下去. 在作了 $p$ 次之后, 得到 $d_1 \cdots d_p$ 个区间, 每一个区间的长度是 $\eta_1 \cdots \eta_p m$, 而且当 $p \to \infty$ 时, 最终得到一个测度为 $m \lim_p d_1 \cdots d_p \eta_1 \cdots \eta_p$ (极限存在) 的闭集 $P$. 如果对所有的 $p$ 有 $d_p \geqslant 2$, 则最终得到的 $P$ 是一个无处稠密的**完满集** (perfect set). 如果对所有的 $p$ 令 $d_p = 2$, $\alpha_p(1) = 0$, $\alpha_p(2) = 2/3$ 及 $\eta_p = 1/3$, 则得到 **Cantor 集** (Cantor set). 逐次作型为 $[2;\ 0, 1 - \xi_k, \xi_k]$ 的剖分, 则得到所谓的 Cantor 型集 (set of Cantor type). 如果对所有的 $k$ 取 $\xi_k = \xi$, 则得到 (剖分的) 常数比的 Cantor 型集 (set of Cantor type of constant ratio). 更详细的内容参见 [2] 中的第 194 页等.

**参考文献**

[A1] Graham, C. C. and McGehee, O. C., Essays in

commutative harmonic analysis, Springer, 1979.

[A2] Kahane, J.-P., Séries de Fourier absolument convergentes. Springer, 1970.

[A3] Kechris, A. S. and Louveau, A., Descriptive set theory and the structure of sets of uniqueness, Cambridge Univ. Press, 1987. 朱学贤 译 刘和平 校

**单有理簇 [unirational variety; унирациональное многообразие]**

域 $k$ 上代数簇 (algebraic variety) $X$, 存在射影空间到 $X$ 的有理映射 $\varphi: P^n \to X$ 使得 $\varphi(P^n)$ 在 $X$ 内稠密且其有理函数域的扩张 $k(P^n)/k(X)$ 是可分的. 换句话说, $k(X)$ 有一个可分扩域它是纯超越的 (见超越扩张 (transcendental extension)).

单有理簇很接近有理簇 (rational variety), 例如在单有理簇上不存在正则微分形式, $H^0(X, \Omega_X^p)=0$ 时 $p \geqslant 1$. 有理与单有理簇是否一致的问题称为 Lüroth 问题 (Lüroth problem), 其回答是否定的.

**参考文献**

[1] Шафаревич, И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972.

Вик. С. Куликов 撰 陈志杰 译

**单列环 [uniserial ring; однорядное кольцо]**

一个环, 它的每个不可分解单侧理想有唯一的合成列, 并且, 它分解成准素环的直和. 略去后一要求便导致广义单列环 (generalized uniserial ring) 的定义, 也称为列环 (serial ring). 每个广义单列环同时是左和右的半链环. 见半链模 (semi-chain module); 半链环 (semi-chain ring). 广义单列环上的每个模分解成循环子模的直和. 一个环是广义单列环, 当且仅当环上所有左模是半链模. 单列环的一个例子是除环上的上三角矩阵环.

Л. А. Скорняков 撰 裴传仁 译

**单位, 单位元 [unit; единица]**, 亦称幺元 (identity)

1) 最小的自然数 (natural number): 1. 任何数乘以 1 仍得原数.

2) 集合 $M$ 中一个元素 $e$ 称做关于定义在 $M$ 上的二元运算 $\star$ 的左 (右) 单位元 (left (right) unit) 或左 (右) 幺元 (left (right) identity), 如果下列方程对任何 $a\in M$ 成立:

$$e \star a=a(a\star e=a).$$

如果至少存在一个左单位元并且至少存在一个右单位元, 那么它们相重合因而不再存在其他的单位元. 如果在 $M$ 上定义了多于一个的二元运算 (例如环中的加法和乘法), 那么术语 "单位" 仅用于这些运算中的一个, 通常是用于乘法. 关于加法的 "单位元" 称做零元 (zero element).

3) 格的单位元 (unit of a lattice) 是它的最大元, 亦即关于 "交" 运算的幺元 (亦见格 (lattice)).

4) 在整环 $k$ 中, 任何可逆元 (invertible element), 亦即这样的元素 $\varepsilon$, 它有逆元 $\varepsilon^{-1}$, 使得 $\varepsilon\varepsilon^{-1}=1$, 称做单位元 (unit), 或单位因子 (divisor of unity). 一个整环中的单位元在乘法运算下形成一个群. 有时同样的术语也在环 $k$ 的分式域中保留使用 (这就是说, $k$ 中的单位元也称做分式域的单位元 (unit of the field of fractions)). 例如, 代数数域 $k$ 的单位元就是 $k$ 的代数整数环的单位元, $p$ 进单位元就是 $p$ 进整数环的单位元 (见 $p$ 进数 ($p$-adic number)), 等等.

5) 范畴 (category) 中一个对象 $X$ 的单位态射 (unit morphism) 或恒等态射 (identity morphism) 是 (唯一的) 态射 $1_X: X\to X$, 它满足 $1_X f=f$ 及 $g1_X=g$, 对所有 $f: Y\to X$ 及所有 $g: X\to Z$.

О. А. Иванова 撰

【补注】 在俄语中使用同一个词来翻译英语中的词 "unit" 及 "identity". 在英语中, 在上述 2) 和 5) 中词 "identity" 比词 "unit" 用得更普遍, 而在其余三个条目中词 "unit" 则更为通用.

测量或比较物品时的标准长度称为长度单位 (unit of length), 或简称单位. 更一般地, 各种物品当它的主要参数之一等于单位长, 则将它称做 "单位物品", 例如单位向量 (unit vector), 单位圆 (unit circle), 单位圆盘 (unit disc), 单位立方体 (unit cube), 单位 $n$ 立方体 (unit $n$-cube), 单位球面 (unit sphere), 单位球 (unit ball), 单位 $n$ 球 (unit $n$-ball) 或单位胞腔 (unit cell), 等等.

朱尧辰 译 戚鸣皋 校

**单位除子 [unit divisor; делитель единицы]**

环 (具有单位元素 1) 中的一个元素 $a$, 它有逆 (inverse), 即使得 $ab=ba=1$ 的元素 $b$. 在代数数论和代数函数论中这样的元素也称作单位 (units).

О. А. Иванова 撰

【补注】 短语幺元的除子 (divisor of unity) 或可逆元素 (invertible element) 也用于此概念. 赵春来 译

**单位表示 [unit representation; единичное представление]**

群 $G$ 的一维表示, 它把 $G$ 的每个元素映到 1. 更一般地, 群 $G$ 在向量空间 $E$ 中的单位表示是把 $G$ 的每个元素都映到 $E$ 中恒等算子的表示. 单位表示有时也称为平凡表示 (trivial representation).

А. И. Штерн 撰 石生明 译 王 杰 校

**单位向量 [unit vector; единичный вектор]**

一个向量（vector），其长度等于选定尺度的单位．

**酉等价算子 [unitarily-equivalent operators; унитарно эквивалентные операторы]**

作用在一个 Hilbert 空间上分别具有定义域 $D_A$ 和 $D_B$ 的两个线性算子 $A$ 和 $B$，使得：1) $UD_A = D_B$；且 2) $UAU^{-1}x = Bx$ 对任何 $x\in D_B$，其中 $U$ 是一个**酉算子**（unitary operator）．如果 $A$ 和 $B$ 是有界线性算子，则 1) 可以省略．如果 $A$ 是一个**自伴算子**（self-adjoint operator），则 $B$ 也是这样；如果 $A$ 和 $B$ 是有界算子，则 $\|A\| = \|B\|$．

自伴酉等价算子有酉等价的谱函数，即 $E_\lambda(B) = UE_\lambda(A)U^{-1}$．所以酉等价算子的谱有同样的结构：或者两者都是纯点谱，或者两者都是纯连续谱，或者两者都是混合谱．特别地，在纯点谱的情形酉等价算子的本征值是相同的且对应本征值的重数一致；此外，对具有纯点谱的酉等价算子这不仅是必要条件而且是充分条件．

在复空间 $L_2(-\infty, \infty)$ 中酉等价算子对的例子是具有由 $(-\infty, \infty)$ 上绝对连续且在这区间上有平方可和导数的所有函数组成的定义域 $D_A$ 上的微分算子 $Ax = i dx/dt$ 和用自变量相乘的算子 $Bx = tx(t)$．在这情形实现酉等价的酉算子是 **Fourier 变换**（Fourier transform）．

**参考文献**


[1] Ахиезер, Н. И., Глазман, И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 2 изд., М., 1966（英译本：Akhiezer, N. I. and Glazman, I. M., Theory of linear operators in Hilbert space, 1－2, Pitman, 1980）

[2] Люстерник, Л. А., Соболев, В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965（中译本：Л. А. 刘斯铁尔尼克，В. И. 索伯列夫，泛函分析概念，第二版，科学出版社，1985）．

[3] Riesz, F. and Szökefalvi-Nagy, B., Functional analysis, F. Ungar, 1955（译自法文）（中译本：F. 黎茨，B. 塞克佛尔唯－纳吉，泛函分析讲义，科学出版社，第一卷，1963，第二卷，1980）．


В. И. Соболев 撰

【补注】 对非自伴算子，特征算子函数提供了辨识酉等价算子类的一个工具．见 [3] 和 [A1]．

**参考文献**


[A1] Brodskiĭ, M. S., Triangular and Jordan representations of linear operators, Amer. Math. Soc., 1971.


葛显良 译 吴绍平 校

**酉等价表示 [unitarily-equivalent representations; унитарно эквивалентные представления]**

群（代数，环，半群）$X$ 在 Hilbert 空间 $H_1$，$H_2$ 中的表示（见**群的表示**（representation of a group））$\pi_1$，$\pi_2$，满足条件

$$U\pi_1(x) = \pi_2(x)U,$$

其中 $U$ 是 $H_1 \to H_2$ 的某**酉算子**（unitary operator），且上式对所有 $x\in X$ 成立．见**交结算子**（intertwining operator）．

А. И. Штерн 撰 石生明 译 王 杰 校

**酉群 [unitary group; унитарная группа]**，相对于型 $f$ 的

除环 $K$ 上 $n$ 维右向量空间 $V$ 中所有线性变换 $\varphi$ 的群 $U_n(K, f)$，$\varphi$ 须保持 $V$ 中一个固定的非奇异半线性（对于 $K$ 上的对合 $J$）型 $f$，即 $\varphi$ 满足

$$f(\varphi(v), \varphi(u)) = f(v, u), v, u\in V.$$

酉群是**典型群**（classical group）．酉群的特殊情形是**辛群**（symplectic group）（这时 $K$ 是域，$J = 1$ 且 $f$ 是交错**双线性型**（bilinear form））及**正交群**（orthogonal group）（$K$ 是域，char $K\neq 2$，$J = 1$ 且 $f$ 是对称双线性型）．下面假设 $J\neq 1$ 及 $f$ 具有性质 $(T)$（见 **Witt 定理**（Witt theorem））．用适当标量乘以 $f$，在不改变酉群的情形下能使 $f$ 成为 Hermite 型，进而改变 $J$ 就可使 $f$ 成为斜 Hermite 型．

如果排除 $n = 2$，$K = F_4$ 的情形，则 $U_n(K, f)$ 中每个元素都可写成至多 $n + 1$ 个伪反射（pseudo-reflections）（即固定 $V$ 中某非迷向超平面的所有元素的变换）的乘积．$U_n(K, f)$ 的中心 $Z_n$ 由 $V$ 的形式为 $x\mapsto x\gamma$，$\gamma\in K$，$\gamma^J\gamma = 1$，的全部位似所组成．

令 $\nu$ 是型 $f$ 的 Witt 指数．若 $\nu\neq 0$，取 $f$ 为斜 Hermite 型是方便的．令 $T_n(K, f)$ 是 $U_n(K, f)$ 的由酉平延（unitary transvection）所生成的正规子群．所谓酉平延是形为 $x\mapsto x + a\lambda f(a, x)$ 的线性变换，其中 $a$ 是 $V$ 中的迷向向量，$\lambda\in S = \{\gamma\in K | \gamma^J = \gamma\}$．群 $T_n(K, f)$ 的中心是 $W_n = T_n(K, f)\cap Z_n$．当 $K\neq F_4$，$F_9$ 且 $n\geqslant 2$ 时，商群 $T_n(K, f)/W_n$ 是单群．商群 $U_n(K, f)/T_n(K, f)$ 的构造可描述如下．令 $\Sigma$ 是 $K$ 的乘法群 $K^*$ 的由 $K^*\cap S$ 生成的子群，令 $\Omega$ 是 $K^*$ 的由具有下面性质的元素 $\lambda\in K^*$ 生成的子群：在 $V$ 中存在双曲平面（hyperbolic plane）（即包含迷向向量的非迷向二维子空间）使得对正交于给定平面的某向量 $v\in V$ 有 $f(v, v) = \lambda - \lambda^J$．该子群在 $K^*$ 中正规．令 $[K^*, \Omega]$ 是 $K^*$ 的由换位子 $\lambda w\lambda^{-1}w^{-1}$，$\lambda\in K^*$，$w\in\Omega$，生成的子群．若排除 $n = 3$，$K = F_4$ 的情形，则当 $n\geqslant 2$ 时，$U_n(K, f)/T_n(K, f)$ 同构于 $K^*/\Sigma[K^*, \Omega]$．

在很多情形下，群 $T_n(K, f)$ 与 $U_n(K, f)$ 的换

位子群重合；例如当 $\nu \geqslant 2$ 时就是如此．若 $K$ 是交换的且 $n \geqslant 2$，则 $T_n(K, f)$ 与 **Dieudonné 行列式**（见行列式（determinant））等于 1 的所有元素组成的正规子群 $U_n'(K, f)$ 重合（除去 $n=3$，$K=\mathbf{F}_4$ 的情形）．当除环 $K$ 在其中心上是有限维的情形，[1] 研究了 $U_n(K, f)$ 和 $T_n(K, f)$ 的关系．

现设 $\nu=0$，则所述的很多结果不再成立（有酉群的例子，它有正规子群的无限列，其因子皆为 Abel 的，也存在 $n=2$ 的酉群使 $U_n^+(K, f)$ 与换位子群不重合，等等）．研究得最多的是在特征 $\neq 2$ 的局部紧的除环和代数数域的情形．

关于酉群自同构的基本结果之一如下（见[1]）：若 char $K \neq 2$ 且 $n \geqslant 3$，则酉群 $U_n(K, f)$ 的每个自同构具有形式 $\varphi(u)=\chi(u) g u g^{-1}$，$u \in U_n(K, f)$，其中 $\chi$ 是 $U_n(K, f)$ 到中心 $Z_n$ 中的同态，$g$ 是 $V$ 的酉半相似（unitary semi-similitude）（即 $V \to V$ 的满足条件 $f(g(x), g(y))=r_g(f(x, y))^\sigma$ 的一一对应的**半线性映射**（semi-linear mapping），其中 $x, y \in V$，$r_g \in K^*$，而 $\sigma$ 是 $K$ 的与 $g$ 相应的自同构）．若 $n$ 是偶数，$n \geqslant 6$，$K$ 是特征 $\neq 2$ 的域且 $\nu \geqslant 1$，则 $U_n^+(K, f)$ 的每个自同构由 $U_n(K, f)$ 的自同构所诱导．

若 $K=\mathbf{C}$，$J$ 是复共轭自同构且 Hermite 型 $f$ 是正定的，则酉群 $U_n(K, f)$ 用 $U_n$ 表示；它是实的紧连通 Lie 群，通常简称为酉群．在型 $f$ 是不定的情形，群 $U_n(\mathbf{C}, f)$ 通常称为伪酉（pseudo-unitary）群．适当选取 $V$ 的一个基，$U_n$ 与全体**酉矩阵**(unitary matrix）的群等同．这时群 $U_n^+(K, f)$ 称为特殊酉群（special unitary group）并记为 $\mathrm{SU}_n$．

**参考文献**

[1] Dieudonné, J., La géometrie des groupes classiques, Springer, 1963.

[2] Bourbaki, N., Algèbre, Eléments de mathématique, Hermann, 1952 – 1959, Chapts. 7 – 9.

[3] Dieudonné, J., On the automorphisms of classical groups, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **2** (1951).

[4] Weyl, H., The classical groups, their invariants and representations, Princeton Univ. Press, 1946.

[5] Théorie des algèbres de Lie, Topologie des groupes de Lie, Sem. S. Lie., 1. Univ. Paris, 1955.

[6] Залесский, А. Е., 《Успехи матем. наук》, **36** (1981), 5, 57 – 107.

В. Л. Попов 撰

【译注】

**参考文献**

[1] 华罗庚，万哲先，典型群，上海科学技术出版社，1963.

[2] Wan, Z. X., Some recent progress on classical group in China, *Contemporary mathemetics*, **82** (1987), 221 – 230.

石生明 译

**酉矩阵** [**unitary matrix**; **унитарная матрица**]

复数域 $\mathbf{C}$ 上的方阵 $A=\|a_{ik}\|_1^n$，它的所有行构成一个规范正交系，即

$$a_{i1}\bar{a}_{k1}+\cdots+a_{in}\bar{a}_{kn}=\begin{cases}1 & \text{对于 } i=k, \\ 0 & \text{对于 } i \neq k,\end{cases}$$

$i, k=1, \cdots, n$．在**酉空间**（unitary space）里，从一个规范正交基到另一个规范正交基的变换是由一个酉矩阵来实现的．**酉变换**（unitary transformation）关于一个规范正交基的矩阵也是（称为）一个酉矩阵．元素为复数的方阵 $A$ 是酉的，当且仅当它满足下列条件之一：

1) $A^* A=E$；

2) $A A^*=E$；

3) $A^*=A^{-1}$；

4) $A$ 的所有列构成一个规范正交系（这里 $A^*$ 是 $A$ 的共轭转置矩阵）．

酉矩阵的行列式是模为 1 的复数．

О. А. Иванова 撰

【补注】

[A1] Noll, W., Finite dimensional spaces, Nijhoff, 1987, 63.

[A2] Greub, W., Linear algebra, Springer, 1975, 329.

蒋滋梅 译

**幺模** [**unitary module** 或 unital module; **унитарный модуль**]，亦称单式模

含单位元 $e$ 的环上的左（或右）**模**（module）$M$，使得乘以 $e$ 的运算是恒等算子，即变换 $m \to em$（相应地，对右模 $m \to me$），$m \in M$，是群 $M$ 的恒等自同构．

О. А. Иванова 撰

【补注】 有人把“幺模”称为“酉模”，这会引起混乱，因为可能认为它是酉向量空间概念的某个模推广，见**酉空间**（unitary space）．

一个模是幺模的特性往往是包括在模的定义中，例如见[A3]．

**参考文献**

[A1] Cohn, P. M., Algebra, Wiley, 1991, 409.

[A2] Zariski, O. and Samuel, P., Commutative algebra, 1, v. Nostrand, 1958, 134.

[A3] Matsumura, H., Commutative ring theory, Cambridge Univ. Press, 7.

蒋滋梅 译

**酉算子** [**unitary operator**; **унитарный оператор**]

把赋范线性空间 $X$ 映到赋范线性空间 $Y$ 上的一个**线性算子**（linear operator）$U$ 使得 $\|Ux\|_Y=\|x\|_X$．最重要的酉算子是那些映一个 Hilbert 空间到自身上的，这样一个算子是酉算子，当且仅当对所有 $x, y \in X$，

$(x, y)=(Ux, Uy)$. 一个酉算子 $U: H \to H$ 的其他特征是: 1) $U^*U=UU^*=I$, 即 $U^{-1}=U^*$; 和 2) $U$ 的谱在单位圆周上且存在谱分解 $U=\int_0^{2\pi} e^{i\varphi} dE_\varphi$. 作用在 $H$ 上的酉算子的集合构成一个群.

空间 $L_2(-\infty, \infty)$ 上的酉算子及其逆的例子是 **Fourier 变换** (Fourier transform) 及其逆.

**参考文献**


[1] Riesz, F. and Szökefalvi-Nagy, B., Functional analysis, F. Ungar, 1955 (译自法文) (中译本: F. 黎茨, B. 塞克佛尔维-纳吉, 泛函分析讲义, 科学出版社, 第一卷, 1963, 第二卷, 1980).

[2] Ахиезер, Н. И., Глазман, И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 2 изд., М., 1966 (英译本: Akhiezer, N. I. and Glazman, I. M., Theory of linear operators in Hilbert space, 1, Pitman, 1980).

[3] Плеснер, А. И., Спектральная теория линейных операторов, М., 1965 (英译本: Plessner, A. I., Spectral theory of linear operators, F. Ungar, 1965).


В. И. Соболев 撰 葛显良 译 吴绍平 校

**酉表示** [**unitary representation**; **унитарное представление**], 拓扑群的

拓扑群通过一个 Hilbert 空间内**酉算子** (unitary operator) 的表示. 酉表示论是拓扑群表示论中最为发展的部分之一. 既联系着它的众多的应用又联系着它所具有的很多性质, 使得酉表示的研究变得容易. 就像是, 任意酉表示都是完全可约的; 对于酉表示来说, 完全不可约性, 张量不可约性, 拓扑不可约性, 和算子不可约性这几个条件是等价的; 由酉表示关于弱算子拓扑的连续性推出它关于强算子拓扑的连续性: 对于酉表示可以定义表示的张量积运算和过渡到反变表示的运算 (在 Hilbert 空间内这就是所给表示的复共轭), 并且对于直和运算, 张量积运算和过渡到反变表示运算来说, 很多自然的代数关系仍被保持.

酉表示一般理论中最高度发展和在应用上最为重要的部分就是局部紧群的酉表示. 还不存在对于如下这样群类的描述: 对于这样的群来说, 酉表示 (或不可约酉表示) 分离这个群的点 (1992). 然而, 如果群 $G$ 是局部紧的, 则对于每一个非单位元素 $g \in G$, 存在 $G$ 的一个不可约酉表示 $\pi$, 使得 $\pi(g)$ 是表示空间内的非恒等算子 (Гельфанд-Райков 定理 (Gel'fand-Raĭkov theorem)). 再者, 在群代数 $L_1(\dot{G})$ 的非退化对称表示 (带有左 Haar 测度构造的) 与群 $G$ 的连续酉表示之间存在一个自然的一一对应 $\pi' \to \pi$, 由以下公式所定义:

$$\pi'(f)=\int_G f(y)\pi(g)dm(g),\ f \in L_1(G);$$

而且, 代数 $L_1(G)$ 的表示 $\pi'$ 是拓扑不可约的 (一个商表示, 一个给定类型的表示, 一个与另一表示等价或拟等价的表示), 当且仅当这个群的对应的酉表示 $\pi$ 具有同样性质.

一个局部紧群 $G$ 的与 $L_1(G)$ 上正线性泛函理论有关的循环酉表示理论, 可以通过一个适当的球面函数来研究 (见**拓扑群的表示** (representation of a topological group)). 与一个局部紧群 $G$ 的酉表示相联系的**球面函数** (spherical function) 是这个群上的连续正定函数, 反之, $G$ 上在单位元处等于 1 的任意连续正定函数都是与一个循环酉表示相联系的球面函数 (并且是由这个酉表示的循环向量定义的). $G$ 上一切连续正定函数的线性组合的集合 $B(G)$ 形成一个交换 Banach 代数 (关于通常的乘法), 称为 $G$ 的 Fourier-Stieltjes 代数 (Fourier-Stieltjes algebra); $B(G)$ 中由形如 $\varphi^*\psi$ 的函数所生成的闭理想 $A(G)$ 称为 $G$ 的 Fourier 代数 (Fourier algebra), 这里 $\varphi, \psi \in L_2(G)$. Banach 代数 $A(G)$ 和 $B(G)$ 确切到一个同构或反同构范围内确定了群 $G$.

在 $G$ 的单位元处等于 1 的连续正定函数的集合 $P_1$ 上, 在 $G$ 的紧子集上一致收敛拓扑 (topology of uniform convergence) 与由 $L_1(G)$ 和 $L_\infty(G)$ 之间的对偶性和 $P_1$ 在 $L_\infty(G)$ 内的嵌入所定义的**弱拓扑** (weak topology) 一致. $P_1$ 内任意函数 $\varphi$ 都是一个与 $G$ 的不可约酉表示相联系的正定函数的凸组合的网的 (在这个拓扑内的) 极限; 如果 $G$ 还是一个可分群, 则在 $G$ 上连续正定函数的紧集上存在一个正测度 $\mu_\varphi$, 其绝对值不超过 1, 集中于 $P_1$ 上, 使得

$$\varphi(g)=\int_{P_1}\chi(g)d_{\mu_\varphi}(\chi)\ 对一切\ g \in G.$$

由正定函数构造酉表示可以推广到 $G$ 上正定测度的情形. 如果 $G$ 是一个可分群, 则任意被一个正定测度所定义的表示都是循环的.

令 $G$ 是一个局部紧群, $H$ 是一个 Hilbert 空间. 如果 $G$ 或 $H$ 是可分的, 则 $G$ 在 $H$ 内的酉表示可以分解成不可约酉表示的拓扑直积分 (对于非可分群和非可分空间来说, 一般不真). 而且, 在这一情形下, 酉表示 $\pi$ 容许一个本质上是唯一的被分解成商表示直积分的分解. 联系到这个事实, 对偶空间 (dual space) $\hat{G}$ ($G$ 的不可约酉表示空间对于酉表示的酉等价所定义的等价的商空间, 连同由在紧集上矩阵元素的一致收敛性所定义的拓扑和从属于这个拓扑的 Borel 结构一起考虑) 和拟对偶空间 (quasi-dual space) $\widetilde{G}$ ($G$ 的商表示空间的商空间, 连同从属于在紧集上矩阵元素的一致收敛性拓扑的 Borel 结构一起考虑) 扮演着重要角色. 这样, $\widetilde{G}$ 是一个拓扑空间和一个 Borel

空间、$\widetilde{G}$ 是一个 Borel 空间，对于一个可分群可以配备这个拓扑将这个拓扑开拓到 $\hat{G}$ 上．群 $G$ 称为 Ⅰ 型群（group of type Ⅰ），如果它所有的商表示都是 Ⅰ 型的；对于这种群来说，酉表示论中的问题可以比一般情形更为简单地解决．Ⅰ 型群包括代数 Lie 群和 $p$-adic 域上代数 Chevalley 群，幂零 Lie 群及其他．Ⅰ 型单连通可解 Lie 群的刻画已经知道．一个群 $G$ 称为一个 CCR 群，如果对于 $G$ 的任意不可约酉表示 $\pi$ 来说，在表示 $\widetilde{\pi}$ 之下的象 $\widetilde{\pi}(L_1(G))$ 被包含在表示 $\pi$ 的空间 $H_\pi$ 的紧算子集合 $\mathrm{BC}(H_\pi)$ 内．每一个 CCR 群都是 Ⅰ 型的．一个 Ⅰ 型群是 CCR 群，当且仅当它的对偶空间是 $T_1$ 空间．幂零 Lie 群和线性半单 Lie 群都是 CCR 群．对于 $G$ 的一切不可约酉表示 $\pi, \sigma$ 来说，表示 $(\pi\otimes\sigma)^{\wedge}$ 的象被包含在 $\mathrm{BC}(H_{\pi\otimes\sigma})$ 内，当且仅当所有不可约酉表示是有限维的．

一个可分局部紧群是 Ⅰ 型的，当且仅当它的对偶空间满足分离公理 $T_0$．这个谱的其他拓扑性质（$T_1$ 分离性，Hausdorff 性质，离散性及其他）也与这个群的性质有联系．群的拓扑和代数性质与其对偶空间之间的一个特别紧密的联系存在于满足各种紧性条件的群类中．在局部紧群的这些类中包括：1）极大殆周期群类[MAP]（可以连续地嵌入一个紧群内）；2）包含一个在内自同构之下不变的单位元的基本邻域组的群类[SIN]；3）具有准紧的共轭元素类的群类[FC]；4）具有准紧的内自同构群的群类[FIA]；5）一切不可约酉表示都是有限维的群类 $[\mathrm{FIR}]\subset[\mathrm{MAP}]\cap[\mathrm{SIN}]$；6）对其中心的商群是紧的群类 $[Z]\subset[\mathrm{FIR}]$．类[FC]的群的对偶空间是 Hausdorff 空间，而类[FIR]的群是离散的，当且仅当它的对偶空间是紧的（从而不需要可分）．类[MAP]的群的酉表示论与局部紧群上殆周期函数理论有联系．

一个局部紧群 $G$ 的酉表示的特征标（character of a unitary representation）是在由族 $\pi(G)$ 所生成的 **von Neumann 代数**（von Neumann algebra）$\mu_\pi$ 的正元素集合上的一一正规半有限迹 $t$（见 **C* 代数上的迹**（trace on a $C^*$-algebra）），使得 $G$ 的群 $C^*$ 代数 $C^*(G)$（群代数 $L_1(G)$ 的包络 $C^*$ 代数）的这样的元素 $x$ 的集合，对 $x$ 来说 $t(\pi(x^*, x))$ 是有限的，过渡到由 von Neumann 代数 $\pi(G)''$ 所生成的集合内．如果 $\pi$ 是一个商表示（或一个不可约酉表示），则特征标 $t$ 在一个拟等价（相应地，等价）范围内唯一地确定这个酉表示 $\pi$．如果 $\pi_1, \pi_2$ 是 $G$ 的不可约酉表示，分别有特征标 $t_1, t_2$，则它们迹的乘积在酉表示 $\pi_1\otimes\pi_2$ 所诱导的 von Neumann 代数上定义一个迹．如果这个迹是表示 $\pi_1\otimes\pi_2$ 的特征标，则（对可分群或可分表示空间来说）它定义了酉表示 $\pi_1\otimes\pi_2$ 分解成关于在拟谱群 $\widetilde{G}$ 上唯一确定的测度（对于 $\pi_1\otimes\pi_2$ 的 Plancherel 测度）的带有一个迹的商表示的直积分的分解．在酉表示的张量积上确定 Plancherel 测度是酉表示论中一般问题之一；在很多情形下（特别地，对于群 $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$, $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$，其他半单 Lie 群的某些酉表示和某些可解 Lie 群）这个问题已被解决（利用 Laplace 算子的谱分解，轨道方法或极限球面方法）．

有时把在一个 Hilbert 空间 $H$ 内的酉表示 $\pi$ 的特征标（character of a unitary representain）理解为 $M(G)$ 的一个平移不变的子代数 $D_\pi(G)$ 上的线性泛函 $\chi^\pi$，这个泛函由方程 $\chi^{\pi(a)}=\mathrm{Tr}\,\widetilde{\pi}(a)\,(a\in D_\pi(G))$ 定义，这里 $\widetilde{\pi}$ 是 $D_\pi(G)$ 的由 $\pi$ 所定义的表示（假定 $\pi$ 是由表示 $\widetilde{\pi}$ 唯一确定的，$\widetilde{\pi}$ 的算子是核算子并且代数 $D_\pi(G)$ 到核算子空间内的映射 $\widetilde{\pi}$ 是连续的）．半单 Lie 群和幂零 Lie 群的不可约酉表示的特征标是由广义函数定义的，在半单群的情形下是可测的，并且是局部可积的．Ⅰ 型可解 Lie 群的不可约酉表示的特征标已被定义，一般地说，只在 $G$ 上一个具有紧支集的无穷次可微函数代数 $C_0^\infty(G)$ 的一个子代数上．一般来说，特征标的计算基于诱导表示的特征标公式．

群 $G$ 的一个紧子群 $K$ 称为丰富的（rich）（或大的（massive）），如果 $G$ 的任意酉表示到 $K$ 的限制都含有 $K$ 的任意酉表示 $\sigma$ 有限次．令 $P_\sigma^\pi$ 是由表示 $\pi$ 的空间 $H$ 到 $K$ 的表示所作用的子空间上的射影算子，它是 $\sigma$ 的一个倍数；形如

$$\varphi_\sigma^\pi(g)=\mathrm{Tr}(P_\sigma^\pi\pi(g)),\ g\in G$$

的函数称为表示 $\pi$ 的 $K$ 球面函数（$K$-spherical function）（见**表示函数**（representation function））．具有一个丰富紧子群的群 $G$ 是 Ⅰ 型的；$G$ 的每一不可约酉表示有一个特征标，并且确切到等价的范围内由任意非零球面函数唯一确定；群 $G$ 的对偶空间 $\hat{G}$ 可以表示成可数个（相交的）局部紧 Hausdorff 空间的并集（描述这样的 $\pi\in\hat{G}$，它对于一个给定的 $\sigma\in\hat{K}_\pi$ 来说有 $\varphi_\sigma^\pi=0$，且对应的射影算子 $P_\sigma^\pi$ 的维数有给定的值）．线性半单 Lie 群和[Z]群是具有丰富紧子群的群．

令 $\pi$ 是群 $G$ 在一个 Hilbert 空间 $H$ 内的酉表示，又令 $M_\pi$ 是由族 $\pi(G)$ 所生成的 von Neumann 代数．表示 $\pi$ 称为迹容许的（trace-admissible），如果存在 $M_\pi^+$ 上一个迹，它是 $\pi$ 的一个特征标．群 $G$ 上的迹（trace on the group）被理解为 $C^*(G)^+$ 上一个半有限下半连续迹；$G$ 上一个迹称为 $G$ 的一个特征标（character），如果对应的 $G$ 的酉表示是一个商表示．在 $G$ 的特征标集合，确定到一个正因子的范围内，与 $G$ 的迹容许的商表示的拟等价类之间存在一个典范一一对应；而且，有限型的商表示对应于 $G$ 上一

个连续中心正定函数．

局部紧群 $G$ 在 Hilbert 空间 $L_2(G)$ 内的**正则表示**（regular representation）是一个忠实连续酉表示；由代数 $L_1(G)$ 对应的表示的象所生成的 $C^*$ 代数称为群 $G$ 的约化 $C^*$ 代数（reduced $C^*$-algebra），并且记作 $C_r^*(G)$；令 $N$ 是由这个正则表示所定义的由 $C^*(G)$ 到 $C_r^*(G)$ 上的典范满同态的核．群 $G$ 是顺从的（amenable），即在 $L_\infty(G)$ 上有一个不变平均值，当且仅当 $N=\{0\}$（顺从群在一个 Hilbert 空间内的有界表示与酉表示等价）．这样的酉表示 $\pi\in\hat{G}$ 的族，其相应的 $C^*(G)$ 的表示的核包含 $N$，称为**基本系列**（fundamental series）．其余的表示 $\pi\in\hat{G}$ 形成**补系列**（supplementary series）．

令 $G$ 是一个 I 型幺模可分局部紧群，$W^*(G)$ 是 von Neumann 代数 $\mu_\lambda$，这里 $\lambda$ 是 $G$ 的正则酉表示．在 $G$ 的谱 $\hat{G}$ 上存在唯一的正测度 $\hat{\mu}$ 它满足条件

$$\int_G |f(g)|^2 d\mu(g)=\int_{\hat{G}} \mathrm{Tr}(\pi(f)\pi(f^*))d\hat{\mu}(\tilde{\pi}),\quad (*)$$

对一切 $f\in L_1(G)\cap L_2(G)$．测度 $\hat{\mu}$ 称为 **Plancherel 测度**（Plancherel measure）．再者，存在空间 $L_2(G)$ 到表示 $\pi\in\hat{G}$ 的空间内 Hilbert-Schmidt 算子关于测度 $\hat{\mu}$ 的直积分上的一个同构，将左正则酉表示 $\lambda$ 变到酉表示的一个直积分内，这些酉表示都是 $\pi$ 的倍数，并且将 $W^*(G)$ 上由 $G$ 上的迹 $\mathscr{E}_e$ 所定义的迹（$\mathscr{E}_e(f)=f(e)$ 对一切 $f\in K(G)$）变到迹的直积分内．在 $(\mu\otimes C_1)^+$ 上，$T\otimes 1\to \mathrm{Tr}\,T$．$C^*(G)^+$ 上的迹 $\mathscr{E}_e$ 与迹 $f\mapsto\int_{\hat{G}}\mathrm{Tr}\,\pi(f)d\hat{\mu}(\pi)(f\in C^*(G))$ 重合．公式（$*$）称为 **Plancherel 公式**（Plancherel formula）；它可以被推广到 I 型非可分幺模局部紧群上，同时也可以推广到非幺模可分局部紧群和不是 I 型的可分群上．酉表示论的任务之一就是对于一个给定的局部紧群明显地构造出一个 Plancherel 测度．这个问题只是部分地被解决（例如，对于半单实 Lie 群，对于 I 型可解 Lie 群，以及对于某些运动群，某些 Chevalley 群，和某些满足一个紧性条件的群）．正则酉表示的分解和 Plancherel 公式与平方可积表示，**表示的离散系列**（discrete series of representations）和**可积表示**（integrable representation）理论有联系．

对于局部紧群的不可约酉表示的完全描述还不知道，即使在 Lie 群的情形也是如此．只对 I 型可解 Lie 群，某些可简约 Lie 群，以及 Chevalley 群（低维数的），某些幂零局部紧 Lie 群和某些半直积得到了描述，在这个描述中起决定性作用的是诱导算子（和它的一般化）；特别是**轨道方法**（orbit method）（和它的一般化）．对于更一般的射影酉表示和带有乘子的酉表示问题的研究通过（连续或 Borel）上同调群的理论与常酉表示论相联系．对于不是 I 型的群来说，对商表示的完全描述（精确到拟等价的范围内）还不存在，虽然对于其中某些群来说，有限型商表示的描述已经得到．

酉表示论在（Banach 和拓扑）群代数上级数理论中担当着基本角色：在 Wiener 性质和完全对称性的研究中，在极大单边和双边理想的描述中等等．酉表示论也在要求利用非酉表示的表示论和调和分析中担当着重要的角色——例如在构造有界系列和补系列中；在以显式给予算子定义中；在由酉表示的基系列的解析开拓而来的分裂表示中；在完全可约表示的纠缠的研究中；在调和分析在群上函数空间和齐性空间上而不是在空间 $L_2$ 上的发展中；以及在群代数（测度代数，代数 $L_1(G)$，拓扑代数 $K(G)$）的结构和性质的研究中．

**参考文献**


[1] Кириллов, А. А., Элементы теории представлений, 2, изд., М., 1978（英译本：Kirillov, A. A., Elements of the theory of representations, Springer, 1976）.

[2] Наймарк, М. А., Теория представлений групп, М., 1976（英译本：Naĭmark, M. A. and Shtern, A. I., Theory of group representations, Springer, 1982）.

[3] Наймарк, М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968（英译本：Naĭmark, M. A., Normed rings, Reidel, 1984）.

[4] Желобенко, Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970（英译本：Zhelobenko, D. P., Compact Lie groups and their representations, Amer. Math. Soc., 1973）.

[5] Желобенко, Д. П., Штерн, А. И., Представления групп Ли, М., 1983.

[6] Dixmier, J., $C^*$-algebras, North-Holland, 1977（译自法文）.

[7] Гельфанд, И. М., Граев, М. И., Пятецкий-Шапиро, И. И., Теория представлений и автоморфные функции, М., 1966(英译本：Gel'fand, I. M., Graev, M. I. and Pyatetskiĭ-Shapiro, I. I., Representation theory and automorphic functions, Saunders, 1969).

[8] Виленкин, Н. Я., Специальные функции и теория представлений групп, М., 1965（英译本：Vilenkin, N. Ya., Special functions and the theory of group, Amer. Math. Soc., 1968）.

[9] Barut, A. and Raczka, R., The theory of group representations and applications, 1-2, PWN, 1977.

[10] Климык, А. У., Матричные элементы и коэффициенты Клебша-Гордана представлений групп, К., 1979.

[11] Mackey, G. W., Unitary group representations in

physics, probability and number theory, Benjamin/Cummings, 1978.

[12] Bernat, P. et al., Representations des groupes de Lie résolubles, Dunod, 1972.

[13] Brezin, J., Harmonic analysis on compact solvmanifolds, Springer, 1977.

[14] Carmona, G. and Vergne, M. (eds), Non-commutative harmonic analysis (Marseille, 1978), Lecture notes in math., 728, Springer, 1979.

A. И. Штерн 撰

【补注】 关于"球面函数"这个术语的另一用法亦见**表示函数**(representation function)和**球面函数**(spherical functions)(条目中的补注). 在[8]和[A1]里, $G$ 的一个子群 $H$ 称为坚实的(massive), 如果 $H$ 的平凡表示出现在 $G$ 的每一不可约表示中的重数至多是 1. 关于特殊函数作为酉表示的矩阵元素的解释, 见[8], [10]和[A1].

**参考文献**

[A1] Vilenkin, N. Ya. and Klimyk, A. U., Representation of Lie groups and special functions, 1, Kluwer, 1991(译自俄文).

郝钢新 译

**酉空间[unitary space; унитарное пространство]**

一种复数域 C 上的**向量空间**(vector space), 其上给定了一个内积(inner product)(这里两个向量 $a$ 和 $b$ 的积 $(a, b)$ 一般是一复数)满足以下公理:

1) $(a, b)=\overline{(b, a)}$;

2) $(\alpha a, b)=\alpha(a, b)$;

3) $(a+b, c)=(a, c)+(b, c)$;

4) 如果 $a\neq 0$, 则 $(a, a)>0$, 即非零向量的标量平方是一个正实数.

酉空间不必是有限维的. 在酉空间中, 正如在 Euclid 空间中一样, 可以引进正交性和正交规范向量系的概念, 而在有限维情形可以证明正交基的存在性.

О. А. Иванова 撰

【补注】

**参考文献**

[A1] Noll, W., Finite dimensional spaces, Nijhoff, 1987, 338.

[A2] Greub, W., Linear algebra, Springer, 1975, Chapt. XI.

葛显良 译 鲁世杰 校

**酉变换[unitary transformation; унитарное преобразование]**, 酉映射(unitary mapping)

酉空间(unitary space) $L$ 上的一个**线性变换**(linear transformation) $A$, 它保持向量的**内积**(inner product)不变, 即使得对 $L$ 中任意向量 $x$ 与 $y$, 均有等式

$$(Ax, Ay)=(x, y).$$

特别地, 一个酉变换保持向量的长度. 反之, 如果酉空间的一个线性变换保持所有向量的长度, 那么它就是酉变换. 酉变换的本征值的模等于 1; 对应于不同的本征值的本征空间是彼此正交的.

有限维酉空间 $L$ 的线性变换 $A$ 是酉的, 当且仅当它满足下列条件之一:

1) 变换 $A$ 在任意规范正交基下对应于一个**酉矩阵**(unitary matrix);

2) $A$ 将任意一个规范正交基映成规范正交基.

3) $L$ 中存在由 $A$ 的本征向量组成的一个规范正交基, 并且在这个基下, $A$ 对应一个对角矩阵, 其对角线上各元素的模都等于 1.

给定酉空间的所有酉变换对于变换乘法构成一个群(称为**酉群**(unitary group)).

А. Л. Онищик 撰

【补注】

**参考文献**

[A1] Greub, W., Linear algebra, Springer, 1975, p. 338 ff.

蒋滋梅 译

**单叶性条件[univalency conditions 或 conditions for univalence; однолистности условия]**

在复平面 C 的区域内的正则(或亚纯)函数为单叶的必要充分条件(见**单叶函数**(univalent function)). $f(z)$ 在点 $a$ 的一个充分小的邻域内单叶的必要充分条件是 $f'(a)\neq 0$. 在区域每一点的这种(局部)单叶性尚不能保证在区域内的单叶性. 例如, 函数 $e^z$ 在圆盘 $|z|\leqslant R$ 内非单叶, 此处 $R>\pi$, 尽管该函数在平面的每一点均满足局部单叶性条件. 单叶函数的任一性质, 特别是所有单叶函数都满足的任一不等式都是单叶性的必要条件. 下面是关于单叶性的一些必要充分条件.

定理 1. 假定 $f(z)$ 在 $z=0$ 的邻域内具有级数展开式

$$f(z)=z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots, \qquad (1)$$

且设

$$\ln\frac{f(t)-f(z)}{t-z}=\sum_{p,q=1}^{\infty}\omega_{p,q}t^pz^q.$$

$a_n$ 与 $\omega_{p,q}$ 是常数系数. 为使 $f(z)$ 在 $E=\{z: |z|<1\}$ 内正则单叶, 其必要充分条件是对于每个正整数 $N$ 及一切 $x_p$, $p=1, \cdots, N$, 均满足 Grunsky 不等式(Grunsky inequalities):

$$\left|\sum_{p,q=1}^{N}\omega_{p,q}x_px_q\right|\leqslant\sum_{p=1}^{N}\frac{1}{p}|x_p|^2.$$

对于类 $\Sigma(B)$(在区域 $B\ni\infty$ 内亚纯单叶的函数 $F(\zeta)=\zeta+c_0+c_1/\zeta+\cdots$ 所组成的类; 见[2], 亦可见**面积原理**(area principle)), 类似的条件成立.

定理 2 设有界区域 $D$ 的边界 $l$ 是一条 Jordan 曲线，函数 $f(z)$ 在 $D$ 内正则，在闭区域 $\bar{D}$ 上连续. $f(z)$ 在 $\bar{D}$ 内单叶的必要充分条件是 $f$ 把 $l$ 双射地映射为某个闭 Jordan 曲线.

关于圆盘 $E$ 上的函数 (1) 是到凸域，或星形区域，或关于原点的螺线形区域的映上单叶映射的必要充分条件同定理 2 有关，且可分别叙述如下:

$$\operatorname{Re}\left[z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right]+1\geqslant 0,\ \operatorname{Re}\left[z\frac{f'(z)}{f(z)}\right]\geqslant 0,$$

$$\operatorname{Re}\left[e^{i\gamma}z\frac{f'(z)}{f(z)}\right]\geqslant 0.$$

许多单叶性充分条件可用常微分方程（定理3）或偏微分方程（定理 4）来描述.

定理 3 圆盘 $E$ 内的亚纯函数 $f(z)$ 在 $E$ 内为单叶，如果 Schwarz 导数

$$\{f,z\}=\left[\frac{f''(z)}{f'(z)}\right]'-\frac{1}{2}\left[\frac{f''(z)}{f'(z)}\right]^2$$

满足不等式

$$|\{f,z\}|\leqslant 2S(|z|),\ |z|<1.$$

其中控制函数 $S(r)$ 非负连续且满足如下条件: a) $S(r)(1-r^2)^2$ 对于 $0<r<1$ 关于 $r$ 非增; b) 对于 $-1<t<1$，微分方程 $y''+S(|t|)y=0$ 有解 $y_0(t)>0$.

Nehari-Покорний 单叶性条件 (Nehari-Pokornii univalence conditions)

$$|\{f,z\}|\leqslant\frac{C(\mu)}{(1-|z|^2)^{\mu}}$$

成为定理 3 的一个特例，其中

$$C(\mu)=\begin{cases}2^{3\mu-1}\pi^{2(1-\mu)}, & 当\ 0\leqslant\mu\leqslant 1,\\ 2^{3-\mu}, & 当\ 1\leqslant\mu\leqslant 2.\end{cases}$$

定理 4 设 $f(z,t)$ 是圆盘 $E$ 内的正则函数且关于 $t$ 连续可微，$0\leqslant t<\infty$, $f(0,t)=0$, 并满足 Löwner-Куфарев 方程 (Löwner-Kufarev equation)

$$\frac{\partial f}{\partial t}=zh(z,t)\frac{\partial f}{\partial z},\ 0<t<\infty,\ z\in E,$$

其中 $h(z,t)$ 在 $E$ 内正则，关于 $t$ 连续，$0\leqslant t<\infty$，且 $\operatorname{Re}h(z,t)\geqslant 0$. 若

$$f(z,t)=a_0(t)f(z)+O(1),$$

其中 $\lim_{t\to\infty}a_0(t)=\infty$, $O(1)$ 是当 $t\to\infty$ 时对每个 $z\in E$ 均为有界量，$f(z)$ 是 $E$ 上非常数正则函数且具有展开式 (1)，则所有的函数 $f(z,t)$ 都单叶，包括函数 $f(z,0)$ 及 $f(z)$.

定理 4 蕴含下列特殊的单叶性条件:

$$\left|z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right|\leqslant\frac{1}{1-|z|^2}.$$

及

$$\operatorname{Re}\left[e^{i\gamma}\left[\frac{f(z)}{z}\right]^{\gamma+i\beta-1}\frac{f'(z)}{\varphi'^{\alpha}(z)}\right]\geqslant 0,$$

其中 $\alpha,\beta,\gamma$ 是实数，$\alpha>0$, $|\gamma|<\pi/2$, $\varphi(z)$ 是正则函数把圆盘 $E$ 映射成一个凸域.

函数

$$w=f(z) \tag{2}$$

的单叶性等价于关于 $z$ 的方程 (2) 的解的唯一性. 从这个意义上说，单叶性充分条件可推广到一大类算子方程. 对于这些方程，条件 $\operatorname{Re}[e^{i\gamma}f'(z)]\geqslant 0$ 尤其可推广到 $n$ 维 Euclid 空间的区域中一类实映射.

**参考文献**


[1] Лебедев, Н. А., Принцип площадей в теории однолистных функций, М., 1975.

[2] Голузин, Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966 (英译本: Goluzin, G. M., Geometric theory of functions of a complex variable, Amer. Math. Soc., 1969).

[3] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968.

[4] Авхадиев, Ф. Г., Аксентьев, Л. А., 《Успехи матем. наук》, 30 (1975), 4, 3–60.

[5] Гахов, Ф. Д., Краевые задачи, 3 изд., М., 1977(英译本: Gakhov, F. D., Boundary value problems, Pergamon, 1966).

[6] Тумашев, Г. Г., Нужин, М. Т., Обратные краевые задачи и их приложения, 2 изд., Казань, 1965.


Л. А. Аксентьев 撰

【补注】 在英文文献中，有时亦用德文字 "Schlicht" 来代替英文字 "univalence".

**参考文献**


[A1] Duren, P. L., Univalent functions, Springer, 1983.


杨维奇 译

**单叶性半径 [univalency radius 或 radius of univalence; однолистности радиус]**

在其内所有属于在圆盘 $|z|<1$ 内正则且对于 $|z|<1$ 满足 $|f(z)|\leqslant M$ 的形如

$$f(z)=z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots$$

的函数族的函数均单叶的最大圆盘 $|z|<\rho$ 的半径 $\rho(M)$. 已证明

$$\rho(M)=M-\sqrt{M^2-1},\ M\geqslant 1,$$

且函数

$$Mz\frac{1-Mz}{M-z}$$

在圆盘 $|z|<\rho(M)$ 内单叶，但在任何（以原点为心的）更大的圆盘内非单叶．对于在 $|z|<R$ 内正则且满足 $f(0)=0, f'(0)=c, c\neq 0, |f(z)|\leqslant M$ 的函数，其单叶性半径 $\rho^*(M)$ 可类似定义，而且其值容易从 $\rho(M)$ 得到． Г．К．Антонюк 撰

【补注】 亦可见**单叶性条件**（univalency conditions）；**单叶函数**（univalent function）．

**参考文献**


[A1] Duren, P. L., Univalent functions, Springer, 1983.

[A2] Goodman, A. W., Univalent functions, 2, Mariner, 1983.

[A3] Landau, E., Der Picard-Schottkysche Satz und die Blochse Konstants, *Sitzungsber, Akad. Wiss Berlin Phys. Math. Kl.*, (1925), 467－474.


杨维奇 译

**单叶函数** [**univalent function**; **однолистная функция**]

扩充复平面 $\bar{\mathbf{C}}$ 的区域 $B$ 内的正则或亚纯函数 $f$，使得每当 $z_1\neq z_2, z_1, z_2\in B$，有 $f(z_1)\neq f(z_2)$，即 $f$ 是从 $B$ 到 $\bar{\mathbf{C}}$ 内的一一映射．因而其反函数 $z=f^{-1}(w)$ 亦为单叶的．**多叶函数**（multivalent function），以及更特殊的 $p$ 叶函数，是单叶函数的推广．

在单叶函数研究领域，基本的问题之一是，是否存在从给定区域 $B$ 到给定区域 $B'$ 的单叶映上映射．关于这样一个映射的存在性的一个必要条件是 $B$ 与 $B'$ 的连通性程度相同（例如可见[1]）．若 $B$ 和 $B'$ 都是边界包含多于一点的单连通区域，则该条件亦是充分的（见 **Riemann 定理**（Riemann theorem）），且该问题可归结为把给定区域映射成圆盘．由于这层关系，在圆盘 $\Delta=\{z\in\mathbf{C}:|z|<1\}$ 上正则单叶，满足标准化条件 $f(0)=0, f'(0)=1$，且具有展开式

$$f(z)=z+c_2z^2+\cdots+c_nz^n+\cdots, z\in\Delta \quad (1)$$

的函数 $f$ 所组成的类 $S$，在单连通区域单叶函数论中起着特殊的作用．

在多连通区域的情形，把给定的多连通区域映成典型区域的映射已被人们所研究（见**共形映射**（conformal mapping））．设 $\mathbf{\Sigma}(B)$ 是在包含点 $\infty$ 的区域 $B$ 上亚纯单叶且在 $\infty$ 的邻域内具有展开式

$$F(z)=z+\alpha_0+\alpha_1z^{-1}+\cdots+\alpha_nz^{-n}+\cdots \quad (2)$$

的函数 $F$ 所组成的类．若 $B=\{z\in\bar{\mathbf{C}}:|z|>1\}=\Delta'$，则用 $\Sigma$ 表示该类函数．

单叶函数论中有下列基本问题：1）研究共形映射下的边界对应（见**边界对应（共形映射下的）**（boundary correspondence (under conformal mapping)）；**极限元**（limit elements）；**可达边界点**（attainable boundary point））；2）确定**单叶性条件**（univalency conditions）；以及 3）求解函数论中的各种极值问题，特别是求解某类函数的各种泛函的界限，及泛函与泛函组的值域的界限或其他（见下文）．

假定 $K$ 是某类正则或亚纯函数，并假定在 $K$ 上给定一个复泛函 $w=\varphi(f)$（或泛函组 $\{\varphi_k(f)\}_{k=1}^n$）．类 $K$ 上泛函 $\varphi(f)$ 的**值域**（range of values of the functional）（或泛函组 $\{\varphi_k(f)\}_{k=1}^n$ 的值域）是 $\mathbf{C}$ 中点 $w=\varphi(f)$ 组成的集合 $D$（相应地，是 $n$ 维复空间 $\mathbf{C}^n$ 中点 $(\varphi_1(f),\cdots,\varphi_n(f))$ 的集合）使得 $f\in K$．也考虑实值泛函．包含 $D$ 的任一集合 $D'$ 称为泛函的**控制域**（majorant domain of the functional）（或泛函组的控制域）．对泛函值域的了解使人们能够把求解一系列极值问题归结为分析中的简单问题．例如，若对于泛函 $f(z_0), f\in K$（$z_0$ 固定不变），值域 $D$ 已知，则寻求 $|f(z_0)|$ 的上下界限的问题归结为寻求 $D$ 中离 $w=0$ 最远的点与最接近 $w=0$ 的点．

单叶函数论中第一批重大结果是应用**面积原理**（area principle）获得的．借助于外面积定理（1916），L. Bieberbach 得到关于类 $S$ 的 $|f(z)|$ 与 $|f'(z)|$ 的精确上界与下界（见**畸变定理**（distortion theorems），给出关于类 $S$ 的界限 $|c_2|\leqslant 2$ 并猜想对于 $f\in S$ 有 $|c_n|\leqslant n$（见 **Bieberbach 猜想**（Bieberbach conjecture）；**系数问题**（coefficient problem））．他还找到了 Koebe 常数的精确值．对于凸函数类，星形函数类，典型实照等函数类，函数及其导数的模的界限及其他界限已求得（见**凸函数（复变量的）**（convex function (of a complex variable)）；**星形函数**（star-like function）；**典型实函数**（typically real function））．对一系列函数类，找到了**凸性半径**（convexity radius）与"星形性"半径（见**星形性极限**（limit of star-likeness））．

下面给出单叶函数论的一些基本方法及由这些方法获得的某些结果．

**1. 积分表示法**．这一方法使人们能够十分简单地解决函数论中的许多问题，特别是能用 Stieltjes 积分表示的函数类的极值问题，如凸函数类，近于凸函数类，星形函数类，典型实照函数类，及正实部函数类（见 **Carathéodory 类**（Carathéodory class））．对于可用 Stieltjes 积分表示的函数类建立了一种变分方法，借此解决了一系列极值问题．对这些函数类还建立了内变分的方法（见**内变分方法**（internal variations, method of））．

已求得 $S$ 的某些子类的凸包（见[3]）．特别地，对每个星形函数 $f$ 已证明存在 $[0, 2\pi]$ 上的非减函数 $\mu$ 使得 $\mu(2\pi)-\mu(0)=1$ 且

$$f(z)=\int_0^{2\pi}\frac{z}{(1-e^{i\theta}z)^2}\,d\mu(\theta).$$

亦可见**解析函数的积分表示**(integral representation of an analytic function);**单叶函数的参数表示**(parametric representation of univalent functions);**参数表示法**(parametric representation method).

**2. 边界积分法**. 特别值得一提的是，借助这一方法已证明 $f\in S$ 满足不等式(见[1])

$$\left|\frac{z}{f(z)}+c_2z+1-|z|^2-2\frac{\mathbf{E}(|z|)}{\mathbf{K}(|z|)}\right|\leqslant$$

$$\leqslant 2\left[1-\frac{\mathbf{E}(|z|)}{\mathbf{K}(|z|)}\right],\ |z|<1,$$

其中 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{K}$ 是完全椭圆积分(见**椭圆积分**(elliptic integral)). 若 $z$ 固定 $(0<|z|<1)$, 则该不等式确定了类 $S$ 上泛函 $c_2z+z/f(z)$ 的值域. 已得到畸变定理的较强形式，并证明了关于类 $\Sigma$ 与 $\Sigma(B)$ 中的弦畸变的一些定理(见**畸变定理**(distortion theorems)与[1]).

亦可见**边界积分法**(method of boundary integration);**面积原理**(area principle).

**3. 面积方法**. 设 $\mathfrak{M}(a_1,\cdots,a_n)$ 是函数组 $\{f_k(z)\}_{k=1}^n$ 组成的类，该函数组把圆盘 $\Delta=\{|z|<1\}$ 单叶共形地映射成两两不相交的区域 $B_k\ni a_k$ 且满足标准化条件 $f_k(0)=a_k$. 借助于关于类 $\mathfrak{M}(\infty,a_1,\cdots,a_n)$ 的面积定理已得到如下结果：1) 若

$$\{f_k\}_{k=1}^n\in\mathfrak{M}(a_1,\cdots,a_n),\ a_k\neq\infty,$$

则

$$\prod_{k=1}^n|f_k'(0)|^{|\gamma_k|^2}\leqslant\prod_{1\leqslant k<l\leqslant n}|a_k-a_l|^{-2\operatorname{Re}(\gamma_k\bar{\gamma}_l)},\quad(3)$$

$$\sum_{k=1}^n\gamma_k=0;$$

该不等式把先前已知的关于实数 $\gamma_k$ 的一个不等式推广到具有复数 $\gamma_k$ 的这个类.

2) 若 $\{f_0,f_1\}\in\mathfrak{M}(0,\infty)$, 则

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f_0(e^{it})|^2dt\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f_1(e^{it})|^{-2}dt\leqslant 1.\qquad(4)$$

对于 **Bieberbach-Eilenberg 函数**(Bieberbach-Eilenberg functions)

$$f(z)=\sum_{k=1}^\infty a_kz^k,$$

即推出不等式

$$\sum_{k=1}^\infty|a_k|^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f_1(e^{it})|^2dt\leqslant 1;\qquad(4')$$

且已确定了(4)与(4′)中等号成立的条件.

应用关于不相重叠区域的面积定理，已得到关于在闭多连通区域上逼近一正则函数的界限. 这种逼近系通过在区域边界上一致分布的结点处用旋转函数插值给定的函数来实现(见[4]). 对于 $F\in\Sigma(B)$, 其 Schwarz 导数

$$\{F(z),z\}=\left[\frac{F''(z)}{F'(z)}\right]'-\frac{1}{2}\left[\frac{F''(z)}{F'(z)}\right]^2$$

的值域已求得，并且对于在多连通区域上给定的一些函数类也已求出一系列别的值域(见[4],[5]).

**4. Löwner 法**. K. Löwner 本人(1923)找到了关于函数 $f\in S$ 的精确界限 $|c_3|\leqslant 3$ 及 $f$ 的反函数在 $w=0$ 的邻域内的展开式的系数的精确界限. 尤其要指出，类 $S$ 的旋转定理的精确形式是用这一方法得到的(见**旋转定理**(rotation theorems)). 已证明如下定理：对于 $f\in S$ 及给定的 $z\in\Delta$ 与 $|f(z)|$, 有如下不等式:

$$|f'(z)|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{1-|z|^2}\left|\frac{f(z)}{z}\right|^2(1-x^2)^2\left|\frac{x}{2}\right|^{4x^2/(1-x^2)},\qquad(5)$$

其中 $x,|x|<|z|$, 由如下条件确定之:

$$\left|\frac{f(x)}{z}\right|(1+x)^2\left|\frac{z}{x}\right|^{2x/(1+x)}=1.$$

不等式(5)是精确的；它蕴含关于类 $S$ 的如下精确不等式 $(0\leqslant\theta<2\pi,\ 0\leqslant r<1)$:

$$\left.\begin{aligned}&|f(re^{i\theta})|+|f(-re^{i\theta})|\leqslant\frac{r}{(1-r)^2}+\frac{r}{(1+r)^2},\\&|f'(re^{i\theta})|+|f'(-re^{i\theta})|\leqslant\\&\leqslant\frac{1+r}{(1-r)^3}+\frac{1-r}{(1+r)^3}.\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

借助畸变定理已确认，当 $\rho>e^{\pi/4}r$ 时，圆周 $|w|=\rho$ 被圆盘 $\Delta_r=\{|z|<r<1\}$ 在类 $S$ 的函数映射下的象 $B(r)$ 所覆盖的线测度的最大值由 Koebe 函数

$$K_\alpha(z)=z(1-e^{i\alpha}z)^{-2}\in S$$

达到，$\alpha$ 是实数. 类 $S$ 的函数的这一性质蕴含着区域 $B(r)$ 的面积 $\sigma(r)$ 的界限，函数的平均模的界限以及类 $S$ 中的其他界限；当 $r\to 1$ 时它们都是渐近地精确(见[1]).

$S$ 及其某个子类上的极值问题可以方便地简化为一个更简单的类上的极值问题(见 **Carathéodory 类**(Carathéodory class)). 其结果可用来求解一些极值

问题，特别是对于 $f\in S$ 寻求泛函组 $\{\ln(f(z)/z),\ln f'(z)\}$ 值域的问题（此处 $z$ 固定，$0<|z|<1$）（见[6]）.

Löwner 法已被成功地用来研究阶层曲线的性质和解决由有界函数 $f\in S:|f(z)|\leqslant M$，$z\in\Delta$，所组成的子类 $S_M$ 的极值问题（见[6]）.

亦可见 **Löwner 方程**（Löwner equation）；**Löwner 方法**（Löwner method）；**参数表示法**（parametric representation method）.

**5. 变分方法**. 在求解极值问题中，边界变分与内变分分别导出关于极值区域的边界与极值函数的微分方程. 作为一种规定，这些方程的左边是**二次微分**（quadratic differential）. 达到极值的函数的种种定性性质可通过研究相应的二次微分的性质得到. 特别可由此推出，对于类 $S$（及其他类）中大量的极值问题，其极值函数把圆盘 $\Delta$ 映射成具有有限条解析裂纹的全平面. 有时关于极值函数的微分方程可积，可求得所考虑的极值问题的极值量及其所有的极值函数. 更经常的是只能得到关于极值量的一个或几个方程. 下面列出由变分方法得到的一些结果.

假定 $F\in\Sigma$，$w_k$，$k=1,\cdots,n$，$n\geqslant 2$，不属于区域 $\Delta'=\{|z|>1\}$ 在映射 $w=F(z)$ 下的象，且设

$$d_n(F)=\prod_{1\leqslant k<l\leqslant n}|w_k-w_l|.$$

已证明

$$d_3(F)=|(w_1-w_2)(w_2-w_3)(w_3-w_1)|\leqslant 12\sqrt{3},$$

等号仅对于

$$F(z)=z(1+e^{i\alpha}z^{-3})^{2/3}$$

时成立，其中 $\alpha$ 是实数（见[1]）.

已证明（见[1]）对于 $F\in\Sigma$，泛函

$$w=\sum_{\nu,\nu'=1}^{n}\gamma_\nu\gamma_{\nu'}\ln\frac{F(\zeta_\nu)-F(\zeta_{\nu'})}{\zeta_\nu-\zeta_{\nu'}}$$

的值域是圆盘

$$|w|\leqslant-\operatorname{Re}\sum_{\nu,\nu'=1}^{n}\gamma_\nu\overline{\gamma}_{\nu'}\ln(1-\zeta_\nu^{-1}\overline{\zeta_{\nu'}^{-1}}),$$

其中 $\gamma_\nu$ 是给定的一组不全为 0 的数，$\zeta_\nu$ 是在 $\Delta'$ 中给定的点.

已研究了在圆盘 $\Delta$ 内正则单叶且不取 $\Delta'$ 内指定的值 $a_1,\cdots,a_n$ 的函数 $f(z)=c_1z+c_2z^2+\cdots$ 所组成的类 $S_a$ 中 $|c_n|$ 的极值问题，$n\geqslant 1$（见[1]）. $n=1$ 的特殊情形是确定具有最小容量的连续统的问题（为考察这一问题及其推广可见[7]）.

已用一种变分的方法对不相重叠的区域的种种问题作了研究. 例如已考察了类 $\mathfrak{M}(a_1,\cdots,a_n)$ 中乘积

$$I_n=\prod_{k=1}^{n}|f_k(0)|$$

的最大值问题（见[1]）. 对 $n=2$ 和 3，已得到乘积

$$\prod_{k=1}^{n}|f_k(0)|^{\alpha_k}$$

的一个精确界限，其中 $\alpha_k$ 是任意给定的正数（见[1]）. 这一问题等价于寻求类 $\mathfrak{M}(a_1,\cdots,a_n)$ 中泛函组 $(|f_1(0)|,\cdots,|f_n(0)|)$ 的值域 $D$ 的问题.

亦可参看**变分原理（复变函数论中的）**（variational principles (in complex function theory)）；**单叶函数的变分**（variation of a univalent function）；**内变分方法**（internal variations, method of）；**边界变分方法**（boundary variatios, method of）；**变分-参数方法**（variation-parametric method）.

**6. 极值度量法**. 在用极值度量法求解极值问题的过程中，由某个二次微分 $Q(z)dz^2$ 生成的度量起着基本的作用，这已是一种规律. 这同用变分方法求解该问题的过程中所出现的是同一个二次微分. 作为例子，下面介绍由该方法得到的两个结果（见[1]，[7]－[9]）.

借助一般系数定理，J. A. Jenkins (1960) 解决了在 $S$ 的具有实系数 $c_2,c_3,\cdots$ 的函数所组成的类 $S_r$ 中对圆盘 $\Delta=\{|z|<1\}$ 内固定的 $z$ 泛函 $f(z)$ 的值域问题. 对于类 $\Sigma$ 与 $M$，此处 $M$ 是在圆盘 $\Delta$ 内亚纯单叶且满足 $f(0)=0$，$f'(0)=1$ 的函数 $f$ 所组成的类，他搞清楚了开始某几个系数的消失对其后继系数增长的影响.

作为对一般系数定理的补遗已给出当二次微分 $Q(z)dz^2$ 没有高于 1 阶的极点时的情形的讨论；此外，借助于极值度量方法已建立了关于在单连通与二连通区域的单叶共形映射下曲线的覆盖的十分一般的定理，尤其是包括关于圆盘上亚纯单叶函数的有关区间覆盖的结果的改进，以及对于圆环的类似结果（见[1]）.

亦可见 **Grötzsch 原理**（Grötzsch principle）；**Grötzsch 定理**（Grötzsch theorems）；**带形法（解析函数）**（strip method (analytic functions)）；**二次微分**（quadratic differential）；**Bieberbach-Eilenberg 函数**（Bieberbach-Eilenberg functions）；**极值度量法**（extremal metric, method of the）.

**7. 对称化方法**. 一些不能用别的方法解决的复杂的极值问题已用此方法得到解决，通常是与其他方法连用解决的. 例如下面的问题就是属于这一类的问题（见[1]，[7]－[10]）. 对于类 $S$ 中的函数 $f$，圆周 $|w|=R$ 上，$1/4\leqslant R<1$，不属于圆盘 $\Delta$ 在映射 $w=f(z)$ 下的象的那些点所组成的集合的精确上界已

求得．与极值度量法连用，已求得当

$$f(z)=z+c_2z^2+\cdots\in S$$

具有给定的 $c_2=c=$ 常数，$0\leqslant c\leqslant 2$，且 $|z|=r$ 固定不变 $(0<r<1)$ 时 $|f(z)|$ 的精确上界；不等式(6)已被推广到圆周平均 $p$ 叶函数

$$f(z)=z^p+c_{p+1}z^{p+1}+\cdots$$

所组成的类（见**多叶函数**（multivalent function））．

用对称化方法已证明：若 $\varphi$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的非减凸函数，则对于 $f\in S$ 与 $0<r<1$ 有

$$\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(\ln|f(re^{it})|)dt\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(\ln|K(re^{it})|)dt,$$

其中 $K(z)=z(1-z)^{-2}$（见[11]）．若对于某个 $r$，$0<r<1$，及某个严格凸函数 $\Phi$ 等号成立，则

$$f(z)=e^{-i\alpha}K(e^{i\alpha}z),$$

其中 $\alpha$ 是实数．

关于对称化方法在多连通区域的应用见[12]，[13]．亦可见**对称化方法**（symmetrization method）．

**参考文献**


[1] Голузин, Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966（英译本：Goluzin, G. M., Geometric theory of functions of a complex variable, Amer. Math. Soc., 1969）.

[2] Александров, И. А., Лебедев, Н. А., 《Тр. Матем. ин-та. АН СССР》, **94** (1968), 79 – 89.

[3] Brickman, L., MacGregor, T. H. and Wilken, D. R., Convex hulls of some classical families of univalent functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **156** (1971), 91 – 107.

[4] Лебедев, Н. А., Принцип площадей в теории однолистных функций, М., 1975.

[5] Милин, И. М., Однолистные функции и ортонормированные системы, М., 1971（英译本：Milin, I. M., Univalent functions and orthonormal systems, Amer. Math. Soc., 1977）.

[6] Александров, И. А., Параметрические продолжения в теории однолистных функций, М., 1976.

[7] Кузьмина, Г. В., 《Тр. Матем. ин-та АН СССР》, **139** (1980), 1 – 241.

[8] Jenkins, J. A., Univalent functions and conformal mappings, Springer, 1958.

[9] Pommerenke, Ch., Univalent functions, Vandenhoeck & Ruprecht, 1975（中译本：Ch. 泊茂仁克，单叶函数，科学出版社，1987）.

[10] Hayman, W. K., Multivalent functions, Cambridge Univ. Press, 1958.

[11] Baernstein, A., Integral means, univalent functions and circular symmetrization, *Acta Math.*, **133** (1974), 139 – 169.

[12] Митюк, И. П., 《Укр. матем. ж.》, 17 (1965), 4, 46 – 54.

[13] Митюк, И. П., 《Сиб. матем. ж.》, 6 (1965), 6, 1282 – 1291.


Н. А. Лебедев 撰

【补注】 在英文文献中有时用“Schlicht function”代替“univalent function”．

**参考文献**


[A1] Duren, P. L., Univalent functions, Springer, 1983.

[A2] Goodman, A. W., Univalent functions, 1 – 2, Mariner, 1983.


杨维奇 译

**泛代数[universal algebra; универсальная алгебра]**

一个具有空的关系集的**代数系统**（algebraic system）．泛代数常简称为代数．对于泛代数来说，以下的同态定理（homomorphism theorem）成立：如果 $\varphi$ 是由一个泛代数 $A$ 到另一代数 $B$ 上的同态，$\theta$ 是 $\varphi$ 的核合同，则 $B$ 同构于商代数 $A/\theta$．每一个泛代数都可以分解为次直不可约泛代数的次直积．

如果对一个代数 $A$ 的基本运算添加一切导出运算，就得到一个更大表征的泛代数 $\widetilde{A}$．等式 $\widetilde{A}=\widetilde{B}$ 即使在 $A\neq B$ 时也是可能的，这导致泛代数的有理等价的概念（见**泛代数簇**（variety of universal algebras））．

对于每一个泛代数 $A$ 有如下的相关结构（related structure）与它关联：一切自同态的幺半群 End $A$，一切自同构的群 Aut $A$，一切子代数的格 Sub $A$，以及一切合同的格 Con $A$．对于任意群 $G$ 和任意**代数格**（algebraic lattice）$U$ 和 $C$，存在一个泛代数 $A$ 使得 $G\cong$ Aut $A$，$U\cong$ Sub $A$ 和 $C\cong$ Con $A$（见[12]）．然而，如果以 End $A$ 取代 Aut $A$，则相应的结果不成立．这种问题称为抽象实现问题（abstract realization problem）一个具体实现问题（concrete realization problem）的解的例子是：一个集合 $A$ 的子集系统 $U$ 与某个以 $A$ 为承载集的泛代数的子代数格 Sub $A$ 相重合，当且仅当 $U$ 在直并与任意交之下是闭的（[11]）．抽象的和具体的实现问题可以对于给定的泛代数类来解．在相关结构上带有某些限制的泛代数已被研究．例如，曾研究过具有分配格或模合同格的泛代数，具有二元合同格的泛代数（合同单泛代数（congruence-simple universal algebra）），具有一元或二元子代数格的泛代数（单泛代数（simple universal algebra）），具有交换的自同态幺半群的泛代数，具有一元自同构群的泛代数（刚性泛代数（rigid universal algebra））等等．具有交换合同的泛代数同构于有限个合同单代数的直积，当且仅当它的合同格满足极大条件，而它的极小合同的最小上界等于最大合同．具有分配合同格且具

有可换合同的泛代数(算术泛代数(arithmetic universal algebra))可以被表示成适当层的整体截面. 对于被其某些相关结构所确定的泛代数扩展成何种形式的研究已经在做. 然而,这类的主要结果都与具体的泛代数类有关([9]-[12],[15]).

一个泛代数称为函数完全的(functionally complete),如果在其承载集上每一个运算都属于由它的基本运算和常量所生成的克隆(clone). 如果不包括常量,就得到准素(primal)(或严格函数完全(strictly functional complete))泛代数(universal algebras). 如果所有保持合同的运算都在上面所说的克隆内,就得到一个仿射完全泛代数(affine complete universal algebra). 每一个函数完全泛代数都是有限的. 因此,有限性的要求常被包括在这些泛代数类的定义中(见[9],[13],[14]).

泛代数的研究开始于1930年代和1940年代,当基本定义被陈述出来时,泛代数簇已被刻画并且次直分解定理已被证明(见[7],[8]). 关于泛代数理论更早的历史要追溯到上一世纪. 在苏联,对这个领域内活跃的研究开始于50年代前期(А.Г. Курош,А.И. Мальцев 和他们的学生们). 数理逻辑方法的应用导致对代数系统的考虑.

"泛代数"这个提法常在"泛代数论"的意义中被用到.

**参考文献**


[1] Birkhoff, G., Lattice theory, Amer. Math. Soc., 1967.

[2] Cohn, P. M., Universal algebra, Reidel, 1981.

[3] Курош, А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973 (中译本:库洛什,一般代数学讲义,上海科学技术出版社,1962).

[4] Курош, А. Г., Общая алгебра, Лекции 1969 - 1970 учебного года, М., 1974.

[5] Мальцев, А. И., Алгебраические системы, М., 1970 (英译本: Mal'tsev, A. I., algebraic systems, Springer, 1972 - 1973).

[6] Скорняков, Л. А., Элементы общей алгебры, М., 1983.

[7] Birkhoff, G., On the structure of abstract algebras, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **31** (1935), 433 - 454.

[8] Birkhoff, G., Subdirect unions in universal algebra, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **50** (1944), 764 - 768.

[9] Grätzer, G., Universal algebra, Springer, 1979.

[10] Hu, Tah-Kai, Weak products of simple universal algebras, *Math. Nachr.*, **42** (1969), 1 - 3, 157 - 171.

[11] Jónsson, B., Topics in universal algebra, Springer, 1972.

[12] Lampe, W. A., The independence of certain related structures of a universal algebra I - III, *Algebra Universalis*, **2** (1972), 270 - 283; 286 - 295; 296 - 302.

[13] Pixley, A. F., A survey of interpolation in universal algebra, in B. Csákány, E. Fried and E. T. Schmidt (eds): Universal Algebra (Esztergom, 1977), Coll. Math. Soc. J. Bolyai, Vol. 29, North-Holland, 1982, 583 - 607.

[14] Werner, H., Discriminator algebras, Akad. Verlag, 1978.

[15] Wolf, A., Sheaf representations of arithmetic algebras, *Mem. Amer. Math. Soc*, **148** (1974), 87 - 93.


Л. А. Скорняков 撰

【补注】 在英文里,"泛代数"这个词几乎常指的是"泛代数论";单个的泛代数(就像上面正文中所说的那样)简称为"代数". 亦见**代数系统**(algebraic system)的补注.

"泛代数"这个词在印刷上第一次出现大概是在文献[A5],虽然这本书所涉及的近代意义下的泛代数要比数理逻辑少.

**代数理论** 泛代数由于 F. W. Lawvere 所引入的范畴的表述而被加深和扩展了([A2]). 一个代数理论(algebraic theory) $T$ 被定义为一个对象 $T(1)$ 的有限幂 $T(n)$ 的范畴(带有 $T(1)$ 到 $T(n)$ 的特异内射 $i_1,\cdots,i_n$). 于是,在一个范畴 $C$ 内,$T$ 的一个模型(model),或一个 $T$ 代数($T$-algebra),是一个(反变)函子 $A:T^{op}\to C$,将上幂取到幂. $A(1)$ 是 $A$ 的底对象(underlying object). 在集合的范畴内 $T$ 的标准模型(standard model) Ens 恰好形成一个代数簇.(这些就是这样的模型 $A$,对它们来说,$A(n)$ 是 $A(1)$ 的标准 $n$ 次幂集.)在这个簇里,有限生成的自由代数作成一个与 $T$ 等价的范畴.

$T$ 的运算是定义域为 $T(1)$ 的态射,$\alpha: T(1)\to T(n)$ 是一个 $n$ 元运算. 一个代数理论可以由生成运算和关系表现出来,关系是代数等式,见[A4]. 代数理论的态射或解释(interpretation),可以由保持定义关系有效性的运算的生成集合的解释来定义. 解释 $T\to S$ 诱导出模型范畴之间的代数函子(algebraic functors) $\mathrm{Ens}^S\to\mathrm{Ens}^T$;例如 Lie 环论在结合环论中的标准解释(将积 $[x,y]$ 取作 $xy-yx$)诱导出将每一结合环取它的方括号环的函子. 每一个代数函子都有一个伴随([A2]).(在这个例子里,这给出包络代数.)

在一个范畴 $C$ 内余代数(co-algebra)是 $C^{op}$ 内的代数. 典型的代数理论(例如,群论,格论)在 Ens 内只有平凡上代数,见[A1].

代数理论概念无约束的无限扩充,到一个对象 $T(1)$ 的一切上幂 $T(\aleph)$ 的范畴,称为簇论(varietal theory),但有时也称为(如在[A3]里)代数理论;于是经典的概念成为有限理论(finitary theory). 关于簇论有两种等价的表述,有些作者(如在[A3]中)取作定义:作为

Ens 中的三元组和作为标准构造 $(F, U)$, $F: A \to B$, $U: B \to A$, 其中 $A = \mathrm{Ens}$. (于是 $B$ 就是模型范畴 $\mathrm{Ens}^{t}$.)

**参考文献**


[A1] Davis, R. C., Universal coalgebra and categories of transition systems, *Math. Systems Th.*, **4** (1970), 91 – 95.

[A2] Lawvere, F. W., Functorial semantics of algebraic theories, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **50** (1963), 869 – 872

[A3] Manes, E. G., Algebraic theories, Springer, 1976.

[A4] Wraith, G., Algebraic theories, *Lecture Notes Aarhus Univ.*, **22** (1975).

[A5] Whitehead, A. N., A treatise on universal algebra with applications, Cambridge Univ. Press, 1898.

[A6] McKenzie, R. N., McNulty, G. F. and Taylor, W. F., Algebras, lattices, varieties, 1, Wadsworth, 1987.


郝钢新 译

**通用算法** [**universal algorithm**; **универсальный алгоритм**], 对一给定算法类的

一个依赖于输入参数 $p$ 的**算法** (algorithm), 对 $p$ 的不同的可允许的值模拟一给定类中任意算法的工作. 可计算性的不同陈述对应于通用算法的概念的不同精细化. 对**递归函数** (recursive function) 它是通用部分递归函数 (见**通用函数** (universal function)). 对 Turing 机它是通用 **Turing 机** (Turing machine), 对正规算法它是**通用正规算法** (universal normal algorithm), 等等.

**参考文献**


[1] Успенский, В. А., Лекции о вычислимых функциях, М., 1960 (英译本: Uspenskiĭ, V. A., Leçons sur les fonctions calculables, Hermann, 1966).

[2] Мальцев, А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965 (英译本: Mal'tsev, A. I., Algorithms and recursive functions Wolters-Noordhoff, 1970).

[3] Rogers, Jr. H., Theory of recursive functions and effective computability, McGraw-Hill, 1967.


С. Н. Артемов 撰 杨东屏 译

**动力系统中的万有性态** [**universal behaviour in dynamical systems**; **универсальное поведение в динамических системах**]

【补注】 在 70 年代末, P. Coullet 和 C. Tresser ([A6]) 以及 M. Feigenbaum ([A8]) 独立地发现了在一维动力系统由简单的动力学转到浑沌动力学时, 有惊人的, 未曾料到的特点出现 (亦见**通向浑沌的道路** (routes to chaos)). 以二次映射族 $f_\mu(x) = 1 - \mu x^2$ 为例, 这里 $f_\mu$ 作用在区间 $x \in [-1, 1]$ 上 $(0 \leqslant \mu \leqslant 2)$, 它使人想起周期加倍的场景 (period-doubling scenario). 当 $\mu = 2$ 时, $f_\mu$ 有每一个(最小)周期的周期点. 令 $\mu_i$ 是使 $f_\mu$ 具有最小周期 $2^i$ 的周期轨道的参数值 $\mu$ 之下确界. 于是

$$0 < \mu_0 < \mu_1 < \cdots,$$

而且

$$\sup \mu_i = \mu_\infty \sim 1.401155\cdots.$$

当 $\mu_i < \mu \leqslant \mu_{i+1}$ 时, $f_\mu$ 的动力学可以用以下三个命题来描述.

i) $f_\mu$ 具有恰好一个(最小)周期为 $2^j$ 的周期轨道 $\Lambda_j$, $j = 0, 1, \cdots, i$, 而没有其他周期轨道.

ii) $\Lambda_i$ 的任一对相邻点都被 $\bigcap_{j<i}\Lambda_j$ 中的唯一点所分离.

iii) 除了 (可能是可数多个) 轨道与 $\Lambda_j$, $j < i$, 相接触, 从而停留在 $\Lambda_j$ 上以外, 每一个 $f_\mu$ 轨道均渐近地趋向 $\Lambda_i$.

对于 $\mu = \mu_\infty$ (这时 $f_\mu$ 有时亦称为 Feigenbaum 映射 (Feigenbaum mapping)), 命题 i) 成立而 $j$ 可取一切非负整数值, ii) 也对每个 $i = 0, 1, \cdots$ 成立; 此外, 下面与 iii) 相类似的命题也成立:

iv) (当 $\mu = \mu_\infty$ 时) $f_\mu$ 之图象的扭转点 $x = 0$ 之轨道的闭包是一个 Cantor 集 $\Lambda_\infty$, 而每一个不与任何周期轨道 $\Lambda_i$, $i = 0, 1, \cdots$, 相接触的轨道均以 $\Lambda_\infty$ 为渐近极限. 映射 $f_\mu$ 的限制 $f_\mu|_{\Lambda_\infty}$ 是最小同胚 (即"加法机" (adding machine)).

最后, $\mu = \mu_\infty$ 是"混沌"在以下意义下的阈值:

v) $\mu > \mu_\infty$ 时 $f_\mu$ 有无穷多不同的周期轨道以及正的拓扑熵.

这类"拓扑的"或组合的图象的许多特点, 已为这个领域的许多早期研究者所了解, 具体说来有 P. J. Myrberg ([A12]) 和 N. Metropolis, M. L. Stein 和 P. R. Stein ([A13]). 他们也认识到周期轨道 $\Lambda_j$ 的组合构造是由 $f_\mu$ 为单模的这一事实严格地决定了的 (见 [A14]). 从本质上说, 上述的命题可以对任一族单模映射提出 (见 [A9]). 事实上, $\mu_i$ 的 (弱) 单调性, 还有以下事实, 即若 $\mu < \mu_\infty$, $f_\mu$ 必有最小周期 $2^j$ 的周期轨道存在, 这里 $j = 0, 1, \cdots$ 直到某个 $i$, 而且再也没有其他周期轨道, 对于任何一族直线上的连续映射, 均可从 Шарковский 定理 (Sharkovskiĭ theorem) 推出 ([A16], [A2]); 最近的工作, 还对一维连续映射的周期轨道的组合构造提供了更一般的了解 (见 [A1]).

Coullet, Tresser 和 Feigenbaum 对上述的拓扑特性还加上了一些分析和数值的特性:

vi) $\mu_i \uparrow \mu_\infty$ 的收敛性是渐近几何级数形的:

$$\lim_{i\to\infty}\frac{\mu_\infty-\mu_i}{\mu_\infty-\mu_{i+1}}=\delta\sim 4.669\cdots;$$

vii) 周期轨道是成比例的：用 $\Lambda_i^*$ 表示 $\mu=\mu_{i+1}$ 时的轨道 $\Lambda_i$；则

$$\lim_{i\to\infty}\frac{\operatorname{dist}(0,\Lambda_i^*)}{\operatorname{dist}(0,\Lambda_{i-1}^*)}=\alpha\sim 2.5029\cdots.$$

这些命题是对二次映射的特殊族 $f_\mu$ 提出的，在技巧上虽然有趣，却并不那么令人吃惊．然而，他们发现了，v) - vii) 对很广泛一类单模的单参数族也成立，只要满足很平凡的"满"条件（本质上就是 $f_0$ 只有有限多个周期轨道，而 $f_2$ 有正熵）以及一些光滑性条件（本质上就是 $(x,\mu)\mapsto f_\mu(x)$ 为 $C^2$ 而每一个 $f_\mu$ 均有一个非退化临界点）．轰动的是常数 $\delta$ 和 $\alpha$ 对一切族 $f_\mu$ 都是一样的．

在[A6]和[A8]中用来自重正化理论中的思想把这些断言归结成为关于作用于适当的函数空间上的加倍算子（doubling operator）$\mathscr{A}$ 的技术性的猜想．O. Lanford 在[A11]中对下述基本的猜想给出了一个严格的、计算机辅助的证明，即 $\mathscr{A}$ 有一个鞍点型的不动点，且有一个特征乘子 $\delta\sim 4.669\cdots$（与 vi) 一样）还有一个余维数 1 的稳定流形（亦见[A3]，[A5]）．D. Sullivan（[A17]）证明了这个不动点在"二次形状"映射的空间中的唯一性．关于稳定流形和某个分岐子流形横截这个最后的猜想仍未得证．最近，Sullivan（[A8]）引入了一些新思想，绕过了这个困难，对于 $C^2$ 单模映射族的万有性态给出了一个相当完整的理论．特别是关于 Cantor 集 $\Lambda_\infty$ 和出现在参数的其他"阈"值（即"有界型无限可重正化映射"）时的类似集合的渐近几何性态都是万有的；例如集合 $\Lambda_\infty$ 的 **Hausdorff 维数**（Hausdorff dimension）项为 0.538045．[A18]和[A7]中有这个理论的完整的叙述．

这些思想也已用于圆周的微分同胚（[A10]，[A15]）和保面积平面微分同胚上（[A4]，[A15]）．

**参考文献**


[A1] Alsedà, Ll., Llibre, J. and Misiurewicz, M., Combinatorial dynamics and entropy in one dimension, to appear.

[A2] Block, L., Guckenheimer, J., Misiurewicz, M. and Young, L.-S., Periodic points and topological entropy of one dimensional maps, Lecture notes in math., 819, Springer, 1980, 18 - 34.

[A3] Campanino, M., Epstein, H. and Ruelle, D., On the existence of Feigenbaum's fixed points, *Comm. Math. Phys.*, **79** (1981), 261 - 302.

[A4] Collet, P., Eckmann, J.-P. and Koch, H., On universality for area-preserving maps of the plane, *Physica*, **3D** (1981), 457 - 467.

[A5] Collet, P., Eckmann, J-P. and Lanford, O, Universal properties of maps on an interval, *Comm. Math. Phys.*, **76** (1980), 211 - 254

[A6] Coullet, P. and Tresser, C., Itérations d'endomorphismes et groupe de rénormalisation, *J. Phys.*, **C5** (1978), 25 - 28.

[A7] Mello, W. de and Strien, S. van, One-dimensional dynamics, to appear.

[A8A] Feigenbaum, M., Quantitative universality for a class of non-linear transformations, *J. Stat. phys.*, **19** (1978), 25 - 52.

[A8B] Feigenbaum, M., The universal metric properties of a non-linear transformation, *J. Stat. Phys.*, **21** (1979), 669 - 706.

[A9A] Jonker, L. and Rand, D., Bifurcations in one dimension, *Invent. Math.*, **62** (1981), 347 - 365.

[A9B] Jonker, L and Rand, D., Bifurcations in one dimension, *Invent. Math.*, **63** (1981), 1 - 16.

[A10] Jonker, L. and Rand, D., Universal properties of maps of the circle with $\varepsilon$-singularities, *Comm. Math. Phys.*, **90** (1983), 273 - 292.

[A11A] Lanford, O., A computer-assisted proof of the Feigenbaum conjectures, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **6** (1982), 427 - 434.

[A11B] Lanford, O., Computer assisted proofs in analysis, in A. M. Gleason (ed.), Proc. Internat. Congress of Mathem. (*Berkeley* 1986), Amer. Math. Soc., 1987, 1385 - 1394.

[A12] Myrberg, P. J., Sur l'itération des polynomes réels quadratiques, *J. Math. Pures Appl.*, **41** (1962), 339 - 351.

[A13] Metropolis, N., Stein, M. L. and Stein, P. R., On finite limit sets for transformations on the unit interval, *J. Comb. Theory*, **15A** (1973), 25 - 44.

[A14] Milnor, J. and Thurston, W., On iterated maps of the interval, in J. C. Alexander (ed.), Dynamical Systems (Proc. Maryland, 1986 - 7). Lecture notes in math., Vol. 1342, Springer, 1988, 465 - 563.

[A15A] Rand, D., Universality and renormalization in dynamical systems, in T. Bedford and J. W. Swift (eds.), New Directions in Dynamical Systems, Cambridge Univ. Press, 1987, 1 - 56.

[A15B] Rand, D., Global phase space universality, smooth conjugacies and renormalization; the $C^{1+\alpha}$ case, *Nonlinearity*, **1** (1988), 181 - 202.

[A16] Sharkovskiĭ, A. N., Coexistence of cycles of a continuous map of the line into itself, *Ukrain. Mat. Zh.*, **16** (1964), 61 - 71（俄文）.

[A17] Sullivan, D., Quasiconformal homeomorphisms in dynamics, topology and geometry, in A. M Gleason (ed.), Proc. Internat. Congress Mathem (Berkeley, 1986), Amer Math. Soc., 1987, 1216 - 1228.

[A18] Sullivan, D., Bounds, quadratic differentials, and renormalization conjectures, Centennial Publ., 2.

Amer. Math. Soc., 1991.

Z. Nitecki 撰 齐民友 译

**万有覆叠** [**universal covering; универсальное накрытие**]

一个**覆叠**(covering),每个另外的覆叠都是从属于它的.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 空间 $Y$ 的一个覆叠 $p: X \to Y$ 从属于覆叠 $p': X' \to Y$,如果存在一个覆叠 $f: X' \to X$ 使得 $p' = pf$.

徐森林 译

**泛包络代数** [**universal enveloping algebra; универсальная обертывающая алгебра**],交换环 $k$ 上 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的含单位元的

含单位元的结合 $k$ 代数 $U(\mathfrak{g})$,连同映射 $\sigma: \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$,使得下列性质成立:1) $\sigma$ 是 Lie 代数的同态,即 $\sigma$ 是 $k$ 线性的,并且 $\sigma([x,y]) = \sigma(x)\sigma(y) - \sigma(y)\sigma(x)$, $x, y \in \mathfrak{g}$;2) 对每个具有单位元的结合 $k$ 代数 $A$ 和每个使得 $\alpha([x,y]) = \alpha(x)\alpha(y) - \alpha(y)\alpha(x)$ ($x, y \in \mathfrak{g}$) 成立的 $k$ 线性映射 $\alpha: \mathfrak{g} \to A$,存在唯一的结合代数同态 $\beta: U(\mathfrak{g}) \to A$,使得 $\alpha = \beta \circ \sigma$,并将单位元映到单位元.泛包络代数在同构下是唯一的,并且总是存在的:若 $T(\mathfrak{g})$ 是 $k$ 模 $\mathfrak{g}$ 的**张量代数**(tensor algebra),$I$ 是由所有形如 $[x,y] - x \otimes y + y \otimes x$ ($x, y \in \mathfrak{g}$) 的元素生成的双边理想,$\sigma: \mathfrak{g} \to T(\mathfrak{g})/I$ 是典范映射,则 $T(\mathfrak{g})/I$ 是 $\mathfrak{g}$ 的泛包络代数.

若 $k$ 是 Noether 的,并且模 $\mathfrak{g}$ 是有限阶的,则代数 $U(\mathfrak{g})$ 是左和右 Noether 的.若 $\mathfrak{g}$ 是整环 $k$ 上的自由模,则 $U(\mathfrak{g})$ 没有零因子.对域 $k$ 上的任何有限维 Lie 代数 $\mathfrak{g}$,代数 $U(\mathfrak{g})$ 满足 Ore 条件(见**半群的嵌入**(imbedding of semi-groups)),因而有一个分式除环.

若 $V$ 是任意 $k$ 模,则每个 Lie 代数同态 $\mathfrak{g} \to \mathrm{End}\, V$ 可扩充为结合代数的同态 $U(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}\, V$.这建立了 $\mathfrak{g}$ 模范畴和左 $U(\mathfrak{g})$ 模范畴的一个同构.这一同构的存在性构成泛包络代数在 Lie 代数表示论中应用的基础(见[3],[4]).

Lie 代数 $\mathfrak{g}_1, \cdots, \mathfrak{g}_n$ 的直积的泛包络代数是代数 $U(\mathfrak{g}_i)$ 的张量积.若 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子代数,$\mathfrak{h}$ 和 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 是自由 $k$ 模,则典范同态 $U(\mathfrak{h}) \to U(\mathfrak{g})$ 是嵌入.若 $k'$ 是域 $k$ 的扩张,则 $U(\mathfrak{g} \otimes_k k') = U(\mathfrak{g}) \otimes_k k'$.泛包络代数有一个典范滤过 $U_0(\mathfrak{g}) \subset U_1(\mathfrak{g}) \subset \cdots$,这里 $U_0(\mathfrak{g}) = k \cdot 1$,当 $n > 0$ 时,$U_n(\mathfrak{g})$ 是 $U(\mathfrak{g})$ 的由积 $\sigma(x_1) \cdots \sigma(x_m)$ 生成的 $k$ 子模,这里 $m \leqslant n$,对所有 $i$, $x_i \in \mathfrak{g}$.同这一滤过相伴的分次代数 $\mathrm{gr}\, U(\mathfrak{g})$ 是交换的,并且由自然同态 $\mathfrak{g} \to \mathrm{gr}\, U(\mathfrak{g})$ 下的象所生成;这个映射确定了 $k$ 模 $\mathfrak{g}$ 的**对称代数**(symmetric algebra) $S(\mathfrak{g})$ 到 $\mathrm{gr}\, U(\mathfrak{g})$ 上的一个同态 $\delta$.根据 Poincaré-Birkhoff-Witt 定理(Poincaré-Birkhoff-Witt theorem),当 $\mathfrak{g}$ 是自由 $k$ 模时,$\delta: S(\mathfrak{g}) \to \mathrm{gr}\, U(\mathfrak{g})$ 是代数同构.以下是一个等价形式:若 $I$ 是一个全序集,$\{x_i\}_{i \in I}$ 是 $k$ 模 $\mathfrak{g}$ 的一组基,则单项式 $\sigma(x_{i_1}) \cdots \sigma(x_{i_n})$ ($i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_n$, $n \geqslant 0$) 构成 $k$ 模 $U(\mathfrak{g})$ 的一组基(特别地,$\sigma$ 是单射).

设 $Z(\mathfrak{g})$ 是 $U(\mathfrak{g})$ 的中心,则对特征为零的域上的任何有限维 Lie 代数 $\mathfrak{g}$,$\mathrm{gr}\, Z(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{gr}\, U(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{g})$ 由 $S(\mathfrak{g})$ 的 $G$ 不变元子代数组成.若 $\mathfrak{g}$ 是半单的,则 $Z(\mathfrak{g})$ 是在 $\mathrm{rk}\, \mathfrak{g}$ 个变量上的多项式代数.

泛包络代数的一个重要研究方向是研究**本原理想**(primitive ideal)(见[3]).

**参考文献**


[1] Bourbaki, N., Lie groups and Lie algebras, Elements of mathematics, Addison-Wesley, 1975, Chapts. 1 – 3 (译自法文).

[2] Bourbaki, N., Groupes et algèbres de Lie, Eléments de mathématique, Hermann, 1975, Chapts. 7 – 8.

[3] Dixmier, J., Enveloping algebras, North-Holland, 1977(译自法文).

[4] Кириллов, А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978(英译本: Kirillov, A. A., Elements of the theory of representations, Springer, 1976).

[5] Гельфанд, И. М., 《Матем. сб.》, 26 (1950), 103 – 112.

[6] Serre, J.-P., Lie algebras and Lie groups, Benjamin, 1965.


В. Л. Попов 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Jantzen, J. C., Einhüllende Algebren halbeinfacher Lie Algebren, Springer, 1983.


黎传仁 译

**通用函数** [**universal function; универсальная функция**],对一给定的类型为 $\mathbf{N}^n \to \mathbf{N}$ 的函数的(可数的)类 $K$ 的

一个类型为 $\mathbf{N}^{n+1} \to \mathbf{N}$ 的函数 $F(y, x_1, \cdots, x_n)$,使得对任意函数 $f(x_1, \cdots, x_n) \in K$ 有一 $i \in \mathbf{N}$ 使下式成立

$$f(x_1, \cdots, x_n) = F(i, x_1, \cdots, x_n), \qquad (*)$$

其中 $\mathbf{N}$ 是自然数集且 $(*)$ 的意思是函数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 和 $F(i, x_1, \cdots, x_n)$ 有相同的定义域,且有定义时值相同.有时通用函数定义还要求对每个 $i \in \mathbf{N}$,$F(i, x_1, \cdots, x_n)$ 在 $K$ 之中(见[4]).有一些通用函数定义的其他的变型(见[1],[2]).

对每个可数的函数类,通用函数是存在的.如下的通用函数在算法理论中起着重要作用:1) 对一切 $n$

$(n \geqslant 0)$ 元**部分递归函数**(partial recursive function)类的通用部分递归函数(universal partial recursive functions);对一切 $n$ 元**原始递归函数**(primitive recursive function)类的通用一般递归函数(universal general recursive functions).

若函数 $\psi(y, x)$ 是一切一元部分递归函数类的通用函数,那么它不可能扩张为一个全递归函数,且集合 $\{x \mid \psi(x, x)$ 有定义$\}$是一个自然数的递归可枚举但非递归的集合之例(亦见**可枚举集**(enumerable set)).

**参考文献**


[1] Peter, R., Recursive functions, Acad. Press, 1967(译自德文).

[2] Kleene, S. C., Introduction to metamathematics, North-Holland, 1951.

[3] Успенский, В. А., Лекции о вычислимых функциях, М., 1960(英译本: Uspenskiĭ, V. A., Leçons sur les fonctions calculables Hermann, 1966).

[4] Мальцев, А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965(英译本: Mal'tsev, A. I., Algorithms and recursive functions Wolters-Noordhoff, 1970).


C. Н. Артемов 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Rogers, Jr. H., Theory of recursive functions and effective computability, McGraw-Hill, 1967.


杨东屏 译

## 通用正规算法 [universal normal algorithm; универсальный нормальный алгорифм]

一个**正规算法**(normal algorithm) $\mathfrak{B}$,它在一种意义上(下面精确地说明)将任何在字母表 $A=\{a_1, \cdots, a_n\}$ 上的正规算法的工作模型化. 一个正规的在字母表 $B \supset A \cup\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ (其中 $A$ 不含有 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$) 上的算法称为是对 $A$ 通用的,如果对每一个 $A$ 上的正规算法 $\mathfrak{A}$ 和任意 $A$ 上的字 $P$

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{A}' \delta P) \simeq \mathfrak{A}(P).$$

这里 $\mathfrak{A}'$ 是正规算法 $\mathfrak{A}$ 的一个表示(见**算法的表示**(algorithm, representation of an)),$B$ 中的符号 $\delta$ 起分隔记号的作用. 通用正规算法的存在性是由 Марков 所证明的(见[1]). 一个通用正规算法的重要特征是它的复杂性(complexity),也就是说它的表示的长度(亦见**算法的描述复杂性**(algorithm complexity of description of an)). 一个具有最小复杂性的通用正规算法作为一个 $n$ 的函数($n$ 是字母表 $A$ 中字母的个数)曾被求得,它同 $5n+C$ 的上界和下界只差一个可加常数(见[2]).

**参考文献**


[1] Марков, А. А., Теория алгорифмов, М.-Л., 1954(Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 42).

[2] Жаров В. Г., О сложности универсального нормального алгорифма, в сб., Теория алгорифмов и математическая логика, М., 1974, 34 - 54.


C. Н. Артемов 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Markov, A. A. and Nagornyĭ, N. M., The theory of algorithms, Kluwer, 1988, Chapt. V(译自俄文).


罗里波 译 王世强 校

## 泛问题 [universal problems; универсальные проблемы]

【补注】 **范畴**(category)论中的一个概念. 令 $\mathscr{G}: \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ 是范畴 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{D}$ 之间的一个**函子**(functor),令 $D \in \mathscr{D}$. 由这一体系定义的泛问题要求去寻找 $D$ 在 $\mathscr{C}$ 中的"最好的逼近",即由对象 $C \in \mathscr{C}$ 和 $\mathscr{D}$ 中的态射 $l: \mathscr{D} \to \mathscr{G}(C)$ 组成的泛解 $(C, l)$,使得任取对象 $C' \in \mathscr{C}$ 及态射 $f: D \to \mathscr{G}(C')$,存在唯一的态射 $g: C \to C'$,使图形

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{l} & \mathscr{G}(C) \\ & \searrow^{f} & \downarrow{\scriptstyle \mathscr{G}(g)} \\ & & \mathscr{G}(C') \end{array}$$

可交换.

泛解存在,当且仅当函子 $\mathscr{D}(D, \mathscr{G}-): \mathscr{C} \to \mathrm{Sets}$ 是可表示的(由 $C$ 表示,见**可表示函子**(representable functor)). 对 $D$ 的任意选择均有泛解,当且仅当函子 $\mathscr{G}$ 有**左伴随函子**(adjoint functor) $\mathscr{F}: \mathscr{D} \to \mathscr{C}$. 泛问题的泛解在同构意义下唯一.

例. 1) 若 $\mathscr{G}$ 是从一个代数的范畴(如结合代数,交换结合代数,Lie 代数,向量空间,群)到集范畴的底(或遗忘)函子,则对任意集合 $X$,泛解是 $X$ 上的**自由代数**(free algebra).

2) 令 $\mathscr{G}$ 是将每一个有 1 的结合代数 $A$ 对应到 Lie 代数 $\mathrm{Lie}(A)$ 的函子,其中 $[a, b]=ab-ba$,则对一个 Lie 代数 $\mathfrak{g}$,泛解是 $\mathfrak{g}$ 的**泛包络代数**(universal enveloping algebra) $U(\mathfrak{g})$.

3) 对于从交换群范畴到群范畴的嵌入函子 $\mathscr{G}$: comm. Groups $\to$ Groups 及任意群 $G$,泛解是 $G$ 的换位子商群(commutator factor group)(见**换位子群**(commutator subgroup)).

4) 一般来说,代数范畴间的每一个底(遗忘)函子 $\mathscr{G}$ 对应的泛问题均有泛解,即这种函子 $\mathscr{G}$ 的相对自由对象(relatively free objects)存在.

5) 令 $\mathscr{G}: \mathscr{C} \to \mathscr{C} \times \mathscr{C}$ 是对角函子,$(A, B) \in \mathscr{C} \times \mathscr{C}$,泛问题可陈述如下:找到 $\mathscr{C}$ 中的一个对象 $C = A \amalg B$ 和 $\mathscr{C} \times \mathscr{C}$ 中的一对态射 $(l_A: A \to C, l_B: B \to C)$,使得任取对象 $C' \in \mathscr{C}$,任取态射对 $(f_A: A$

$\to C'$; $f_B: B \to C'$)，存在唯一的态射 $f: C \to C'$，使图形

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f_A} & C & \xleftarrow{f_B} & B \\ & \searrow^{f_A} & \downarrow f & \swarrow^{f_B} & \\ & & C' & & \end{array}$$

是交换的．泛解是 $A$ 和 $B$ 的余积（coproduct）.

6）考虑对偶情况，即用对偶于 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{D}$ 的范畴，可以得到对偶概念．令 $\Delta: \mathscr{C} \to \mathscr{C}\times\mathscr{C}$ 是对角函子，$(A,B)\in\mathscr{C}\times\mathscr{C}$，对偶泛问题的泛解是 $A$ 和 $B$ 的（范畴）积（product）$A\times B$.

7）一般来说，极限（limits）和上极限（colimits）均可由适当的泛问题的泛解得到．

**参考文献**


[A1] MacLane, S., Categories for the working mathematician, Springer, 1971.

[A2] Pareigis, B., Categories and functors, Acad. Press, 1970.


B. Pareigis 撰　张英伯 译

**泛性质［universal property; универсальное свойство］**

【补注】 范畴（category）中对象的一种性质，可刻画为定义于范畴上的某个（共变或反变）集值函子（functor）的表示对象．更形式地，令 $\mathscr{C}$ 是一个范畴，$F: \mathscr{C} \to \mathrm{Set}$ 是一个函子（为确定起见，此处仅处理共变函子），则 $F$ 的泛元（universal element）是一个对（$A$, $x$），其中 $A$ 是 $\mathscr{C}$ 的对象，$x\in F(A)$，使得对每个其他的这种对（$B$,$y$），存在 $\mathscr{C}$ 中唯一的态射 $f: A \to B$，满足 $F(f)(x)=y$．$Y$ 和 $f$ 间的对应定义了 $F$ 和函子 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,-)$ 间的自然同构；对象 $A$ 叫作函子 $F$ 的表示对象（representing object）或表示（representation）．其泛性质由泛元 $x$ 体现．

例．1）在任意范畴 $\mathscr{C}$ 中，（范畴）积 $A\times B$ 的泛性质由投射对（$p: A\times B \to A$, $q: A\times B \to B$）体现；即（$A\times B$, ($p$, $q$)）是一个（反变）函子的泛元，该函子使对象 $C$ 对应由所有态射对（$f: C \to A$, $g: C \to B$）组成的集合．

2）在交换环 $R$ 的模范畴中，张量积 $M\otimes_R N$ 的泛性质由双线性映射 $M\times N \to M\otimes_R N$ 体现；即 $M\otimes_R N$ 是将模 $P$ 送到双线性映射集 $M\times N \to P$ 的共变函子的表示对象．

体现了给定泛性质的对象由适当范畴中的典范同构唯一确定．通过泛性质刻画对象的想法是由 S. MacLane 最先提出来的（[A1]）.

**参考文献**


[A1] MacLane, S., Duality for groups, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **56** (1950), 485 – 516.


P. T. Johnstone 撰　张英伯 译

**全称量词［universal quantifier 或 universal quantor; всеобщности квантор］**

一个逻辑算子，用来形成"对于所有 $x$"的表示式所组成的命题．在形式语言中全称量词最常见的表示式记作 $\forall x$, $(\forall x)$，或者 $(x)$，也可以用记号 $(Ax)$, $\wedge$, $\bigcap$, $\prod$ 等．　В. Е. Плиско 撰

【补注】 亦见量词（quantifier）.

罗里波 译　王世强 校

**通用级数［universal series; универсальный ряд］**

一种函数级数

$$\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i(x),\ x\in[a,\ b], \tag{1}$$

借助于该级数，一个给定函数类中的所有函数都可以用某种方式来表示．例如，存在这样的级数（1），使得对每个 $[a,\ b]$ 上的连续函数 $f$，均可找到该级数的部分和子序列 $\sum_{i=1}^{n_k}\varphi_i(x)$，它在 $[a,\ b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

存在三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{i=1}^{\infty}(a_i\cos ix+b_i\sin ix), \tag{2}$$

其中系数趋于零，使得对每个在 $[0,\ 2\pi]$ 上（Lebesgue）可测的函数 $f$，均有级数（2）的部分和子序列几乎处处收敛于 $f(x)$.

称上述级数关于部分和子序列为通用的．还可以考虑通用级数的其他定义．例如，关于子级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{i_k}(x)$ 为通用的级数（1），或关于（1）的各项置换为通用的级数（1）.

**参考文献**


[1] Alexits, G., Convergence problems of orthogonal series, Pergamon, 1961（译自德文）.

[2] Бари, Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961（英译本：Bary, N. K. [N. K. Bari], A treatise on trigonometric series, Pergamon, 1964）.

[3] Талалян, А. А., 《Успехи матем. наук》, **15** (1960), 5, 77 – 141.


С. А. Теляковский 撰　王仁宏、檀结庆 译

**通用集［universal set; универсальное множество］，全域（universe），亦称全集或泛集**

一个固定于给定的基本理论框架之内并且含有在这个理论中所考虑的全体对象作为成员的集合．例如在初等算术理论中通用集就是全体整自然数所成的集合．通用集在集合论（set theory）中扮演了一个基本的角色．在这里所研究的对象是集合，所以通用集是所有集合的总体；可是这个总体本身就不再是集合了，也就是说它不再能被考虑成为集合论的一个对象．从这一点产生了与所有集合的集合的概念有关的

悖论（见 Cantor 悖论（antinomy））.

全体集合的集合是集合与类的理论的研究对象．在这个理论中与集合同时被考虑的还有（真）类——一些不可能作为其他集合或类的成员的对象．

**参考文献**


[1] Kleene, S. C., Mathematical logic, Wiley, 1967.

[2] Fraenkel, A. A., and Bar-Hillel, Y., Foundations of set theory, North-Holland, 1958.


В. Е. Плиско 撰

【补注】 亦见**类型论**（types, theory of）；**底集**（universe）.

罗里波 译 王世强 校

## 万有空间 [universal space; универсальное пространство]

含有确定类中任意拓扑空间同胚象的**拓扑空间**（topological space）．例如：1）$C[0, 1]$，见 **Banach 空间**（Banach space）；2）**Hilbert 立方体**（Hilbert cube）与 **Тихонов 立方体**（Tikhonov cube）；3）Menger 曲线（见**线（曲线）**（line (curve)）；4）万有 Milnor 丛（见**主纤维丛**（principle fibre bundle））.

万有空间的存在使人们有可能把抽象对象当作（范畴意义下）一个更具体对象的子对象来研究，并且赋予它们更多的"内在"性质．换言之，它特别强调的关系是"整体的部分"．

**参考文献**


[1] Александров, П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977（英译本：Aleksandrov, P. S., Introduction to set theory and general topology, Moscow, 1977）.

[2] Cohn, P. M., Universal algebra, Reidel, 1981.


М. И. Войцеховский 撰

【补注】 万有空间也有对偶概念：在确定类中的任何空间是本问题中空间的连续象．例如，**Cantor 集**（Cantor set）对于紧度量空间类是万有的，单位区间对于局部连通连续统（见 **Peano 曲线**（Peano curve））类是万有的，**伪弧**（pseudo-arc）对于蛇形连续统（snake-like continua）（见**拟立方体连续统**（cube-like continuum））类是万有的．

**泛函分析中的万有空间**．泛函分析中万有空间有着不同的概念．拓扑向量空间 $X_0$，对于拓扑向量空间类 $\mathscr{X}$ 是万有的（universal），如果对任意 $X \in \mathscr{X}$，存在 $X_0$ 的一个闭子空间与 $X$ 同构．对任意类 $\mathscr{X}$，总存在平凡万有空间，然而在 $\mathscr{X}$ 自身或在与之紧密相关的空间类中是否存在万有空间又是另一回事．下述定理成立（[A2]）：对所有 $F^*$ 空间类，存在万有可分 $F$ 空间．这里，$F$ 空间与 $F^*$ 空间定义如下：

线性空间 $X$ 上的 $F$ 范数（$F$-norm），是从 $X$ 到非负实数的映射 $\| \ \|$，使得：

1）$\|x\| = 0$，当且仅当 $x = 0$；

2）$\|ax\| = \|x\|$，对所有 $a$，$|a| = 1$；

3）$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$；

4）当 $a_n \to 0$ 时，$\|a_n x\| \to 0$；

5）当 $x_n \to 0$ 时，$\|a x_n\| \to 0$；

6）当 $a_n \to 0$，$x_n \to 0$ 时，$\|a_n x_n\| \to 0$.

条件 4)，5)，6) 中，拓扑由平移不变度量 $\rho(x, y) = \|x - y\|$ 引进．若 $\| \ \|$ 无须满足 1)，就称之为 $F$ 伪范数（$F$-pseudo-norm）．若 $\|ax\| = |a|^p \|x\|$，则 $F$ 范数或 $F$ 伪范数是 $p$ 齐次的（$p$-homogeneous）．1 齐次 $F$ 范数（$F$ 伪范数）就是**范数**（norm）（**伪范数**（pseudo-norm））．$F^*$ 空间（$F^*$-space）是具有 $F$ 范数的线性空间；$F$ 空间（$F$-space）是完全 $F^*$ 空间．

还有一些万有性结果：$C[0, 1]$ 对所有可分 Banach 空间是万有的（Banach-Mazur 定理（Banach-Mazur theorem），见**度量空间**（metric space））；$C(-\infty, \infty)$ 对所有可分 $B_0$ 空间是万有的（$B_0^*$ 空间（$B_0^*$-space）是局部凸度量线性空间，$B_0$ 空间（$B_0$-space）是完全 $B_0^*$ 空间））；存在可分局部伪凸空间，它对所有可分局部伪凸空间而言是万有的；存在具有 $p$ 齐次范数的可分局部有界完全空间 $X$，对于所有具有 $p$ 齐次范数的可分局部有界空间而言是万有的．（这里，$F$ 空间局部有界是指它包含 0 的有界邻域；局部伪凸空间（locally pseudo-convex space）是一个度量线性空间，其拓扑可由 $p_n$ 齐次伪范数族给出．）

对偶概念是上万有线性空间（co-universal linear space）．$F$ 空间 $X_0$ 对 $F$ 空间族 $\mathscr{X}$ 是上万有的，如果 $\mathscr{X}$ 的所有元素同构于 $X_0$ 关于其闭子空间 $Y$ 的商空间 $X_0 / Y$.

一些上万有性结果是：存在可分 $F$ 空间，它对所有可分 $F$ 空间是上万有的（[A2]）；任何具有 $p$ 齐次范数的可分局部有界空间 $X$ 是 $l_p$ 在连续线性算子下的象（[A3]－[A5]）.

对度量线性空间，包括上面所有内容的大量万有性定理和上万有性定理，见 [A6].

**参考文献**


[A1] Engelking, R., General topology, Heldermann, 1989.

[A2] Kalton, N. J., Universal spaces and universal bases in metric linear spaces, *Studia Math.*, **61** (1977), 161－191.

[A3] Shapiro, J. H., Examples of proper closed weakly dense subspaces in non-locally convex $F$-spaces, *Isr. J. Math.*, **7** (1969), 369－380.

[A4] Stiles, W. J., On properties of subspaces of $l_p$, $0 < p < 1$, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **149** (1970), 405－415.

[A5] Banach, S., Théorie des opérations linéaires, PWN, 1932.

[A6] Rolewicz, S., Metric linear spaces, Reidel, 1985.

罗嵩龄 译

**全域 [universe; универсум]**，亦称论域，底集

【补注】 一个在形式并、独体、子元素、幂集和取对之下封闭的集合 $U$；更精确地说，即

1) $I\in U$, $X_i\in U$ 意味着 $\bigcup_{i\in I}X_i\in U$;

2) $x\in U$ 意味着 $\{x\}\in U$;

3) $x\in X\in U$ 意味着 $x\in U$;

4) $x\in U$ 意味着 $\mathscr{P}(X)\in U$;

5) $(x,y)\in U$ 当且仅 $x,y\in U$.

在**公理集合论** (axiomatic set theory) 中无限全域的存在性等价于强不可达基数的存在性 (见**基数** (cardinal number)). 全域是 Zermelo - Fraenkel 集合论的模型. 全域的概念是 A. Grothendieck 在**范畴** (category) 论中引出的, 目的是给出 ($U$) 范畴间函子的自然变换的"集合", 以便得到更"大"的范畴论构造.

**参考文献**

[A1] Barwise, J. (ed.), Handbook of mathematical logic, North - Holland, 1977.

[A2] Gabriel, P., Des catégories abéliennes, *Bull. Soc. Math. France*, 90 (1962), 323 – 448.

[A3] Kunen, K., Set theory, North - Holland, 1980.

B. Pareigis 撰 张英伯 译

**非分歧特征标 [unramified character; неразветвленный характер]**

在局部域的 Galois 扩张 $K/k$ 的 **Galois 群** (Galois group) $G(K/k)$ 上的一个特征标 (见**群的特征标** (character of a group)), 它在惯性子群上是平凡的. 任一非分歧特征标都可看作是扩张 $K_{ur}/k$ 的 Galois 群的特征标, $K_{ur}$ 是 $K/k$ 的极大非分歧子域. 非分歧特征标是所有特征标构成的群的**子群**. 局部域 $k$ 的乘法群 $k^*$ 的特征标, 在 $k$ 的单位群上是平凡的, 也称为**非分歧的** (unramified). 这定义与前面的定义是一致的, 因为根据局部**类域论** (class field theory) 的基本定理, 对每个局部域的 Abel 扩张 $K/k$, 存在一个典范互反同态 $\theta: k^* \to G(K/k)$, 使得能将群 $G(K/k)$ 的特征标集合等同于 $k^*$ 的特征标群的某个子群.

对于整体域的 Galois 扩张 $K/k$, Galois 群 $G(K/k)$ 一个特征标 $\chi$ 称为在 $k$ 的一点 $\mathfrak{Y}$ 上非分歧的 (unramified) 是指对 $K$ 上任一在 $\mathfrak{Y}$ 之上的一点 $\mathfrak{P}$, $\chi$ 局限于 $\mathfrak{P}$ 的分解群上是前述意义下的非分歧特征标. 类似地, 在 $k$ 的伊代尔类群 $C(k)$ 上的一个特征标 $\chi$ 称作在 $\mathfrak{Y}$ 上非分歧的 (unvamified), 如果 $\chi$ 在 $k$ 相对于 $\mathfrak{Y}$ 的完全化 $k_{\mathfrak{Y}}$ 的单位群上的局限是平凡的, 群 $k^*_{\mathfrak{Y}}$ 是以标准方式嵌入 $C(k)$ 的.

从整体类域论可知, 与局部情形一样, 这两种在点 $\mathfrak{Y}$ 上非分歧的定义是一致的.

**参考文献**

[1] Weil, A., Basic number theory, Springer, 1974.

Л. В. Кузьмин 撰

【补注】 惯性子群的概念参见**分歧素理想** (ramified prime ideal) 和**惯性素理想** (inertial prime ideal).

冯绪宁 译

**非分歧理想 [unramified ideal; неразветвленный идеал]**

代数数域 (亦见**代数数** (algebraic number); **数域** (number field)) $K$ 中立于素数 $p$ 之上的**素理想** (prime ideal) $\mathfrak{P}$, 使得主理想 $(p)$ 在 $K$ 中分解为如下的素理想之积:

$$(p)=\mathfrak{P}_1^{e_1}\cdots\mathfrak{P}_s^{e_s},$$

其中 $\mathfrak{P}_1=\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_2,\cdots,\mathfrak{P}_s\neq\mathfrak{P}$, $e_1=1$. 更精确地说, 这样的非分歧理想称为**绝对非分歧的** (absolutely unramified). 一般地, 设 $A$ 为 **Dedekind 环** (Dedekind ring), $k$ 为 $A$ 的分式域, $K$ 为 $k$ 的有限扩域. $B$ 是 $A$ 在 $K$ 中的整闭包 (见**环的整扩张** (integral extension of a ring)). 处于 $A$ 的素理想 $\mathfrak{Y}$ 之上的 $B$ 的素理想 $\mathfrak{P}$ 称为在扩张 $K/k$ 下**不分歧**, 如果

$$\mathfrak{Y}B=\mathfrak{P}_1^{e_1}\cdots\mathfrak{P}_s^{e_s},$$

其中 $\mathfrak{P}_1,\cdots,\mathfrak{P}_s$ 是 $B$ 中互不相同的素理想, $\mathfrak{P}_1=\mathfrak{P}$, $e_1=1$. 如果所有的 $\mathfrak{P}_1,\cdots,\mathfrak{P}_s$ 都不分歧, 有时也称理想 $\mathfrak{Y}$ 在扩张 $K/k$ 下是非分歧的. 对于 Galois 扩张 $K/k$, $B$ 的一个理想 $\mathfrak{P}$ 是非分歧的, 当且仅当 $\mathfrak{P}$ 在 Galois 群 $G(K/k)$ 中的分解群等同于剩余类域扩张 $(B/\mathfrak{P})/(A/\mathfrak{Y})$ 的 Galois 群. 对于代数数域的任意有限扩张, 所有的理想除有限个外都是非分歧的.

**参考文献**

[1] Боревич, З. И., Шафаревич, И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972 (英译本: Borevich, Z. I. and Shafarevich, I. R., Number theory, Acad. Press, 1987).

[2] Lang, S., Algebraic number theory, Addison - Wesley, 1970

[3] Cassels, J. W. S., and Fröhlich, A. (eds.), Algebraic number theory, Acad. Press, 1986.

Л. В. Кузьмин 撰 裴定一 译 赵春来 校

**不可解性 [unsolvability; неразрешимость]**

用规定方法确切地解决一个给定问题的不可能性. 下面是数学中已经考虑过的不可解性的最重要的例子.

**算法不可解性** (algorithmic unsolvability). 在数学的各个领域中, 都提出了一些问题, 要求找一个统一

的方法（一个**算法**（algorithm）），从而能够解决一个给定的同型问题的无限类中的任何问题，这些问题称为可判定问题（decidability problems）. Hilbert 第十问题就是一个例子，它要求构造一个算法，通过这个算法可以决定任意给定的整系数多项式有无整数零点．很长一段时间，很多可判定问题没有得到解决：后来发现，解决它们的困难是带有原则性的困难．只有后来，20 世纪 30 年代在数理逻辑中精确地提出了算法概念并且证明了对于某些可判定问题所要求的算法不存在，这件事才得以证明．这样的可判定问题称为不可解的（unsolvable）或算法不可解的（algorithmically unsolvable）．由数学的各个分支提出的很多其他算法问题原来都是不可解的；特别是 Hilbert 第十问题是不可解的（亦见**算法问题**（algorithmic problem））.

一旦证明了一个给定的可判定问题算法不可解，则该类中每一个具体问题的解法要求有独特的方法，因此没有一个统一的方法解决所有这些问题．

不可判定命题（undecidable propositions）．构造数学理论的工具之一是**公理化方法**（axiomatic method）．在一个理论的公理化构造中，它的许多命题像公理一样取作初始命题，而其他命题作为它们的结论而得到．在 D. Hilbert 和他的学派的著作中，公理化理论概念更精确地被构造为**形式系统**（formal system）概念．Hilbert 设计了建立数学的纲领，特别是对于数学基本分支的形式化体系：算术，分析，集合论，也就是说，从公理出发构造的形式系统实际上可以导出所有数学定理．然而，1931 年 K. Gödel 证明了在一定意义下，算术的每个形式系统是不完全的，即在形式系统内可以用符号叙述一个命题，该命题在系统内不能证明也不能否证（即证明它的否定）．那样的命题称为在给定系统内不可判定（undecidable）或形式不可判定的（formally undecidable）．特别地，对于每一个包含算术的充分丰富部分的相容的形式系统，断言这个系统是相容的，证明在系统内是不可判定的（见 **Gödel 不完全性定理**（Gödel incompleteness theorem）．

在给定形式系统中一个命题的不可判定性表明，仅仅基于用公理和推导法则可以表达研究对象这一思想，不可能证明它的真或假．添加一些新公理以扩充形式系统，使得某些特殊的不可判定问题在扩张的系统中可以证明或否证，时常证明是可能的．在公理集合论中，不可判定命题的发现对于这个理论的发展有重要意义，它可促进对可以作为公理的新基本命题的探索．

初等数学中不可解的例子是几何中的作图问题，例如用直尺和圆规三等分一个角，以及把一个圆化为一个正方形．

**参考文献**

[1] Hilbert, D. and Bernays, P., Grundlagen der Mathematik, 1 – 2, Springer, 1968 – 1970.

B. E. Плиско 撰

【补注】 上面提出的许多问题在**不可判定性**（undecidability）中讨论的更详细更深入；特别是如何证明不可解性，可解性与不可解性之间的分界线，以及不可判定命题的存在性独立于公理化的问题．

卢景波 译　罗里波 校

**上界与下界**［**upper and lower bounds**; **верхняя и нижняя грани**］

实数轴上点集的特征．一个给定实数集的上确界是该集合上界中的最小数；它的下确界是它下界中的最大数．现在再说得更详细些．设 $X$ 为给定的实数子集．实数 $\beta$ 称为 $X$ 的上确界（least upper bound），记为 $\sup X$（来自拉丁文 "supremum"——最大），是指，对每个 $x\in X$，成立不等式 $x\leqslant\beta$，而对任意的 $\beta'<\beta$，则有 $x'\in X$ 使得 $x'>\beta'$．数 $\alpha$ 称为 $X$ 的下确界（greast lower bound），记为 $\inf X$（来自拉丁文 "infimum"——最小），是指一切 $x\in X$ 均满足 $x\geqslant\alpha$，而对任意 $\alpha'>\alpha$，则有 $x'\in X$，使得 $x'<\alpha'$．

例

$$\inf[a,b]=a,\ \sup[a,b]=b;$$

$$\inf(a,b)=a,\ \sup(a,b)=b;$$

若集合 $X$ 仅含两点 $a$ 与 $b$，$a<b$，则

$$\inf X=a,\ \sup X=b.$$

这些例子表明，在特殊情况下，上确界（下确界）可能属于该集合（例如区间 $[a,b]$ 的情形），也可能不属于该集合（例如区间 $(a,b)$ 的情形）．如果集合有最大（最小）数，那么这数显然就是该集合的上确界（下确界）．

无上界（无下界）的集合的上确界（下确界）用符号 $+\infty$（相应地用 $-\infty$）来表示．若 $\mathbf{N}=\{1,2,\cdots\}$ 为全体自然数的集合，则

$$\inf\mathbf{N}=1,\ \sup\mathbf{N}=+\infty.$$

假若 $\mathbf{Z}$ 是所有正整数和负整数的集合，那么

$$\inf\mathbf{Z}=-\infty,\ \sup\mathbf{Z}=+\infty.$$

每个非空实数集均有唯一有限或无限的上确界（下确界）．所有有上界的非空集都有有限的上确界，而所有有下界的集合则有有限的下确界．

集合的上确界（下确界）有时也称为集合的上确

限 (least upper limit of a set) (下确限 (greatest lower limit)). 一个实值函数, 特别是一个实数列的上确界 (下确界) 定义为它的值组成的集合的上确界 (下确界) (亦见**上极限与下极限** (upper and lower limits)).

**参考文献**


[1] Ильин, В. А., Позняк, Э. Г., Основы математического анализа, 3 изд., ч. 1, М., 1971 (英译本: Il'in, V. A. and Poznyak, E. G., Fundamentals of mathematical analysis, 1－2, Mir, 1982).

[2] Кудрявцев, Л. Д., Математический анализ, 2 изд., т. 1, М., 1973.

[3] Никольский, С. М., Курс математического анализа, т. 1, М., 1973 (中译本: С. М. 尼科尔斯基, 数学分析教程, 第一卷, 一、二分册, 人民教育出版社, 1980－1981).


Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】 通常, 某个实数集 $S$ 的一个上界是一个数 $b$, 满足 $x\leqslant b$ 对一切 $x\in S$ 成立. 而 $S$ 的上确界定义为这样的一个上界 $B$, 它对所有的上界 $b$, 均有 $B\leqslant b$.

下界以及下确界也有类似的定义. 如果 $S$ 的上确界属于 $S$, 那么它称为 $S$ 的最大值 (maximum). 如果 $S$ 的下确界属于 $S$, 那么它称为 $S$ 的最小值 (minimum).

**参考文献**


[A1] Apostol, T. M., Mathematical analysis, Addison-Wesley, 1974.

[A2] Rudin, W., Principles of mathematical analysis, McGraw-Hill, 1953 (中译本: W. 卢丁, 数学分析原理, 人民教育出版社, 1979).

[A3] Stromberg, K., An introduction to classical real analysis, Wadsworth, 1981.


王斯雷 译

**上函数与下函数方法 [upper-and-lower-functions method; верхних и нижних функций метод]**

证明微分方程边值问题解的存在性的一种方法. 在 G. Peano 的工作 (1880) 中讨论了这个方法的思想在常微分方程中的应用. 对于 **Dirichlet 问题** (Dirichlet problem) 的情况和 **Laplace 方程** (Laplace equation) 的情况, 这个思想出现在 H. Poincaré 的**扫除法** (balayage method) 中. 在后一情况中, O. Perron ([1]) 第一个给出上 (下) 函数方法完整的叙述.

设在空间 $\mathbf{R}^n (n\geqslant 2)$ 的区域 $G$ 中对具有连续系数的二阶线性齐次椭圆型方程

$$Lu\equiv\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+cu=0,$$

$$c\leqslant 0,\quad x\in G \tag{1}$$

提出 Dirichlet 问题, 其边值条件是

$$u(x)=f(x),\quad x\in\partial G. \tag{2}$$

在问题 (1), (2) 局部可解的条件下, 上 (下) 函数方法中要引入上调和函数 (以及相应地, 下调和函数) 的一种推广. $G$ 中连续的函数 $v$ 称作 $G$ 中的广义上调和函数 (generalized superharmonic function) (或相应地, 广义下调和函数 (generalized subharmonic function)), 如果对于任一充分小的球 $K(\bar{K}\subset G)$, 不等式 $(v)_K\leqslant v$ (或 $(v)_K\geqslant v$) 成立. 这里 $(v)_K$ 是一个 $G$ 中连续的函数, 它在 $K$ 外和 $K$ 的边界上等于 $v$, 在 $K$ 内则满足方程 (1). 对于在边界 $\partial G$ 上连续的函数 $f$, 一个广义上调和函数 (或相应地, 广义下调和函数) $v$, 若对 $x\in\partial G$ 均有 $v(x)\geqslant f(x)$ (相应地, $v(x)\leqslant f(x)$) 成立, 则 $v$ 称为上 (upper) 函数 (相应地, 下 (lower) 函数).

所有的上与下函数的类 $\Phi(G,f)$ 和 $\Psi(G,f)$ 均非空, 且若 $v\in\Phi(G,f)$, $w\in\Psi(G,f)$, 则 $v\geqslant w$ ([3]). Dirichlet 问题的广义解 (generalized solution of Dirichlet problem) 就定义为 $\Phi(G,f)$ 的最小包络或 $\Psi(G,f)$ 的最大包络:

$$u(x)=\inf\{v(x): v\in\Phi(G,f)\}$$
$$=\sup\{w(x): w\in\Psi(G,f)\},\ x\in G. \tag{3}$$

若边界 $\partial G$ 在每一点上都有**闸函数** (barrier) 存在, 则在 $\partial G$ 上处处有 $u(x)=f(x)$, 即 $u$ 为 Dirichlet 问题的古典解. 在一般情况下, 椭圆型方程 (1) 的广义解 (3) 在边界点的性态与 Laplace 问题广义解的性态完全平行 (见 **Perron 方法** (Perron method)).

上 (下) 函数方法也可以用于研究线性齐次二阶抛物型方程

$$Lu-\frac{\partial u}{\partial t}=0\quad (x,t)\in G\times[0,T]$$

的第一边值问题, 其初始条件为

$$u(x,0)=f(x,0),\quad x\in G,$$

边值条件为

$$u(x,t)=f(x,t),\ (x,t)\in\partial G\times[0,T].$$

这时引入了与广义上调和 (下调和) 函数有类似性质的上抛物 (下抛物) 函数 ([4]).

**参考文献**


[1] Perron, O., Eine neue Behandlung der ersten Randwertaufgabe für $\Delta u=0$, *Math. Z.*, 18 (1923), 42－54.

[2] Петровский, И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, 3 изд., М., 1961 (中译本: И. Г. 彼得罗夫斯基, 偏微分方程讲义, 人民教育出版社, 1956).

[3] Courant, R. and Hilbert, D., Methods of mathematical physics. Partial differential equations, 2, Interscience, 1965 (译自德文)(中译本: R. 柯朗, D. 希尔伯特, 数学物理方法, II, 科学出版社, 1977).

[4] Смирнов, В. И., Курс высшей математики, т. 4, 3 изд., М., 1957 (中译本: B. И. 斯米尔诺夫, 高等数学教程, 第四卷, 高等教育出版社, 1958).

Л. И. Камынин, Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 在公理化位势理论中, 这个方法通常称为 Perron-Wiener-Brelot 法 (Perron-Wiener-Brelot method). 它的一般形式是对任意满足最小值原理 (minimum principle) 的开集 $\Omega$ 以及任意数值边界函数 $f$, 定义了 Dirichlet 问题的上解 (upper solution) 为所有上函数 (upper function) 之最大下界, 后者即 $\Omega$ 上的下有界超调和函数 (hyperharmonic functions) $u$ 且在边界上有 $\liminf u \geqslant f$, 在某个紧集外 $u \geqslant 0$. 下解 (lower solution) 可用对偶的方式定义. 若上下解相等且为调和 (即满足微分方程), Dirichlet 问题就有广义解 (generalized solution), 这时就说边界函数是可解的 (resolutive). 见 [A1].

**参考文献**

[A1] Constantinescu, C. and Cornea, A., Potential theory on harmonic spaces, Springer, 1972.

齐民友 译

**上极限和下极限 [upper and lower limits; верхний и нижний пределы]**

1) 序列的上极限和下极限分别是给定的实数序列的所有部分 (有限的和无穷的) 极限 (limit) 中的最大极限和最小极限. 对于任何实数序列 $\{x_n\}$ $(n=1, 2, \cdots)$, 在扩充的数轴上 (即在增添符号 $-\infty$ 和 $+\infty$ 的实数集合中) 它的所有部分 (有限的和无穷的) 极限的集合是非空的, 并且具有最大元素和最小元素 (有限的和无穷的). 部分极限的集合的最大元素称为序列的上极限 (upper limit) (lim sup), 记为

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n \text{ 或 } \lim_{n\to\infty} \sup x_n,$$

而最小元素称为下极限 (lower limit) (lim inf), 记为

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n \text{ 或 } \lim_{n\to\infty} \inf x_n.$$

例如, 如果

$$x_n = (-1)^n$$

则

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = -1, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = 1.$$

如果

$$x_n = (-1)^n n,$$

则

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = -\infty, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = +\infty.$$

如果

$$x_n = n + (-1)^n n,$$

则

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = 0, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = +\infty.$$

任何序列都具有上极限和下极限, 并且如果一个序列是上 (下) 有界的, 则它的上 (下) 极限是有限的. 一个数 $a$ 是序列 $\{x_n\}$ $(n=1, 2, \cdots)$ 的上 (下) 极限, 当且仅当对于任何 $\varepsilon > 0$, 下述条件成立: a) 存在数 $n_\varepsilon$, 使得对于所有的指标 $n > n_\varepsilon$, 不等式 $x_n < a + \varepsilon$ $(x_n > a - \varepsilon)$ 成立; b) 对于任何指标 $n_0$, 存在指标 $n' = n'(\varepsilon, n_0)$, 使得对于所有的指标 $n' > n_0$, 不等式 $x_{n'} > a - \varepsilon$ $(x_{n'} < a + \varepsilon)$ 成立. 条件 a) 意味着: 对于给定的 $\varepsilon > 0$, 在序列 $\{x_n\}$ 中只存在有限个项 $x_n$, 使得 $x_n > a + \varepsilon$ $(x_n < a - \varepsilon)$. 条件 b) 意味着: 存在无穷多项 $x_n$, 使得 $x_n > a - \varepsilon$ $(x_n < a + \varepsilon)$. 如果两个极限都是有限的, 则通过改变序列各项的符号, 可使下极限化为上极限:

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = -\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n.$$

为使序列 $\{x_n\}$ $(n=1, 2, \cdots)$ 具有极限 (有限的或无穷的 (等于符号 $-\infty$ 和 $+\infty$ 之一)), 其必要和充分条件是

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n.$$

2) 函数 $f(x)$ 在一点 $x_0$ 处的上 (下) 极限是 $f(x)$ 在 $x_0$ 的一个邻域中的值的集合的上 (下) 界当这个邻域收缩到 $x_0$ 时的极限. 上 (下) 极限记为

$$\overline{\lim_{x\to x_0}} f(x) \left[\underline{\lim_{x\to x_0}} f(x)\right].$$

设函数 $f(x)$ 定义在度量空间 $R$ 上, 并且取实数值. 如果 $x_0 \in R$, $O(x_0; \varepsilon)$ 是 $x_0$ 的 $\varepsilon$ 邻域, $\varepsilon > 0$. 则

$$\overline{\lim_{x\to x_0}} f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\sup_{x\in O(x_0,\varepsilon)} f(x)\right]$$

和

$$\underline{\lim_{x\to x_0}} f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\inf_{x\in O(x_0,\varepsilon)} f(x)\right].$$

在每一点 $x \in R$ 处, 函数 $f(x)$ 具有上极限 $\overline{f(x)}$ 和下极限 $\underline{f(x)}$ (有限的或无穷的). 函数 $\overline{f(x)}$ 在 $R$ 上是上半连续的, 函数 $\underline{f(x)}$ 在 $R$ 上是下半连续的 (在取值于扩充数轴的函数的半连续概念的意义下, 见**半连续函数** (semi-continuous function)).

为使函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处具有有限的或无穷的 (等于 $+\infty$ 或 $-\infty$) 极限, 其必要和充分条件是

$$\underline{\lim_{x\to x_0}} f(x) = \overline{\lim_{x\to x_0}} f(x).$$

函数在一点上的上极限 (下极限) 的概念可以自

然地推广到定义在拓扑空间上的实值函数的情况.

3) 集合序列 $\{A_n\}$ $(n=1,2,\cdots)$ 的上极限和下极限分别是集合

$$\bar{A}=\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n,$$

它是由属于无穷多集合 $A_n$ 的元素 $x$ 组成的，以及集合

$$\underline{A}=\underline{\lim}_{n\to\infty}A_n,$$

它是由属于从某个指标 $n=n(x)$ 开始的一切集合 $A_n$ 的元素 $x$ 组成的. 显然，$\underline{A}\subset\bar{A}$.

**参考文献**


[1] Ильин, В. А., Позняк, Э. Г., Основы математического анализа, 3 изд., т. 1, М., 1971 (英译本: Il'in, V. A. and Poznyak, E. G., Fandamentals of mathematical analysis, 1 – 2, Mir, 1982).

[2] Колмогоров, А. Н., Фомин, С. В., Элементы теории функций и функционального анализ, 4 изд., М., 1976 (中译本: А. Н. 柯尔莫果洛夫, С. В. 佛明, 函数论与泛函分析初步, 上、下册, 高等教育出版社, 1992).

[3] Кудрявцев, Л. Д., Математический анализ, 2 изд., т. 1, М., 1973.

[4] Никольский, С. М., Курс математического анализа, т. 1, М., 1973 (中译本: С. М. 尼科尔斯基, 数学分析教程, 第一卷, 人民教育出版社, 1980, 1981).

[5] Hausdorff, F., Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig, 1914.


Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】 在英文中，上极限又称 superior limit 或 limit superior，下极限又称 inferior limit 或 limit inferior. 亦见**上界和下界** (upper and lower bounds).

一个集合的子集序列 $A_1, A_2, \cdots$ 的上极限和下极限由下列公式给出:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=k}^{\infty}A_m,$$

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}A_n=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{m=k}^{\infty}A_m.$$

**参考文献**


[A1] Rudin, W., Principles of mathematical analysis, McGraw-Hill, 1953 (中译本: W. 卢丁, 数学分析基础, 人民教育出版社, 1979).


杜小杨 张鸿林 译

**拓扑族的上界** [**upper bound of a family of topologies**; **верхняя грань семейства топологий**], 上确界 (least upper bound), 集合 $S$ 上的

$S$ 上所有拓扑 (包含给定族 $\mathfrak{M}$ 的所有拓扑) 中最细的那个拓扑 $\xi$ (见**拓扑的比较** (comparison of topologies)). 拓扑 $\xi$ 的子基 (subbase of the topology $\xi$) 可用 $S$ 的所有在族 $\mathfrak{M}$ 的至少一个拓扑中是开的那些子集族构成.

集合 $S$ 上 (具有上面定义的取任意子族的上界的运算及极小元 (平凡拓扑) 的) 所有可能拓扑的族是一个**完全格** (complete lattice). 拓扑族的上界，也称为拓扑族的归纳极限 (inductive limit of a family of topologies).

拓扑族的上界常采用下述解释. 设

$$T=\prod\{(S,\mathscr{T}):\mathscr{T}\in\mathfrak{M}\}$$

是把族 $\mathfrak{M}$ 中不同拓扑赋予集合 $S$ 得出的所有拓扑空间的 **Тихонов 积** (Tikhonov product). 设 $S^*$ 是 Тихонов 积的对角线 (diagonal of Tikhonov product), 即从 $\mathfrak{M}$ 映入 $S$ 的所有常值映射的集合 (换言之，是所有脉络 (thread) 的集合 $\{S_{\mathscr{T}}:\mathscr{T}\in\mathfrak{M}\}$，对所有 $\mathscr{T}$, $\mathscr{T}'\in\mathfrak{M}$, $S_{\mathscr{T}}=S_{\mathscr{T}'}$). 集合 $S^*$ 与集合 $S$ 有一种自然的一一对应关系 (这可以通过将集合 $T$ 投射到它的任何因子上来实现). 如果 $S^*$ 具有由空间 $T$ 导出的拓扑，且这个拓扑可以利用上述对应转移到 $S$ 上，那就得到族 $\mathfrak{M}$ 的上界. 拓扑族上界的这种解释，有助于理解任意 Hausdorff 拓扑族的上界是 Hausdorff 拓扑、任意 (完全) 正则拓扑族的上界是 (完全) 正则拓扑. 类似的结论不适用于正规拓扑族及仿紧拓扑族. 然而，可数个 (有可数基的) 可度量化拓扑的上界是 (有可数基的) 可度量化拓扑. 通常，对角线 $S^*$ 不在 $T$ 中闭，因此，两个紧拓扑的上界未必是紧的.

**参考文献**


[1] Kelley, J. L., General topology, Springer, 1975 (中译本: J. L. 凯莱, 一般拓扑学, 科学出版社, 1982).

[2] Bourbaki, N., Elements of mathematics, General topology, Springer, 1989 (译自法文).


А. В. Архангельский 撰 罗嵩龄 译

**瓮模型** [**urn model**; **урновая схема**]

概率论 (probability theory) 中最简单的模型之一. 瓮模型的一种描述如下: 考虑某个装着白和黑球的容器——瓮. 随机地从瓮中摸出一个球，然后将它及 $c$ 个与摸出的球有相同颜色的球和 $d$ 个另一颜色的球放回瓮中. 在将瓮中的球搅混之后，再重复这一手续若干次. 假定开始时瓮中装有 $a>0$ 个白球和 $b>0$ 个黑球. 瓮模型的参数 $c$ 和 $d$ 也可以是负数.

瓮模型为用条件概率来计算某些基本概率提供了一个便利的工具. 对于参数 $c$ 和 $d$ 取不同的值，可以得到概率论的许多熟知的模型: $c=0$, $d=0$ 是有放回随机选择模型 (见 **Bernoulli 试验** (Bernoulli trials)); $c=-1$, $d=0$ 是无放回随机选择模型; $c=1$, $d=-1$ 是 Ehrenfest 扩散模型; $c>0$, $d=0$

是 Pólya 瓮模型，等等．这些特殊情形可以作为很多实际现象的模型并提供了研究它们的方法．例如，Pólya 瓮模型就被用来描述流行病，其中任何事件的发生都增加了该事件随后发生的可能性．在瓮模型的框架中，概率论中的许多分布都可以被引进来，例如二项分布，超几何分布，几何分布，以及 Pólya 分布．负二项分布与 Poisson 分布则产生于某些瓮模型的极限分布．

**参考文献**


[1] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, 1－2, Wiley, 1957－1971（中译本：W．费勒，概率论及其应用，科学出版社，上册 1964，下册 1979）． А. В. Прохоров 撰


【补注】

**参考文献**


[A1] Johnson, N. L., Kotz, S., Urn models and their application, Wiley, 1977. 潘一民 译


**Урысон-Brouwer 引理［Urysohn-Brouwer lemma；Урысона-Брауэра лемма］**，Урысон-Brouwer-Tietze 引理（Urysohn-Brouwer-Tietze lemma）

关于拓扑空间子空间上连续函数扩张到整个空间的可能性的一个论断．设 $X$ 为**正规空间**（normal space），$F$ 为其闭子集，则任何连续函数 $f: F \to \mathbf{R}$ 可以扩张成连续函数 $g: X \to \mathbf{R}$，也就是能够找到一个连续函数 $g$，使得对所有 $x \in F$，$g(x) = f(x)$．进而，如果 $f$ 有界，则存在扩张 $g$，使得

$$\sup_{x \in F} |f(x)| = \sup_{x \in X} |g(x)|.$$

Урысон-Brouwer 引理，对 $X = \mathbf{R}^n$ 由 L．E．J．Brouwer 及 H．Lebesgue 证明，对任意度量空间 $X$ 由 H．Tietze 证明，而上面的描述则是 П．С．Урысон 给出的（它可以作为正规空间的刻画，因此是最好的）．

**参考文献**


[1] Урысон П. С., Труды по топологии и другим областям математики, т. 1, М.-Л., 1951, 177－218. И. Г. Кошевникова 撰


【补注】 这个论断也称为 Tietze-Урысон 扩张定理（Tietze-Urysohn extension theorem），或直接称为 Tietze 扩张定理（Tietze extension theorem）．

**参考文献**


[A1] Engelking, R., General topology, Heldermann, 1989. 罗嵩龄 译


**Урысон 方程［Urysohn equation；Урысона уравнение］**

形如

$$\varphi(x) = \lambda \int_{\Omega} K(x, s, \varphi(s)) ds + f(x), \quad x \in \Omega \quad (*)$$

的一种非线性积分方程，其中 $\Omega$ 是有限维 Euclid 空间中的一个有界闭集而 $K(x, s, t)$ 和 $f(x)$ 是对 $x$，$s \in \Omega$，$-\infty < t < \infty$ 的给定函数．设 $K(x, s, t)$ 对变量 $x$，$s \in \Omega$，$|t| \leq \rho$ 的集合是连续的（这里 $\rho$ 是某正常量），且设

$$\left| \frac{\partial K(x, s, t)}{\partial t} \right| \leq M = \text{常数}, \ x, s \in \Omega, |t| \leq \rho.$$

如果

$$|\lambda| M \operatorname{meas}(\Omega) < 1,$$

$$|\lambda| \max_{x \in \Omega} \int_{\Omega} \max_{|t| \leq \rho} |K(x, s, t)| ds \leq \rho,$$

则方程

$$\varphi(x) = \lambda \int_{\Omega} K(x, s, \varphi(s)) ds$$

有唯一的连续解 $\varphi(x)$，$x \in \Omega$，满足不等式 $|\varphi(x)| \leq \rho$．如果 $\varphi_0$ 是满足 $|\varphi_0(x)| \leq \rho (x \in \Omega)$ 的任一连续函数，则逼近序列

$$\varphi_n(x) = \lambda \int_{\Omega} K(x, s, \varphi_{n-1}(s)) ds, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

在 $\Omega$ 上一致收敛到 $\varphi(x)$．

设 Урысон 算子（Urysohn operator）

$$A\varphi(x) = \int_{\Omega} K(x, s, \varphi(s)) ds$$

作用于空间 $L_p(\Omega)$ $(p > 1)$ 中，且设对所有 $t_1$，$t_2$，$x$，$s \in \Omega$，满足不等式

$$|K(x, s, t_1) - K(x, s, t_2)| \leq K_1(x, s)|t_1 - t_2|,$$

其中 $K_1$ 是满足

$$\Delta^p = \int_{\Omega} \left[ \int_{\Omega} K_1^{p/(p-1)}(x, s) ds \right]^{p-1} dx < \infty$$

的一个可测函数．则对 $|\lambda| < \Delta^{-1}$ 和 $f \in L_p(\Omega)$，方程（$*$）在 $L_p(\Omega)$ 中有唯一解．

方程（$*$）在某些假设下首先由 П．С．Урысон 作了研究（见**非线性积分方程**（non-linear integral equation））．

**参考文献**


[1] Красносельский, М. А., Топологическое методы в теории нелинейных интегральных уравнений, М., 1956（英译本：Krasnosel'skii, M. A., Topological methods in the theory of nonlinear integral equations, Pergamon, 1964）.

[2] Интегральные уравнения, М., 1968（Справочная матем. б-ка）（英译本：Zabreyko, P. P., et al., Integral equations - a reference text, Noordhoff, 1975）.
Б. В. Хведелидзе 撰 葛显良 译 吴绍平 校

**Урысон 引理 [Urysohn lemma; Урысона лемма]**

正规空间 (normal space) $X$ 的任何两个不交闭集 $A$ 和 $B$，存在一个在所有点连续的实值函数 $f$，它在 $A$ 的所有点取值 0，在 $B$ 的所有点取值 1，而对所有 $x \in X$，满足不等式 $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$．这个引理表明，对于 $T_1$ 空间 $X$ 是正规空间，这个条件不仅是必要的，也是充分的（亦见**分离公理** (separation exiom)；**Урысон-Brouwer 引理** (Urysohn-Brouwer lemma))．

П. С. Александров 撰

【补注】"Урысон 引理"这个词，有时也用"**Урысон 度量化定理** (Urysohn metrization theorem)"代替．

**参考文献**

[A1] Arkhangel'skiĭ, A. V. and Ponomarev, V. I., Fundamentals of general topology: problems and exercises, Reidel, 1984, 123－124 (译自俄文).

[A2] Kelley, J. L. General topology, v. Nostrand, 1955, p. 115 (中译本: J. L. 凯莱, 一般拓扑学, 科学出版社, 1982).

罗嵩龄 译

**Урысон 度量化定理 [Urysohn metrization theorem; Урысона метризационная теорема]**

1) 紧或可数紧 **Hausdorff 空间** (Hausdorff space) 可度量化，当且仅当它有一个可数基．

2) 有可数基的**拓扑空间** (topological space) 可度量化，当且仅当它是正规的（见**正规空间** (normal space))，或者（由 А. Н. Тихонов 加上的）当且仅当它是正则的．

П. С. Александров 撰

【补注】

**参考文献**

[A1] Arkhangel'skiĭ, A. V. and Ponomarev, V. I., Fundamentals of general topology: problems and exercises, Reidel, 1984, Chapt. 5 (译自俄文).

[A2] Kelley, J. L., General topology, v. Nostrand, 1955, p. 125; 127 (中译本: J. L. 凯莱, 一般拓扑学, 科学出版社, 1982).

罗嵩龄 译

**Урысон 空间 [Urysohn space; Урысона пространство]**，满足 Урысон 分离公理 (Urysohn separation axiom) 的空间

一个**拓扑空间** (topological space)，其中任何不同两点都有不相交闭包邻域．

**参考文献**

[1] Александров, П. С., Урысон, П. С., Мемуар о компактных топологических пространствах, 3 изд., М., 1971.

[2] Архангельский, А. В., Пономарев, В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974 (英译本: Arkhangel'skiĭ, A. V. and Ponomarev, V. I., Fundamentals of general topology: problems and exercises, Reidel, 1984).

Б. А. Ефимов 撰

【补注】正则 $T_1$ 空间（见**正则空间** (regular space)；**分离公理** (separation axiom)）是 Урысон 空间，Урысон 空间是 **Hausdorff 空间** (Hausdorff space)．反之均不真．

**参考文献**

[A1] Engelking, R., General topology, Heldermann, 1989.

罗嵩龄 译

**效用理论 [utility theory; полезности теория]**

研究个体偏好及其数值函数表示的理论．备择 (alternative) 集 $X$ 上的一个偏好关系 (preference relation) 是 $X$ 上的完全传递二元关系 $R$；它被表示为 $X$ 上的数值函数 $u(x)$，且 $u(x)$ 称为效用函数 (utility function)，如果对于任何 $x, y \in X$，$xRy$ 导致 $u(x) \geqslant u(y)$，反之亦然．因此，效用函数研究序集及其到数值空间（通常是一维的）的单调映射．效用理论是由于经济学家在 18 世纪的研究所引起的；现代效用理论的基础是 J. von Neumann 和 O. Morgenstern ([1]) 在 20 世纪 40 年代奠定的．

显然，效用函数在有限集 $X$ 情形下存在．在无限集情形下，效用函数存在的充要条件为效用稠密可数子集 $A \subset X$ 的存在，即对于任何满足 $xR^*y$ 的 $x, y \in X \setminus A$，存在 $z \in A$，使得 $xR^*z$，且 $zR^*y$，这里 $R^*$ 是强偏好关系 (strong preference relation) ($xR^*y \Leftrightarrow xRy$ 和非 $yRx$)．如果 $X$ 是向量空间中的凸集，$R$ 在 $X$ 上连续，且对于任何 $x, y, z \in X$，$xR^*y$ 以及任何 $\alpha$，$0 < \alpha < 1$，有 $[\alpha x + (1-\alpha)z]R^*[\alpha y + (1-\alpha)z]$ 成立，那么存在在相差一个正线性变换的意义下唯一的线性效用函数 ([3])．各种较弱条件的组合导致非线性的、不连续的或在某种意义下不唯一的效用函数．例如，如果 $X$ 是向量空间，由 $xR^*y$ 导致 $(x+y)R^*(y+z)$，且 $\alpha x R^* \alpha y$ 对于所有 $z \in X$ 和 $\alpha > 0$ 成立，那么效用函数是单值的和分段线性的．

效用理论也研究随机定序和备选集的和或差的定序（在这些情形中，效用函数是由 $X$ 上的四元关系来构造的），以至把二元关系代替为 $n$ 元关系的推广，其中效用函数的构造同时具有主观概率，具有多分量备选集的效用和分量的效用间的关系，等等 ([3], [4])．

**参考文献**

[1] Neumann, J. von and Morgenstern, O., Theory of games and economic behavior, Princeton Univ. Press, 1947 (中译本: 约翰·冯·诺依曼, 奥斯卡·摩根斯特恩, 竞赛论与经济行为, 科学出版社, 1963).

[2] Birkhoff, G., Lattice theory, Colloq. Publ., 25, Amer. Math. Soc., 1973.

[3] Fishburn, P. S., Utility theory for decision making, Wiley, 1970.

[4] Суппес, П., Зинес, Дж., Психологические измерения. М., 1967 (译自英文). Э. Й. Вилкас 撰

【补注】 在效用理论的其他方面，可以提到可传递效用(transferable utility)([A4])，不完全偏好(incomplete preference)([A1])，非标准效用(non-standard utility)([A7])，以及大量有关效用表示对于经济理论有无意义的文献(见，例如，[A5]和[A6]，但是在可凹化偏好定序的特殊情形下，人们得到某种基数效用函数的度量([A2]，[A3]))。

**参考文献**

[A1] Aumann, R. J., Human Judgement and Optimality, Wiley, 1964, 217 – 242.

[A2] Kannai, Y., The ALEP definition of complementary and least concave utility functions, *J. Economic Th.*, **22** (1980), 115 – 117.

[A3] Kannai, Y., Generalized Concavity in Optimization and Economics, Acad. Press, 1981, 543 – 611.

[A4] Luce, R. D. and Raiffa, H., Games and decisions, Wiley, 1957.

[A5] Samuelson, P. A., Foundations of economic analysis, Havard Univ. Press, 1947.

[A6] Samuelson, P. A., *J. Economic Literature*, **12** (1974), 1255 – 1289.

[A7] Skala, H., Nonstandard utilities and the foundations of game theory, *Internat. J. Game Theory*, 3 (1974), 67 – 81.

[A8] Thrall, R. M., Coombs, C. H. and Davis, R. L., (eds.): Decision processes, Wiley, 1954.

[A9] Arrow, K. J. and Hahn, F. H., General competitive analysis, Oliver & Boyd, 1971.

[A10] Debreu, G., Continuity properties of Paretian utility, *Int. Econ. Review*, 5 (1964), 285 – 293.

[A11] Rader, J. T., The existence of a utility function to represent preferences, *Rev. of Econ. Studies*, **XXX** (1963), 229 – 232. 史树中 译

# V

**淡拓扑** [**vague topology**; **широкая топология**]，亦称宽拓扑

【补注】 设 $X$ 是局部紧 Hausdorff 空间，假定 $X$ 是第二可数的（second countable）（即具有可数基），则 $X$ 是 Polish 空间（Polish space）（存在完全可分度量化）. 设 $\mathfrak{X}$ 是 $X$ 的 Borel 域（Borel field），它由 $X$ 的拓扑（$X$ 的开子集的集合）所生成（见 **Borel 集域**（Borel field of sets）），$\mathfrak{B}$ 是 $\mathfrak{X}$ 的所有相对紧元素组成的环，即有界 Borel 集环（ring of bounded Borel sets），$\mathfrak{M}$ 是 $X$ 上所有 **Borel 测度**（Borel measure）的集合. 令 $\mathfrak{F}_c$ 是 $X$ 上具有紧支集的实值连续函数的空间. 称元素 $\mu_n \in \mathfrak{M}$ 构成的序列收敛于 $\mu \in \mathfrak{M}$，如果对一切 $f \in \mathfrak{F}_c$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f(x)\mu_n(dx)=\int_X f(x)\mu(dx), \qquad (*)$$

这样得到的 $\mathfrak{M}$ 上的拓扑，称为淡拓扑或宽拓扑（vague topology）. 如果要求（*）对一切有界连续函数成立，就得到 $\mathfrak{M}$ 上的弱拓扑（weak topology）. 这样，淡拓扑弱于弱拓扑. 两者的差别可通过下述观察来阐明：子集 $\mathscr{M} \subset \mathfrak{M}$ 关于淡拓扑为相对紧，当且仅当对一切 $\mu \in \mathscr{M}$ 有 $\mu(X) < \infty$；$\mathscr{M}$ 关于弱拓扑为相对紧，当且仅当对一切 $\mu \in \mathscr{M}$ 有 $\mu(X) < \infty$ 且 $\inf_{B\in\mathfrak{B}}\sup_{\mu\in\mathscr{M}}\mu(X\setminus B)=0$.

设 $\mathfrak{N}$ 是 $\mathfrak{M}$ 的所有整值元（即对一切 $B \in \mathfrak{B}$ 有 $\mu(B) \in \{0, 1, 2, \cdots\}$ 的 $\mu \in \mathfrak{M}$）构成的集合，则 $\mathfrak{N}$ 在 $\mathfrak{M}$ 中是淡闭的. $\mathfrak{N}$ 和 $\mathfrak{M}$ 对于淡拓扑都是 Polish 的.

如果概率空间（$\Omega$，$\mathscr{A}$，$P$）上实随机变量序列 $\{Y_n\}$ **依概率收敛**（convergence in probability）于随机变量 $Y$，则它们的相伴测度淡收敛. 如果 $Y$ 是 $P$ 几乎确定常数，则逆命题也成立.

**参考文献**


[A1] Bauer, H., Probability theory and elements of measure theory, Holt, Rinehart & Winston, 1972, § 7.7.

[A2] Kallenberg, O., Random measures, Acad. Press & Akad. Verlag, 1986, Chapt. 15.

[A3] Grandell, J., Doubly stochastic Poisson processes, Springer, 1976, Appendix.

[A4] Bourbaki, N., Intégration, Eléments de mathématique, Hermann, 1965, Chapt. 1－4, § 3.9.


沈永欢 译

**赋值** [**valuation**; **нормирование**]，对数范数（logarithmic norm），域上的

从域（field）$K$ 到 $\Gamma_\infty = \Gamma \cup \{\infty\}$ 中的映射 $v$: $K \to \Gamma_\infty$，其中 $\Gamma$ 是一全序的 Abel 群. 假定添加的元素 $\infty$ 比 $\Gamma$ 中任一元素都大，并且对 $\Gamma$ 中所有元素 $x$，有 $x + \infty = \infty + x = \infty$. 下面是赋值必须满足的条件：

1) $v(0) = \infty$，对于 $x \neq 0$，$v(x) < \infty$；

2) $v(a \cdot b) = v(a) + v(b)$；

3) $v(a - b) \geqslant \min v(a), (b))$.

$K^* = K \setminus \{0\}$ 在 $v$ 之下的象是 $\Gamma$ 的子群，称为赋值 $v$ 的值群（value group of the valuation）. 下面假定 $v(K^*) = \Gamma$.

根据同样的公理，可以定义环的对数赋值（logarithmic valuations of rings）. 每个具有非 Archimedes 范数（见**域上的范数**（norm on a field））的环可成为一个对数赋值环，只要在其值域中将乘法变为加法，并把次序颠倒一下就行了. 元素 0 自然地被记为 $\infty$. 反过来，从有对数赋值的环到有非 Archimedes 范数的环的转换也是可行的. 若一环中给定了一非 Archimedes **实范数**（real norm），则通过用 $-\log\alpha$ 代替正实数 $\alpha$ 可得到相应的变换，所得到的对数赋值也称为实的（real）.

两个赋值 $v_1: K \to \Gamma^1_\infty$ 和 $v_2: K \to \Gamma^2_\infty$ 称为是等价的（equivalent），如果存在一个序群之间的同构 $\varphi$: $\Gamma^1 \to \Gamma^2$，使得对所有 $K$ 中非零元 $x$ 有

$$v_2(x) = \varphi(v_1(x)).$$

$K$ 中使 $v(x) \geqslant 0$ 的 $x$ 的集合是 $K$ 的一个子环 $A$，称为 $v$ 在 $K$ 中的**赋值环**（valuation ring）．它恒为**局部环**（local ring）．$K$ 中使 $v(x) > 0$ 的 $x$ 构成 $A$ 中一个极大理想 $m_v$，称为 $v$ 的赋值理想（valuation ideal）．商环 $A/m_v$ 是一个域，称为赋值 $v$ 的剩余域（residue field of valuation）．

设 $v_1$ 和 $v_2$ 是域 $K$ 中两个赋值．它们的赋值环（看作是 $K$ 的子环）是相同的，当且仅当这两赋值是等价的．这样，欲知域 $K$ 的所有赋值（在等价意义下）等同于欲知该域的所有可作为赋值环的子环．$K$ 的一个子环 $A$ 是 $K$ 的一个赋值环，当且仅当对任一 $x \in K^*$，$x$ 与 $x^{-1}$ 中至少一个属于 $A$．于是赋值环可以抽象地定义为一个整环（**整环**（integral domain）），在其商域中满足上述条件．每个这样环都是其商域的所谓典范赋值（canonical valuation）的环，这种赋值的值群是 $K^*/U$，这里 $U$ 是 $A$ 的可逆元素生成的乘法群．$K^*/U$ 是依可除性排序的．

赋值环也用其他方法定义．若 $A \subseteq B \subseteq K$ 是两个局部环，其极大理想分别为 $m$ 和 $n$．如果 $m \subset n$，则 $B$ 优于（dominant）$A$．优性在 $K$ 的全部子环集合中定义了一个偏序，这个集合之极大元恰是 $K$ 的赋值环．如果 $A$ 是一赋值环，$B \supset A$，且环 $B$ 与 $A$ 有同一商域，则 $B$ 也是赋值环，它是 $A$ 相对于某素理想的局部化．

**赋值的例子**

1）由

$$v(x) = \begin{cases} 0, & \text{如 } x \neq 0, \\ \infty, & \text{如 } x = 0, \end{cases}$$

定义的赋值称为非正常的（improper）或平凡的（trivial），任一有限域的赋值是平凡的．

2）$k$ 为域，$K = k((t))$ 是 $k$ 上 Laurent 级数所构成的域，定义级数 $a_n t^n + a_{n+1} t^{n+1} + \cdots (a_n \neq 0)$ 的赋值为它的阶 $n$（0 级数赋值为 $\infty$），此赋值的值群为 $\mathbf{Z}$（整数加群），赋值环为 $k[[t]]$．

赋值的值在 $\mathbf{Z}$ 中，则称它为离散的（descrete）．关于这种赋值环见**离散赋范环**（discretely-normed ring）．关于有理数域上所有赋值的描述见 [4]．

对每个全序 Abel 群 $\Gamma$，存在一个域的赋值，以 $\Gamma$ 为值群．

**赋值环的理想**．赋值环中的理想集合按包含关系构成一全序集．每个有限型理想是主理想，即赋值环是一 **Bezout 环**（Bezout ring）．利用赋值的值群可给赋值环中理想的结构以最完全的描述．

全序集的一个子集 $M$ 称为优（major）集，如果由 $x \in M$，且 $y > x$，可得到 $y \in M$．设 $A$ 是域 $k$ 的赋值 $v$ 的环，值群为 $\Gamma$．$\Gamma^+$ 记 $\Gamma$ 中正元素作成的子半群，$M$ 是 $\Gamma^+$ 中的一优集．映射

$$M \mapsto \alpha(M) = \{x : x \in K, v(x) \in M \cup \{\infty\}\}$$

是 $\Gamma^+$ 的优集与 $A$ 的理想集之间的一个一一对应．主理想对应一个有极小元的优集．素理想也对应特殊形状的优集，即 $M_H = \Gamma^+ \setminus H^+$，$H^+$ 是 $\Gamma$ 的**凸子群**（convex subgroup）$H$ 的正部分．这样，在 $A$ 素理想集合与值群 $\Gamma$ 的凸子群之间存在着一一对应．

设 $p$ 是对应于凸子群 $H$ 的素理想，则合成映射 $K \xrightarrow{v} \Gamma \to \Gamma/H$ 是 $K$ 的一个赋值．赋值环为 $A_p$，赋值理想为 $pA_p$，进一步在 $A_p/pA_p$ 上有一诱导赋值，取值在 $H$ 中，赋值环为 $A/p$．用这方法将一个赋值分为较简单的几个赋值．设 $A$ 为赋值环．$A$ 去掉 0 的素谱（$\operatorname{Spec} A \setminus (0)$）是一全序集．它的型称为对应的赋值的高（height）或秩（rank）．如果 $\operatorname{Spec} A$ 是有限的，则赋值的高就是 $\operatorname{Spec} A \setminus (0)$ 的元素个数，这也就是 $\Gamma$ 的真凸子群的个数．有限秩赋值可约简为秩为 1 的赋值．后者主要特征是其值群是 Archimedes 的（见 **Archimedes 群**（Archimedean group）)，即它们同构于实数加法群 $\mathbf{R}$ 的子群．此时映射 $x \mapsto \exp(-v(x))$ 是 $K$ 上超度量范数．

赋值环的一个重要性质是它是整闭的．进而对任一整环 $A$，它的整闭包等于包有 $A$ 的所有赋值环的交．一赋值环是全整闭的，当且仅当它取值为实数，即秩为 1．一赋值环是 Noether 环，当且仅当赋值是离散的．

**赋值与拓扑**．设 $v: K \to \Gamma_\infty$ 是域 $K$ 的赋值，设 $V_\gamma = \{x | x \in K, v(x) > \gamma\}$，其中 $\gamma \in \Gamma$．所有的 $V_\gamma (\gamma \in \Gamma)$ 作为零的基本邻域组，则得到 $K$ 的拓扑 $\tau_v$，称为由赋值 $v$ 定出的拓扑．它是可分的且不连通的．拓扑 $\tau_v$ 可按通常法则诱导到 $A$ 之上，与局部环的拓扑不同，对 $K$ 上一非平凡赋值 $v$，拓扑 $\tau_v$ 是局部紧的，当且仅当 $v$ 是离散的，赋值环为完全的且剩余类域是有限域．于是 $A$ 是紧的．$K$ 在 $\tau_v$ 之下的完全化 $\hat{K}$ 是一个域．由连续性 $v$ 可扩张为 $\hat{v}$: $\hat{K} \to \Gamma_\infty$，$\hat{K}$ 的拓扑与 $\tau_{\hat{v}}$ 相同．$\hat{v}$ 的赋值环 $\hat{A}$ 是 $v$ 的赋值环 $A$ 的完全化．

$K$ 的两个赋值 $v_1$ 和 $v_2$ 称为无关的，如果两个拓扑 $\tau_{v_1}$ 与 $\tau_{v_2}$ 是不同的．这事实等价于环 $A_{v_1}$ 和 $A_{v_2}$ 生成 $K$．高为 1 的不等价赋值总是无关的．我们有赋值逼近定理（approximation theorem for valuations）：设 $v_i$: $K \to \Gamma^i_\infty (1 \leqslant i \leqslant n)$ 是两两无关的赋值，设 $a_i \in K$，$\alpha_i \in \Gamma^i$，则存在 $K$ 的一元素 $x$，使得对所有 $i$ 有

$v_i(x_i - a_j) \geqslant \alpha_i$.

**赋值的扩张.** 若 $v: L \to \Gamma'_v$ 是 $L$ 的赋值，$K$ 是 $L$ 的子域，则 $v$ 在 $K$ 上限制 $v = v'|_K$ 是 $K$ 的赋值，它的值群 $\Gamma$ 是 $\Gamma'$ 的子群．$v'$ 就称作 $v$ 的扩张 (extension)．反之，若 $v$ 是 $K$ 的赋值，$L$ 是 $K$ 的扩张，那么总有 $L$ 的一个赋值是 $v$ 的扩张．$\Gamma$ 在 $\Gamma'$ 中的指数 $[\Gamma':\Gamma]$ 称作 $v'$ 相对于 $v$ 的分歧指数 (ramification index)，记为 $e(v'/v)$，剩余类域 $k_v$ 可与 $K_{v'}$ 中一子域等同，扩张次数 $[k_{v'}:k_v]$ 称为 $v'$ 相对于 $v$ 的剩余次数 (residue degree)，记为 $f(v'/v)$．$v$ 的扩张 $v'$ 称为直接的 (immediate)，如果 $e(v'/v) = f(v'/v) = 1$.

设 $L$ 是 $K$ 的扩张，并设 $\{v_i: i \in I\}$ 是 $v$ 对 $L$ 的扩张的集合．如果 $L$ 是 $K$ 上有限次扩张，次数为 $n$，则 $v$ 的所有扩张集合是有限的，并有

$$\sum_{i \in I} e(v_i/v) f(v_i/v) \leqslant n.$$

在若干条件下，等号成立．例如，当 $v$ 是离散且或 $K$ 完全或 $L$ 在 $K$ 上可分时；若 $L$ 是 $K$ 的正规扩张，$v$ 在 $L$ 上的扩张被 $L$ 的 $K$ 同构可迁地置换；特别地，如果 $L$ 是 $K$ 的纯不可分扩张，则 $v$ 只有一个扩张．在任意域扩张 $K \subset L$ 的情形，$L$ 在 $K$ 上的超越次数大于或等于和

$$S(v'/v) + r(v'/v),$$

这里 $S(v'/v)$ 是 $v'$ 的剩余类域对 $v$ 的剩余类域的超越次数，$r(v'/v)$ 是空间 $(\Gamma_{v'}/\Gamma_v) \otimes \mathbf{Q}$ 的维数．

赋值概念是由 W. Krull ([1]) 引入和研究的．它也被广泛地应用于代数几何中．如用赋值的术语可以构造抽象 Riemann 曲面 (见 [3]).

**参考文献**

[1] Krull, W, Allgemeine Bewertungstheorie, *J. Reine Angew. Math.*, 167 (1932), 160 – 196.

[2] Bourbaki, N., Commutative algebra, Elements of mathematics, Addison-Wesley, 1972 (译自法文).

[3] Zariski, O. and Samuel, P., Commutative algebra, 2. Springer, 1975.

[4] Курош А. Г., Лекций по общей алгебре, 2 изд., М. 1973 (英译本: Kurosh, A. G., Lectures on general algebra, Chelsca, 1963).

В. И. Данилов 撰

【补注】

**参考文献**

[1] Endler, O. Valuation theory, Springer, 1972.

冯绪宁 译

**值分布论 [value-distribution theory; распределения значений теория]**, Nevanlinna 理论 (Nevanlinna theory)

由 R. Nevanlinna 于 20 世纪 20 年代开发的关于亚纯函数的值之分布的理论 (见 [1])．此理论的基本问题是研究区域 $G$ 中使函数 $w(z)$ 在其上取预先指定的值 $w = a$ 的点 (称为 $a$ 点 ($a$-point)) 构成的集合 $\{z_n\}$，这里 $a \in \mathbf{C} \cup \{\infty\}$.

**基本概念.** Nevanlinna 理论的基本内容可通过取 $w = f(z)$ 为开复平面 $\mathbf{C}$ 上的超越亚纯函数 (meromorphic function) 的情形加以说明．以 $n(t, a, f)$ 记 $f(z)$ 位于圆盘 $\{|z| \leqslant t\}$ 中的 $a$ 点数 (计及重数)．再对每个 $a \in \mathbf{C}$，定义

$$N(r, a, f) = \int_0^r [n(t, a, f) - n(0, a, f)] d\ln t + n(0, a, f) \ln r,$$

$$m(r, a, f) = m\left[r, \infty, \frac{1}{f-a}\right], \ a \neq \infty,$$

$$m(r, \infty, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\theta})| \} d\theta,$$

$$T(r, f) = m(r, \infty, f) + N(r, \infty, f).$$

$T(r, f)$ 称为 $f(z)$ 的 Nevanlinna 特征 (Nevanlinna characteristic) 或 Nevanlinna 特征函数 (Nevanlinna characteristic function)．函数 $m(r, a, f)$ 描述当 $|z| \to \infty$ 时 $f(z)$ 趋于 $a$ 的平均速率，而函数 $N(r, a, f)$ 描述 $f(z)$ 的 $a$ 点的平均分布密度．由下述定理可得 Nevanlinna 特征 $T(r, f)$ 的一个几何解释．以 $F_r$ 记 $f(z)$ 的 **Riemann 曲面** (Riemann surface) 对应于圆盘 $\{|z| \leqslant r\}$ 的部分，设 $\pi A(r, f)$ 是曲面 $F_r$ 的球面面积，则

$$T(r, f) = \int_0^r A(s, f) d\ln s + O(1) \quad (r \to \infty).$$

$T(r, f)$ 可用来确定 $f(z)$ 增长的级 $\rho$ 及其增长的下级 $\lambda$:

$$\rho = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln T(r, f)}{\ln r}, \ \lambda = \underline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln T(r, f)}{\ln r}.$$

Nevanlinna 第一基本定理 (Nevanlinna first main theorem): 当 $r \to \infty$ 时，有

$$m(r, a, f) + N(r, a, f) = T(r, f) + O(1);$$

这表明，不计 $r \to \infty$ 时的一个有界项，上式左边取常值 $T(r, f)$ (不管 $a$ 取何值)．在此意义下，亚纯函数 $f(z)$ 的所有值 $w$ 是等价的．函数 $N(r, a, f)$ 当 $r \to \infty$ 时的性态具有特殊意义；在值分布论中它被用于函数 $N(r, a, f)$ 和 $m(r, a, f)$ 的增长相对于特征 $T(r, f)$ 的增长的下述定量量度:

$$\delta(a, f) = 1 - \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{N(r, a, f)}{T(r, f)} = \underline{\lim_{r \to \infty}} \frac{m(r, a, f)}{T(r, f)} \leqslant 1,$$

$$\Delta(a, f) = 1 - \varliminf_{r\to\infty} \frac{N(r, a, f)}{T(r, f)} = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{m(r, a, f)}{T(r, f)} \leqslant 1.$$

量 $\delta(a, f)$ 称为 $f(z)$ 在 $a$ 处的 Nevanlinna 亏量 (Nevanlinna defect)，$\Delta(a, f)$ 称为 $f(z)$ 在 $a$ 处的 Valiron 亏量 (Valiron defect)．令

$$D(f) = \{a: \delta(a, f) > 0\},$$

$$V(f) = \{a: \Delta(a, f) > 0\}.$$

$D(f)$ 称为 $f(z)$ 的 Nevanlinna 意义下的亏值 (见亏值 (defective value)) 集，而 $V(f)$ 称为 $f(z)$ 的 Valiron 意义下的亏值集．关于 $f(z)$ 的亏量大小和亏值集的 Nevanlinna 定理 (Nevanlinna theorem) 如下：对任何亚纯函数 $f(z)$，有 a) 集合 $D(f)$ 至多为可数；b) $f(z)$ 的亏量满足关系

$$\sum_{(a)} \delta(a, f) \leqslant 2 \qquad (1)$$

(亏量关系 (defect relation))．(1) 中的常数 2 是扩充复平面 $C \cup \{\infty\}$ 的 Euler 示性数，而扩充复平面为 $f(z)$ 的 Riemann 曲面所覆叠．

**集合 $D(f)$ 的结构**．Nevanlinna 关于集合 $D(f)$ 至多为可数的论断不能再加强．事实上，给定扩充复平面中任一有限或可数点集 $E$ 和任一值 $\rho(0<\rho\leqslant\infty)$，存在 $\rho$ 级亚纯函数 $f_\rho(z)$，使得 $E$ 与 $D(f_\rho)$ 相同．对于下级为零的亚纯函数 $f$, $D(f)$ 可以至多含有一个点．这样，$D(f)$ 的结构问题完全得解．

此外可以证明，对任一 $\rho>1/2$，存在 $\rho$ 级整函数 $g_\rho(z)$，使集合 $D(g_\rho)$ 是可数的．下级 $\lambda\leqslant 1/2$ 的整函数不可能有有限亏值．

**集合 $V(f)$ 的结构**．Valiron 亏值集 $V(f)$ 的研究仍不完全 (1992)．G. Valiron 证明，存在 1 级整函数 $g(z)$，使集合 $V(g)$ 具有连续统基数．另一方面可以证明，对任一亚纯函数 $f(z)$，集合 $V(f)$ 的**对数容量** (logarithmic capacity) 恒为零．

对于任一对数容量为零的 $F_\sigma$ 类集合 $E$，存在无穷级整函数 $g(z)$，使得 $E\subset V(g)$．

**有限下级亚纯函数亏量的性质**．一般地说，对于无穷下级亚纯函数，其亏量并不满足除亏量关系 (1) 之外的任何别的关系．然而，如果限于考虑有限下级亚纯函数，则情形有相当大的变化．事实上，如果 $f(z)$ 具有有限下级 $\lambda$，则对任一 $\alpha(1/3\leqslant\alpha\leqslant 1)$，有

$$\sum_{(a)} \delta^\alpha(a, f) \leqslant K(\lambda, \alpha), \qquad (2)$$

其中常数 $K(\lambda, \alpha)$ 只依赖于 $\lambda$ 和 $\alpha$．另一方面，存在有限下级亚纯函数，使得 (2) 左边的级数当 $\alpha<1/3$ 时发散．对于下级 $\lambda\leqslant 1/2$ 的亚纯函数 $f(z)$，满足 $\delta(a, f)\geqslant 1-\cos\pi\lambda$ 的亏值 $a$ 的存在性影响 $f$ 的渐近性态：这样的函数不可能有别的亏值．

**值分布论的反问题**．在多少有点简化的形式下，能以下述方式表述任一亚纯函数类 $\mathscr{K}$ 的值分布论的反问题．对扩充复平面中某个序列 $\{a_k\}$ 的每个点 $a_k$ 指定一个数 $\delta(a_k)$ $(0<\delta(a_k)<1)$，使它们满足 $\sum_k \delta(a_k)\leqslant 2$．需要求出函数 $f(z)\in\mathscr{K}$，使得 $\delta(a_k, f)=\delta(a_k)$ $(k=1, 2, \cdots)$，且对每个 $a\neq a_k(k=1, 2, \cdots)$ 有 $\delta(a, f)=0$；或者证明 $\mathscr{K}$ 不含有这样的函数．对于无穷下级整函数类和无穷下级亚纯函数类，反问题已完全得到肯定的解．在解有限下级亚纯函数类反问题时出现了特殊困难，这是由于此时亏量满足除 (1) 外的别的关系 (例如 (2))．

**亚纯函数的增长**．给定亚纯函数 $f(z)$，令

$$L(r, \infty, f) = \max_{|z|=r} \ln^+|f(z)|,$$

$$L(r, a, f) = L\left(r, \infty, \frac{1}{f-a}\right), a\neq\infty,$$

$$\beta(a, f) = \varliminf_{r\to\infty} \frac{L(r, a, f)}{T(r, f)}.$$

$\beta(a, f)$ 称为 $f(z)$ 与 $a$ 的离差 (deviation)，集合 $\Omega(f)=\{a: \beta(a, f)>0\}$ 称为 $f(z)$ 的正离差集；$D(f)\subseteq\Omega(f)$．已知如果 $g(z)$ 是有限 $\rho$ 级整函数，则

$$\beta(\infty, g) = \begin{cases} \dfrac{\pi\rho}{\sin\pi\rho}, & 若 0<\rho<1/2, \\ \pi\rho, & 若 \rho\geqslant 1/2. \end{cases}$$

于是就有下述结论：如果亚纯函数 $f(z)$ 具有有限下级 $\lambda$，则 a) $\Omega$ 是至多可数集；b) 对每个 $a$，

$$\beta(a, f) \leqslant \begin{cases} \dfrac{\pi\lambda}{\sin\pi\lambda}, & 若 0<\lambda<1/2, \\ \pi\lambda, & 若 \lambda\geqslant 1/2; \end{cases}$$

c) 对任一 $\alpha(1/2<\alpha\leqslant 1)$，

$$\sum_{(a)} \beta^\alpha(a, f) \leqslant K(\lambda, \alpha),$$

其中常数 $K(\lambda, \alpha)$ 只依赖于 $\lambda$ 和 $\alpha$；d) $\Omega(f)\subseteq V(f)$．

再则，存在有限下级亚纯函数 $f$，使得集合 $\Omega(f)$ 具有连续统基数．对任一亚纯函数 $f$，集合 $\Omega(f)$ (类似于 $V(f)$) 具有零对数容量．下述定理刻画了 $\delta(a, f)$ 与 $\beta(a, f)$ 之间的差别：对任一 $\lambda(0\leqslant\lambda<\infty)$ 存在下级为 $\lambda$ 的亚纯函数 $f_\lambda(z)$，使对某个 $a$ 有

$$\delta(a, f) = 0, \ \beta(a, f) \geqslant 1.$$

**亚纯函数在 Picard 和 Borel 意义下的例外值**．$a$ 称为亚纯函数 $f(z)$ 的 Picard 意义下的例外值 (exceptional value)，如果 $f(z)$ 在 $\{|z|<\infty\}$ 中的 $a$ 点数

为有限．值 $a$ 称为 $f(z)$ 的 Borel 意义下的例外值，如果当 $r\to\infty$ 时 $n(r,a,f)$ 的递增（在某种意义下）慢于 $T(r,f)$．非常值亚纯函数不可能有多于两个 Borel（从而 Picard）例外值．

复流形的全纯映射的值分布论作为 Nevanlinna 理论的高维推广正成功地得到发展（见[6]、[7]），极小曲面的值分布论也是如此（见[9]，[10]）．

**圆盘内亚纯函数的值分布论**．开复平面内亚纯函数的值分布论已如上述；这是抛物情形．也能建立双曲情形即 $f(z)$ 是单位圆盘 $\{|z|<1\}$ 内的亚纯函数时的增长和值分布理论（见[1]，[8]）．此时函数 $N(r,a,f)$、$m(r,a,f)$，$L(r,a,f)$ 和 $T(r,f)$ 对 $0\leq r<1$ 如同抛物情形一样定义；而 $f(z)$ 在点 $a$ 的 Nevanlinna 和 Valiron 亏量定义如下：

$$\delta(a,f)=\varliminf_{r\to 1}\frac{m(r,a,f)}{T(r,f)},$$

$$\Delta(a,f)=\varlimsup_{r\to 1}\frac{m(r,a,f)}{T(r,f)}.$$

量

$$\beta(a,f)=\varliminf_{r\to 1}\frac{L(r,a,f)}{T(r,f)}$$

称为 $f(z)$ 关于 $a$ 的离差．令 $D(f)=\{a:\delta(a,f)>0\}$，$V(f)=\{a:\Delta(a,f)>0\}$，$\Omega(f)=\{a:\beta(a,f)>0\}$．

抛物情形下关于 $\delta(a,f)$，$\Delta(a,f)$ 和 $\beta(a,f)$ 的主要性质以及集合 $D(f)$，$V(f)$ 和 $\Omega(f)$ 的结构都可移植到双曲情形，但仅对于当 $r\to 1$ 时 $T(r,f)$（在某种意义下）急速增长的那些函数．

**参考文献**


[1] Nevanlinna, R., Analytic functions, Springer, 1970（译自德文）.

[2] Hayman, W. K., Meromorphic functions, Clarendon Press, 1964.

[3] Аракелян, Н. У.,《Докл. АН СССР》, **170** (1966), 5, 999－1002.

[4] Гольдберг, А. А., Островский, И. В., Распределение значений мероморфных функций, М., 1970.

[5A] Петренко, В. П.,《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **33** (1969), 6, 1330－1348.

[5B] Петренко, В. П.,《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **34** (1970), 1, 31－56.

[6] Griffiths, P., King, J., Nevanlinna theory and holomorphic mappings between algebraic varieties, *Acta Math.*, **130** (1975), 145－220.

[7] Шабат, Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 2, М., 1976（英译本：Shabat, B. V., Introduction to complex analysis, Part Ⅱ Functions of several variables, Amer. Math. Soc., 1992）.

[8] Петренко, В. П., Рост мероморфных функций, Хар., 1978.

[9] Петренко, В. П.,《Докл. АН СССР》, **256** (1981), 1, 40－42.

[10] Beckenbach, E. F., Hutchison, G. A., Meromorphic minimal surfaces, *Pacific J. Math.*, **28** (1969), 1, 17－47.


В. П. Петренко 撰

【补注】 值分布论反问题（以比条中所述较为深刻的形式）的解属于 D. Drasin（[A1]）；对于整函数的反问题先前已为 W. H. J. Fuchs 和 W. K. Hayman 解决（见[2]，第四章）．满足 $\sum_{(a)}\delta(a,f)=2$ 的有限下阶函数 $f$ 的刻画也属于 Drasin（[A2]）．(2) 中的和当 $\alpha=1/3$ 时为有限是 A. Weitsman 证明的（[A3]）；先前 Hayman 证明对 $\alpha>1/3$ 此论断为真，另一方面，存在有限阶亚纯函数，使 (2) 中的和对每个 $\alpha<1/3$ 发散．对于整函数，情形并不相同．近来 J. L. Lewis 和 J.-M. Wu 证明（[A4]），存在 $\alpha_0<1/3$，使得 (2) 中的和对任一 $\alpha>\alpha_0$ 和任何有限下阶整函数（entire function）$f$ 均收敛．事实上，按照 Н. У. Аракелян 早先的一个猜想，对于这类函数有 $\sum_{(a)}\{\log 1/\delta(a,f)\}^{-1}<\infty$．这或许是关于亏量尚未解决的主要问题．

关于多变量值分布论的详细讨论，见[A5]和[A7]中的论文．

P. Vojta 于 1986 年前后（[A6]）发现了值分布论的基本定理与来自 **Diophantus 逼近**（Diophantine approximation）的定理之间值得重视的类似性．设 $k$ 是 $d$ 次代数数域，$B\subset k$ 是一无穷子集．设 $S$ 是 $k$ 上的赋值（适当加以规范化）的一个有限集合，其中包括无穷赋值，所说类似性的指导原理在于，Nevanlinna 理论中 $r$ 的集合代之以 $B$，角 $\theta$ 变成 $S$ 的元素，而 $|f(re^{i\theta})|$ 变成 $\|b\|_v$．关于更完整的定义，见[A6]．类似于 $T(r,f)$ 的是 $h(b)=(1/d)\cdot\sum_v\log^+\|b\|_v$，类似于 $m(r,a,f)$ 的是 $m(a,b)=(1/d)\sum_{v\in S}\log\|1/(b-a)\|_v$，而 $N(r,a,f)$ 转为 $N(a,b)=(1/d)\sum_{v\notin S}\log^+\|1/(b-a)\|_v$．于是第一基本定理变为 $N(a,b)+m(a,b)=h(b)+O(1)$，而这是代数数论（algebraic number theory）中关于高的一个熟知性质．也能引进一种亏量 $\delta(a)=\liminf_{b\in B}m(a,b)/h(b)$，论断 $\sum_{a\in k}\delta(a)\leq 2$ 恰是关于代数数由 $k$ 中元素逼近的 Roth 定理（Roth theorem）．

多元亚纯函数值分布的类似转述导致 Diophantus 逼近和 Diophantus 方程领域中的一些令人极感兴趣的猜想．

**参考文献**


[A1] Drasin, D., The inverse problem of Nevanlinna theory. *Acta Math.*, **138** (1977), 83－151.

[A2] Drasin, D., Proof of a conjecture of F. Nevanlinna

concerning functions which have deficiency sum two, *Acta Math.*, **158** (1987), 1 - 94.

[A3] Weitsman, A., A theorem on Nevanlinna deficiencies, *Acta Math.*, **125** (1972), 41 - 52

[A4] Lewis, J. L., Wu, J.-M., On conjectures of Arakelyan and Littlewood, *J. d'Anal. Math.*, **50** (1988), 259 - 283.

[A5] Laine. I., Rickman, S. (eds.), Value distribution theory, Lecture notes in math., 981, Springer, 1983.

[A6] Vojta, P., Diophantine approximation and value distribution theory, Lecture notes in math., 1239, Springer, 1987.

[A7] Griffiths, P. A., Entire holomorphic mappings in one and several variables, Princeton Univ. Press, 1976.

【译注】

**参考文献**

[B1] 杨 乐，值分布论及其新研究，科学出版社，1982.

[B2] 张广厚，整函数和亚纯函数理论：亏值、渐近值和奇异方向，科学出版社，1986.

沈永欢 译

**van der Pol 方程 [van der Pol equation; ван дер Поля уравнение]**

二阶非线性常微分方程

$$\ddot{x}-\mu(1-x^2)\dot{x}+x=0,\ \mu=\text{正常数},$$
$$\dot{x}(t)\equiv\frac{dx}{dt}, \tag{1}$$

它是 **Liénard 方程** (Liénard equation) 的一个重要的特殊情形. van der Pol 方程描绘了最简单的振动系统之一 (van der Pol 振子 (van der Pol oscillator)) 的**自振动** (auto-oscillation). 特别是，在作出一些简化假定后，方程 (1) 可为具有 3 次特性的三极管发生器提供数学模型. 方程 (1) 的解的特性由 B. van der Pol 首次详尽研究 ([1]).

方程 (1) 等价于两个相位变量 $x$, $v$ 的下列两个方程的方程组:

$$\dot{x}=v,\ \dot{v}=-x+\mu(1-x^2)v. \tag{2}$$

有时用变量 $z(t)=\int_0^t x(\tau)d\tau$ 代替变量 $x$ 是方便的；此时方程 (1) 变为

$$\ddot{z}-\mu\left(\dot{z}-\frac{\dot{z}^3}{3}\right)+z=0,$$

它是 **Rayleigh 方程** (Rayleigh equation) 的特殊情形. 如果连同 $x$ 还考虑变量 $y=-x+(x^3/3)+(\dot{x}/\mu)$, 并引进新的时间变量 $\tau=t/\mu$, 令 $\varepsilon=-\mu^2$, 则代替方程 (1) 可得方程组

$$\varepsilon x'=y-x+\frac{x^3}{3},\ y'=-x,\ '=\frac{d}{d\tau}. \tag{3}$$

对任一 $\mu>0$, 在方程组 (2) 的相平面上存在唯一的稳定极限环，所有其他轨道 (除坐标系原点处的平衡位置外) 当 $t\to\infty$ 时都收敛于此极限环；这个极限环描绘了 van der Pol 振子的振动 ([2], [3], [4]).

对于小的 $\mu$ 值，振子 (1) 的自振动接近于周期为 $2\pi$ 且具有特定振幅的简谐振动 (见**非线性振动** (non-linear oscillations)). 为更精确地计算振动过程，可用渐近方法. 当 $\mu$ 增大时，振子 (1) 的自振动越来越偏离谐振动. 当 $\mu$ 取大的值时，方程 (1) 描绘了具有周期 $1.614\mu$ (第一级近似) 的**松弛振动** (relaxation oscillation). 已经知道刻画松弛振动的量的更精确的渐近展开式 ([5])；这些振动的研究等价于具有导数前小系数 $\varepsilon$ 的方程组 (3) 的解的研究 ([6]).

方程

$$\ddot{x}-\mu(1-x^2)\dot{x}+x=E_0+E\sin\omega t$$

描述受到周期外来扰动作用时 van der Pol 振子的行为. 这方面最重要的是研究频率俘获 (frequency capture) (周期振动的存在性)、拍 (beat) (殆周期振动的可能性) 和浑沌行为 (chaotic behaviour) ([2], [4]).

**参考文献**

[1A] Pol, B. van der, On oscillation hysteresis in a triode generator with two degrees of freedom, *Philos. Mag.*, (6) **43** (1922), 700 - 719.

[1B] Pol, B. van der, *Philos. Mag.* (7), **2** (1926), 978 - 992.

[2] Андронов, А. А., Витт, А. А., Хайкин, С. Э., Теория колебаний, 2 изд., М., 1959 (中译本: А. А. 安德罗诺夫, А. А. 维特, С. Э. 哈依金，振动理论，科学出版社，1973 - 1974).

[3] Lefschetz, S., Differential equations: geometric theory, Interscience, 1957 (中译本: S. 莱夫谢茨，微分方程几何理论，上海科学技术出版社，1965).

[4] Stoker, J. J., Nonlinear vibrations in mechanical and electrical systems, Interscience, 1950.

[5] Дородницын, А. А., 《Прикл. матем. и механика》, **11** (1947), 313 - 328.

[6] Мищенко, Е. Ф., Розов, Н. Х., Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания, М., 1975 (英译本: Mischenko, E. F., Rozov, N. Kh., Differential equaitions with small parameters and relaxation oscillations, Plenum Press, 1980).

Н. Х. Розов 撰

【补注】 对于小的 $\mu$ 值，已用符号演算计算出振幅和周期的级数的前 164 项，见 [A1]. [5] 中的计算在 [A2] 中得到改进. 关于自由和强迫 van der Pol 振子的最近概述，见 [A3].

**参考文献**

[A1] Dadfar, M. B., Geer, J. and Andersen, C. M., Per-

turbation analysis of the limit cycle of the free van der Pol equation, *SIAM J. Appl. Math.*, **44** (1984), 881 – 895.

[A2] Bavinck, H. and Grasman, J., The method of matched asymptotic expansions for the periodic solution of the van der Pol equation. *Int. J. Nonlin. Mech.*, 9 (1974), 421 – 434.

[A3] Grasman, J., Asymptotic methods for relaxation oscillations and applications, Springer, 1987.

[A4] Guckenheimer, J. and Holmes, P., Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields. Springer, 1983. 沈永欢 译

**van der Waerden 检验** [**van der Waerden test**; **ван дер Вардена критерий**]

两个样本 $Y_1,\cdots,Y_n$ 和 $Z_1,\cdots,Z_n$ 齐一性的**非参数检验**(non-parametric test), 基于**秩统计量**(rank statistic)

$$X=\sum_{i=1}^{m}\Psi\left[\frac{s(r_i)}{m+n+1}\right],$$

其中 $r_i$ 是在 $Y_j$ 和 $Z_i$ 的联合顺序统计量序列中随机变量 $Z_i$ 的秩(序数); 函数 $s(r)$ 决定于事先选定的置换

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & m+n-1 \\ s(1) & \cdots & s(m+n) \end{pmatrix},$$

而 $\Psi(p)$ 是参数为 $(0,1)$ 的**正态分布**(normal dstribution)函数的反函数. 置换的选取, 应使对于给定备选假设检验的功效最大. 当 $m+n\to\infty$ 时(不管 $m$ 和 $n$ 单独如何变化), $X$ 的极限分布是正态的. 如果 $Y$ 和 $Z$ 独立, 都服从正态分布, 且方差相等, 则对于备选假设($T$ 为任意实数):

$$\mathrm{P}\{Y<T\}<\mathrm{P}\{Z<T\} \text{ 或 } \mathrm{P}\{Y<T\}>\mathrm{P}\{Z<T\}$$

(这时 $s(r)\equiv r$), van der Waerden 检验与 **Student 检验**(Student test)在渐近意义下有相同功效. 此检验是 B. L. van der Waerden 在[1]中提出的.

**参考文献**

[1] Waerden, B. L. van der, Order tests for the two-sample problem and their power, *Proc. Kon. Nederl. Akad. Wetensch. A*, **55** (1952), 453 – 458.

[2] Waerden, B. L. van der, Mathematische statistik, Springer, 1957.

[3] Большев, Л. Н., Смирнов, Н. В., Таблицы математической статистики, М., 1983.

А. В. Прохоров 撰

【补注】

**参考文献**

[1] Lehmann, E. L., Testing statistical hypotheses, Wiley, 1988.

[2] Kendall, M. G. and Stuart, A., The advanced theory of statistics, 2, Griffin, 1979. 周概容 译

**van der Waerden 定理** [**van der Waerden theorem**; **ван дер Вардена теорема**], 关于算术级数的

**【补注】** 给定自然数 $l$, $m$, 一定存在数 $N(l,m)$, 使得当 $n\geqslant N(l,m)$ 及集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 分拆成 $m$ 个子集合时, 至少有一个子集合含有某个**等差数列**(arithmetic progression)中的相邻的 $l$ 项(见[A1]). 此外, 对于非有限情况, 等价的表述如下: 设 $X_1\cup\cdots\cup X_l=N$ 是自然数的有限分拆, 则至少有一个 $X_i$ 含有任意长的算术级数. 这一结果是 A. Baudet 猜测的. 设 $\mathscr{A}\subset\{1,2,\cdots\}$ 是一自然数集合而 $d(\mathscr{A})$ 是其上**渐近密度**(asymptotic density). 当讨论上述 van der Waerden 的定理时, P. Erdös 和 P. Turán 猜测若 $d(\mathscr{A})>0$ 则 $\mathscr{A}$ 含有任意长的算术级数(见[A2]).

设 $B(l,n)$ 是 $\{1,\cdots,n\}$ 的不含有算术级数中相邻 $l$ 个元素的极大子集, $b(l,n)$ 是 $B(l,n)$ 中元素的个数, 则有 Szemerédi 定理(Szemerédi theorem)(见[A3]): $\lim_{n\to\infty}n^{-1}b(l,n)=0$. 这一结果隐含了 Erdös-Turán 猜想(Erdös-Turán conjecture). Szemerédi 定理的另一证明由 H. Furstenberg 基于**遍历理论**(ergodic theory)(见[A4])的思想得出.

有关 van der Waerden 定理本身的历史说明见[A6].

**参考文献**

[A1] Waerden, B. L. van der, Beweis einer Baudetschen vermutung, *Nieuw Arch. Wisk.*, **15** (1927), 212 – 216.

[A2] Erdös, P. and Turán, P., On some sequences of integers, *J. London Math. Soc.*, **11** (1936), 261 – 264.

[A3] Szemerédi, E., On sets of integers containing no $k$-elements in arithmetic progression, *Acta Arithm.*, **27** (1975) 199 – 245.

[A4] Furstenberg, H., Ergodic behaviour of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions, *J. d'Anal. Math.*, **31** (1977), 204 – 256.

[A5] Furstenberg, H., Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory, Princeton Univ. Press, 1981.

[A6] Хинчин, А. Я., Три жемчужины теории чисел, Гостехиздат, Москва (英译本: Khinchin, A. Ya., Three pearls of number theory, Graylock, 1952).

戚鸣皋 译 潘承彪 校

**Vandermonde 行列式** [**Vandermonde determinant**; **Вандер-**

монда определитель]

一个 $n$ 阶行列式(determinant),具有下列形式:

$$B(a_1, \cdots, a_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}, \quad (*)$$

其中 $a_1, \cdots, a_n$ 是一个交换环的元素,对于任何 $n \geqslant 2$,有

$$B(a_1, \cdots, a_n)=\prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n}(a_i - a_j).$$

如果该交换环不含零因子,则下述 Vandermonde 行列式的基本性质成立:$B(a_1, \cdots, a_n)=0$,当且仅当并非所有的元素 $a_1, \cdots, a_n$ 彼此都不相同.这个行列式首先由 A. T. Vandermonde 对 $n=3$ 的情况进行研究([1]),后来又由 A. L. Cauchy 进行研究([2]).


**参考文献**

[1A] Vandermonde, A. T., Histoire Acad. R. Sci. Paris (1771(1774)), 365-416.

[1B] Vandermonde, A. T., Histoire Acad. R. Sci. Paris (1772(1776)), 516-532.

[2A] Cauchy, A. A., Mémoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux values, *J. École Polytechnique*, 17 (1815), 10, 29.

[2B] Cauchy, A. A., Mémoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux values, in Oeuvres Sér. 2, Vol. 1, Gauthier-Villars, 1905, 91-169.


В. Н. Ремесленников 撰

【补注】 由(*)中的元素构成的矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

称为 Vandermonde 矩阵(Vandermonde matrix).

在逼近论中用到了 Vandermonde 矩阵.例如,应用这个矩阵就可以证明:存在唯一的 $n$ 次多项式,在 $n+1$ 个不同的点上取预先指定的值,见[A1],p. 58.关于计算 Vandermonde 矩阵的逆矩阵的算法,见[A1],p. 64,问题 13.


**参考文献**

[A1] Cheney, E. W., Introduction to approximation theory, Chelsea, reprint, 1982.


杜小杨 张鸿林 译

**消没闭链[vanishing cycle; исчезающий цикл]**

【补注】 设 $X$ 是 $n$ 维有边界的复流形,$U$ 是 Riemann 曲面,$f: X \to U$ 是逆紧全纯映射,它在 $X$ 的边界上无临界点,在内部只有具有不同临界值的非退化临界点.设 $\gamma$ 是 $U$ 上一条道路,使得 $\gamma(0)$ 是 $f$ 的临界值但 $\gamma(\tau)$ 是正则值,这里 $\tau \in (0, 1]$.对 $V \subset [0, 1]$ 记 $X_V=\{(x, \tau) \in X \times V: f(x)=\gamma(\tau)\}$,则群 $H_n(X_{[0,1]}, X_1)$ 是无限循环群.生成这个群的 $X_{[0,1]}$ 上的 $n$ 链 $\Delta$ 称为 Lefschetz 籬(Lefschetz thimble),它的边缘 $\delta=\partial\Delta \in H_{n-1}(X_1)$ 是(Lefschetz)**消没闭链**((Lefschetz) vanishing cycle)([A1]).它被 $\gamma$ 唯一确定到差一个符号.有两个情形特别重要:射影簇的超平面截面的 Lefschetz 束(见**单值变换**(monodromy transformation))以及孤立完全交奇点的半普遍形变([A2],[A3]).在后一情形下首先限制半普遍形变到一条光滑曲线,它与判别式横截地相交.对于连接正则值 $t$ 到临界值的道路的适当选择能导出(或强或弱地)消没同调群 $H_{n-1}(X_t)$ 的特异基.

如果 $f: X \to \mathbf{C}$ 是复空间 $X$ 上的全纯函数,$K$ 是 $X$ 上可构造的层复形,则用以下方式可得到 $X_0=f^{-1}(0)$ 上的可构造层复形 $R\Psi_f(K)$.设 $H \to \mathbf{C}^*$ 是万有覆叠,$k: X \times_{\mathbf{C}} H \to X$,$i: X_0 \to X$ 是自然映射,则 $R\Psi_f K=i^{-1}Rk_*k^{-1}K$.函子 $R\Psi_f$ 称为**邻近闭链函子**(nearby cycle functor).在导出范畴 $D_c^b(X_0)$ 里存在特异三角形

$$i^{-1}K \to R\Psi_f K \to R\Phi_f K \xrightarrow{+1},$$

这里 $R\Phi_f$ 是与 $f$ 相伴的**消没闭链函子**(vanishing cycle functor)([A4]).

如果层复形 $K$ 是反常的,则对 $R\Psi_f K$ 和 $R\Phi_f K$ 有同样的结论.如果 $X$ 是复流形,则根据 Riemann-Hilbert 对应,在正则完整 $D_X$ 模的范畴里也有消没与邻近闭链函子 $\varphi_f, \psi_f$([A5],[A6])(亦见 **D 模**($D$-module),**导出范畴**(derived category)).它们在混合 Hodge 模的理论里起着关键的作用([A7]).


**参考文献**

[A1] Lefschetz, S., L'analysis situs et la géométrie algébrique, Gauthiers-Villars, 1924.

[A2] Arnol'd, V. I., Gusein-Zade, S. M. and Varchenko, A. N., Singularities of differentiable maps, II, Birkhäuser, 1988(译自俄文).

[A3] Ebeling, W., The monodromy groups of isolated singularities of complete intersections, Lecture notes in math., 1293, Springer, 1973.

[A4] Deligne, P. and Katz, N. M. (eds.), Groupes de monodromie en géométrie algébrique, SGA 7#, Lecture notes in math., 340, Springer, 1973.

[A5] Malgrange, B., Le polynôme de I. N. Bernstein d'une singularité isolée, Lecture notes in math., 459, Springer, 1976.

[A6] Mebkhout, Z., Systèmes différentiels. Le formalisme des six opérations de Grothendieck pour les $D_X$-modules cohérents, Hermann, 1989.

[A7] Saito, M., Mixed Hodge modules, *Publ. R. I. M. S. Kyoto Univ*, **26** (1990), 221–333.

J. Steenbrink 撰 陈志杰 译

**可变方向法 [variable-directions method; переменных направлений метод]**

用差分法或射影差分法逼近，例如，椭圆型偏微分方程边值问题的解时，求解出现的线性或非线性方程组的一种**迭代法** (iteration methods).

例如，假设有两个空间变量和一个正方形网格序列 $\omega_h$，其步长为 $h>0$，结点为 $x_i\equiv(i_1h, i_2h)$，其中 $i=(i_1,i_2)$ 是一个有整数分量的向量．令 $\Omega_h$ 是结点 $\omega_h$ 的集合，在 Euclid 空间 $H_h$，寻找形如

$$L_h(u_h)=f_h$$

的算子方程的差分或射影差分问题在 $\Omega_h$ 上的解．$H_h$ 可以看作是在 $\Omega_h$ 的结点上给出的函数空间；$H_h$ 的维数与 $\Omega_h$ 的点数 $N_h$ 一致．

令

$$A_hu_h(x_i)=\sum_{x_i, x_j\in\Omega_h}a_{i,j}u_h(x_{i+j}),\ x_i\in\Omega_h,\qquad(1)$$

是 $H_h$ 映射到 $H_h$ 的线性算子．在算子 (1) 中有这样一种算子，即 (1) 中非零系数 $a_{i,j}$ 仅对应于有 $j_2=0$ 的位移向量 $j\equiv(j_1,j_2)$．这样算子称为一维的 (one-dimensional)，它作用于 $x_1$，而且用 $A_{h,x_1}$ 表示；类似地，对有 $j_1=0$ 的位移向量，定义作用于 $x_2$ 的一维算子 $A_{h,x_2}$.

方程组

$$A_{h,x_r}u_h=g_h,\quad r=1,2,$$

分裂成单个的子方程组，其每个子方程组仅与网格中分离为水平 (对 $A_{h,x_1}$) 线或垂直 (对 $A_{h,x_2}$) 线结点上的 $u_h(x_j)$ 值有关．这个方法的特点在于应用形如

$$R_h=A_{h,x_1}A_{h,x_2}$$

的 $A_h$ 的交替算子．这时，解方程组

$$A_{h,x_1}A_{h,x_2}u_h=g_h,\qquad(2)$$

等于逐次解两个方程组

$$A_{h,x_1}v_h=g_h,\qquad(3)$$

$$A_{h,x_2}u_h=v_h,\qquad(4)$$

对上面的方程组，先解网格中在水平线上的分离子方程组 (情况 (3))，然后改变方向，解垂直线上的子方程组 (情况 (4))．通常，这样选取算子 $R_h$，使得求解 (3) 和 (4) 只含 $O(N_h)$ 次算术运算，因而 (2) 也只含 $O(N_h)$ 次算术运算．所以，方法中形如

$$R_h^{(n)}u_h^{(n+1)}=R_h^{(n)}u_h^{(n)}-(L_h(u_h^{(n)})-f_h),$$
$$n=0,1,\cdots,\qquad(5)$$

的每次迭代要求 $O(N_h)$ 次算术运算，其中上标 $n$ 代表迭代次数．

这种交换方向的做法可以得到最有效的结果，其中 $L_h$ 是一个自伴正定算子，而 $R_h^{(n)}$ 是一个自伴且可以与 $L_h$ 交换的算子．在那种情况，对任意 $\varepsilon>0$，经过 $M=O(|\ln\varepsilon||\ln h|)$ 次迭代，初始逼近的误差的范数可以降至 $\varepsilon^{-1}$ 倍．只有边值问题才碰到交换情况，这时，变量可以分离，所以，区域应是矩形．对方程

$$L_hu_h=(\Lambda_{h,x_1}+\Lambda_{h,x_2})u_h=f_h,$$

方法 (5) 的最普通的情况是方法

$$\left[\prod_{r=1}^{2}(E_h+\tau_{r,h}^{(n)}\Lambda_{h,x_r})\right](u_h^{(n+1)}-u_h^{(n)})=$$
$$=-\gamma_h^{(n)}(L_hu_h^{(n)}-f_h),$$

其中 $E_n$ 是恒等算子．

也应用基于各种变分原理的方法，在这种修正的方法里，可这样选取迭代参数，即使得从第 0 次迭代计算到一个给定指标的迭代时，使算子的范数减至最小．

这个方法常常用来作为算子 (这些算子按谱等价) 的二步迭代法中的内迭代过程，适用于变系数和非线性问题．

**参考文献**

[1] Peaceman, D. W. and Rachford, H. H., The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations, *SIAM J.*, **3** (1955), 1, 28–41.

[2] Дьяконов, Е. Г., Итерационные метод решения разностных аналогов краевых задач для уравнений эллиптического типа, К., 1970.

[3] Яненко, Н. Н., Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики, Новосиб., 1967 (中译本：H. H. 雅宁可，分数步法——数学物理中多变量问题的解法，科学出版社，1992).

[4] Самарский, А. А., Введение в теорию разностных схем, М., 1971.

[5] Марчук, Г. И., Методы вычислительной математики, 2 изд., М., 1980 (英译本：Marchuk, G. I., Methods of numerical mathematics, Springer, 1982).

Е. Г. Дьяконов 撰 袁国兴 张宝琳 译

**可变网格法 [variable-grid method; подвижных сеток метод]**

数学物理问题的一种数值求解方法，其中差分网

格(在差分网格上逼近基本问题的方程)不保持固定;在计算的时候,计算区中的网格随时改变. 与 Descartes 坐标系的轴平行的直线的交点就形成一个非常简单的差分网格(矩形网格),而且它极大地简化了描述基本问题的差分方程. 但是,要精确地表示复杂形状的边界以及它们的边界条件有相当大的困难,而且如果计算机设备有限制,这些困难常常是不可克服的. 这些困难在非定常数学物理问题中变得特别尖锐,这时,计算区域的边界是运动的,而且经受相当大的变形. 为了处理这种问题,算法的最重要的任务是构造一个坐标系,在这个坐标系中坐标线与边界一致.

在可变网格法的应用中,一开始就将计算区域分成有限个网格,这些网格不重迭而且充满整个区域,不留空隙. 当有两个空间变量时,最方便的是用两族线将计算区域分成矩形网格. 这时网格的计数很简单(计数类似于矩阵元按照行和列的计数).

在这样一种网格中,结点坐标的计算可以看作是对所要寻找的函数 $x(\xi,\eta)$ 和 $y(\xi,\eta)$ 的差分模拟,它规定了 $(\xi,\eta)$ 平面上某个参数区域,例如单位正方形 $0\leqslant\xi\leqslant 1$, $0\leqslant\eta\leqslant 1$ 到 $(x,y)$ 平面的物理区域(执行计算的区域)的单叶映射. 这些函数的边界值确定了参数正方形边上的点与物理区域边界上的点之间的某种一一对应关系. 这种对应应该是适合计算机计算的,它根据问题的详细内容计算在计算区域边界上网格的结点.

如果区域的形状简单,则结点的坐标可以用基于插值或一个具体映射形式的显式来计算. 在复杂区域的情况,可以应用一个迭代过程,即在每次迭代中根据邻点的位置重新计算结点的位置. 这样一类迭代过程通常是用来求解一个偏微分方程组而模拟的,在构造这些过程时,人们常常必须应用某些形式的共形或拟共形映射.

对数学物理问题(例如气体动力学),解的结构可以以区域的形态为特点,在这种区域中流参数有急剧的变化. 这种区域的尺度实质上可能比特征线尺度还小,同时它们的确切的位置事先可能不知道,或者在计算的时候随时可能改变. 由于这个原因,人们设计一些算法,以便能够应用更贴近这个区域的网格.

为了建立可靠的数值算法,构造网格的问题常常转变成求某个变分泛函极小的问题. 这个泛函可以包含控制参数,为将网格调整到适应特定问题的性质,控制参数的调整提供了这种手段和可能.

**参考文献**


[1] Численное решение многомерных задач газовой динамики, М., 1976.

[2] Сидоров, А. Ф., 《Численные методы механики сплошной среды》, 8(1977), 4, 149 – 156.

[3] Мещеряков, Ю. П., Шапеев, В. П., 《Численные методы механики сплошной среды》, 9(1978), 2, 91 – 103.

[4] Данаев, Н. Т., 《Численные методы механики сплошной среды》, 10(1979), 4, 60 – 74.

[5] Томас, П. Д., Миддлкофф, Д. Ф., 《Ракетная техника и космонавтика》, 18(1980), 7, 55 – 61


Г. П. Прокопов 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Hackbusch, W., Multi-grid methods and applications, Springer, 1985.


袁国兴 张宝琳 译

## 变分 [variation; вариация]

J. L. Lagrange([1])引进的表示一个自变数或一个泛函的小位移的数学术语. 变分法是研究极值问题的一种方法,在这种问题中研究由自变量的小位移而引起的泛函的变分. 这是研究极值问题的主要方法之一(因此有**变分学**(variational calculus)这名称).

设 $f$ 是给定在空间 $X$ 上的一个泛函,又设 $V$ 是一参数空间. 自变量 $x_0\in X$ 的变分(variation of the argument)是空间 $X$ 中一条普通曲线 $x(t,v)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, $\alpha\leqslant 0$, $\beta\geqslant 0$, $v\in V$, 它在有效限制所确定的某一邻域中通过 $x_0$. 设 $t=0$ 的值对应于 $x_0$. 当 $v$ 跑遍所有参数的集合时,变分跑遍某一个由 $x_0$ 出发的曲线族. 在有限维和无穷维分析中,由 Lagrange 开始,常常用方向变分(directional variation),其中 $V=X$ 而 $x(t,v)=x_0+tv$. 在这情况向量 $v$ 被称为变分. 然而,另外几类变分用于几何学,变分法,特别在最优控制理论中;这些包括折线变分(polygonal variations),针形变分(needle-shaped variations)或尖峰变分(spiked variations)和与滑动模态(sliding regimes)相联系的变分([2],[3]). 变分空间的选择和变分本身的构造是得出极值必要条件中的很重要的因素. 亦见**泛函的变分**(variation of a functional),**Gâteaux 导数**(Gâteaux derivative);**Fréchect 导数**(Fréchet dirivative);**泛函导数**(functional dirivative).

**参考文献**


[1] Lagrange, J., Essai, d'une nouvelle methode pour déteminer les maximas et les minimas des formules intégrals indéfinies, in Oevres, Vol. 1. Georg Olms. New York, 1973, 333 – 362.

[2] Bliss, G. A., Lectures on the calculus of variations, Chicago Univ. Press, 1947

[3] Понтрягин Л. С. [и др.], Математическая теория оптимальных процессов, 2 изд., М., 1969 (英译本: Pontryagin, L. S., et al., The mathematical theory of optimal processes, Wiley, 1962).


В. М. Тихомиров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Gel'fand, I. M. and Fomin, S. V., Calculus of variations, Prentice-Hall, 1963 (译自俄文).

[A2] Cesari, L., Optimization-theory and applications. Problems with ordinary differential equations, Springer, 1983.

葛显良 译 吴绍平 校

**函数的变差** [**variation of a function; вариация функции**]

与可微性有关的单实变元函数的一种数字特征.

1) 设 $f$ 为 $[a,b]$ 上定义的复数值函数; 它的变差是如下形式的和

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k)-f(x_{k-1})|$$

的上确界, 其中 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 是 $[a,b]$ 的任意一组分点. 这个定义是由 C. Jordan ([1]) 引入的. 如果 $V_a^b(f)<\infty$, 就称 $f$ 在 $[a,b]$ 上有(是)有界(有限)变差 (bounded (finite) variation)(的), 所有这样函数构成的类记为 $BV([a,b])$. 实值函数 $f$ 属于类 $BV([a,b])$, 当且仅当它能表示为 $f=f_1-f_2$ 的形式, 其中 $f_1$ 与 $f_2$ 为 $[a,b]$ 上的增函数 (有界变差函数的 **Jordan 分解** (Jordan decomposition)). $BV([a,b])$ 类中两函数的和、差与积仍为 $BV([a,b])$ 中的函数. $BV([a,b])$ 中两函数之商也属于 $BV([a,b])$, 只要分母的模在 $[a,b]$ 上大于一个正常数. $BV([a,b])$ 中每个函数都是有界的, 并且不可能有多于可数个不连续点, 且所有这些不连续点都是第一类的. $BV([a,b])$ 中函数的上述这些性质都是由 Jordan ([1]) 建立的.

$BV([a,b])$ 中的函数在 $[a,b]$ 上是几乎处处可微的, 且可表示为

$$f=A+S+D,$$

其中 $A$ 是绝对连续函数, $S$ 是奇异函数而 $D$ 为跃度函数 (有界变差函数的 **Lebesgue 分解** (Lebesgue decomposition)). 如果 $f(a)=A(a)$, 上述分解是唯一的 ([3], [2]).

函数类 $BV([a,b])$ 最初是由 Jordan 在研究逐段单调函数 Fourier 级数收敛性的 Dirichlet 判别准则的推广时引入的. 是他证明了, $BV([0,2\pi])$ 中的 $2\pi$ 周期函数的 Fourier 级数, 在实轴上处处收敛. 有界变差函数在数学的许多分支, 尤其是在 Stieltjes 积分的理论中有着广泛的应用.

有时也要考虑如下定义的函数类 $BV_\Phi([a,b])$. 设 $\Phi(u)$ $(u\geqslant 0, \Phi(0)=0)$ 为连续函数, 且当 $u>0$ 时单调增加. 记 $V_{\Phi a}^b(f)$ 为如下形式的和的上确界

$$\sum_{k=1}^{n} \Phi(|f(x_k)-f(x_{k-1})|),$$

其中 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 为 $[a,b]$ 中任意的分点. 量 $V_{\Phi a}^b(f)$ 称为 $f$ 在 $[a,b]$ 上的 $\Phi$ 变差 ($\Phi$-variation). 如果 $V_{\Phi a}^b(f)<\infty$, 那么称 $f$ 在 $[a,b]$ 上有有界的 $\Phi$ 变差, 并记这样的函数组成的类为 $BV_\Phi([a,b])$ ([4]). 若 $\Phi(u)=u$, 则得 Jordan 的类 $BV([a,b])$, 而若 $\Phi(u)=u^p$, $1<p<\infty$, 就得到 Wiener 类 $BV_p([5])$. 函数类 $BV_\Phi([a,b])$ 是由 L. C. Young ([6]) 提出的.

如果

$$\lim_{u\to+0}\sup\frac{\Phi_1(u)}{\Phi_2(u)}<\infty,$$

那么

$$BV_{\Phi_2}([a,b])\subset BV_{\Phi_1}([a,b]).$$

特别, 在任何区间 $[a,b]$ 上, 对于 $1\leqslant p<q<\infty$, $0<\alpha<\beta<\infty$, 关系式

$$BV_{u^p}\subset BV_{u^q}\subset BV_{\exp(-u^{-\alpha})}\subset BV_{\exp(-u^{-\beta})}$$

成立, 且均为严格包含式.

参考文献

[1] Jordan, C., Sur la série de Fourier, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math.*, **92** (1881) 5, 228 – 230.

[2] Натансон, И. П., Теория функций вещественной переменной, 2 изд., М., 1957 (中译本: И. П. 那汤松, 实变函数论, 高等教育出版社, 1958).

[3] Lebesgue, H., Leçons sur l'intégration et la récherche des fonctions primitives, Gauthier-Villars, 1928.

[4] Бари, Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961.

[5] Wiener, N., The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients, *J. Math. and Phys.*, 3 (1924), 72 – 94.

[6] Young, L. C., Sur une généralisation de la notion de variation de puissance $p^{ième}$ bornée au sens de M. Wiener et sur la convergence des series de Fourier, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **204** (1937), 470 – 472.

Б. И. Голубов 撰

【补注】 上面定义的函数的变差, 常称为全变差 (total variation). 它是负变差与正变差之和 (见**函数的负变差** (negative variation of a function); **函数的正变差** (positive variation of a function)). 成立着公式

$$V_a^b(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} N(y,f)\,dy,$$

其中 $N(y,f)$ 是 $f$ 的 **Banach 指标** (Banach indicatrix). 如果 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, 则

$$V_a^b(F)=\int_a^b |f(t)|\,dt.$$

参考文献

[A1] Hewitt, E. and Stromberg, K. R., Real and abstract analysis, Springer, 1965, p.266; 270; 272.

[A2] Saks, S., Theory of the integral, Hafner, 1937.

2) 对于多元函数，存在着好几种有关变差的定义(**Arzelà** 变差 (Arzelà variation); **Vitali** 变差 (Vitali variation); **Pierpont** 变差 (Pierpont variation); **Tonelli** 平面变差 (Tonelli plane variation); **Fréchet** 变差 (Fréchet variation); **Hardy** 变差 (Hardy variation)). 下面以应用 **Banach** 指标 (Banach indicatrix) 为基础的定义、实践证明是很有效的. 设在 $n$ 维方体 $Q_n$ 上给定了一个 Lebesgue 可测的实值函数 $f(x)=f(x_1,\cdots,x_n)$. $f$ 在 $Q_n$ 上的 $k$ 阶变差 $V_k(f)$, $k=1,2,\cdots,n$, 是指数

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_{k-1}(l_t)\,dt,$$

其中 $v_{k-1}(l_t)$ 表示集合 $l_t=\{x: x\in Q_n, f(x)=t\}$ 的 $(k-1)$ 阶变差 (见**集合的变差** (variation of a set)), 而积分理解为 Lebesgue 积分. 这个定义可使一元有界变差函数的许多性质转化到多元函数上去. 例如,

a) $V_n(f+g)\leqslant V_n(f)+V_n(g)$;

$$V_k(cf)=|c|V_k(f),\ k=1,2,\cdots,n.$$

b) 若在 $Q_n$ 上, 函数列 $f_s$, $s=1,\cdots$, 一致收敛于 $f$, 那么

$$V_k(f)\leqslant \liminf_{s\to\infty} V_k(f_s),\ k=1,\cdots,n.$$

c) 若函数 $f$ 在 $Q_n$ 上连续, 且它的各阶变差均有限, 那么 $f$ 几乎处处有全微分.

d) 若函数 $f$ 在 $Q_n$ 上绝对连续, 则

$$V_n(f)=\int_{Q_n}|\operatorname{grad} f|\,dx.$$

e) 如果 $f$ 在边长为 $2\pi$ 的方体 $Q_n$ 上连续, 且在 $Q_n$ 上有各阶有界变差, 此外它还可以关于每个变量 $x_k$, $k=1,\cdots,n$, 以周期 $2\pi$ 延拓成 $n$ 维空间上的周期函数, 那么它的 Fourier 级数在 $Q_n$ 上一致收敛于它自身 (Pringsheim 定理 (Pringsheim theorem)).

函数成为有界变差的一个充分条件是: 若函数 $f$ 在方体 $Q_n$ 上有直到 $n-k+1$ (包括 $n-k+1$) 阶连续导数, 那么它的 $k$ 阶变差是有限的. 此定理在如下的意义下是最好的, 即光滑性条件对任意 $k$ 不能再改进.

参考文献

[1] Витушкин, А. Г., О многомерных вариациях, М., 1955.

А. Г. Витушкин 撰 王斯雷 译

**泛函的变分 [variation of a functional; вариация функционала]**, 一阶变分 (first variation)

一元函数**微分** (differential) 概念的一种推广. 它是泛函在某一方向的增量的主要线性部分; 它用于极值问题理论中以得到对一极值的必要和充分条件. 这是早在 1760 年由 J. L. Lagrange ([1]) 给予"泛函的变分"这术语的意义. 他特别地考虑经典变分法的形如

$$J(x)=\int_{t_0}^{t_1} L(t,x(t),\dot{x}(t))\,dt \tag{1}$$

的泛函.

如果一个给定的函数 $x_0(t)$ 换成 $x_0(t)+\alpha h(t)$, 且把后者代入 $J(x)$ 的表达式中, 假设被积函数是连续可微的, 则得到以下方程:

$$J(x_0+\alpha h)=J(x_0)+\alpha J_1(x_0)(h)+r(\alpha), \tag{2}$$

其中 $|r(\alpha)|\to 0$ 当 $\alpha\to 0$ 时. 该函数 $h(t)$ 常常称为函数 $x_0(t)$ 的变分 (variation of the function), 且有时表示成 $\delta x(t)$. 表达式 $J_1(x_0)(h)$ 是关于变分 $h$ 的一个泛函, 称为泛函 $J(x)$ 的一阶变分 (first variation of the functional) 且表示成 $\delta J(x_0,h)$. 当应用于泛函 (1) 时, 该一阶变分的表示式有形式

$$\delta J(x_0,h)=\int_{t_0}^{t_1}(p(t)\dot{h}(t)+q(t)h(t))\,dt,$$

其中

$$p(t)=L_{\dot{x}}(t,x_0(t),\dot{x}_0(t)),$$

$$q(t)=L_x(t,x_0(t),\dot{x}_0(t)).$$

对泛函 $J(x)$ 的极值的一个必要条件是一阶变分对所有 $h$ 为零. 在泛函 (1) 的情形, 这必要条件的一个推论和变分法基本引理 (见 **du Bois-Reymond** 引理 (du Bois-Reymond lemma)) 是 **Euler** 方程 (Euler equation):

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(t,x_0(t),\dot{x}_0(t))+$$

$$+L_x(t,x_0(t),\dot{x}_0(t))=0.$$

类似于 (2) 的方法也用于确定高阶变分 (例如, 见泛函的二阶变分 (second variation)).

无穷维分析中一阶变分的一般定义是由 R. Gâteaux 于 1913 年给出的 (见 **Gâteaux 变分** (Gâteaux variation)). 它本质上是与 Lagrange 的定义相同的. 一个泛函的一阶变分是齐次的, 但未必是线性泛函. 在该表示式 $\delta J(x_0,h)$ 关于 $h$ 是线性连续的附加假设下, 通常的名称是 **Gâteaux 导数** (Gâteaux dirivative). 诸如"Gâteaux 变分", "Gâteaux 导数""Gâteaux 微分"这些术语比之"泛函的微分"这术语用得更频

繁，后者专门保留用于经典变分法的泛函（[3]）.

参考文献

[1] Lagrange, J. L., Essai d'une nouvelle methode pour déterminer les maximas et les minimas des formules intégrals indéfinies, in Oevres, Vol. 1, G. Olms, 1973, 333－362.

[2] Gâteaux, R., Fonctions d'une infinités des variables indépendantes, *Bull. Soc. Math. France*, **47** (1919), 70－96.

[3] Лаврентьев, М. А., Люстерник, Л. А., Курс вариационного исчисления, 2 изд., М.-Л., 1950 (中译本：M. A. 拉弗林契叶夫，Л. A. 留斯切尔涅克，变分学教程，高等教育出版社，1955).

В. М. Тихомиров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Gel'fand, I. M. and Fomin, S. V., Calculus of variations, Prentice-Hall, 1963 (译自俄文).

[A2] Luenberger, D. G., Optimization by vectorspace methods, Wiley, 1969.

葛显良 译 吴绍平 校

**映射的变差 [variation of a mapping; вариация отображения]**

与映射可微性有关的一种数字特征．由 S. Banach([1]) 所定义．以下仅给出二维情形的定义．考虑映射

$$\alpha: x=f(u,v),\ y=\varphi(u,v),$$

其中 $f$ 和 $\varphi$ 是正方形 $D_0=[0,1]\times[0,1]$ 上的连续函数．称映射 $\alpha$ 是有界变差的，是指存在数 $M>0$，使得对于任意一列互不相交的，边平行于坐标轴 $u,v$ 的正方形 $D^i\subset D_0$，成立不等式

$$\sum_i \operatorname{mes} D'_{xy}\leqslant M.$$

这里记号 $E_{xy}$ 表示集合 $E\subset D_0$ 在映射 $\alpha$ 下的象，而 $\operatorname{mes} E$ 是 $E$ 的 **Lebesgue 测度** (Lebesgue measure)．$\alpha$ 的变差的数值 $V(\alpha)$ 可以用不同的方法来确定．例如，假设 $\alpha$ 为有界变差的．变差 $V(\alpha)$ 可用公式

$$V(\alpha)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}N(s,t)\,ds\,dt$$

确定，其中 $N(s,t)$ 为方程组 $f(u,v)=s$，$\varphi(u,v)=t$ 的解的个数（$\alpha$ 的 Banach 指标 (Banach indicatrix)）．

若 $\alpha$ 为有界变差的，则广义 Jacobi 式 $J(P)$ $(P\in D_0)$ 在 $D_0$ 上几乎处处存在，且在 $D_0$ 上可积，此外

$$J(P)=\lim_{\operatorname{mes}K\to 0}\frac{\operatorname{mes}K_{xy}}{\operatorname{mes}K},$$

其中 $K\subset D_0$ 是包含点 $P\in D_0$ 且边平行于坐标轴 $u,v$ 的正方形（[2]）．

参考文献

[1] Banach, S., Sur les lignes rectifiables et les surfaces dont l'aire est finie. *Fund. Math.*, 7 (1925), 225－236.

[2] Кудрявцев, Л. Д., в. сб.: метрические вопросы теории функций и отображений, в. 1, К., 1969, с. 34－108.

Б. И. Голубов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Saks, S., Theory of the integral, Hafner, 1952 (译自波兰文).

王斯雷 译

**集合的变分 [variation of a set; вариация множества]**

表征 $n$ 维 Euclid 空间中一个集合的 $k$ 维容度的数值．有界闭集 $E$ 的零变分 $V_0(E)$ 是该集合的分量数．

在最简单的平面情形，一个集合 $E$ 的线性变分 (linear variation of a set)（即 $E$ 的一阶变分）是函数

$$\Phi(\alpha,E)=\int_{\Pi_\alpha}V_0(E\cap\Pi^{\perp}_{\alpha,z})\,dz$$

的积分

$$V_1(E)=c\int_0^{2\pi}\Phi(\alpha,E)\,d\alpha,$$

其中 $\Pi_\alpha$ 是过坐标原点的直线，$\alpha$ 是 $\Pi_\alpha$ 与给定轴之交角，$\Pi^{\perp}_{\alpha,z}$ 是 $\Pi_\alpha$ 上点 $z$ 处的垂直线，规范化常数 $c$ 的选择是使一个区间 $E$ 的变分 $V_1(E)$ 等于它的长度．对于十分简单的集合，例如可求长曲线，其变分就是它的长度 (length)．对具有可求长边界 $\Gamma$ 的闭域 $E$，其线性变分 $V_1(E)$ 等于 $\Gamma$ 长度的一半；$E$ 的第二变分（即 $E$ 的二阶变分）是 $E$ 的二维测度，且 $V_k(E)=0$，$k>2$.

在 $n$ 维 Euclid 空间中，有界闭集 $E$ 的 $k=0,\cdots,n$ 阶变分 $V_k(E)$ (variation $V_k(E)$ of order) 是，$E$ 与空间 $\Omega^n_k(\mathbf{R}^n$ 中所有 $(n-k)$ 维平面）中 $(n-k)$ 维平面 $\beta$ 的截口的零变分关于 **Haar 测度** (Haar measure) $d\mu_\beta$ 的积分

$$V_k(E)=\int_{\Omega^n_k}V_0(E\cap\beta)\,d\mu_\beta;$$

这里，规范化条件为：对 $k$ 维单位方体 $J_k$，其变分 $V_k(J_k)=1$.

变分 $V_n(E)$ 恒同于集合 $E$ 的 $n$ 维 **Lebesgue 测度** (Lebesgue measure)．对于凸体，其集合之变分（适当规范化）恒同于 Minkowski 的混合容积（见**混合体积理论** (mixed-volume theory)）（[4]）．

集合变分的性质 (properties of the variations of a set)：1) $E\subset\mathbf{R}^n\subset\mathbf{R}^{n'}$ 的变分与对 $E\subset\mathbf{R}^n$ 和 $E\subset\mathbf{R}^{n'}$ 所计算的有相同的容积．

2) 一个集合的变分可归纳地表达为公式

$$\int_{\Omega_n^i} V_i(E\cap\beta)d\mu_\beta = c(n, k, i)V_{k+i}(E), k+i\leqslant n,$$

其中 $c(n, k, i)$ 是规范化常数.

3) $V_i(E)=0$ 蕴含 $V_{i+1}(E)=0$.

4) 在一定意义下，一个集合的各种变分是互不相关的，即对任一数列 $a_0, \cdots, a_n$，其中 $a_0$ 是正整数，$0<a_i\leqslant\infty$ $(i=1, \cdots, n-1)$，$a_n=0$，可以构造一集合 $E\subset\mathbf{R}^n$，使得 $V_i(E)=a_i$，$i=0, \cdots, n$.

5) 如果 $E_1$ 与 $E_2$ 不相交，那么 $V_i(E_1\cup E_2)=V_i(E_1)+V_i(E_2)$. 一般情况，是

$$V_i(E_1\cup E_2)\leqslant V_i(E_1)+V_i(E_2).$$

对 $i=0, \cdots, n-1$，变分 $V_i$ 不是单调的，即对 $E_1\supset E_2$，有可能使得 $V_i(E_1)<V_i(E_2)$.

6) 一集合的变分是半连续的，即如果有界闭集列 $E_k$ 收敛（在距离之差的意义下）于 $E$，那么

$$V_0(E)\leqslant\liminf_{k\to\infty}V_0(E_k),$$

如果其和 $V_0(E_k)+\cdots+V_{i-1}(E_k)$ 还是一致有界的，那么

$$V_i(E)\leqslant\liminf_{k\to\infty}V_i(E_k), i=1, \cdots, n.$$

7) 如果 $V_{k+1}(E)=0$，且有

$$V_0(E)+\cdots+V_k(E)<\infty,$$

那么变分 $V_k(E)$ 就等同于 $k$ 维 **Hausdorff 测度**（Hausdorff measure）：

上列条件是可以满足的，例如二次可微流形.

集合的变分概念是在 Cauchy-Riemann 系统的解的论述中引发的，而其最终定式归于 А. Г. Витушкин 集合的各种变分在求解分析中的某些问题里，已被证明为是一种有用的工具，特别是对多元函数的**叠加**（superposition of functions）问题，以及逼近问题（[2]）.

**参考文献**

[1] Витушкин, А. Г., О многомерных вариациях, М., 1955.

[2] Витушкин, А. Г., Оценка сложности задачи табулирования, М., 1959.

[3] Витушкин, А. Г., 《Докл. АН СССР》, 166 (1966), 5, 1022－1025.

[4] Леонтович, А. М., Мельников, М. С., 《Тр. Моск. матем. об-ва》, 14 (1965), 306－337.

[5] Иванов, Л. Д., 《Матем. сб.》, 72 (114), 3, (1967), 445－470.

[6] Иванов, Л. Д., 《Матем. сб.》, 78 (120), 1, (1969), 85－100.

А. Г. Витушкин, Л. Д. Иванов 撰

【补注】 亦见**容度**（content）和**函数的变差**（variation of a function）.

周民强 译

**单叶函数的变分** [variation of a univalent function; вариация однолистной функции]

单叶函数论中的一个概念（见**单叶函数**（univalent function））. 在复平面的给定区域中，设存在一给定函数 $f(z)$ 与一个依赖于实参数 $\lambda$ 的函数族 $F(z, \lambda)$，$0\leqslant\lambda<\Lambda$，$\Lambda>0$，对所有 $\lambda\in[0, \Lambda]$ 均在 $D$ 内单叶. 假定 $F(z, 0)=f(z)$. 作差 $F(z, \lambda)-f(z)\equiv\Phi(z, \lambda)$. 函数 $f(z)$（沿着族 $F(z, \lambda)$）的 $n$ **阶变分**（$n$-th order variation）或 $n$ **次变分**（$n$-th variation），$n=1, 2, \cdots$，是 $\Phi(z, \lambda)$ 关于参数 $\lambda$ 的展开式中 $\lambda^n$ 的系数 $q_n(z)$，且满足如下条件：余项

$$\Phi_n(z, \lambda)=\Phi(z, \lambda)-q_1(z)\lambda-\cdots-q_n(z)\lambda^n$$

是 $\lambda^n$ 的高阶无穷小量，且关于 $D$ 中的 $z$ 在 $D$ 内紧集或 $D$ 的闭包上一致. 这些附加条件之一的选取常常决定于问题的性质，这些问题的解决涉及与单叶函数的变分有关的变分方法.

J. Hadamard（[1]）与 М. А. Лаврентьев（[2]）首先计算了一阶变分并给出了应用. 要在某个特殊单叶函数类中通过函数类本身得到变分是一项复杂的任务，这是由于这种函数的非线性性质. 对单连通与多连通区域中的某些函数类，这一任务已完成.

**参考文献**

[1] Hadamard, J., Leçons sur le calcul des variations, 1, Hermann, 1910.

[2] Лаврентьев, М. А., 《Матем. сб.》, 4 (46) (1938), 3, 391－458.

[3] Голузин, Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966（英译本：Goluzin, Г. M., Geometric theory of functions of a complex variable, Amer. Math. Soc., 1969）.

[4] Бабенко, К. И., 《Тр. матем. ин-та АН СССР》, М., 101 (1972).

И. А. Александров 撰

【补注】 在过去的半个世纪中，在单叶函数的变分理论中最有影响的人物是 M. M. Schiffer，他在该领域的最早的工作甚至囊括了 Лаврентьев 的工作. 见 [A2] 中关于 Schiffer 的工作的文献目录. 对这一课题最完全的处理可在 [A1] 中找到；亦可见 [A2] 中的讨论.

还可见**内变分方法**（internal variations, method of）；**边界变分方法**（boundary variations, method of）.

**参考文献**

[A1] Hummel, J. A., Lectures on variational methods in

the theory of univalent functions, Univ. of Maryland, 1972.

[A2] Duren, P. L. Univalent functions, Springer, 1983.

杨维奇 译

**常数变易法 [variation of constants; произвольных постоянных вариация]**

求解非齐次线性常微分方程组(或方程)的一种方法. 对于一个非齐次方程组, 只要知道相应的齐次方程组的**通解**(general solution), 用这个方法就可以把非齐次方程组的通解用封闭形式写出来. 常数变易法的思想在于, 把出现在齐次方程组通解中的任意常数换成自变量的函数. 这些函数必须选得使非齐次方程组得以满足. L. Euler 和 D. Bernoulli 已经就一些具体问题应用过这个方法, 但它的完全的叙述是由 J. L. Lagrange([1]) 给出的.

设考虑以下非齐次线性方程组的 **Cauchy 问题**(Cauchy problem)

$$\dot{x} = A(t)x + f(t),\ x(t_0) = x_0. \qquad (1)$$

其中

$$A:(\alpha,\beta)\to \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n),$$
$$f:(\alpha,\beta)\to \mathbf{R}^n$$

是在每个有限区间上均为可和的映射, 而 $t_0\in(\alpha,\beta)$. 若 $\Phi(t)$ 是齐次方程组

$$\dot{y} = A(t)y \qquad (2)$$

的基本矩阵解(见**基本解**(fundamental solution)), 则 $y=\Phi(t)c,\ c\in\mathbf{R}^n$ 是 (2) 的通解. 常数变易法就是在 (1) 中作变量变换

$$x = \Phi(t)u,$$

而由此得出 (1) 的解的 Cauchy 公式(Cauchy formula)

$$x = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau.$$

这个公式有时也称为常数变易公式(formula of variation of constants)(亦见**线性常微分方程**(linear ordinary differential equation)).

常数变易法的思想有时也可用于较一般的非线性情况, 以描述扰动的完全系统的解和截断的非扰动系统的解的关系(见[3],[4]). 例如用于求出以下问题的解 $x(t)$:

$$\dot{x} = A(t)x + f(t,x),\ x(t_0) = x_0.$$

若 $A, f$ 是连续映射, 以及在可以保证解的唯一性的条件下, 常数变易公式仍是适用的. 它成了积分方程

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(\tau)f(\tau,x(\tau))d\tau.$$

这里 $\Phi(t)$ 是 (2) 的基本矩阵解.

**参考文献**

[1] Lagrange, J. L., Oeuvres, Vol. 4, Paris, 1869, 151-251.

[2] Понтрягин, Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 5 изд., М., 1983 (中译本: Л. С. 庞特利雅金, 常微分方程, 上海科技出版社, 1962).

[3] Алексеев, В. М., 《Вестн. Моск. ун-та》, 1961, 2, 28-36.

[4] Рейзинь, Л. Э., Локальная эквивалентность дифференциальных уравнений, Рига, 1971.

Н. Х. Розов 撰

【补注】

**参考文献**

[A1] Hille, E., Lectures on ordinary differential equations, Addison-Wesley, 1964.

[A2] Coddington, E. A. and Levinson, N., Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill, 1955.

[A3] Hale, J. K., Ordinary differential equations, Wiley, 1980.

[A4] Coppel, W. A., Disconjugacy, Springer, 1971.

齐民友 译

**Hodge 结构的变分 [variation of Hodge structure]**

【补注】 复流形 $\mathscr{S}$ 上权 $w$ 的 Hodge 结构的变分(variation of Hodge structure of weight $w$)是一个二元组 $\mathscr{V}=(\mathscr{V}_{\mathbf{Z}},\mathscr{F})$, 这里 $\mathscr{V}_{\mathbf{Z}}$ 是 $\mathscr{S}$ 上有限生成 Abel 群的局部常层, $\mathscr{F}$ 是由全纯子丛构成的 $V=\mathscr{V}_{\mathbf{Z}}\otimes_{\mathbf{Z}}\mathscr{O}$ 的有限下降滤过, 满足以下条件: i) 由 $\nabla(v\otimes f)=v\otimes df$ 定义的 $V$ 上平坦联络 $\nabla$, 这里 $v, f$ 分别是 $\mathscr{V}_{\mathbf{Z}}$ 和 $\mathscr{O}$ 的局部截面, 且此联络满足 $\nabla(\mathscr{F}^p)\subset\mathscr{F}^{p-1}\otimes\Omega^1_{\mathscr{S}}$ (Griffiths 横截性(Griffiths transversality)); ii) 对每个 $s\in\mathscr{S}$, 二元组 $(\mathscr{V}_{\mathbf{Z},s},\mathscr{F}(s))$ 是权 $w$ 的 Hodge 结构(Hodge structure of weight $w$).

Hodge 结构的变分 $(\mathscr{V},\mathscr{F})$ 的极化(polarization)是一个平坦双线性型 $\mathscr{V}_{\mathbf{Z}}\otimes\mathscr{V}_{\mathbf{Z}}\to\mathbf{Z}_{\mathscr{S}}$, 它对每个 $s\in\mathscr{S}$ 诱导了 Hodge 结构 $\mathscr{V}_{\mathbf{Z},s}$ 的极化. 当 $\mathbf{Z}$ 被换成 $\mathbf{Q}$ 或 $\mathbf{R}$ 时, 类似的概念仍然存在([A1],[A2]). 如果 $f: X\to S$ 是 $\mathbf{C}$ 上代数簇的光滑真态射, 则 $R^mf_*\mathbf{Z}_X$ 是 $\mathscr{S}$ 上 Hodge 结构的可极化变分的底局部系. 根据 A. Borel 的一个结果, 对于形如 $\bar{S}\setminus D$ 的复流形 $S$ 上的 Hodge 结构的可极化变分, 这里 $\bar{S}$ 是紧的且 $D\subset\bar{S}$ 是具有正规交叉的除子, 则围绕 $D$ 的每个局部分支的单值是拟幺幂的([A3])(单值定理(monodromy theorem)). $S$ 上 Hodge 结构的极化变分引起了从 $S$ 到 Hodge 结构的分类空间的一个全纯**周期映射**

(period mapping).

如果 $\mathscr{V}=\bar{S}\setminus D$，这里 $\bar{S}$ 是紧 Kähler 流形，$D$ 是 $\bar{S}$ 上具有正规交叉的除子，则对于 $S$ 上 Hodge 结构的极化变分 $(\mathscr{V}_Z,\mathscr{V})$，层 $\mathscr{V}_Z$ 具有到 $\bar{S}$ 上反常层 (perverse sheaf) $IC(\mathscr{V}_Z)$ 的一个极小扩张，且 $IH^{\cdot}(\bar{S}, IC(\mathscr{V}_Z))$ 带有纯 Hodge 结构 ([A4]－[A6])．事实上 $IC(\mathscr{V}_Z)$ 是极化 Hodge 模的一部分 ([A7])．其推广有混合 Hodge 结构的变分 (variation of mixed Hodge structure) ([A8]，[A9]) 和混合 Hodge 模 (mixed Hodge module) ([A10]) 的概念．

**参考文献**


[A1A] Griffiths, P., Periods of integrals on algebraic manifolds, Ⅰ, *Amer. J. Math.*, **90** (1968), 568－626.

[A1B] Griffiths, P., Periods of integrals on algebraic manifolds, Ⅱ, *Amer. J. Math.*, **90** (1968), 808－865.

[A1C] Griffiths, P., Periods of integrals on algebraic manifolds Ⅲ, *Publ. Math. IHES*, **38** (1970), 228－296.

[A2] Deligne, P., Travaux de Griffiths, in Sem. Bourbaki Exp. 376, Springer, 1970, 213－237.

[A3] Schmid, W., Variation of Hodge structure: the singularities of the period mapping, *Invent. Math.*, **22** (1973), 211－319.

[A4] Cattani, E., Kaplan, A. and Schmid, W., $L^2$ and intersection cohomologies for a polarizable variation of Hodge structure, *Invent. Math.*, **87** (1987), 217－252.

[A5] Kashiwara, M. and Kawai, T., The Poincaré lemma for variations of polarized Hodge structures, *Publ. R. I. M. S. Kyoto Univ.*, **23** (1987), 345－407.

[A6] Zucker, S., Hodge theory with degenerating coefficients: $L_2$-cohomology in the Poincaré metric, *Ann. of Math.*, **109** (1979), 415－476.

[A7] Saito, M., Modules de Hodge polarisables, *Publ. R. I. M. S. Kyoto Univ.*, **24** (1988), 849－995.

[A8] Steenbrink, J. and Zucker, S., Variation of mixed Hodge structure, Ⅰ, *Invent. Math.*, **80** (1985), 489－542.

[A9] Kashiwara, M., A study of a variation of mixed Hodge structure, *Publ. R. I. M. S. Kyoto Univ.*, **22** (1986), 991－1024.

[A10] Saito, M., Mixed Hodge modules, *Publ. R. I. M. S. Kyoto Univ.*, **26** (1990), 221－333.


J. Steenbrink 撰　陈志杰 译

**变分参数法 [variation-parametric method; вариационно-параметрический метод]**

关于由把圆盘 $E=\{z:|z|<1\}$ 映射成从平面 $\mathbf{C}_w$ 沿若干逐段连续弧线切割而成的区域的单叶函数所组成的那个类 $S$ 的重要子类的一种方法．它是 Голузин 的变分方法 (见**内变分方法** (internal variations, method of)) 与 Löwner 的**参数表示法** (parametric represetation method) 的综合．对于仅有一条 Jordan 割线的最简单情形，这一综合系通过由如下定理确定的一种特殊变分而得到．设函数 $w=f(z)\in S$ 把 $E$ 映射成从 $\bar{\mathbf{C}}_w$ 去掉割线

$$L=\{w: w=\varphi(t),\ 0\leqslant t\leqslant\infty\},\ \varphi(\infty)=\infty$$

所得的区域 $B(0)$，其中 $\varphi(t)$ 连续，且区域 $B(\tau)=\bar{\mathbf{C}}_w\setminus L(\tau)$ 为单连通，其中 $L(\tau)=\{w: w=\varphi(t),\ 0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant\infty\}$．考虑割线 $L$ 的一种参数表示，使得伴随 $f(z)$ 的函数 $z=F(w,\tau)$，$F(0,\tau)=0$，把 $B(\tau)$ 单叶共形映射为 $E$，且满足规范化条件 $F_w'(0,\tau)=e^{-\tau}$．以 $\Psi(z,\tau)$ 表示 $F(w,\tau)$ 当 $\tau$ 固定时的反函数．则对于所有的点 $z_k\in E$，$(k=1,\cdots,n;\ n=1,2,\cdots)$ 及一切常数 $A_k$，存在类 $S$ 中的函数 $f_*(z)$ 可表示成如下形式

$$f_*(z)=f(z)+$$

$$+\lambda\sum_{k=1}^{n}\left[2A_kH^2(z_k,\tau)\frac{f^2(z)}{f(z)-\Psi(z_k,\tau)}+\right.$$

$$\left.+A_kK(z,\tau,z_k)+\bar{A}_kK(z,\tau,1/\bar{z}_k)\right]+\gamma(\lambda,E),$$

其中

$$K(z,\tau,\zeta)=\frac{F(f(z),\tau)}{F_w'(f(z),\tau)}\cdot\frac{\zeta+F(f(z),\tau)}{\zeta-F(f(z),\tau)}+$$

$$-f(z)$$

$$H(z,\tau)=\frac{z\Psi_z'(z,\tau)}{\Psi(z,\tau)},$$

且 $\gamma(\lambda,E)$ 是 $E$ 内的全纯函数，当 $\lambda\to 0(\lambda>0)$ 时在 $E$ 的内部关于 $\lambda$ 一致地趋于极限 0．

在研究 $S$ 中的极值问题的过程中如果使用上文提及的特殊变分及函数 $F(w,\tau)$ 所满足的在条件 $F(f(z),0)=z$ 下的 Löwner 方程 (Löwner equation)

$$\frac{d\zeta}{d\tau}=-\zeta\frac{\mu(\tau)+\zeta}{\mu(\tau)-\zeta},$$

$$\mu(\tau)=\Psi(\varphi(\tau),\tau).$$

常常可以得到与极值函数相伴随的该函数的两个方程．无需考虑方程中所包含的能用极值函数的值表达的常数，这些方程的深入研究常可导致所考虑的极值问题的完全解决，特别是关于 $S$ 中解析依赖于函数及其导数以及它们的共轭值的泛函的值域问题．这一方

法是由 П. П. Куфарев ([1]) 提出的；关于其后该方法的发展及应用可见 [2] – [5].

**参考文献**


[1] Куфарев, П. П., 《Докл. АН СССР》, **97** (1954), 3, 391 – 393.

[2] Александров, И. А., 《Уч. зап. Томск. ун-та》, **32** (1958), 41 – 57.

[3] Александров, И. А., 《Сиб. матем. ж.》, **4** (1963), 1, 17 – 31.

[4] Редьков, М. И., 《Докл. АН СССР》, **133** (1960), 2, 284 – 287.

[5] Редьков, М. И., 《Изв. вузов. Математика》, **29** (1962), 134 – 142.


И. А. Александров 撰

【补注】 联合使用变分方法与 Löwner 理论的思想似乎可追溯到 M. Schiffer，见 [A2] 第 10 与 11 章；关于进一步的参考文献亦可见 [A2].

**参考文献**


[A1] Aleksandrov, I. A., Parametric extensions in the theory of univalent functions, Moscow, 1976 (俄文).

[A2] Duren, P. L., Univalent functions, Springer, 1983.


杨维奇 译

**变分学 [variational calculus** 或 calculus of variations; **вариационное исчисление]**

数学的一个分支，研究寻找一个或几个函数确定的泛函极值的方法，其中函数满足各类约束（相，微分，积分等）. 这仍是称为经典变分学 (classical variational calculus) 问题的框架. 变分学这术语也有一种更广的意义，即极值问题理论的一个分支，其中极值是用"变分"(variation) 的方法来研究的，即自变量和泛函小扰动的方法；在更广的意义下这些问题是相反于离散最优化问题 (discrete optimization problem) 的.

以下的概述描述经典变分学的较宽范围内的问题. 要求使得泛函

$$J(x)=\int_T f(t,\ x(t),\ \dot{x}(t))dt \qquad (1)$$

极小化，其中 $T\subset \mathbf{R}^m$, $t=(t_1,\ \cdots,\ t_m)$, $x=(x^1,\ \cdots,\ x^n)$,

$$\dot{x}=\left[\frac{\partial x^i}{\partial t_j}\right],\ f\colon \mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^{nm}\to\mathbf{R},$$

满足由以下类型的方程

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(t,\ x(t),\ \dot{x}(t))=0,\\ \varphi\colon \mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^{nm}\to\mathbf{R}^s,\end{array}\right\} \qquad (2)$$

描述的约束，且满足某种边界条件 $x|_{\partial T}\in\Gamma$. 这种类型的问题称为 **Lagrange 问题** (Lagrange problem). 所考虑的其他类型的问题有 **Mayer 问题** (Mayer problem)，**Bolza 问题** (Bolza problem) 等等.

经典变分学中最基本的问题是变分学中最简问题 (simplest problem)，其中 (1) 中的 $t$ 和 $x$ 是一维的，没有约束 (2) 且边界条件是固定的：

$$J(x)=\int_{t_0}^{t_1} L(t,\ x,\ \dot{x})dt\to\inf;$$

$$x(t_0)=x_0,\ x(t_1)=x_1. \qquad (3)$$

这类型包括捷线 (brachistochrone) 问题，或最速降线问题. 这问题通常被看成是变分学历史的出发点.

经典变分学的理论基础是在 18 世纪由 L. Euler 和 J. L. Lagrange 奠定的. 他们也发现了这学科与力学和物理学的重要联系. 许多特殊问题（关于测地线，旋转曲面，等周问题等等）在这个理论发展的最初阶段被解决了——主要归功于 G. Leibniz, Jacob Bernoulli, Johann Bernoulli, Euler 和 Lagrange.

变分学处理寻找极值的算法，得到必要和充分条件的方法，保证极值存在性的条件，定性问题等等. 在寻找极值的算法中直接方法占有重要的地位.

**直接法.** Euler (1768) 提出了变分学中问题求近似（数值）解的一种方法，它得到 Euler 折线法的名称. 这标志着研究极值问题数值解法的开端. Euler 方法是被称为变分学直接法的一大类方法中的第一个代表. 这些方法基于把求泛函的极值问题化成求多元函数的极值问题.

问题 (3) 可用 Euler 折线法求解如下. 区间 $[t_0,\ t_1]$ 用点 $\tau_0=t_0,\ \tau_1=t_0+\tau,\ \cdots,\ \tau_N=t_0+N\tau=t_1$ 细分成 $N$ 个相等部分. 设在这些点上的函数值分别是 $x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_N$. 点 $(\tau_0,\ x_0)$, $\cdots$, $(\tau_N,\ x_N)$ 的每一个集合定义某折线. 该问题现在可表示如下：在连结点 $(\tau_0,\ x_0)$ 和 $(\tau_N,\ x_N)$ 的所有可能的折线中，求使得泛函 (1) 取极值的那条折线. 在区间 $[\tau_i,\ \tau_{i+1}]$ 上导数 $\dot{x}$ 的值是 $\dot{x}_i=(x_{i+1}-x_i)/\tau$. 泛函 $J(x)$ 变成有限个变量 $x_i$ 的一个函数：

$$J(x)\sim J(x_0,\ \cdots,\ x_n),$$

而问题 (3) 化成求函数 $J(x_0,\ \cdots,\ x_n)$ 的极值问题. 为了使得实现此函数极值的 Euler 折线以高精确度逼近问题 (3) 的解，通常数 $N$ 应当充分大. 为求此函数 (3) 的极值必须实施的计算中的工作量是如此之大，以致"手工"计算是很困难的. 由于这个缘故，直接法长期以来被排除于变分学的基本研究工作之外.

在 20 世纪中直接法开始极广泛地被研究. 首先，提出了新方法把问题化成求有限个变量的函数的

极值．这些想法可以下面的例子来阐明：在条件

$$x(t_0)=x(t_1)=0$$

的制约下使泛函（3）极小化．考虑这个问题的形如

$$x(t)=\sum_{n=1}^{N}a_n\varphi_n(t)$$

的解，其中 $\{\varphi_n(t)\}$ 是满足条件 $\varphi_i(t_0)=\varphi_i(t_1)=0$, $i=1,\cdots,N$, 的某个函数系．泛函 $J(x)$ 是系数的一个函数，$J(x)\sim J(a_1,\cdots,a_N)$，而该问题化成求这个 $N$ 元函数的极值．在加在函数系 $\{\varphi_n\}$ 上的某些条件下，该问题的解当 $N\to\infty$ 时趋于问题（3）的解（见 **Галеркин 法**（Galerkin method））．

**变分法**．第二个研究方向是研究达到泛函 $J(x)$ 的极值的函数 $x(t)$ 所满足的必要和充分条件．求必要条件的主要方法是变分方法．以某种方式构造某函数 $x(t)$．如何去测试这函数是否是变分问题（3）的解？这问题的一个答案首先由 Euler 于 1744 年给出．如下表述的答案涉及 Lagrange 于 1762 年引入的泛函 $J$ 的变分 $\delta J$ 这概念（因此有"变分学"这一名称，见**变分**（variation）；**泛函的变分**（variation of a functional））．

对变分学最简问题，这变分定义为：

$$\delta J(x,h)=\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right]\Bigg|_{x(t)}h(t)dt,$$

其中 $h(t)$ 是满足条件 $h(t_0)=h(t_1)=0$ 的任一光滑函数．条件 $\delta J=0$ 对函数 $x(t)$ 达到泛函（3）的极值是必要的．因此——且由变分 $\delta J$ 的表示式——可以得出结论，为了函数 $x(t)$ 形成（3）的一个极值，它必须满足以下的二阶微分方程：

$$\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=0. \qquad (4)$$

以上方程称为 **Euler 方程**（Euler equation），而这族积分曲线称为所考虑的变分问题的极值曲线（extremals）．$J(x)$ 在其上达到极值的函数 $x(t)$ 必须表示成对方程（4）的边值问题 $x(t_0)=x_0$, $x(t_1)=x_1$ 的一个解．这样已经得到了解极值问题的第二个方法：应当解 Euler 方程的边值问题（在正则情况下这样的解的数目是有限的），然后应对所得到的极值曲线作补充研究，以确定其中是否有曲线确是原问题的解．然而，这方法的一个明显缺点是它并不提供解常（非线性）微分方程边值问题的一般方法．

可移动端点的变分问题（variational problems with mobile ends）是经常遇到的，例如，在最简问题中，点 $x(t_0)$ 和 $x(t_1)$ 可沿给定曲线移动．在具有可移动端点的问题中，条件 $\delta J=0$ 蕴涵可移动端点所须满足的补充条件——所谓**横截性条件**（transversality condition），它与边界条件一起，提供边值问题的封闭的条件组．

关于变分学最简问题的主要结果可应用于形如

$$J(x)=\int_{t_0}^{t_1}F\left[x(t),\ \frac{dx}{dt},\ \cdots,\ \frac{d^rx}{dt^r}\right]dt$$

的泛函的一般情形，这里 $x(t)$ 是任意维数的向量函数（[3]）．

**Lagrange 问题**．Euler 和 Lagrange 也研究条件极值问题．这类型的最简问题是所谓的**等周问题**（isoperimetric problem）．对一维的 $t$ 的情形，Lagrange 陈述了问题（1）和（2）的类，而且得到了类似于 Euler 方程的方程，其中包括对这些问题的所谓 Lagrange 乘子．这样一种类似也可对问题（1）和（2）的最一般情形得到．在 20 世纪中叶由于**最优控制的数学理论**（optimal control, mathematical theory of）的创建，Lagrange 问题具有特殊的重要性．以下借助于这理论给出涉及 Lagrange 问题的主要结果．这些是由 Л. С. Понтрягин 和他的学派得到的．

考虑以下情形：在问题（1）和（2）中 $t$ 是一维的且组 $\varphi(t,x,\dot{x})$ 可以对最后的变量部分地解出．结果所得问题是在微分约束

$$\dot{x}=f(t,x,u) \qquad (5)$$

和边界条件

$$(x(t_0),\ x(t_1))\in E \qquad (6)$$

之下使泛函

$$J(x,u)=\int_{t_0}^{t_1}F(t,x,u)dt \qquad (7)$$

极小化．

在方程（5）－（7）中，$x=(x^1,\cdots,x^n)$ 是称为相向量的一个向量函数，$u=(u^1,\cdots,u^m)$ 是称为控制的一个向量函数，$F\colon \mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}$, $f\colon \mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^n$, $E\subset\mathbf{R}^{2n}$．

问题（3）的固定条件可以作为（6）型边界条件的一个例子．在最优控制问题中除了条件（5）和（6），还要加某些"非经典"条件如

$$u(t)\in U\subset\mathbf{R}^m. \qquad (8)$$

**弱极值与强极值**．在变分学中通常区分两种拓扑——强的和弱的拓扑，且对应地定义强极值（strong extremum）和弱极值（weak extremum）．例如，当应用于问题（3）时，称曲线 $x_0(t)$ 实现弱极小值（weak minimun），如果可以找到 $\varepsilon>0$，使得对满足条件

$x(t_0)=x_0(t_0)$, $x(t_1)=x_0(t_1)$ 和

$$\max_{t\in[t_0,t_1]}|x(t)-x_0(t)|+\max_{t\in[t_0,t_1]}|\dot{x}(t)-\dot{x}_0(t_0)|<\varepsilon$$

的所有连续可微函数 $x(t)$, $J(x)\geq J(x_0)$. 换句话说，这不仅确定相变量的邻近性，而且要求速度（控制）的邻近性. 称函数 $x_0(t)$ 给出强极值，如果可以找到 $\varepsilon>0$，使得对满足条件

$$x(t_0)=x_0(t_0),\ x(t_1)=x_0(t_1)$$

和

$$\max_{t\in[t_0,t_1]}|x(t)-x_0(t)|\leq\varepsilon$$

的所有可能的绝对连续函数 $x(t)$（对此 $x(t)$, $J(x)$ 存在），$J(x)\geq J(x_0)$. 上面的式子仅表示相变量的邻近性.

如果 $x_0(t)$ 实现了一个强极值，则它更不容置疑地也实现了一个弱极值；由此，对强极值的充分条件也是对弱极值的充分条件. 反之，如果没有弱极值，则也没有强极值，即对弱极值的必要条件也是对强极值的必要条件.

**对极值的必要与充分条件**. 上面讨论过的 Euler 方程是对弱极值的一个必要条件. 20 世纪 50 年代后期 Понтрягин 对问题 (5) − (8) 提出了一个最大值原理，它是对强极值的一个必要条件（见 **Понтрягин 最大值原理**（Pontryagin maximum principle）. 这最大值原理说明如果偶对 $(x, u)$ 给予问题 (5) − (8) 的一个强极值，则存在向量函数 $\psi$ 和数 $\lambda_0$，使得关系式

$$\left.\begin{aligned}&\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial\psi},\ -\dot{\psi}=\frac{\partial H}{\partial x},\\&\max_{u\in U}H(t,x(t),\psi(t),u,\lambda_0)=\\&=H(t,x(t),\psi(t),u(t),\lambda_0)\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

对 Hamilton 函数 $H(t,x,\psi,u,\lambda_0)=(\psi,f)-\lambda_0F$ 成立.

如果把 Понтрягин 最大值原理应用到问题 (3)，则可以推出，曲线 $x(t)$ 达到问题 (3) 中强极小值的必要条件是它为极值曲线（即满足 Euler 方程 (4)）且满足必要的 **Weierstrass 条件（对变分极值的）**（Weierstrass conditions (for a variational extremum)）

$$\mathscr{E}(t,x(t),\dot{x}(t),\xi)\geq0\ \text{对所有}\ t\in[t_0,t_1],\ \xi\in\mathbf{R},\quad(10)$$

这里

$$\mathscr{E}(t,x,\dot{x},\xi)=$$

$$=L(t,x,\xi)-L(t,x,\dot{x})-((\xi-\dot{x})L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x}))$$

是所谓的 Weierstrass 函数.

除了带有局部（local）特征（即可在每一极值点检验）的 (4) 和 (10) 类型的条件之外，还有整体必要条件（global necessary condition），与给定极值曲线的邻域中的极值曲线集合的性态有关（见 **Jacobi 条件**（Jacobi condition））. 对问题 (3) Jacobi 的条件可描述如下. 为了极值曲线 $x(t)$ 提供问题 (3) 中的一个极小值，必要条件是带有边界条件 $h(t_0)=0$, $\dot{h}(t_0)\neq0$ 的 **Jacobi 方程**（Jacobi equation）

$$-\frac{d}{dt}\left[\left.\frac{\partial^2L}{\partial\dot{x}^2}\right|_{x(t)}\frac{d}{dt}h(t)\right]+\quad(11)$$

$$+\left.\left[\frac{\partial^2L}{\partial x^2}-\frac{d}{dt}\frac{\partial^2L}{\partial x\partial\dot{x}}\right]\right|_{x(t)}h(t)=0$$

的解在区间 $(t_0, t_1)$ 中无零点. 方程 (11) 的解 $h(t)$ 的零点称为与 $t_0$ 共轭的点（points conjugate with the point $t_0$）. 这样，Jacobi 的条件是指区间 $(t_0, t_1)$ 中不包含共轭于 $t_0$ 的点.

对弱极小值的必要条件 $\delta J=0$, $\delta^2J\geq0$ 是关于一元函数极小值条件 $f'(x)=0$, $f''(x)\geq0$ 的严格类似. 如果（强）**Legendre 条件**（Legendre condition）满足，则 Jacobi 条件是二阶变分非负的一个必要条件. 这导致以下结果：为了函数 $x(t)$ 实现泛函 (3) 的弱极小，必须：a) $x(t)$ 满足 Euler 方程；b) 满足 Legendre 条件 $(\partial^2L/\partial\dot{x}^2)|_{x(t)}>0$；和 c) 区间 $(t_0, t_1)$ 不包含共轭于 $t_0$ 的点（如果满足强 Legendre 条件）.

关于弱极小值的充分条件如下：函数 $x(t)$ 必定是在其上满足强 Legendre 条件的极值曲线，且半开半闭区间 $(t_0, t_1]$ 必定不包含共轭于 $t_0$ 的点. 为了曲线 $x(t)$ 达到强极大值只须 Weierstrass 充分条件和上面表述的对弱极小值的充分条件满足.

**最优控制中的问题**. 变分法发展的主要方向之一是很像上述问题 (5) − (8) 的非经典问题的变分法. 这类问题有重要的实际意义. 例如，设 (5) 描述某动力体，如宇宙飞船的运动. 控制——向量 $u$——是发动机的推进力. 宇宙飞船的初始位置是某轨道，而它的最终位置是不同半径的轨道. 泛函 $J$ 描述在完成这样的动作中的燃料消耗. 那么问题 (5) − (7) 可应用到这种情况如下：确定由宇宙飞船发动机所施加的、在一给定时期内完成从一轨道到另一轨道转移所需要的推进力变化的规律使得燃料消耗最小. 同时必须顾及控制上所加的约束：发动机的推进力必须不超过某一给定的值；转动角度也是有界的. 这样，推进力的分量 $u^i$, $i=1, 2, 3$, 是受约束

$$a_i^- \leqslant u^i \leqslant a_i^+$$

支配的情形，其中 $a_i^-$ 和 $a_i^+$ 是给定的数．

很多问题都可以化成在（8）型补充限制下的 Lagrange 问题．这样一些问题称为最优控制问题（problems of optimal control）．对最优控制理论发展一个特殊的工具是值得的．Понтрягин 最大值原理可以说就是这样一种工具．

对最优控制理论中这些问题另外的途径也是可能的．设 $S(t, x)$ 是泛函（7）沿一个最优解从一点 $(t_0, x_0)$ 到一点 $(t, x)$ 的值．为了函数 $u(t)$ 是这样一种情形下的最优控制，其必要条件（在某些情形下也是充分条件）是被称为 Bellman 方程（Bellman equation）的偏微分方程

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\min_{u\in U}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)',(f(t,x(t),u(t))+ - F(t,x(t),u(t)))\right]=0$$

成立（见**动态规划**（dynamic programming））．在经典变分学的问题中，函数 $S(t, x)$（作用积分）必须满足 Hamilton-Jacobi 方程（Hamilton-Jacobi equation）

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left[t,x,\frac{\partial S}{\partial x}\right]=0,$$

其中 $H$ 是 **Hamilton 函数**（Hamilton function）．问题（3）中，该函数是被积函数 $L(t, x, \dot{x})$ 关于 $\dot{x}$ 的 **Legendre 变换**（Legendre transform）．Hamilton-Jacobi 理论是研究许多与经典力学有关的变分问题的有力工具．

变分学与偏微分方程理论之间的联系早在 19 世纪就被发现了．P．G．L．Dirichlet 证明了解 Laplace 方程的边值问题等价于解某一个变分问题．例如，考虑一个给定的线性算子方程

$$Ax=f, \tag{12}$$

其中 $x(\xi, \eta)$ 是两个自变量的某个函数，且它在闭曲线 $\Gamma$ 上为零．在对某类物理问题是自然的假设下，求方程（12）解的问题等价于求泛函

$$J(x)=\iint_\Omega A_{xx}\,d\xi\,d\eta-2\iint_\Omega fx\,d\xi\,d\eta \tag{13}$$

的极小值，这里 $\Omega$ 是被曲线 $\Gamma$ 界定的区域．方程（12）在这情形下是对泛函（13）的 Euler 方程．

举例说，如果 $A$ 是正定自伴算子，则把问题（12）化成（13）是可能的．偏微分方程问题与变分问题之间的联系，特别地使得建立各种存在性和唯一性定理的正确性成为可能；它在广义解概念的形成中起着重要作用．这样的转换在计算数学中也是很重要的，因为变分学的直接方法可用来解偏微分方程理论中的边值问题．

**定性方法**．这些方法使得有可能解决关于解的存在性和唯一性问题，也可解决关于极值曲线（极值曲线族）的定性特征问题．20 世纪中建立了变分问题解的数目依赖于该泛函定义于其上的空间的性质．例如，如果泛函 $J$ 定义于连结两给定点的环面上的所有可能的光滑曲线上，或定义于拓扑等价于环面的曲面上的所有可能的闭曲线上，则临界元素——在其上变分 $\delta J=0$ 的曲线——的个数在这两情形下都是无穷的．Л．А．Люстерник 和 Л．Г．Шнирельман（[7]）证明在每个拓扑等价于球面的曲面上至少存在三个不同长度的闭自交测地线；如果这些测地线中只要有两个的长度相等，则存在无穷多个相等长度的闭测地线．这样一些问题指出变分学与微分方程定性理论和拓扑学之间的紧密的联系．泛函分析的发展对定性方法的研究作出了实质性贡献．亦见大**范围变分学**（variational calculus in the large）．

**变分学与锥理论之间的联系**．变分学中研究的问题的范围仍在增加．特别地，对定义在赋范空间的元素集合 $G_k$ 上的很一般类型的泛函有很大兴趣．在这类问题中引进变分概念是困难的，而必须利用另一类工具．这就是 Banach 空间中的锥理论．例如，考虑使 $f(x)$ 极小化的问题，其中 $x$ 是闭集 $G$ 中的元素．锥（cone）$\Gamma_G(x_0)$ 是这样一些非零向量 $e$ 的集合，$e$ 可与一个正数 $\lambda_e^*$ 对应使得对所有的 $\lambda\in(0, \lambda_e^*)$ 向量 $x=x_0+\lambda e\in G$．而锥 $\Gamma_f(x_0)$ 是这样一些非零向量 $e$ 的集合，$e$ 可与一个正数 $\lambda_e^*$ 对应使得对所有的 $\lambda\in[0, \lambda_e^*]$，

$$f(x_0+\lambda e)\geqslant f(x_0).$$

为了 $x_0$ 实现 $f(x)$ 的极小值，锥 $\Gamma_G(x_0)$ 和 $\Gamma_f(x_0)$ 的交必是空的．这条件恰如变分为零的条件那样初等，但是并非所有由它推出的结果可用变分学的经典方法得到．它使得可能处理复杂得多的问题，如在关于不可微泛函的极值的研究中（[6]）．

**参考文献**

[1] Смирнов, В. И., Курс высшей математики, 5 изд., т. 4, М., 1958（中译本：В．И．斯米尔诺夫，高等数学教程，第四卷第一、二分册，人民教育出版社，1958）．

[2] Лаврентьев, М. А., Люстерник, Л. А., Курс вариационного исчисления, 2 изд., М.-Л., 1950（М．А．拉弗林契叶夫、Л．А．留斯切尔涅克，变分学教程，高等教育出版社，1955）．

[3] Bliss, G. A., Lectures on the calculus of variations, Chicago Univ. Press, 1947.

[4] Михлин, С. Г., Вариационные методы в математической физике, М., 1957.

[5] Понтрягин, Л. С. (и. др). Математическая теория оптимальных процессов, 2 изд., М., 1969 (英译本: Pontryagin, L. S., et al., The mathematical theory of optimal processes, Wiley, 1962).

[6] Пшеничный, Б. Н., Необходимые условия экстремума, М., 1969 (英译本: Pshenichnyi, B. N., Necessary conditions of an extremum, Interscience, 1962)

[7] Люстерник, Л. А., Шнирельман, Л. Г., Топологические методы в вариационных задачах, М., 1930

Н. Н. Моисеев 撰

【补注】

**参考文献**

[A1] Noton, A. R. M., Introduction to variational methods in control engineering, Pergamon Press, 1965.

[A2] Fleming, W. H. and Rishel, R. W., Determinstic and stochastic optimal control, Springer, 1975.

[A3] Elsgoloc, L. E., Calculus of variations, Pergamon Press, 1961 (译自俄文) (中译本: Л. Е. 艾利斯哥尔兹, 变分法, 高等教育出版社, 1960).

[A4] Rockafellar, R. T., The theory of subgradients and its applications to problems of optimization. Convex and nonconvex functions, Heldermann, 1981.

葛显良 译 吴绍平 校

**大范围变分学** [**variational calculus in the large; вариационное исчисление в целом**]

数学的一个分支，包括用拓扑学的概念和方法对变分问题作定性的研究：极值曲线的存在性和数目的估计、它们的一些定性性质的研究和许多不同类型的极值曲线之间的关系(见**变分问题**(variational problem))．这领域有时也认为包括流形上函数的平稳(临界)点的"总体"理论，对这些点类似问题也被研究．(在所有情况下，后面的理论是与大范围变分学紧密联系的且有相同的来源，而且其中的一些问题常常作为真正变分问题的简化模型．有时后者也借助于用前者的逼近来作研究)．给定问题中存在的所有极值曲线(平稳点)都是有意义的，不管它们是否有对应的该泛函的(或函数的)真正极值(即极大值或极小值)或者它们只是平稳的．这是**大范围变分法和变分学**(variational calculus)的较早分支之间的差别之一，在较早分支中，在对所有极值曲线都同样的平稳性条件的比较简单的推演以后，研究集中在极值(通常是局部的)上——通常是极小值．此外，"经典"课题的大部分包括对极值曲线的小邻域的研究，而大范围变分学中要利用变分问题的整个函数空间，即所考虑的泛函在其上定义的曲线(函数，曲面，等等)的整个空间(或所考虑函数在其上定义的任一流形)的拓扑性质．这些性质也与这些曲线(曲面)所在的或这些函数定义在其上并(或)取值的空间(区域、流形，等等)的拓扑有联系(且也与边界条件或任何补充条件的性质有联系)．大范围变分学的这种"整体"特征被"大范围"这名称所强调．(在大范围变分学发展过程中显示了必须研究纯粹是局部的**二阶变分**(second variation)的性质([1])．这些性质以前仅在涉及到泛函的极小条件时才被研究．)

大范围变分法是 1920－1930 年间在试图解决关于估计闭 Riemann(或更一般地，Finsler)流形上闭**测地线**(closed geodesic)的数目问题中具体化的．这问题也被称为大范围变分法的周期问题(periodic problem)([1]，[2]，[4])．

大范围变分学中一般的研究方法可描述如下．对给定的函数，包括泛函，看成对应的无穷维泛函空间上的函数，研究函数的变化水平(level) $C$ 的较小值区域(domain of smaller values)

$$f^{-1}(-\infty, C]=\{x: f(x)\leqslant C\}$$

的各种拓扑性质的变化．试图证明只有当 $C$ 通过平稳值(对应于该函数的平稳点)时这些性质才变化且去描述伴随这种转移而起的变化与相应的平稳点性质之间的联系．$f$ 的平稳点为一方、具有充分大 $C$ 的较小值区域 $f^{-1}(-\infty, C]$ 或甚至 $f$ 在其上定义的整个空间的拓扑性质为另一方的两者之间的某些联系被得到了．如果知道了后者的性质，则所建立的联系可以引出关于平稳点的某些结论．对变分问题本身还要实施另外的一步(它可以是平凡的或很困难的)：关于辅助对象(某泛函空间的点)所得出的结果，必须用原问题被提出时所用的说法来进行解释．这最后一步正是闭测地线问题中最困难的一步．

刚才描述的程序对闭流形 $M$ 上的光滑函数 $f$ 可以容易地实现．与对各种 $C$ 的较小值区域 $f^{-1}(-\infty, C]$ 相比较，更常用梯度下降(gradient descent)，即按照由 $f$ 和 $M$ 上任何辅助 Riemann 度量定义的**梯度动力系统**(gradient dynamic system)的点的运动．各个平稳点近旁的情形被独立地考虑．如果它们都是非退化的，则当 $C$ 通过一个平稳水平时较小值区域中的改变可以很详细地加以描述——精确到相差一个微分同胚．这样一种描述，恰如水平流形(level manifolds) $f^{-1}(C)$ 中变化的类似描述，已证明在拓扑学中是重要的([5]，[6])，而在大范围变分学中借助于某个数值不变量——Люстерник-Шнирельман 范畴 cat $M$——和借助于同调论只要不太完全的信息就足够了．同调的信息导致 **Morse 不等式**(Morse inequalities)，它们通常比上述范畴给予非退化临界点个数的好得多

的估计．同时，即使不假设这些平稳点是非退化的，这种范畴和 Morse 不等式的估计都适用，虽然 Morse 不等式给出一种估计，其中认为退化平稳点具有特别指定的重数，在这方面就论及解析地不同的平稳点（analytically-different stationary points）的个数和这些点的代数个数（algebraic number）的估计．另一方面，上述范畴给出在通常意义下平稳点个数的估计（强调这种情况，称之为几何地不同的平稳点（geometrically-different stationary points）的个数的估计）．此外，可以给出某种附加信息：或者平稳水平的数目不小于 cat $M$，不然就要谈到平稳点的一个连续统．

为了对无穷维流形上函数得到类似结果，必须作某些附加的假设，如对这些函数的解析性质（除光滑性以外）．与有限维情形最完全类似的结果由应用所谓 Palais-Smale 条件（Palais-Small condition）$C$ 而得出（[7]），但是对有些有兴趣的情形这条件不满足，又如果满足较弱的条件，则所得结果也较弱．对梯度下降的轨道及其类似物的任一种的研究都会导致困难．例如，对来源于几何的某些问题——Riemann 流形的极小闭子流形，调和映射——这问题化成非线性抛物型偏微分方程组解的性态问题（[8]）．满意的结果有时仅对极小点得到，主要应用是对非线性算子的本征值（[7]，[8]，[9]）和对变分学中多维问题（multi-dimensional problems）——即在这些问题中所考虑的泛函表成某种多重积分——包括上面提到的来源于几何的问题．

对一维问题（one-dimensional problems）（即其中考虑的泛函表成一个自变量的积分），比梯度下降法更初等的特殊方法也可用；事实上，很多结果被用这样一些方法所得到（[1]，[2]，[3]）．闭测地线问题和完全连通 Riemann 流形 $M$ 上连结两点的测地弧的数目的估计问题都是一维的．后面的问题已经完全解决：如果 $M$ 不能被缩成一点，则这样的弧的数目是无限的（[10]）．

看来大范围变分学在数学其他分支的第一个应用是计算经典 Lie 群的同调（[11]）．最重要的现代应用——与函数的平稳点理论在拓扑学中的应用（见上面）一起——是 Lie 群的平稳同伦群的计算（所谓的 Bott 理论（[12]））．大范围变分学也用于**整体微分几何学**（differential geometry）（[13]）中．

**参考文献**


[1] Morse, M., The calculus of variations in the large, Amer. Math. Soc., 1934.

[2] Люстерник, Л. А., Шнирельман, Л. Г., 《Успехи матем. наук》, 2 (1947), 1, 166 – 217.

[3] Seifert, H. and Threlfall, W., Variationsrechnung im Groszen (Morsesche Theorie), Teubner, 1938.

[4] Birkhoff, G. D., Dynamical systems with two degrees of freedom, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 18 (1917), 199 – 300.

[5A] Milnor, J., Topology from the differential viewpoint, Univ. of Virginia Press, 1965（中译本：J. 米尔诺，从微分观点看拓扑，上海科学技术出版社，1983）.

[5B] Wallace, A. H., Differential topology, First steps, Benjamin, 1968.

[6] Milnor, J., Lectures on the $h$-cobordism theorem, Princeton Univ. Press, 1965.

[7] Eells, J., A setting for global analysis, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 72 (1966), 751 – 807.

[8] Альбер, С. И., 《Успехи матем. наук》, 25 (1970), 4, 57 – 122.

[9] Berger, M. S., A bifurcation theory for nonlinear elliptic partial differential equations and related systems, in J. B. Keller and S. Antman (eds.), Bifurcation Theory and Nonlinear Eigenvalue Problems, 1969, 113 – 216.

[10] Serre, J-P., Homologie singulière des espaces fibrés, *Ann. of Math.*, 54 (1951), 425 – 505.

[11A] Понтрягин, Л. С., 《Матем. сб.》, 6 (1939), 3, 389 – 422.

[11B] Понтрягин, Л. С., 《Успехи матем. наук》, 23 (1968), 6, 151 – 185.

[12] Milnor, J., Morse theory, Princeton Univ. Press, 1963（中译本：J. 米尔诺，莫尔斯理论，科学出版社，1988）.

[13] Gromoll, D., Klingenberg, W. and Meyer, W., Riemannsche Geometrie im Grossen, Springer, 1968.


Д. В. Аносов 撰

【补注】 E. Witten（[A2]）指出，对临界点和连接下降流形可以指定一个复形，其同调同构于该空间的同调．这蕴涵 Morse 不等式．Morse 指数的一种在应用中很有用的精细的改进是 Conley 指数（Conley index），见 [A3]．

关于用 Hilbert 流形的现代处理见 [A1]．

**参考文献**


[A1] Klingenberg, W., Lectures on closed geodesics, Springer, 1978.

[A2] Witten, E., Supersymmetry and Morse theory, *J. Diff. Geom.*, 17 (1982), 661 – 692.

[A3] Conley, C. and Zehnder, E., Morse type index theory for Hamiltonian equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, 37 (1984), 207 – 253.

[A4] Morse, M. and Cairns, S. S., Critical point theory in global analysis and differential topology, Acad. Press, 1969.


葛显良 译 吴绍平 校

**变分学的数值方法 [variational calculus, numerical methods of; вариационное исчисление, численные**

методы]

计算数学的一个分支，其中讨论泛函极值的确定.

变分学的数值方法通常分成两大类：间接和直接的方法. 间接方法是基于运用最优化的必要条件（见**变分学**（variational calculus）；**Euler 方程**（Euler equation）；**Weierstrass 条件（对泛函极值）**（Weierstrass conditions (for a variational extremum)）；**横截性条件**（transversality condition）；**Понтрягин 最大值原理**（Pontryagin maximum principle）），借助于这些条件把原变分问题化成边值问题. 这样，间接方法计算上的优点和缺点完全由相应的边值问题的性质所决定. 直接方法中，泛函的极值是直接寻求的. 这样用的最优化方法是**数学规划**（mathematical programming）思想的一种发展.

变分学的数值方法分成直接方法与间接方法，这在很大程度上是有条件的. 某些算法中两种方法都要用. 此外，某些方法不能被归入两者中的任一类. 这样，基于最优化充分条件的一些方法构成另一单独的类.

变分法中的第一批数值方法出现于 L. Euler 的工作中. 然而它们的最快速发展发生在 20 世纪中叶作为电子计算机技术的传播和由此提供的解决工业技术中复杂问题的可能性的结果. 变分学中数值方法的发展与最优控制理论有极大关系，从实际应用观点看，这是最重要的（见**最优控制的数学理论**（optimal control, mathematical theory of））.

**间接方法.** 随着 Понтрягин 最大值原理的出现（1956），变分问题经常可化成边值问题.

考虑最优控制中的以下问题：求轨道 $x(t)$ 和控制 $u(t)$ 使得对此泛函

$$J=\int_{t_0}^{T} f^0(t, x, u)\,dt \tag{1}$$

在给定的微分约束

$$\dot{x}=f(t, x, u), \tag{2}$$

边界条件

$$x(t_0)=x_0, \tag{3}$$

$$x(T)=x_T, \tag{4}$$

和控制限制

$$u\in U \tag{5}$$

下取到其最小值，其中 $x=(x^1, \cdots, x^n)$，$u=(u^1, \cdots, u^m)$ 是相坐标向量和控制向量，$f=(f^1, \cdots, f^n)$，$U$ 是一个 $m$ 维空间中的闭集，而 $t$（时间）是自变量.

按照 Понтрягин 最大值原理，最优控制 $u(t)$ 一定对任何 $t$ 产生 **Hamilton 函数**（Hamilton function）

$$H(\widetilde{u})=\max_{u\in U} H(u)=$$

$$=\max_{u\in U}\left[\sum_{i=1}^{n}\psi_i f^i(t, x, u)-f^0(t, x, u)\right] \tag{6}$$

的绝对极大值，这里 $\psi=(\psi_1, \cdots, \psi_n)$ 由方程组

$$\dot{\psi}_i=-\frac{\partial H}{\partial x^i}, \quad i=1, \cdots, n \tag{7}$$

定义. 控制 $u(t, x, \psi)$ 由条件（6）求得且被代入（2）和（7）中，作为结果，得到带有 $2n$ 个边界条件（3）和（4）的 $2n$ 个微分方程的方程组（2）和（7）的封闭边值问题.

对这边值问题最常用的数值解方案包括用分数步的 Newton 法（[3]）. 引入差异向量

$$\varphi_i=x^i(T)-x_T^i, \quad i=1, \cdots, n, \tag{8}$$

其中 $x^i(T)$ 的值由解具有初始条件（3）和 $\psi_j(t_0)=\psi_{j0}$，$j=1, \cdots, n$ 的方程组（2），（7）的 Cauchy 问题得到. 差异（8）看作未知量 $\psi_{10}, \cdots, \psi_{n0}$ 的函数，由方程组

$$\varphi_i(\psi_{10}, \cdots, \psi_{n0})=0, \quad i=1, \cdots, n \tag{9}$$

定义. 方程组（9）用 **Newton 法**（Newton method）求解；所涉及的偏导数

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial\psi_{j0}}, \quad i, j=1, \cdots, n$$

由公式

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial\psi_{j0}}\approx$$

$$\approx\frac{\varphi_i(\psi_{10}, \cdots, \psi_{j0}+\Delta\psi_{j0}, \cdots, \psi_{n0})-\varphi_i(\psi_{10}, \cdots, \psi_{n0})}{\Delta\psi_{j0}}$$

数值地确定，其中 $\varphi_i(\psi_{10}, \cdots, \psi_{j0}+\Delta\psi_{j0}, \cdots, \psi_{n0})$ 的值由解带有初始条件（3）和条件

$$\psi_l(t_0)=\psi_{l0}, \ \psi_j(t_0)=\psi_{j0}+\Delta\psi_{j0}, \ l\neq j$$

的方程组（2），（7）的 Cauchy 问题得到，其中 $\Delta\psi_{j0}$ 是 $\psi_{j0}$ 的一个小增量.

这些偏导数可用一个更精确但是更繁琐的方法（[4]）来确定，包括要积分方程组（2），（7）的变形形式的一个 $2n$ 个方程的组.

Newton 方法中的困难首先在于对 $\psi_{j0}$ 的恰当的初始逼近的选取，其次在于该 Cauchy 问题的不稳定性，这在大区间 $[t_0, t_1]$ 上很强烈地显示出来. 没有一般有效的程序去克服第一个困难. 很多方法可用来处理 Cauchy 问题的不稳定性（见 **Cauchy 问题**，**常**

**微分方程的数值方法**（Cauchy problem, numerical methods for ordinary differential equations））.

如果边值条件和泛函以比（3），（4）和（1）中更一般的形式给定（例如在 **Bolza 问题**（Bolza problem）中具有可移动端点，在具有自由（可移动）端点的**变分问题**（variational problem）中），加入**横截性条件**（transversality condition）以补充最优性条件（6）和（7）．在消去出现于这些条件中的任意常数后，得到一个封闭的边值问题和对应的（9）型的方程组．

方程组（9）的解也可由用于解非线性组的其他方法得到．

解特殊类型的边值问题的特殊方法已经有了发展．例如，线性边值问题用边界条件转移法（**打靶法**（shooting method））求解．这方法也用来作为非线性边值问题迭代解法的一个组成部分（[1]）．

变分学问题很经常地借助于电子计算机求解，因为按这方式间接方法可有效地且比较简单地实现．然而，这种技巧并非可应用于所有的情形；对变分学中某些重要的问题类、例如包含相限制的问题，写出必要条件是困难的，这就导致有复杂结构的边值问题．此外，这些边值条件不一定保证所找到的解确实给出该泛函的一个极值．这必须用引进最优化的充分条件来检验．所有这些限制了间接方法的应用范围．

**直接方法**．第一个直接方法是 Euler 为解变分学中最简问题而提出的．它被称为 Euler 折线法（或 Euler 有限差分法）．在这方法中泛函

$$J(x)=\int_{t_0}^{t_1}F(t,x,\dot{x})dt \tag{10}$$

是在满足给定边界条件

$$x(t_0)=x_0,\ x(t_1)=x_1 \tag{11}$$

的连续折线 $x(t)$ 上考虑的，且这些折线由端点在给定横坐标的 $N$ 个直线段组成．这样，该泛函数变成该折线顶点的纵坐标的一个函数，而原来的问题化成一个多元函数求极小的问题（见 **Euler 法**（Euler method））．

由于包含在这样的计算中的工作量是相当大的，直接法在变分学的传统的研究中长期被忽视．在 20 世纪初它们再次被采用．化成求多元函数极值问题的新方法被提出来了．其中最重要的是 **Ritz 法**（Ritz method），按照这方法在条件（11）制约下使（10）极小化的解是在具有形式

$$x=\varphi_0(t)+\sum_{i=1}^{N}a_i\varphi_i(t)$$

的函数类中去寻找，这里 $\varphi_i(t)$, $i=0,\cdots,N$，是满足边界条件

$$\varphi_0(t_0)=x_0,\ \varphi_0(t_1)=x_1,\ \varphi_i(t_0)=\varphi_i(t_1)=0,$$
$$i=1,2,\cdots,$$

的一个完全的无限的线性无关函数系中的元素．该问题化成求 $N$ 个变量的函数

$$J=J(a_1,\cdots,a_N)$$

的极小值．Ritz 法是足够一般的方法．它被用于解数学物理中变分问题，包含依赖于多元函数的一个泛函的极小化．该方法的包括这类问题的进一步推广是这样的方法（[2]），其中系数考虑为自变量之一的未知函数（例如，如果问题包含两个自变量 $t$ 和 $\tau$，则 $a_i$ 可以给定为 $a_i(\tau)$）．原来的泛函变为依赖于 $N$ 个函数 $a_i(\tau)$，而它们可以借助于必要条件来决定，即归根到底，由解 $N$ 个 Euler 方程的方程组的边值问题来决定．

实际需要增加了最优控制的非经典问题的价值．在技术问题中出现的在相坐标和控制函数上的复杂限制，微分方程右边的不连续性，奇异的和滑动最优控制条件的可能存在性，等等，所有这一切刺激了新直接方法的发展．最流行是包含控制空间中下降的思想和变式的逐次分析思想的那些方法（**动态规划**（dynamic programming）型的）．

控制空间中下降方法是基于求出形如

$$u_{k+1}(t)=u_k(t)+\delta u_k(t) \tag{12}$$

的控制序列 $u_k\in U$，它对应于该泛函值的一个单调减小序列．例如，假设需要求泛函

$$J=F(x(T)) \tag{13}$$

在条件（2），（3）和（5）（$U$ 是凸的单连通集）的制约下的一个极小值．寻找增量 $\delta u_k(t)$ 如下．借助于在右端点受条件

$$\psi_i(T)=-\frac{\partial F(x(T))}{\partial x^i},\ i=1,\cdots,n$$

制约的（2）的变分方程和共轭组（7），泛函（13）的增量的线性部分由变分 $\delta u$ 表成形式

$$\delta J=-\int_{t_0}^{T}\frac{\partial H}{\partial u}\delta u\,dt.$$

为了减小泛函（13）的值，必须对每一次迭代选择增量

$$\delta u_k(t)=\kappa\frac{\partial H}{\partial u},\ \kappa>0,$$

其中 $\partial H/\partial u$ 的值在控制 $u_k(t)$ 和在对应的轨道 $x_k(t)$ 上计算．该线性化的正则性，以及由此，泛函（13）的值的减小是由选取 $\kappa$ 的充分小的值来加以保证的．下降过程（12）从某个 $u_0(t)$ 开始，而作为最

后一次迭代的结果，当 $|\delta J|$ 变得小于某个给定的 $\varepsilon$ 时，就终止了．在如上描述的自由右端点的情形，所得到的算法最简单（[5]，[6]，[7]）．不涉及原问题线性化的另一种方法对解具有一个自由端点的问题很有效（[8]）．如果右端点也受边界条件约束，所有算法变得复杂得多．为了处理边界条件，[5] 中用了一种梯度投影程序，而在[6] 中当不满足边界条件时引入罚函数，即代替（13）考虑泛函

$$J = F(x(T)) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x^i(T) - x_T^i)^2;\ \lambda_i > 0. \tag{14}$$

控制增量是由解一辅助线性规划问题而决定的方法类似于梯度方法（[9]）．

最优控制问题数值解的一大类直接方法是基于变式的逐次分析的思想（[10]，[11]，[12]）．这些方法的重要特征是可以用来解形如

$$x \in G \tag{15}$$

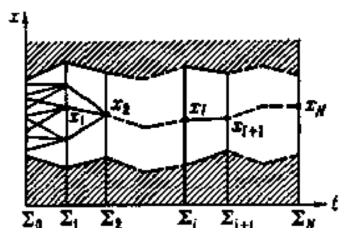
这一类的相限制的问题，其中 $G$ 是 $n$ 维空间中闭集．其主要缺点是当空间维数增加时其应用迅速地变得越来越困难．在这些方法中原问题化成特殊类型的非线性规划问题．实现这种转化的两种方式经常用到．第一种方法最后化成仅依赖于在轴上离散网格点上给定控制的一个函数的极小化问题（[13]）．在第二种方法中丢弃了控制而问题是化成其类型如

$$J(x_0, \cdots, x_N) = \sum_{i=0}^{N-1} f_i(x_i, x_{i+1}) \tag{16}$$

的一个函数的极小化，其中 $x_i$ 是向量 $x_i$ 在点 $t_i(i=0, \cdots, N)$ 的值，且受限制

$$x_i \in G_i, \tag{17}$$

它们是由限制（3），（4）和（15）而来的．用来使得（16）在（17）约束下极小化的程序可几何地解释如下．




每一族向量 $\{x_0, \cdots, x_N\}$ 对应一条折线，如图所示，该折线通过 $x_0, \cdots, x_N$ 且位于由方程 $t = t_i$ 所定义的超平面 $\Sigma_i$ 中．折线长度 $J(x_0, \cdots, x_N)$ 是其各连接线长度 $f_i(x_i, x_{i+1})$ 之和．容许的 $x_i$ 值的区域由（17）定义，且用某个折线与禁止区域分隔（禁止区域在图中用阴影表示）．问题是求位于容许区域内且连接超平面 $\Sigma_0$ 和 $\Sigma_N$ 的一条折线的极小长度．用以解决这个问题的算法是个多步过程，在此过程中在每一阶段 $i$，某一个已知不包含最优折线的变元的集合 $\Omega_i$ 被划出．在第零步定义函数

$$l(x_1) = \min_{x_0 \in G_0} f_0(x_0, x_1),$$

即连接每一点 $x_1 \in \Sigma_1$ 与超平面 $\Sigma_0$ 的最短连线的长度．由于

$$\min_{x \in G_0} J(x_0, \cdots, x_N) = l(x_1) + \sum_{i=1}^{N-1} f_i(x_i, x_{i+1}),$$

不包含线段 $l(x_1)$ 的折线的集合 $\Omega_0$ 被丢弃．在第一步构造连接每一点 $x_2 \in \Sigma_2$ 与 $\Sigma_0$ 的最短折线

$$l(x_2) = \min_{x_1 \in G_1} (l(x_1) + f_1(x_1, x_2)),$$

而不包含直线 $l(x_2)$ 的折线的集合 $\Omega_1$ 也被丢弃，等等．在第 $i$ 步构造连接每一点 $x_{i+1} \in \Sigma_{i+1}$ 和 $\Sigma_0$ 的最短折线

$$l(x_{i+1}) = \min_{x_i \in G_i} (l(x_i) + f_i(x_i, x_{i+1})), \tag{18}$$

而不包含折线 $l(x_{i+1})$ 的折线的集合 $\Omega_i$ 被丢弃．最后一步得出原问题的解——连接超曲面 $\Sigma_N$ 和 $\Sigma_0$ 的最短折线：

$$l = \min_{x_N \in G_N} l(x_N).$$

公式（18）是描述寻求此解的多步过程的一个递推关系．它是动力规划和 Bellman 最优化原理的基础．

按照（18），极小值必须在集合 $G_i$ 上找，一般而言该集合具有连续统的势．数值实现包括它们的有限维逼近．为此，除了关于 $t$ 的网格（例如具有常数步长 $\tau$）外，构造关于 $x^j$ 的步长为 $h^j (j=1, \cdots, n)$ 的网格．问题然后化成在一种以网格结点为顶点的特殊图中求最短道路．设 $P_k(i)$ 是位于超平面 $\Sigma_i$ 上的结点 $k$；令

$$l_{ks}(i) = f_i(P_k(i), P_s(i+1))$$

是连接邻近的超平面上两结点 $k$ 和 $s$ 的线段的长度；又设 $l_k(i)$ 是连接结点 $P_k(i)$ 与超平面 $\Sigma_0$ 的最短道路的长度．则递推关系（18）取形式

$$l_s(i+1) = \min_k (l_k(i) + l_{ks}(i)),$$

其中最小值是对位于超平面 $\Sigma_i$ 的容许区域 $G_i$ 中的所有结点号码 $k$ 取的．一般情形下这最小值是由检查所有结点而找到．这方法使得可能找到函数（16）在约束（3），（4）和（15）下的一个总体极值，具有由网格步长 $\tau$ 和 $h^j$ 所决定的精确度．为了这方法收敛于原问题的解，这些步长之间的一定的关系（例如

$h^1 = o(\tau)$ 型)必须成立. 这方法需要用具有大存储量的快速计算机. 由于这个缘故, 实际工作的第一步是在粗的网格上求解, 此后在所得的解的邻域中用更细的网格去得到更精确的解. 做这工作是借助于求局部极值的方法之一(见**行进管法**(travelling tube method), **局部变分方法**(local variations, method of); **行进波法**(travelling wave method)).

**参考文献**


[1] Моисеев, Н. Н., Численные методы в теории оптимальных систем, М., 1971

[2] Канторович, Л. В., Крылов, В. И., Приближенные методы высшего анализа, 5 изд., М.-Л., 1962(中译本: Л. В. 康脱洛维奇等, 高等分析近似方法, 上, 科学出版社, 1966).

[3] Исаев, В. К., Сонин, В. В., 《Ж. вычисл. матем. и матем. физ.》, 5(1965), 2, 252－261.

[4] Джурович, С., Макинтайр, Д., 《Ракетная техника》, 1962, 9, 47－53.

[5] Денхэм, В., Брайсон, В., 《Ракетная техника и космонавтика》, 1964, 1, 34－37.

[6] Шатровский, Л. И., 《Ж. вычисл. матем. и матем. физ.》, 2(1962), 3, 488－491.

[7] Энеев, Т. М., 《Космические исследования》, 4(1966), 5, 651－669.

[8] Крылов, И. А., Черноусько, Ф. Л., 《Ж. вычисл. матем. и матем. физ.》, 2(1962), 6, 1132－1139.

[9] Федоренко, Р. П., 《Ж. вычисл. матем. и матем. физ.》, 4(1964), 6, 1045－1064.

[10] Bellman, R., Dynamic programming, Princeton Univ. Press, 1957.

[11] Михалевич, В. С., 《Кибернетика》, 1(1965), 1, 45－46

[12] Моисеев, Н. Н., 《Кибернетика》, 1966, 3, 1－29

[13] Ермольев, Ю. М., Гуленко, В. П., 《Кибернетика》, 1967, 3, 1－20.


И. Б. Вапнярский, И. А. Ватель 撰

【补注】"相坐标"在西方文献中通常称为"状态变量".

**参考文献**


[A1] Bryson, A. E. Jr. and Ho, Y. C., Applied optimal control, Hemisphere, 1975.


葛显良 译 吴绍平 校

**变分方程**[**variational equations** 或 equations in variation; **уравнение в вариациях**], 变分方程组(system of variational equations)

一微分(或差分)方程之解对一参数的导数所满足的线性微分(或差分)方程. 令 $x(\cdot):(\alpha,\beta)\to\mathbf{R}^n$ 是 **Cauchy** 问题(Cauchy problem) $\dot{x}=f(x,t)$, $x(t_0)=x_0$ 的解, 其图象位于区域 $G$ 内, 而 $f$ 和 $f'_x$ 均在 $G$ 内连续. 这时, 对任意区间 $[p,s]\subset(\alpha,\beta)$ 和每一个 $\varepsilon>0$, 都可以找到一个 $\delta>0$, 使得对任一连续函数 $g:G\to\mathbf{R}^n$, 并且 $g'_x$ 也在 $G$ 中连续, 且满足不等式

$$\|g-f\|_{C(G)}=\sup_{(x,t)\in G}|g(x,t)-f(x,t)|<\delta,$$

Cauchy 问题 $\dot{y}=g(y,t)$, $y(t_0)=y_0$ 都有一个解 $y(\cdot)$. 对满足 $|y_0-x_0|<\delta$ 的每一个 $y_0\in\mathbf{R}^n$, 此解都定义在区间 $[p,s]$ 的一个邻域上. 对这两个解的差 $y(\cdot)-x(\cdot)$ 有公式

$$y(t)-x(t)=z(t)+o(|y_0-x_0|+\|g-f\|_{C^1(G)})$$

成立, 其中 $z(\cdot)$ 是线性微分方程

$$\dot{z}=A(t)z+h(t) \tag{1}$$

之解, 而 $A(t)=f'_x(x(t),t)$, $h(t)=g(x(t),t)-f(x(t),t)$, 并有初值 $z(t_0)=y(t_0)-x(t_0)$; $o(\cdot)$ 是对 $t\in[p,s]$ 的一致"小 o", 而范数 $\|g-f\|_{C^1(G)}$ 定义为

$$\sup_{(x,t)\in G}\{|g(x,t)-f(x,t)|+\|g'_x(x,t)-f'_x(x,t)\|\}.$$

方程(1)称为 $\dot{x}=f(x,t)$ 沿解 $x(\cdot)$ 的变分方程(variational equation).

在文献中时常引用上述定理的较弱形式(其中使用一种较弱的可微性代替 Fréchet 可微性): 若在区域 $G\subset\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}$ 与一区间 $(a,b)\subset\mathbf{R}$ 之乘积 $G\times(a,b)$ 上函数 $f(x,t,\mu):G\times(a,b)\to\mathbf{R}^n$ 为连续, 且有连续偏导数 $f'_x, f'_\mu$; 而函数 $x_0(\cdot):(a,b)\to\mathbf{R}^n$ 是连续可微的, 则 Cauchy 问题 $\dot{x}=f(x,t,\mu)$, $x(t_0)=x_0(\mu)$ 之解 $x(\cdot,\mu)$ 对 $\mu$ 在区间 $(a,b)$ 中连续可微, 且其导数 $x'_\mu(\cdot,\mu)$ 是线性微分方程(即 $\dot{x}=f(x,t,\mu)$ 沿解 $x(\cdot,\mu)$ 的变分方程)

$$\dot{z}=A(t)z+h(t)$$

之解, 且适合初值条件 $z(t_0)=x'_{0\mu}(\mu)$, 这里 $A(t)=f'_x(x(t,\mu),t,\mu)$, $h(t)=f'_\mu(x(t,\mu),t,\mu)$.

$k$ 阶变分方程就是一个微分(差分)方程之解对一参数之 $k$ 阶导数所满足的线性微分(差分)方程. 任意阶变分方程都相应于同样的线性齐次方程(即与 $k$ 无关), 差别在非齐次项 $h(t)$.

若微分方程的右方不变(在第一种提法下即指 $g=f$, 而在第二种提法下则指 $f(x,t,\mu)$ 不含 $\mu$), 则(一阶)变分方程是齐次的.

自治系统 $\dot{x}=f(x)$ 在一不动点处(即沿解 $x(\cdot)=x_0$)的变分方程是一常系数线性微分方程组, 而若 $f(\cdot)$ 不改变, 则一阶变分方程组是齐次的. 高阶的

变分方程组则“具有拟多项式的右方”. 自治系统沿周期解(殆周期解)的变分方程是具有周期(殆周期)系数的线性微分方程组(见**周期系数的线性微分方程组**(linear system of differential equations with periodic coefficients); **殆周期系数的线性微分方程组**(linear system of differential equations with almost periodic coefficients)).

上面给的定义适用于任意阶方程. 例如, 摆方程 $\ddot{x}+\omega^2\sin x=0$ 在下平衡位置 $(x=0,\ \dot{x}=0)$ 的变分方程(如果只有相空间中的初始点变化)是 $\ddot{x}+\omega^2 x=0$, 称为摆的小振动方程(equation for small oscillations of a pendulum), 而在上平衡位置 $(x=\pi,\ \dot{x}=0)$ 的变分方程是 $\ddot{x}-\omega^2 x=0$. 对于微分流形上的微分方程, 解的变分方程可以类似于上面讲过的 $\mathbf{R}^n$ 上的情况来定义; 变分方程的解之值在流形的切丛中. 有两种方法把任意微分流形的情况化为 $\mathbf{R}^n$ 的情况, 第一种是把流形嵌入一个维数充分高的 Euclid 空间中, 并把微分方程(向量场)拓展到一个邻域中去, 第二种方法是在轨道的一个邻域中, 用一个坐标卡中的坐标写出定义于微分流形上的微分方程, 而这个坐标卡的选取光滑依赖于此点(例如, 在 Riemann 流形上应用指数测地映射). 这样就可以把这个方程写成 $\mathbf{R}^n$ 上的方程, 而且(和第一种化法一样)其右方和流形上的微分方程的右方(即向量场)有相同的光滑性. 对于 Riemann 流形上的微分方程 $\dot{x}=F(x)$, 若不改变 $F$, 则其沿轨道 $x(t)$ 的变分方程可以写成

$$\nabla_{F(x(t))}\xi=\nabla_\xi F(x(t)),$$

这里 $\nabla_a$ 是**共变导数**(covariant derivative). 一个微分映射 $f: V^n\to V^n$ ($V^n$ 是一微分流形)沿着轨道 $\{f^t x\}_{t\in\mathbf{Z}}$ 的变分方程(若不变动 $f$)是方程

$$\xi(t+1)=df_{f^t x}\,\xi(t);$$

这方程之解 $\xi(\cdot)$ 在 $t$ 点取值于 $V^n$ 在点 $f^t x$ 处的切空间 $T_{f^t x}V^n$ 中, 而解本身就是序列

$$\{d(f^t)_x\,\xi\}_{t\in\mathbf{Z}},\quad \xi\in T_x V^n,$$

$d(f^m)x$ 即 $f$ 的 $m$ 阶迭代在 $x$ 之导数.

令 $V^n$ 为闭微分流形. 映 $V^n$ 到 $V^n$ 上的 $C^1$ 类微分同胚 $f$ 之集合可赋以 $C^1$ 拓扑. 以下的断言是成立的(见[4]): 1) 对每一个 $k\in\{1,\cdots,n\}$, **Ляпунов 特征指数**(Lyapunov characteristic exponent)

$$\lambda_{n-k+1}(f,x)=\inf_{\mathbf{R}^k\in G_k(T_xV^n)}\ \sup_{\xi\in\mathbf{R}^k}\ \overline{\lim_{t\to+\infty}}\ \frac{1}{t}\ln|df^t\xi|, \tag{2}$$

这里 $G_k(T_xV^n)$ 是切空间 $T_xV^n$ 的 $k$ 维向量子空间所成的 Grassmann 流形. 它是一个第二 **Baire 类**(Baire classes)函数 $\lambda_{n-k+1}(\cdot): S\times V^n\to\mathbf{R}^n$; 2) 空间 $S\times V^n$ 中有一个 $G_\delta$ 型处处稠密集 $D$, 它具有以下性质: a) 对每一个 $k\in\{1,\cdots,n\}$, 函数 $\lambda_k(\cdot): S\times V^n\to\mathbf{R}$ 在 $D$ 上每点均为上半连续; b) 对每个 $(f,x)\in D$, $\lambda\in\mathbf{R}$, 子空间

$$l_\lambda(f,x)=\left\{\xi\in T_xV^n:\ \overline{\lim_{t\to+\infty}}\ \frac{1}{t}\ln|df^t\xi|\leqslant\lambda\right\}$$

与其在切空间 $T_xV^n$ 中的代数补空间 $l_\lambda^\perp$ 是**指数分离的**(exponentially separated), 即存在 $\alpha,\beta>0$, 使对一切 $\xi\in l_\lambda^\perp$, $\eta\in l_\lambda(f,x)$ 以及任意整数 $t\geqslant s\geqslant 0$, 以下不等式恒成立:

$$|df^t\xi|\cdot|df^s\eta|\geqslant\alpha|df^s\xi|\cdot|df^t\eta|\exp(\beta(t-s)).$$

闭微分流形 $V^n$ 上的 $C^1$ 类向量场的集合 $S$ 赋有 $C^1$ 拓扑. 一个向量场 $F\in S$ 在 $V^n$ 上诱导出一个动力系统 $f^t$ (它是群 $\mathbf{R}$ 的 $C^1$ 类作用). 对于每一个 $k\in\{1,\cdots,n\}$, Ляпунов 指数之定义即(2)之右方.

以下的断言成立:

$\alpha$) 对每一个 $k\in\{1,\cdots,n\}$, 函数 $\lambda_k(\cdot): S\times V^n\to\mathbf{R}$ 属于第二 Baire 类([4]);

$\beta$) 对每一个 $F\in S$, 对于每一个概率分布, 若它对于由 $V^n$ 上的向量场 $F$ 诱导出的动力系统 $f^t$ 为不变的(其 $\sigma$ 代数包含所有的 Borel 子集), 几乎每个点 $x$ 都使得 $\dot{x}=F(x)$ 沿轨道 $\{f^t x\}$ 的变分方程都是正则的线性微分方程组(见[5], [6]).

$\gamma$) 对每个 $m\in\mathbf{N}$, 令 $S^{(m)}$ 记 $V^n$ 上所有 $C^m$ 类向量场的集合, 它赋有 $C^m$ 拓扑; 令 $P$ 是 $V^n$ 上的概率分布, 其 $\sigma$ 代数包含所有 Borel 集, 再令 $S_P^{(m)}$ 是 $S^{(m)}$ 中这样一些向量场的子空间, 使分布 $P$ 在这些向量场诱导出的动力系统下不变; 这时有(见[7]):

A) 对每个 $m\in\mathbf{N}$, $k\in\{1,\cdots,n\}$, 函数

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{V^n}\lambda_i(\cdot,\ x)\,dP(x):\ S_P^{(m)}\to\mathbf{R}$$

(即变分方程的最高 Ляпунов 指数的相平均和)是上半连续的.

B) 对每个 $m\in\mathbf{N}$, 在 $S_P^{(m)}$ 中均有一个 $G_\delta$ 型处处稠密集, 使对每一个 $k\in\{1,\cdots,n\}$ 函数

$$\int_{V^n}\lambda_k(\cdot,\ x)\,dP(x):\ S_P^{(m)}\to\mathbf{R}$$

连续, 即是说在 $S_P^{(m)}$ 中, 对于变分方程的 Ляпунов 指数的相平均, 连续性是典型情况.

**参考文献**


[1] Ляпунов, А. М., Собр. соч. т. 2, М.-Л., 1956 (英译本: Lyapunov, A. M., Stability of motion, Acad. Press, 1966).

[2] Whittaker. E. T, Analytical dynamics of particles and rigid bodies, Dover, reprint, 1944.

[3] Понтрягин, Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 4 изд., М., 1974 (中译本: Л. С. 庞特

利雅金，常微分方程，上海科学技术出版社，1962）。

[4] Миллионщиков, В. М., 《Дифференц уравнения》, 19 (1983), 2, 215 – 220.

[5] Оселедец, В И., 《Тр. Моск. матем. об-ва》, 19 (1968), 179 – 210.

[6] Миллионщиков, В. М., 《Матем. сб.》, 77 (1968), 163 – 173.

[7] Миллионщиков, В. М., 《Дифференц. уравнения》, 14 (1978), 4, 759 – 760. В. М. Миллионщиков 撰

【补注】 对于更广泛的许多方程，特别是偏微分方程，变分方程也有意义.

在 [A1] 中使用一阶变分的方程 (equation of first variation) 一词. 亦见 [A2].

**参考文献**

[A1] Coddington, E. A. and Levinson, N., Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill, 1955.

[A2] Hille, E., Lectures on ordinary differential equations, Addison-Wesley, 1964. 齐民友 译

**变分数值方法 [variational numerical methods; вариационные численные методы]**，微分方程的

【补注】 在物理学中有些原理不能用微分形式而只能用变分形式表示. 这些原理称作变分原理 (variational principles)，它们描述了某些量达到极值 (即极大值或极小值) 的条件. 例如 Hamilton 原理 (Hamilton principle)，经典力学中的最小作用原理 (principle of least action) (亦见**最小反作用原理** (principle of least reaction)) 和几何光学中的 **Fermat 原理** (Fermat principle)；其他一些例子可以在数学物理、结构力学、流体力学、热传导理论等中找到.

**变分学** (variational calculus) 与泛函的极值问题有关，它们是定义在函数空间子集上的实值或复值函数. 这个子集由定义在某个区域上的函数组成. 而子集中的一个元素称作容许函数 (admissible function) (或变函数 (argument function)). 在 1696 年 Johann Bernoulli 叙述捷线问题 (brachistochrone problem) (见**捷线** (brachistochrone)) 时首先提及这种类型的问题后引起了广泛的注意.

变分计算的基本准则如下：$v=u$ 为积分

$$J(v)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,v,v_x)dx,\ v_x=\frac{dv}{dx}$$

的平稳点的充要条件是 $v=u$ 为满足 **Euler 方程** (Euler equation)

$$\frac{\partial F}{\partial v}-\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial F}{\partial v_x}\right]=0$$

的容许函数. 它的解称为极值曲线 (extremals). 为了求解这个问题，必须在所有的极值曲线中找出满足规定边界条件的一条极值曲线.

寻找一个积分的极值问题可以扩展到如下多个自变量的多重积分的情况

$$J(v)=\int F(x_1,\cdots,x_n,v,v_x,\cdots,v_{x_n})d\Omega,$$

其中

$$v_{x_i}=\frac{\partial v}{\partial x_i},\quad d\Omega=dx_1\cdots dx_n.$$

变分计算研究泛函 $J(v)$ 的极值和 Euler 方程解 $u$ 之间的对应. 这样，求一个极值问题的解可以变成寻找对应 Euler 方程的解，相反地，当给定一个微分方程后，有时，可以构造一个泛函，它的 Euler 方程就是这个微分方程. 在这种情况，就某种意义上说，极值问题和 Euler 方程是等价的. 为了求解 Euler 方程，必须给定边界条件 (例如，Dirichlet 型或 Neumann 型)，加在容许函数上的这些边界条件称为必要的 (essential) (例如，Dirichlet 型)，而由极值问题的解自动满足，不明显加在容许函数集上的这些条件称为自然的 (natural) (例如 Neumann 型).

作为一个例子，令 $\Omega$ 是 $n$ 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中的一个开有界域，$f\in L_2(\Omega)$ 是一个实值函数. 研究泛函

$$J(v)=\frac{1}{2}\int_\Omega|\operatorname{grad}v|^2d\Omega-\int_\Omega fv\,d\Omega$$

极小化的问题. 容许函数集是这样的 Hilbert 空间，即在 $\Omega$ 中有紧支集的完全的无限可微函数空间，其 Соболев 范数为

$$\|v\|_1=\left\{\int_\Omega|\operatorname{grad}v|^2d\Omega+\int_\Omega v^2d\Omega\right\}^{1/2}.$$

可以证明，应用 Riesz 表示定理 (见 **Riesz 定理** (Riesz theorem))，该极值问题等价于 (概括地说，分布意义上) 下面 $u$ 的 Euler 方程 (即具有 Dirichlet 边界条件的 Poisson 方程)：

$$-\operatorname{div}\operatorname{grad}u=f,\quad 在\ \Omega\ 中,$$

$$u=0,\quad 在\ \Omega\ 的边界\ \partial\Omega\ 上.$$

用求解极值公式 (如果存在) 来代替解微分方程有一些优点，这是因为一些边界条件能自动满足，而且只要求更低阶的微分.

在函数空间 $V$ 上，考虑求泛函 $J$ 极小化的问题，而且令 $\varphi_1,\cdots,\varphi_N,\cdots$ 是 $V$ 的一个基. 而 $V_N$ 是用前面 $N$ 个基函数 $\varphi_1,\cdots,\varphi_N$ 生成的对空间 $V$ 的一个逼近. 将逼近问题定义为：求 $u_N\in V_N$，使泛函 $J$ 在 $V_N$ 上极小.

因为 $u_N$ 可以写成

$$u_N = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \varphi_i ,$$

其中 $\alpha_1, \cdots, \alpha_N$ 是未知数，则逼近问题变成：求 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_N\}$ 使 $J(\alpha_1, \cdots, \alpha_N)$ 是 $J$ 的极值 .

这就得到了 $N$ 个未知数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_N$ 的下面 $N$ 个（必要）条件：

$$\frac{\partial J(\alpha_1, \cdots, \alpha_N)}{\partial \alpha_i} = 0, \quad i = 1, \cdots, N.$$

原先的极值问题已经化成含有 $N$ 个未知数 $N$ 个方程的一个方程组，这个方程组可以数值求解．逼近解 $u_N$ 的精度与基函数的个数 $N$ 有关．一般说来，随 $N$ 的增加精度提高，即 $u_N$ 收敛到 $u$.

用确定 $\alpha_i (i = 1, 2, \cdots)$ 值来构造一个序列 $u_1, u_2, \cdots$ 的方法称作 **Ritz 法**（Ritz method）．不必要求 $V_m$ 包含在 $V_{m+1}$ 中；因为要求收敛，逼近空间必须满足稠密性质：$\bigcup_{m=1}^{\infty} V_m$ 在 $V$ 中稠密．

**Галеркин 法**（Galerkin method），这个方法可以认为是 Ritz 法的推广，它可以直接应用于微分方程，而不考虑等价极值公式的存在．Галеркин 法可以作如下说明：考虑下面的线性二阶微分方程，和（必要）Dirichlet 边界条件（边值问题（boundary value problem））：

$$Lu = f, \quad 在\ \Omega \subset \mathbf{R}^n\ 内,$$

$$u = 0, \quad 在\ \partial\Omega\ 上 .$$

在函数空间 $V$（假定其基是 $(\varphi_1, \cdots, \varphi_N, \cdots)$）中寻找上面问题的解．任何元素 $w \in V$ 都可以写成上述基函数的一个无限线性组合．对任意 $w \in V$，称表达式 $Lw - f = R(w)$ 为剩余（residual）．现在的问题就是要寻找一个元素 $u \in V$，使剩余变为零．这就是说，解 $u$ 突出地表现为下面的射影要求：

$$\int_{\Omega} (Lu - f) \varphi_i \, d\Omega = 0, \; i = 1, 2, \cdots ,$$

用 Green 公式将微分降阶而且代换边界条件就得到下面边值问题的变分（或者弱）公式：找 $u \in V$，使得

$$a(u, \varphi_i) = \int_{\Omega} f \varphi_i \, d\Omega, \; i = 1, 2, \cdots ,$$

其中 $a(u, \varphi)$ 是 $V \times V$ 上的一个双线性形式．例如，当 $L$ 是 Laplace 算子时，$a(u, \varphi)$ 为

$$a(u, \varphi) = \int_{\Omega} \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} \varphi \, d\Omega .$$

Галеркин 法包括得到一个 $N$ 个基函数 $\varphi_1, \cdots, \varphi_N$ 生成的 $V$ 的有限维子空间 $V_N$．逼近的有限维问题定义为：求 $u_N \in V_N$，使得

$$a(u_N, \varphi_i) = \int_{\Omega} f \varphi_i \, d\Omega, \; i = 1, 2, \cdots, N.$$

因为 $u_N \in V_N$，故 $u_N$ 为

$$u_N = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \varphi_j ,$$

而且这个逼近问题与下列以 $\alpha_1, \cdots, \alpha_N$ 为未知数的 $N$ 个线性代数方程的方程组等价：

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j a(\varphi_i, \varphi_j) = \int_{\Omega} f \varphi_i \, d\Omega, \; i = 1, \cdots, n.$$

这个方程组可以用 Gauss 消去法或迭代法求解．

当微分算子 $L$ 的系数和函数 $f$ 是空间中的周期函数，而且挑选正弦函数或余弦函数为基函数时，Галеркин 法与 Fourier 法（Fourier method）等价，而且可以有效地应用快速 Fourier 变换（fast Fourier transform）来执行（见**离散 Fourier 变换**（Fourier transform, discrete））．Галеркин 法也可以用于发展方程的数值求解，得到一个关于时间的常微分方程组，它可以用积分法求数值解．

Ritz 法和 Галеркин 法都把无限维问题变成一个（有限维）线性方程组．有限元法（finite-element method）是在任意区域 $\Omega$ 上生成基函数的一种系统的方法，它给出一个稀疏矩阵 $A$（即有许多零元素的矩阵）．有限元法由三步组成：

第一步是将区域 $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 分成有限个非交叠的子区域（单元（elements）），它的长度不超过 $h > 0$．单元的标准例子是子区间（$n = 1$），二维是三角形，三维是四面体．

第二步，在每个单元中选有限个点（称结点（nodal points）），例如：子区间的两个端点；三角形的顶点；四面体的顶点．更复杂的例子是子区间的两个端点和中点，或者是三角形顶点和边的中点．所有结点的（有限）集合将用 $\mathscr{P} = \{P_1, \cdots, P_N\}$ 表示．

第三步，对每个结点 $P_i \in \mathscr{P}$，在 $\bar{\Omega}$ 上定义一个连续基函数 $\varphi_i$，这些基函数满足下面一些性质：1）在结点 $P_i$，$\varphi_i$ 的值是 1，而在所有其他结点则为 0；2）在每个单元上，$\varphi_i$ 有规定的形状（与每个单元的结点数有关）．例如，在 $n$ 维情况：每个单元有 $n+1$ 个结点的线性基函数，或者每个单元有 $(n+1)(n+2)/2$ 个结点的二次基函数．

应用这些基函数，可以构造近似解 $u_N$．事实上，函数

$$u_N(x) = \sum_{j=1}^{N} \tilde{u}_j \varphi_j(x)$$

是基函数 $\varphi_j$ 的线性组合，它在 $\bar{\Omega}$ 上连续，而且在单元上有规定的性质．由于基函数的特殊构造，参数 $\tilde{u}_j$ 在结点 $P_j$ 处精确地等于 $u_N$ 的值．

得到的线性方程组可以写成

$$\sum_{j=1}^{N}\widetilde{u}_j a(\varphi_i,\varphi_j)=\int_{\Omega} f\varphi_i d\Omega,\ i=1,\cdots,n,$$

其中矩阵元素 $a(\varphi_i,\varphi_j)$ 仅当结点 $P_i$ 和 $P_j$ 属于同一单元时才不为 0. 这导致了矩阵 (常称刚性矩阵 (stiffness matrix)) 是稀疏的.

如果单元的集合满足某些正则性质, 则可以证明 $u_N$ 收敛于 $u$. 为了改进精度, 每个单元可用高次多项式. 应用等参元 (isoparametric elements) 可以处理曲线边界.

可以将有限元法推广和扩展到高阶问题 (例如、双调和方程的混合有限元 (mixed finite elements for the biharmonic equation), 见双调和函数 (biharmonic function))、及特殊困难的问题 (例如, 不可压流体的 **Navier-Stokes 方程** (Navier-Stokes equations) 的非协调有限元 (non-conforming finite elements) 和应力分析. 静电学和地下水水力学中的混合 - 杂交有限元 (mixed-hybrid finite elements)) 或发展问题 (质量集中 (mass lumping) 和相容质量格式 (consistent mass schemes)).

**参考文献**


[A1] Ciarlet, P. G., The finite element method for elliptic problems, North-Holland, 1978.

[A2] Courant, R., Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **49** (1943), 1 - 23.

[A3] Courant, R. and Hilbert, D., Methods of mathematical physics, 1 - 2, Interscience, 1953 - 1962 (译自德文) (中译本: R. 柯朗, D. 希尔伯特, 数学物理方法, 科学出版社, 1962, 1977).

[A4] Cuvelier, C., Segal, A. and Steenhoven, A. A. van, Finite element methods and Navier-Stokes equations, Reidel, 1986.

[A5] Gel'Fand, I. M. and Fomin, S. V., Calculus of variations, 1963 (译自俄文).

[A6] Glowinski, R., Lions, J. L. and Trémolières, R., Numerical analysis of variational inequalities, North-Holland, 1981 (译自法文).

[A7] Mikhlin, S. G., Variational methods in mathematical physics, Macmillan, 1964 (译自俄文).

[A8] Mikhlin, S. G., The problem of the minimum of a quadratic functional, Holden-Day, 1965 (译自俄文) (中译本: C. Г. 米赫林, 二次泛函的极小问题, 科学出版社, 1964).

[A9] Sobolev, S. L., Applications of functional analysis in mathematical physics, Amer. Math. Soc., 1963 (中译本: C. Л. 索伯列夫, 泛函分析在数学物理中的应用, 科学出版社, 1959).

[A10] Strang, G. and Fix, G. J., An analysis of the finite element method, Prentice-Hall, 1973 (中译本: G. 斯特朗, G. J. 非克斯, 有限元法分析, 科学出版社, 1983).

[A11] Temam, R., Navier-Stokes equations, theory and numerical analysis, North-Holland, 1979.

[A12] Zienkiewicz, O. C., The finite element method in engineering science, McGraw-Hill, 1977.


C. Cuvelier 撰 袁国兴 张宝琳 译

**变分原理 (复变函数论中的) [variational principles (in complex function theory); вариационные принципы]**

显示在平面区域的某些形变过程中那些支配映射函数变分的法则的断语.

主要的定性变分原理是 **Lindelöf 原理** (Lindelöf principle), 可描述如下. 设 $B_k$ 是 $z_k$ 平面上边界点多于一点的单连通区域, $0\in B_k$, $k=1,2$; 设 $L(r,B_k)$ 是对于 $B_k$ 的 Green 函数的阶层曲线, 即圆盘 $\{\zeta: |\zeta|<1\}$ 到 $B_k$ 而使原点保持不变的单叶共形映上映射下圆周 $C(r)=\{\zeta: |\zeta|=r\}$ 的象, $0<r<1$. 进而设函数 $f(z_1)$ 实现 $B_1$ 到 $B_2$ 的共形单射, $f(0)=0$. 在这些假定下有: 1) 对于 $L(r,B_1)$ 上任一点 $z_1^0$, 存在位于阶层曲线 $L(r,B_2)$ 上 (这仅当 $f(B_1)=B_2$ 才有可能) 或其内部的一点与之对应; 及 2) $|f'(0)|\leqslant|g'(0)|$, 其中 $g(z_1)$ 满足 $g(0)=0$ 是 $B_1$ 到 $B_2$ 的单叶共形映射 (等号仅当 $f(B_1)=B_2$ 时成立). Lindelöf 原理系从 Riemann 映射定理 (见 **Riemann 定理** (Riemann theorem)) 与 **Schwarz 引理** (Schwarz lemma) 推出. 相当精细的构造使之能够求出由被映射区域的给定形变所引起的映射函数的逐点偏差.

定量的基本变分原理系由 M. A. Лаврентьев ([1]) 获得 (亦可见 [2]), 可叙述如下. 设 $B_1$ 是具有解析边界的单连通区域, $0\in B_1$. 假定存在给定区域族 $B_1(t)$, $0\in B_1(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, $T>0$, $B_1(0)=B_1$, 具有 Jordan 边界 $\Gamma_1(t)=\{z_1: z_1=\Omega(\lambda,t)\}$, $0\leqslant\lambda\leqslant2\pi$, $\Omega(0,t)=\Omega(2\pi,t)$, 其中 $\Omega(\lambda,t)$ 关于 $t$ 在 $t=0$ 可微且对 $\lambda$ 是一致的; 设 $F(z_1,t)$, $F(0,t)=0$, $F'_{z_1}(0,t)>0$, 是把 $B_1(t)$ 单叶共形映射为 $B_2=\{z_2: |z_2|<1\}$ 的函数, 设 $\Phi(z_2,t)$ 是 $F(z_1,t)$ 当 $t$ 固定时的反函数. 则

$$F(z_1,t)=F(z_1,0)-tK(F(z_1,0))+\gamma_1(z_1,t),$$

$$\Phi(z_2,t)=\Phi(z_2,0)+$$

$$+t\Phi'_{z_2}(z_2,0)K(z_2)+\gamma_2(z_2,t),$$

其中

$$K(z)=$$

$$= \lim_{r\to 1-0} \int_{C(r)} \frac{\partial \ln|F(\Omega(\lambda, t), 0)|}{\partial t}\Bigg|_{t=0} \frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta},$$

且当 $t\to 0$ 时 $\gamma_k(z_k, t)/t$ 在 $B_k$ 的紧子集上一致地趋于 $0(k=1, 2)$. 该结果已被推广到二连通区域([3]). 若加以进一步的限制, 就能得到映射函数在 $B_1(t)$ 内关于表征所考虑区域边界形变的参数的展开式余项的估计式(在闭区域内一致)([4]).

**参考文献**


[1] Лаврентьев, М. А., 《Тр. Физ.-матем. ин-та АН СССР》, 5 (1934), 159 – 246.

[2] Куфарев, П. П., 《Матем. сб.》, 13 (55) (1943), 1, 87 – 118.

[3] Александров, И. А., 《Сиб. матем. ж.》, 4 (1963), 5, 961 – 976.

[4] Лаврентьев, М. А., Шабат, Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, 3 изд., М., 1965.


И. А. Александров 撰

【补注】 存在大量的变分原理, 见[A3]第 10 章. 亦可见**变分参数法**(variation-parametric method); **Löwner 方法**(Löwner method); **内变分方法**(internal variations, method of).

还可见**边界变分方法**(boundary variations, method of). M. Schiffer 对单叶函数的变分方法做出了重要的贡献, 见[A3]第 10 章.

**参考文献**


[A1] Heins, M., Selected topics in the classcal theory of functions of a complex variable, Holt, Rinehart & Winston, 1962.

[A2] Hille, E., Analytic function theory, II, Ginn, 1962.

[A3] Duren, P. L., Univalent functions, Springer, 1983.


杨维奇 译

**经典力学的变分原理[variational principles of classical mechanics; вариационные принципы классической механики]**

分析力学的基本原理, 它在数学上用变分关系的形式加以表示; 从这些变分关系式出发, 在逻辑上可导得运动的微分方程和所有力学上的原理和定律. 经典力学的变分原理把物质系统在力作用下的实际运动与施加于系统的约束所允许并满足一定条件的运动学上可能的运动进行比较. 在大多数情况下, 从所考虑的运动学上可能的运动类中选出实际运动所遵循的准则是某个能够保证论述不变性的标量函数或泛函取极值(驻值).

各种经典力学的变分原理无论从其形式和变分方式上, 还是从统一性上都各有不同, 但是它们中的每一个在其应用范围内都形成唯一的基础, 好似归纳了相应物质系统的全部力学. 换言之, 任何一个经典力学的变分原理隐含着该学科领域的全部内容, 并把其全部原理合并在统一的表达式中.

经典力学的基础是为自由质点所建立的 **Newton 力学定律**(Newton laws of mechanics)和约束公理. 经典力学的变分原理的有效性就基于这些定律和公理. 换句话说, 每一个经典力学的变分原理都可以看作为一个公理, 由此可导得力学的诸定律.

变分原理根据其形式可区分为微分变分原理和积分变分原理. 微分变分原理描写运动在任何给定时刻的性质, 它包括虚位移原理, d'Alembert - Lagrange 原理, Gauss, Hertz, Четаев 和 Jourdain 原理等. 积分变分原理描写运动在任何有限时间段内的性质, 它们乃是 Hamilton - Остроградский, Lagrange, Jacobi 等形式的最小作用量原理.

第一个经典力学的变分原理是早在 1665 年由 G. Galileo 应用过的可能(虚)位移原理. 1717 年, J. Bernoulli 首先认识到该原理的普遍意义以及它对求解静力学问题的效应. J. L. Lagrange 在其著作《分析力学》(Mécanique analytique, 1788)中对该原理给出一个证明, 并加以发展和应用, 正确地将其作为整个力学的基础. 应用该原理可以求得一个质点系的平衡位置, 即 $r_\nu = r_\nu(t_0)$; 如初始速度 $v_\nu(t_0)$ 为零的话, 该系统将在无限长时间内保持在该位置之上. 其中, $r_\nu(t_0)$ 为可能的位置, $v_\nu=0$ 为任何时刻运动学上可能的速度. 以上, $r_\nu$ 为系统相对于惯性坐标系 $Oxyz$ 的原点 $O$ 的矢径; $v_\nu=\dot{r}_\nu$; $\delta r_\nu$ 是系统上的约束在该时刻所允许的可能位移; $F_\nu(t, r_\mu, \dot{r}_\mu)\in C^1$ 是给定的主动力, $R_\nu$ 为约束反力. 进一步假定约束为理想(双面或双边)的, 即

$$\sum_\nu R_\nu \cdot \delta r_\nu = 0.$$

虚位移原理(principle of virtual displacements): 一个力学系统在给定位置上处于平衡的充分必要条件是在任何时刻, 主动力在可使系统离开该位置的所有的可能位移上所做的(无限小)元功的和等于零:

$$\sum_\nu F_\nu \cdot \delta r_\nu = 0, \qquad (1)$$

式(1)是静力学的普遍适用的方程, 静力学的任何问题都可以在数学上化为对于此方程的研究. 对于有势力的特殊情况:

$$F_\nu = \operatorname{grad}_{r_\nu} U(t, r_1, \cdots, r_N), \ U(t, r_\nu)\in C^2.$$

其中 $N$ 为系统中的点的个数, 式(1)有如下形式:

$$\delta U = 0 \qquad (2)$$

它在任何时刻 $t$ 成立. 也就是说, 在有势力作用下的

力学系统处于平衡状态的充分必要条件是其力函数取驻值.

动力学的方程可以借助于所谓 d'Alembert 原理 (d'Alembert principle) 用静力学的方法来处理. 如果在作用于系统的主动力和约束的反作用力之上加上惯性力 $-m_\nu w_\nu$, 那么该系统将处于平衡. 上面 $m_\nu$ 是系统的第 $\nu$ 点的质量, $w_\nu = \ddot{r}_\nu$ 则为其加速度. Lagrange 在 1788 年将 d'Alembert 原理和虚位移原理加以推广.

d'Alembert - Lagrange 原理 (d'Alembert - Lagrange principle): 对于一个系统的实际运动来说, 其主动力和惯性力在所有可能位移上所作的元功之和在任何时刻为零:

$$\sum_\nu (F_\nu - m_\nu w_\nu) \cdot \delta r_\nu = 0, \qquad (3)$$

d'Alembert - Lagrange 原理把系统在实际运动中的位置与所考虑时刻的约束所允许的无限靠近的位置加以比较. 式 (3) 确定了主动力、该主动力在所加约束条件下引起的各点的加速度和可能位移之间的关系. 实际运动可以作为是由主动力确定的运动学上可能的运动中间的一个, 式 (3) 表示的则是其对应关系的充分必要条件, 因此是动力学的普遍方程 (general equation of dynamics). 如其中所有的加速度 $w_\nu = 0$, 则式 (3) 即为静力学的普遍方程 (1).

式 (3) 内包含运动方程. 为了得到全部独立的动力学微分方程, 只需将可能位移 $\delta r_\nu$ 用独立的位移表示出来, 并将其代入式 (3). 由此可以得到 Lagrange 方程、Appell 方程和其它独立的运动微分方程. 另一方面, 如果在可能的位移族中选出某一个位移, 将其代入式 (3), 这样得到的关系式或者是系统运动微分方程中的一个, 或者是由运动微分方程导出的结果. 例如, 动力学的普遍定理 (定律) — 动量定理、动量矩定理和动能定理 —— 都可以由此方法得到.

系统的动力学普遍定理描写了运动的某些性质, 但与经典动力学的变分原理不同, 它们都无法代替全部运动微分方程, 或完全描写系统的运动.

d'Alembert - Lagrange 原理是经典力学最普遍的变分原理之一, 它不仅适用于完整力学系统, 也适用于非完整力学系统. 所有其他的变分原理或者是与此变分原理完全等效, 只不过是形式不同, 或者是这个变分原理的一个推论. 但是, d'Alembert - Lagrange 原理与函数极值的概念毫不相干, 它涉及的只是一个无限小量 —— 给定力和惯性力在离开给定位形的一个无限小位移上所作的元功之和; 它与式 (2) 不同, 不是函数的变分.

C. F. Gauss 在 1829 年提出了一个新的变分原理, 它是 d'Alembert - Lagrange 原理的一个修正. 在所有运动学上可能的运动之中, Gauss 研究那些满足施加于系统的约束条件的运动, 而且在所考虑的时刻 $t$, $r_\nu$ 和 $v_\nu$ 保持为常数. 于是在时刻 $t + dt$ 有

$$\delta r_\nu = \frac{1}{2} \Delta w_\nu (dt)^2, \ \Delta w = \frac{\delta v_\nu}{dt} - \frac{dv_\nu}{dt},$$

其中 $dv_\nu$ 和 $\delta v_\nu$ 表示实际位移和某个虚位移在时刻 $dt$ 内所发生的运动速度的改变; 因之, 式 (3) 可写成:

$$\Delta Z = 0, \quad Z = \frac{1}{2} \sum_\nu \frac{m_\nu}{2} \left[ w_\nu - \frac{F_\nu}{m_\nu} \right]^2, \qquad (4)$$

其中 $\Delta^2 Z > 0$.

Gauss 最小强迫原理 (Gauss principle of least compulsion) (Gauss 原理 (Gauss principle)): 对于一个以某种方式联结起来质点系, 在受任何影响作用时, 它在任何时刻的运动将是尽可能地与这些质点处于完全自由状态下所发生的运动相符合, 也就是说, 如果我们把在时刻 $dt$ 之内强迫的度量定义为量 $Z$, 它等于每个质点的质量与该点在完全自由时将处的位置相对于该点实际位置的偏差之平方的乘积的和, 那么, 运动将与最小可能的强迫相适应. 换言之, 在任何时刻 $t$, 在由作用力所引起的加速度之间, 系统各点的实际加速度 $w_\nu$ 将使加速度的二次函数 $Z$ 最小.

平衡是这个普遍原理的一个特殊情况: 如果各点的速度为零, 并且系统保持静止状态接近系统在无约束条件下的自由运动更甚于接近约束所允许的可能运动, 就达到平衡.

如果 $Z$ 用系统独立的加速度来表示, 则 Appell 方程可由 Gauss 原理得到. Gauss 原理是误差理论中的**最小二乘法** (least squares, method of) 在物理上的体现. Gauss 原理与 d'Alembert - Lagrange 原理相等效, 但根据 P. Appell 和 E. Delassus (1911 — 1913) 对于 $\varphi_s(t, r_\nu, \dot{r}_\nu) = 0$ 类型的非线性微分约束的研究表明, 这两个原理并不相容. 这个问题已由 Г. Четаев (1932 — 1933) 解决. 他提出, 非线性约束的可能位移由下列类型的条件来确定:

$$\sum_\nu \operatorname{grad}_{\dot{r}_\nu} \varphi_s \cdot \delta r_\nu = 0.$$

最小反作用原理 (principle of least reactions): 这是 Gauss 原理的一个推论, 它指出, 对于实际运动, 下面的量应为最小:

$$\sum_\nu \frac{R_\nu^2}{2 m_\nu}$$

Gauss 原理已被推广到从系统中除掉一些约束的情况. 因为原始系统的可能位移包括在自由系统的可能

位移之中，因此，下面的关系式是成立的：

$$\frac{(dt)^2}{2}\sum_{\nu}\left[m_{\nu}\frac{\partial v_{\nu}}{dt}-F_{\nu}\right]\cdot\Delta w_{\nu}=0,$$

其中 $\partial v_{\nu}$ 为自由系统在时间 $dt$ 之内运动速度的改变．根据式（4），上面的方程可以化为

$$A_{d\delta}+A_{d\partial}+A_{\partial\delta}=0. \tag{5}$$

其中：

$$A_{\partial\delta}=\frac{1}{2}\sum_{\nu}m_{\nu}\left[\frac{\partial v_{\nu}}{dt}-\frac{\delta v_{\nu}}{dt}\right]^2$$

它描写在时间 $dt$ 之内运动（$\partial$）偏离运动（$\delta$）的度量．$A_{d\delta}$ 和 $A_{d\partial}$ 的式子可以用同样的方式写出．由式（5）可得如下推论：

$$A_{d\delta}<A_{\partial\delta},\ A_{d\partial}<A_{\partial\delta}, \tag{6}$$

上式表示了下面的定理：系统的实际运动（$d$）与假想运动（$\delta$）的偏离（以及与实际的自由运动（$\partial$）的偏离）小于运动（$\delta$）与运动（$\partial$）之间的偏离．此定理由 Четаев 在 1932－1933 年证明．由式（6）中第二个不等式所表示的定理，是在 1883 年为 E．Mach 针对线性非完整约束的情况提出的，并在 1916 年为 E．A．Болотов 所证明．

与 Gauss 原理紧密联系的一个原理是最直接路径原理，这是由 H．Hertz 在 1894 年作为他所发展的力学的基本定律提出的．在 Hertz 所发展的力学中，与 Newton 力学不同，力的概念为潜约束、潜质量和潜运动的概念所代替．

**最直接路径原理**（principle of the most direct path），（**最小曲率原理**（principle of least curvature），Hertz 原理（Hertz principle）：任何自由系统将处于静止状态，或沿着最直接的路径作匀速运动．根据 Hertz 的定义，一个"自由"的系统是指其上无主动力的作用，仅受到限制组成系统各点相互位置的内部约束的作用．最直接路径是指由下列弧元所组成的轨迹：与任何其他为约束所允许的、且具有与所考虑弧元具有共同起始点和相同切线的弧相比，它具有最小的曲率；Z 在这里解释为代表系统位置在 $3N$ 维 Euclid 空间中的点的轨迹的曲率，该空间的直角坐标为 $\sqrt{m_{\nu}}\,x_{\nu}$，$\sqrt{m_{\nu}}\,y_{\nu}$，$\sqrt{m_{\nu}}\,z_{\nu}$．换言之，Hertz 原理说，在所有与约束相容的轨迹中，实际的轨迹具有最小的曲率．

对于仅有静态约束作用而无主动力的系统来说，Hertz 原理与 Gauss 原理是等效的．Четаев 在 1941 年提出了对 Gauss 原理的下列修改：

Четаев **最大功原理**（Chetaev principle of maximum work）：在由给定力场中的直接运动和假定力学系统完全自由时足以产生实际运动的力场中的相反运动所组成的基本周期上所作的功

$$A_{\sigma}=\sum_{\nu}(F_{\nu}-m_{\nu}w_{\nu})\cdot\left[v_{\nu}+\frac{\delta v_{\nu}}{dt}\frac{dt}{2}\right]dt+\cdots$$

在一类 Gauss 意义下的想象运动中相对于实际运动取最大值．Четаев 原理使通常利用热力学中的 Carnot 原理所研究的力学系统的性质加以推广成为可能．

上面概述的原理按其变分的方式可以分为两类：在虚位移原理和 d'Alembert－Lagrange 原理中，要变分的是系统在给定时刻的位置 $r_{\nu}$．而在 Gauss．Hertz 和 Четаев 原理中，要变分的是系统的加速度 $\ddot{r}_{\nu}$，而 $r_{\nu}$ 和 $\dot{r}_{\nu}$ 保持不变．Jourdain 原理（Jourdain principle），处于上述两者之间，要变分的是在时刻 $t$ 的速度 $\dot{r}_{\nu}$，而 $r_{\nu}$ 保持不变．在时刻 $t+dt$，可能位移是 $\delta r_{\nu}=\delta\dot{r}_{\nu}dt$，而式（3）成为

$$\sum_{\nu}(F_{\nu}-m_{\nu}w_{\nu})\cdot\delta\dot{r}_{\nu}=0.$$

对于经典力学的积分变分原理，实际运动和运动学上可能的运动之间的比较是在有限的时间段内进行的．实际上是对系统的两种状态，把根据实际的和运动学上可能的运动在一定条件下计算得到的某些给定的积分值（所谓的**作用量**（actions））进行比较．经典力学的积分变分原理没有微分变分原理那样普遍，主要适用于有势力作用下的完整力学系统．最普遍的积分变分原理是 W．Hamilton 在 1834－1835 年针对稳态完整约束的情况所建立的变分原理，它被 M．B．Остроградский 于 1848 年推广到非稳态几何约束的情况．考虑一个完整系统在给定的作用力和反作用力作用下运动期间分别相应于时刻 $t_0$ 和 $t_1$ 的两个已知位置 $P_0$ 和 $P_1$．在这个运动中，$r_{\nu}$ 将是满足约束条件的时间函数，当 $t=t_0$ 和 $t=t_1$ 时它分别取相应于状态 $P_0$ 和 $P_1$ 的值．令 $r_{\nu}+\delta r_{\nu}$ 是与 $r_{\nu}$ 充分接近的、属于 $C^2$ 类的时间函数，它也满足约束条件，并在 $t=t_0$ 和 $t=t_1$ 时与 $r_{\nu}$ 取同样的值．于是，函数 $\delta r_{\nu}$ 在 $t=t_0$ 和 $t=t_1$ 时为零，从而是可能位移．如 $F_{\nu}=\mathrm{grad}_{r_{\nu}}U$，则

$$\delta S=0,\ S=\int_{t_0}^{t_1}(T+U)dt, \tag{7}$$

其中泛函 $S$ 即为在 $t_1-t_0$ 段上的 Hamilton **作用量**（Hamiltion action）．

**驻值作用量原理**（principle of stationary action）（Hamilton－Остроградский 原理（Hamilton－Ostrogradski principle））：相对于任何其他无限靠近、运动学上可能、持续时间相同、且其初值和终值与实际运动

相应状态相同的运动来说，Hamilton 作用量对系统的实际运动取驻值．如果作用力不是有势的，那么 Hamilton - Остроградский 原理可以用下式表示：

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta T+\sum_v F_v\cdot\delta r_v\right]dt=0, \tag{8}$$

也就是说，如果 $r_v(t)$ 为相应于系统实际运动的时间函数，那么对于函数 $r_v(t)$ 的任何与约束条件相容的、在积分的两个端点处为零的变分，积分式（8）为零．

式（7）和式（8）为在给定力作用下，系统的运动为实际运动的充分必要条件．式（8）也可用于非完整系统，但对于非完整系统，运动 $r_v+\delta r_v$，一般来说，已非运动学上可能的运动了．式（7）则不能适用于非完整系统．

如果几何约束方程可表示为：

$$r_v=r_v(t, q_1, \cdots, q_n),\ n=3N-k,$$

其中 $k$ 为约束的个数，并引入下面的 Lagrange 函数：

$$L(t, q_i, \dot q_i)=T+U$$

那么有

$$S=\int_{t_0}^{t_1}L\,dt.$$

在扩充的 $(n+1)$ 维坐标空间 $(t, q_1, \cdots, q_n)$ 中，式（7）相应于通常的、具有固定端点的变分学（非参数的）问题．对于坐标为 $t, q_i, p_i=\partial L/\partial\dot q_i$ 的 $(2n+1)$ 维相空间来说，式（7）相应于自由端点的变分问题（$t$ 和 $q_i$ 固定，$p_i$ 自由），而且有

$$S=\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{i=1}^{n}p_i\dot q_i-H\right]dt$$

其中 $H(t, q_i, p_i)$ 为 Hamilton 函数．

由式（7）可导出 Lagrange 方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0,\ i=1, \cdots, n. \tag{9}$$

以及正则 Hamilton 方程

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\ \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i},\ i=1, \cdots, n. \tag{10}$$

为了求解动力学的基本问题，只需知道作用量函数

$$v(t, q_i, q_{i0})=\int_{t_0}^{t}L\,dt \tag{11}$$

但是，由式（11）去求作用量函数，则必须知道运动的规律．为了克服这个困难，Hamilton 导得如下作用量函数必须满足的微分方程

$$\frac{\partial v}{\partial t}+H\left[t, q_i, \frac{\partial v}{\partial q_i}\right]=0 \tag{12}$$

C. G. J. Jacobi 证明了（1837），若知道式（12）的完全积分 $v(t, q_i, \alpha_i)$（此积分依赖于 $n$ 个任意常数 $\alpha_i$，它们都不可加），则方程（10）的通解为

$$p_i=\frac{\partial v}{\partial q_i},\ \beta_i=\frac{\partial v}{\partial\alpha_i},\ i=1, \cdots, n.$$

其中 $\beta_i$ 为任意常数．

对于具有稳态约束、作用力为不显式地依赖于时间的有势力的系统，存在下面的能量积分：

$$E=T-U=h \tag{13}$$

这个能量积分的存在，使我们有可能把用以比较的运动学上可能的运动（它使系统由状态 $P_0$ 转变到状态 $P_1$）的范围缩小为其全部机械能 $E$ 有一固定值 $h$ 的运动．从而，积分式（13）可以看作为一个非完整条件，力学原理可以表示为条件变分原理．这个问题是 Lagrange 在 1760 年解决的．

Lagrange **驻值作用量原理**（Lagrange principle of stationary action）：对于一个存在能量积分的完整系统，给定初始时刻 $t_0$ 以及它的初始和最终位置，实际运动应满足下面的方程式：

$$\delta\int_{t_0}^{t}2T\,dt=0. \tag{14}$$

该式所比较的运动具有与实际运动相同的初始和最终状态以及相同的能量值 $h$．符号 $\delta$ 表明在式（13）的条件下进行变分．

如果对于根据 Lagrange 原理进行比较的所有运动，（13）都得到满足，其常数为 $h$，这就为这些运动的速率施加了某些限制性条件，而从 $P_0$ 到 $P_1$ 位移所需的时间取决于运动所执行的曲线．因此，Lagrange 原理式（14）（考虑到式（13））是一个具有自由上端点的条件变分问题．

如果对于这些系统，用能量积分式（13）消去式（14）中的时间 $t$，将得到一个新的变分原理，它是 Jacobi 在 1837 年取得的．

系统的动能可以用广义坐标 $q_i$ 表示如下：

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\dot q_i\dot q_j.$$

坐标空间的度量由下式表示：

$$ds^2=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}dq_i dq_j. \tag{15}$$

系统的某个实际运动的初始和最终位置 $P_0$ 和 $P_1$ 也是给定的．

Jacobi 驻值作用量原理（Jacobi principle of stationary action）：如果给定一个完整保守系统的初始和最终位置，那么实际运动满足下面的方程：

$$\delta \int_{P_0}^{P_1} \sqrt{2(U+h)}\, ds = 0, \qquad (16)$$

与之比较的是所有与实际运动无限接近的、具有与实际运动相同初始和最终位置和相同能量常数 $h$ 的运动.

Jacobi 原理把研究一个完整保守系统运动的问题化为一个几何问题，即在具有度量式（15）的 Riemann 空间中求解变分问题（16）的极值．求得的即为系统在 Riemann 空间中的真实轨迹．Jacobi 原理揭示，一个完整保守系统的运动和 Riemann 空间的几何性质有密切的关系．如一个系统在无作用力的条件下运动，即 $U=0$，则系统将以恒定的速率沿着坐标空间（$q_1, \cdots, q_n$）的短程线运动．这个事实是 Galilio 惯性定律的推广．如 $U \neq 0$，一个完整保守系统的运动的确定也可以化为求解 Riemann 空间短程线的问题，其度量为

$$ds_1^2 = 2(U+h)ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\, dq_i dq_j .$$

对于单质点的情况，线元 $ds$ 为三维 Euclid 空间的线元，Jacobi 原理即为光学中的 Fermat 原理在力学中的比拟.

Lagrange 方程式（9），或 Hamilton-Остроградский, Lagrange 和 Jacobi 变分原理中的极值方程式都是根据 Hamilton、Lagrange 和 Jacobi 的、相应的积分或作用量取极值的必要条件．如果满足取最小值的充分条件，这些积分对于实际运动将取最小值．于是，经典力学的积分变分原理也称之为最小作用量原理（principles of least action）.

使用经典力学的积分变分原理很自然地导致广义解的概念以及在其中寻求数学物理问题解的函数空间类的扩展.

事实证明，经典力学的变分原理不仅适用于离散的质点系统，而且也适用于有分布参数的系统和连续介质；在场论和数学物理中也有重要的应用．光学-力学比拟，正则变换理论，Lie 群理论和守恒定律都与经典力学的变分原理有密切关系．这些原理都极有启发性的价值，也可应用于物理学的其他领域，特别是相对论、量子力学和波动力学，其中最小作用量原理和 Lagrange 和 Hamilton 的一些原理都起着重要的作用.

**参考文献**


[1] Appell, P., Traité de mécanique rationelle, Gauthier-Villars, 1953.

[2] Болотов, Е. А., Опринципе Гаусса,《Изв. физ.-матем. об-ва при Казан. ун-те. Сер. 2》, 21 (1916), 3, 99 – 152

[3] Вариационные принципы механики, сб. статей, М., 1959.

[4] Lanczos, C., The variational principles of mechanics, Univ Toronto Press, 1962.

[5] Pars, L. A., A treatise on analytical dynamics, Heinemann, London, 1965.

[6] Розе, Н В., Лекции по аналитической механике, ч. 1, Л., 1938.

[7] Четаев, Н. Г., Устойчивость движения. Работы по аналитической механике, М., 1962.


В. В. Румянцев 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Arnol'd, V. I., Mathematical methods of classical mechanics, Springer, 1978（中译本：В. И. Арнольд, 经典力学的数学方法, 高等教育出版社, 1992）.

[A2] Whittaker, E. T., Analytical dynamics of particles and rigid bodies, Dover, reprint, 1944.

[A3] Goldstein, H., Classical mechanics, Addison-Wesley, 1950.

[A4] Gantmacher, F. R., Lectures in analytical mechanics, Mir, 1975（译自俄文）.


王克仁 译　诸德超 校

**变分问题**［**variational problem; вариационная задача**］

1）具有固定端点的变分问题（variational problem with fixed ends）是变分学（variational calculus）中这样一个问题，其中给出极值的曲线的端点是固定的．例如，在变分学的最简问题中，带有固定端点的 $\inf\int_{(t_0,x_0)}^{(t_1,x_1)} F(t,x,\dot{x})dt$ 所求的曲线 $x(t)$ 应通过的起点和终点 $x(t_0)=x_0$，$x(t_1)=x_1$ 是给定的．由于最简问题的 **Euler 方程**（Euler equation）的一般解依赖于两个任意常数，$x=x(t,c_1,c_2)$，给出极值的曲线将在对应的边值问题的解中寻找．结果，该边值问题可以有唯一解，多于一个解或根本没有解.

2）具有自由（可移动）端点的变分问题（variational problem with free (mobile) ends）是变分学中这样一个问题，其中给出极值的曲线的端点可沿给定流形运动．例如，如果在 **Bolza 问题**（Bolza problem）中所寻找曲线 $x=(x_1(t), \cdots, x_n(t))$ 要满足的边界条件数目严格地小于 $2n+2$：

$$\psi_\mu(t_1, x(t_1), t_2, x(t_2)) = 0,\ \mu = 1, \cdots, \quad p < 2n+2, \qquad (*)$$

则曲线端点可沿着（$2n+2-p$）维流形（*）运动．如果边界条件（*）以形式

$$\psi_\rho(t_1, x(t_1)) = 0,\ \psi_\sigma(t_2, x(t_2)) = 0,$$

$$\rho = 1, \cdots, r, \sigma = 1, \cdots, q$$

给出，且 $n+1-r>0$ 或 $n+1-q>0$，则曲线端点可沿着相应的 $n+1-r$ 维或 $n+1-q$ 维流形运动. 在极值曲线的端点**横截性条件**（transversality condition）必须满足；这条件与条件（*）一起，使得可以得到导致某个边值问题的关系式的封闭系统. 这边值问题的解有任意常数，这些常数出现在 Euler 方程的通积分中.

变分问题和多元函数求极值问题的性质之不同在于这样的事实，在前者情形不是在有限维空间中寻找一个点，而是寻找一个函数（或一个无穷维空间中的点）.

И. Б. Вапнярский 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Noton, A. R. M., Introduction to variational methods in control engineering, Pergamon Press, 1965.

[A2] Fleming, W. H. and Rishel, R. W., Deterministic and stochastic optimal control, Springer, 1975.

[A3] Cesari, L., Optimization-theory and applications. Problems with ordinary differential equations, Springer, 1983.

[A4] Akhiezer, N. I., The calculus of variations, Blaisdell, 1962（译自俄文）


葛显良 译 吴绍平 校

**顺序统计量序列** [**variational series** 或 series of order statistics; **вариационный ряд**]，亦称变量序列或变列

分布函数为 $F(X)$ 的随机样本 $(x_1, \cdots, x_n)$ 的值按照递增顺序的排列：$x_{(1)} \leqslant \cdots \leqslant x_{(n)}$. 顺序统计量序列用于构造经验分布函数 $F_n(x) = m_x/n$，其中 $m_x$ 小于 $x$ 的变列项数. 顺序统计量序列的重要特征是其极端项（$x_{(1)} = \min_{1\leqslant i\leqslant n} x_i$，$x_{(n)} = \max_{1\leqslant i\leqslant n} x_i$）和极差（range）$R_n = x_{(n)} - x_{(1)}$. 设

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(y)dy,$$

则顺序统计量序列中最小项和最大项的分布密度相应为

$$p_{(1)}(x) = n[1-F(x)]^{n-1}p(x),$$

$$p_{(n)}(x) = nF^{n-1}(x)p(x).$$

如果考虑时间指标为 $i(i=1,\cdots,n)$ 的随机过程，则顺序统计量序列形成非奇次 **Марков 链**（Markov chain）.

**参考文献**


[1] Wilks, S. S., Mathematical statistics, Wiley, 1962.


А. И. Шалыт 撰

【补注】 这一名称在西方文献中几乎没有用过. 亦见**顺序统计量**（order statistic）.

**参考文献**


[A1] Lehmann, E. L., Testing statistical hypotheses, Wiley, 1988.


周概容 译

**范畴中的簇** [**variety in a category**; **многообразие категорий**]

**泛代数的簇**（variety of universal algebras）的一个推广. 令 $\mathfrak{K}$ 是有积的**双范畴**（bicategory）. 满足下述条件的 $\mathfrak{K}$ 的**满子范畴**（full subcategory）$\mathfrak{M}$ 叫作一个簇（variety）：a）若 $\mu: A \to B$ 是一个容许单射，且 $B \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{M}$，则 $A \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{M}$；b）若 $\nu: A \to B$ 是一个容许满射，且 $A \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{M}$，则 $B \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{M}$；c）若 $A_i \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{M}$，$i \in I$，则 $A = \Pi_{i\in I} A_i \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{M}$.

如果 $\mathfrak{K}$ 是良势的，即任意对象的容许子对象构成一个集合，则每一个簇都是 $\mathfrak{K}$ 的**自反子范畴**（reflective subcategory），这意味着包含函子 $I: \mathfrak{M} \to \mathfrak{K}$ 有左伴随 $S: \mathfrak{K} \to \mathfrak{M}$. 这个伴随对的单位，自然变换 $\eta: I_{\mathfrak{K}} \to T = SI$ 有下述性质，任取 $A \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$，态射 $\eta_A: A \to T(A)$ 是容许满射. 在许多重要的情况下，函子 $T$ 是右正合的，即如果 $(\alpha, \beta)$ 是态射 $\nu$ 的**核对**（kernel pair），$T$ 将态射对 $\alpha, \beta: A \to B$ 的余核 $\nu$ 变到态射对 $T(\alpha)$, $T(\beta)$ 的余核，更进一步地，右正合性和自然变换 $\eta: I \to T$ 的出现是 $T$ 的特征性质.

簇继承了原范畴的许多性质. 它有双范畴结构，如果初始范畴完备，则簇也是完备的.

在有正规余象的范畴中，如同群簇的情况，可以定义簇的积. 簇的这一广群结构仅对几种特殊情况有所研究.

**参考文献**


[1] Цаленко, М. Ш., Шульгейфер, Е. Г., Основы теории катекорий, М., 1974.

[2] Fröhlich, A., On groups over a d.g. near ring II. Categories and functors, *Quart. J. Math.*, **11** (1960), 211–228.


М. Ш. Цаленко 撰

【补注】 在拓扑斯（topos）中人们也考虑指数簇（exponential varieties）([A1])，这是在任意子对象，积，和幂对象下封闭的满子范畴. 这样的子范畴在商对象下也是封闭的；它自身是一个拓扑斯，且包含函子有双边伴随.

**参考文献**


[A1] Freyd, P. J., All topoi are localic, or why permutation models prevail, *J. Pure Appl. Alg.*, **46** (1987), 49–58.


张英伯 译

**群簇** [**variety of groups**; **групп многообразие**]

满足固定的一组等式关系或定律

$$v(x_1, \cdots, x_n) = 1$$

的全部群的类，其中 $v$ 遍及群字（group words），即具有自由生成元 $x_1\cdots x_n\cdots$ 的**自由群**（free group）$X$ 的元素，的某个集合 $V$．正像代数系统的任何簇（见代数系统簇（algebraic systems，variety of））一样，群簇也能由在子系（子群）下，在同态象下和 Descartes 积下的封闭性质来定义．包含给定群类 $\mathfrak{C}$ 的最小簇由 var $\mathfrak{C}$ 表示．对于由下述公式定义的簇的交和并的运算

$$\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} = \mathrm{var}(\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}),$$

群簇形成完全模格，但不是分配格．两个簇 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 的积 $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ 是一个群簇，它由所有具有正规子群 $N\in\mathfrak{A}$ 且使 $G/N\in\mathfrak{B}$ 的群 $G$ 组成．除了平凡群的群簇和所有群的群簇，任何群簇都可唯一地表成一些群簇的积，且这些群簇不能再分裂．

群簇的例子：所有 Abel 群的簇 $\mathfrak{A}$；由 $x^n=1$ 定义的方指数为 $n$ 的所有群的 Burnside 簇（Burnside variaty）$\mathfrak{B}_n$；簇 $\mathfrak{A}_n=\mathfrak{B}_n\wedge\mathfrak{A}$；类 $\leqslant c$ 的所有幂零群的簇 $\mathfrak{N}_c$；所有长度 $\leqslant l$ 的可解群的簇 $\mathfrak{A}^l$；特别地，若 $l=2$，$\mathfrak{A}^2$ 是亚交换群的簇．

令 $\mathscr{S}$ 是群的某性质，称群簇 $\mathfrak{B}$ 有性质 $\mathscr{S}$（局部地），如果 $\mathfrak{B}$ 中任何（有限生成）群有性质 $\mathscr{S}$．正是在这种含义下，称簇是幂零的，局部幂零的，局部有限的，等等．

可解的群簇 $\mathfrak{B}$ 的性质依赖于 $\mathfrak{B}\wedge\mathfrak{A}^2$．例如，设 $\mathfrak{B}\supsetneq\mathfrak{A}^2$，则对某适当的 $n$ 和 $c$ 有 $\mathfrak{B}\subseteq\mathfrak{B}_n\mathfrak{N}_c\mathfrak{B}_n$（[2]，[3]）．亚交换群簇的描述很大程度上归结为局部有限群簇的描述：设亚交换簇 $\mathfrak{B}$ 不是局部有限的，则

$$\mathfrak{B}=\mathfrak{B}_1\vee\mathfrak{B}_2\vee\mathfrak{B}_3,$$

其中 $\mathfrak{B}_1=\mathfrak{A}_m\mathfrak{A}$，$\mathfrak{B}_2$ 唯一表示成有限个形为 $\mathfrak{N}_c\mathfrak{A}_k\wedge\mathfrak{A}^2$ 的群簇的并集，而 $\mathfrak{B}_3$ 是局部有限的（[4]）．某些局部有限亚交换簇已得到描述，例如类 $\leqslant p+1$ 的 $p$ 群的簇（见[5]）．

一个群簇称为 Cross 簇（Cross variety），若它由一个有限群生成．Cross 群簇是局部有限的．一个群簇称为近 Gross 簇（near Cross variety），如它不是 Cross 簇但它的每个真子簇是 Cross 簇．簇 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{A}_p^2$，$\mathfrak{A}_p\mathfrak{A}_q\mathfrak{A}_r$，$\mathfrak{A}_p\mathfrak{T}_q$ 是全部的可解近 Cross 簇，这里 $p$，$q$，$r$ 是不同的素数，$\mathfrak{T}_q=\mathfrak{B}_q\wedge\mathfrak{N}_2$ 对奇的 $q$，以及 $\mathfrak{T}_2=\mathfrak{B}_4\wedge\mathfrak{N}_2$（[6]）．然而存在别的近 Cross 簇；例如这样的簇被包含在方指数 $p\geqslant5$ 的局部有限群的任何簇 $\mathfrak{K}$ 中（[7]）．在局部有限的群簇的研究中，临界群（critical group）起重要作用，它是不含在它的所有真子群和所有商群所生成的簇中的群．Cross 簇可以仅含有有限个不同构的临界群．所有局部有限簇皆由它们的临界群生成．

一个群簇称为有限基的（finitely based），如它能由给定的有限个恒等式所确定．例如，这样的簇有：全部 Cross 簇，幂零和亚交换簇．已经证明（[8]）存在非有限基的群簇，且全部群簇的数目有连续统的势．无限个恒等式的独立组的例子可见[9]．有限基的群簇的乘积不一定是有限基的：特别地 $\mathfrak{B}_4\mathfrak{B}_2$ 没有有限基．

一个群簇是 Lie 型簇（variety of Lie type），若它由它的无挠幂零群生成．此外若一个簇的自由群的下中心列的因子是无挠群，则该簇称为 Magnus 型的（Magnus type）．Lie 型簇的类与 Magnus 型的簇的类并不一致；它们中每一个对于簇的乘法运算都是封闭的（[10]）．Magnus 型的簇的例子包括全部群的簇，簇 $\mathfrak{N}_c$，$\mathfrak{A}^n$，以及由 $\mathfrak{N}_c$ 应用有限次交和乘法运算所得的簇（[1]）．

**参考文献**


[1] Neumann，H．，Varietics of groups，Springer，1967．

[2] Каргаполов，М．И．，Чуркин，В．А．，《Алгебра и логика》，10（1971），6，651－657．

[3] Groves，J．R．J．，On varieties of solvable groups II，*Bull．Austr．Math．Soc．*，7（1972），3，437－441．

[4] Bryce，R．A．，Metabelian groups and varieties，*Philos．Trans．Roy．Soc．London Ser．A*，266（1970），281－355．

[5] Brisley，W．，Varieties of metabelian $p$-groups of class $p$，$p+1$，*J．Austr．Math．Soc．*，12（1971），53－62．

[6] Ольшанский，А．Ю．，《Матем．сб．》，85（1971），1，115－131．

[7] Размыслов，Ю．П．，《Алгебра и логика》，10（1971），1，33－44．

[8] Ольшанский，А．Ю．，《Изв．АН СССР．Сер．матем．》，34（1970），2，376－384．

[9] Адян，С．И．，Проблема Бернсайда и тождества в группах，М，1975．

[10] Шмеркин，А．Л．，《Тр．Моск．матем об-ва》，29（1973），247－260．

[11] Горчаков，Ю．М．，《Сиб．матем．журнал》，10（1969），5，1023－1033．


А．Л．Шмелькин 撰

【补注】 Oates-Powell 定理（Oates-Powell theorem）说，由有限群生成的簇是 Cross 簇．作为推论得出有限群的恒等式允许有有限基．

[A1] 中对一大类代数结构引入了簇的概念．群簇的第一个系统的研究是[A2]．

**参考文献**


[A1] Birkhoff，G．，On the structure of abstract algebras，*Proc．Cambrige Phil．Soc．*，31（1935），433－454．

[A2] Neumann，B．H．，Identical relations in groups，I，*Math．Ann．*，114（1937），506－525．


石生明 译 王 杰 校

**环簇** [**variety of rings**; **колец многообразие**]

满足给定的一组多项式等式的环的一个类 $\mathfrak{M}$. 环簇可以公理化地定义为代数的一个遗传类，它对于取同态像和取完全直和是封闭的（见**代数系统簇**（algebraic system, variety of)). 因为在一个给定的环内被满足的多项式等式的全体作成一个自由环的全特征理想（一个 $T$ **理想**（$T$-ideal)), 在环簇与一个可数生成的自由环的 $T$ 理想之间存在一一对应. 如果对于两个环簇来说有包含关系 $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$, 那么就说 $\mathfrak{N}$ 是 $\mathfrak{M}$ 的子簇（subvariety). 与环 $A$ 的等式的 $T$ 理想相对应的簇称为由环 $A$ 生成的簇. 每一个环簇都是由它的一个泛对像生成的，这就是所给的簇的一个包含无限自由生成元系的自由环：每一个从自由生成元集到这个簇的任意环内的映射都可以开拓为一个同态.

令 $M_n$ 是由 $n$ 阶方阵代数所生成的簇. 对于每一个特征为零的结合环簇（即环的加法群是无挠群）来说，存在一个正整数 $n = n(\mathfrak{M})$, 使得 $M_n \subseteq \mathfrak{M}$, 但 $M_{n+1} \nsubseteq \mathfrak{M}$. 一个环簇称为一个 Specht 簇（Specht variety), 如果其中每个环都有一个等式的有限基. 由一个有限结合环或一个有限 Lie 环生成的簇是 Specht 簇. 是不是每一个结合代数簇都是 Specht 簇的问题构成 Specht 问题（Specht problem）的内容. 如果一个簇 $\mathfrak{M}$ 是由一个特征为零的域上有限个生成元的结合代数生成的，并且 $M_2 \notin \mathfrak{M}$, 则 $\mathfrak{M}$ 是一个 Specht 簇.

亦见 **PI 代数**（PI-algebra).

**参考文献**


[1] Procesi, C., Rings with polynomial identities, M. Dekker, 1973.

[2] Cohn, P. M., Universal algebra, Reidel, 1981.


В. Н. Латышев 撰

【补注】 A. P. Кремер 已经证明了特征为零的域上每一个结合代数簇都是有限基的（[A1]).

除了在特征零的情形解决 Specht 问题外，Кремер 还通过一个有限 $\mathbf{Z}_2$ 分次代数 $A$ 和一个无限 Grassmann 代数 $G$ 讨论了一个簇的 $T$ 理想. 他证明了，给定一个 $T$ 理想 $I$, 存在一个有限维 $\mathbf{Z}_2$ 分次代数 $A = A_0 \oplus A_1$ 使得 $I = T(A_0 \otimes G_0 + A_1 \otimes G_1)$, 代数 $A_0 \oplus G_0 \otimes G_1$ 的等式 $T$ 理想，这里 $G_0$ 和 $G_1$ 是无限 Grassmann 代数 $G$ 的偶项和奇项.

**参考文献**


[A1] Кремер, A. P., 《Докл. Акад. наук СССР》, **298** (1988), 273－277.

[A2] Rowen, L. H., Polynomial identities in ring theory, Acad. Press, 1980.


**郝钢新 译**

**半群簇** [**variety of semi-groups**; **полугрупп многообразие**]

由某一组恒等式或一组法则所确定的**半群**（semi-group）类（见**代数系统簇**（algebraic systems, variety of)). 每个半群簇或者是周期的（periodic）（即由周期半群组成的簇），或者是扩交换（overcommutative）的（即包含所有交换半群的簇）. 半群簇的各种性质可利用某些类型的恒等式来分类. 恒等式 $u = v$ 称为正规的（normal）（也称为同型的（homotypical), 正则的（regular), 或一致的（uniform)), 如果出现于字 $u$ 和 $v$ 中的变量的集合相同，否则，称为非正规的（anomalous）（或异型的（heterotypical)). 恒等式 $u = v$ 称为平衡的（balanced), 如果每个变量出现在字 $u$ 和 $v$ 中的次数相同. 平衡恒等式的一个特殊情形是置换恒等式（permutation identity）—— 如果 $u = x_1 \cdots x_m$, 且 $v$ 可由置换 $u$ 的变量而得到. 半群簇是扩交换的，当且仅当它的所有恒等式是平衡的. 半群簇 $\mathfrak{M}$ 的恒等式的一个基称为不可约的（irreducible), 如果这个基的任何真子集都确定一个不同于 $\mathfrak{M}$ 的簇. 每个扩交换半群簇都有一个不可约的恒等式基. 存在没有不可约恒等式基的半群簇. 具有有限基的半群簇的例子是：任意交换半群簇，任意带有一个置换恒等式的周期半群簇，由置换恒等式所定义的半群簇，元素个数小于 6 的半群必存在有限的恒等式基，但存在没有有限恒等式基的六元素半群.

关于半群簇 $\mathfrak{M}$, 下列条件等价：$\mathfrak{M}$ 由正规恒等式定义；$\mathfrak{M}$ 的所有恒等式是正规的；$\mathfrak{M}$ 包含一个二元**半格**（semi-lattice). 半群簇 $\mathfrak{M}$ 的恒等式中存在一个非正规的恒等式，当且仅当 $\mathfrak{M}$ 由周期的 **Archimedes 半群**（Archimedean semi-group）组成.

极小半群簇只有下列五种簇：1) 半格簇；2) 左零半群簇；3) 右零半群簇（见**幂等元半群**（idempotents, semi-group of)); 4) 具有零乘积的半群簇；5) 对任意素数 $p$, 幂 $p$ 的 Abel 群簇. 在所有半群簇的格中，对每个非单位元，都存在覆盖它的元素；单位元不等于有限个非单位元的并. 所有半群簇的格不满足任何非平凡的格恒等式，并且具有连续统的势. 所有满足恒等式 $x^2 = 0$ 的诣零半群簇的子格及所有扩交换半群簇的子格也均具有连续统的势. 关于某些半群簇 $\mathfrak{M}$, 已经得到 $\mathfrak{M}$ 的子簇格 $L\mathfrak{M}$ 的清晰刻画，其子簇格 $L\mathfrak{M}$ 满足某些条件的半群簇 $\mathfrak{M}$ 也被刻画.

半群簇 $\mathfrak{M}$ 称为小的（small), 如果 $L\mathfrak{M}$ 是有限的. 半群簇 $\mathfrak{M}$ 称为有限指数簇（variety of finite index), 如果 $\mathfrak{M}$ 中的幂零半群的幂零次数是一致有界的（这等价于：$\mathfrak{M}$ 中每个诣零半群是幂零的；也等价于：$\mathfrak{M}$ 不含所有满足恒等式 $x^2 = 0$ 的交换诣零半群簇). 任何小半群簇均有有限指数.

关于周期半群簇 $\mathfrak{M}$，下列条件等价（[4]）：$\mathfrak{M}$ 由 Archimedes 半群的带组成；$\mathfrak{M}$ 中的任意半群的每个挠类是子半群；$\mathfrak{M}$ 不含 Brandt 半群 $B_2$（见**周期半群**（periodic semi-group））．子簇格 $L\mathfrak{M}$ 是模格的半群簇 $\mathfrak{M}$ 和有限指数半群簇（特别地，小簇）均满足上述条件．小簇是局部有限的（locally finite）（即由局部有限半群构成），当且仅当 $\mathfrak{M}$ 中的所有群的簇是局部有限的；小的局部有限群簇恰好是交叉簇（见**群簇**（variety of groups））．关于其他的局部有限半群簇，见**局部有限半群**（locally finite semi-group）．由剩余有限半群组成的半群簇已被刻画（[3]）．

所有半群簇的集合关于 **Мальцев 积**（Mal'tsev product）是一个部分广群 $G$. $G$ 中的幂等元是已知的，且这些幂等元的个数为 9．由一组 $w=0$ 型恒等式所定义的全体半群簇的集合构成 $G$ 中的一个极大广群（groupoid）．

带有附加运算的半群的簇，例如，**幺半群**（monoid）（有恒等元的半群）簇，带零的半群簇，逆半群簇等也已经被研究．

**参考文献**

[1] Evans, T., The lattice of semigroup varieties, *Semigroup Forum*, **2** (1971), 1, 1 – 43.

[2] Айзенштат, А. Я., Богута, Б. К., В сб., Полугрупповые многообразия и полугруппы эндоморфизмов, Л., 1979, 3 – 46.

[3] Глубов, Э. А., Сапир, М. В., 《Докл. АН СССР》, **247** (1979), 5, 1037 – 1041.

[4] Сапир, М. В., Суханов, Е. В., 《Изв. Вузов. Математика》, **25** (1981), 4, 48 – 55.

[5] Шеврин, Л. Н., 《Изв. Вузов. Математика》, **29** (1985), 11, 3 – 47.

[6] Шеврин, Л. Н., Суханов, Е. В., 《Изв. Вузов. Математика》, **33** (1989), 6, 3 – 39.

Л. Н. Шеврин 撰

【补注】

**参考文献**

[A1] Ljapin, E. S. [E. S. Lyapin], Semigroup, Amer. Math. Soc., 1978, Chapt. XII（译自俄文）.

[A2] Reilly, N. R., On the lattice of varieties of completely regular semigroup, in S. M. Goberstein and P. M. Higgins (eds.): Semigroups and their Applications, Reidel, 1978, 153 – 167.

田振际 郑恒武 译 郭聿琦 校

**泛代数簇**［**variety of universal algebras**; **универсальных алгебр многообразие**］

由一组等式所定义的**泛代数**（universal algebra）的类（见**代数系统簇**（algebraic systems, variety of））．一个泛代数簇可以被刻画为一个代数的非空类，它关于取商代数，子代数和直积是闭的．后两个条件可以用在子直积下是闭的要求来代替．一个泛代数类称为平凡的（trivial），如果它是由一个元素的代数所组成．每一个非平凡泛代数类都含有一个具有任意基数的基的**自由代数**（free algebra）．如果 $X$ 和 $Y$ 是在一个非平凡簇内同一自由代数的基且 $X$ 是无限的，则 $X$ 与 $Y$ 是等势的．对其中一个基是无限的要求是本质性的，然而如果这个簇含有多于一个元素的有限代数的话，这个要求可以去掉．

由一个类 $K$ 生成的泛代数簇由 $K$ 中代数的子直积的所有商代数组成．如果一个泛代数簇由有限代数生成，则这个簇内每一个有限生成的代数都是有限的．在一个表征为 $\Omega$ 的泛代数簇 $M$ 内，任意合同是交换的，当且仅当存在这个表征 $\Omega$ 的一个三元项（term）$f$，使得对 $M$ 中一切代数来说都有

$$f(x,x,y)=y=f(y,x,x).$$

用类似的方式可以刻画其中代数有模合同或分配合同格的泛代数簇（见[1]－[4]，[7]，[9]，[10]）．

在一个簇 $M$ 内，一个 $n$ 元运算称为平凡的（trivial），如果对于 $M$ 中每一个代数来说，等式 $f(x_1,\cdots,x_n)=f(y_1,\cdots,y_n)$ 成立．例如，在有零乘法的环簇内，乘法运算是平凡的．每一个平凡运算 $f$ 可以被由方程 $v_f=f(x_1,\cdots,x_n)$ 所定义的 0 元运算 $v_f$ 来代替．假设两个泛代数簇 $M$, $M'$ 各自的表征为 $\Omega$, $\Omega'$，不含平凡运算．一个由 $\Omega$ 到 $\Omega'$ 的项的集合 $W(\Omega')$ 内的映射 $\Phi$ 称为容许的（admissible），如果对于一切运算 $f\in\Omega$ 来说，$f$ 与 $\Phi(f)$ 的元数重合．一个容许的映射可以开拓为 $W(\Omega)$ 到 $W(\Omega')$ 的映射，仍以自然方式记作 $\Phi$．簇 $M$ 与 $M'$ 称为有理等价的（rationally equivalent），如果存在容许映射 $\Phi:\Omega\to W(\Omega')$ 和 $\Phi':\Omega'\to W(\Omega)$，使得对于一切 $f\in\Omega$ 有 $f=\Phi'(\Phi(f))$，对一切 $f'\in\Omega'$ 有 $f'=\Phi(\Phi'(f'))$，并且对于 $M$（相应地，$M'$）的每一个定义等式 $u=v$（相应地，$u'=v'$）来说，等式 $\Phi(u)=\Phi(v)$（相应地，$\Phi'(u')=\Phi'(v')$）对 $M'$ 内（相应地，$M$ 内）一切代数成立．最后的要求等价于这样的事实，$M$ 内每一个代数 $A$（$M'$ 内每一个代数 $A'$）对应于 $M'$ 内（$M$ 内）一个代数，其中 $\Omega'$ 内每一个 $n$ 元运算 $f'$（$\Omega$ 内每一 $n$ 元运算 $f$）都由方程 $f'(x_1,\cdots,x_n)=\Phi(f)(x_1,\cdots,x_n)$，($f(x_1,\cdots,x_n)=\Phi'(f')(x_1,\cdots,x_n)$) 所定义．Boole 环簇和 **Boole 代数**（Boolean algebra）簇是有理等价的．表征为 $\Omega$ 的**一元代数**（unary algebra）簇具有定义关系

$$\{u_l(x)=v_l(x): l\in\mathfrak{I}\},$$

有理等价于所有左 $R$ 多边形（见**多边形**（**幺半群上**

的))(polygon (over a monoid))的簇，这里 $R$ 是由 $\Omega$ 生成的自由幺半群关于由对 $\{(u_l, v_l): l\in\mathfrak{J}\}$ 所生成的合同的商幺半群．一个泛代数簇 $M$ 有理等价于某一结合环上一切右模的簇，当且仅当 $M$ 中任意代数上的合同是交换的，只要 $M$ 内有限**自由积**(free product)与**直积**(direct product)重合、只要存在 0 元导出运算形成一个特异子代数．前两个条件可由以下的要求来代替：$M$ 内任意代数的子代数都是某一合同的类而 $M$ 内任意代数的合同是由这个子代数所形成的类唯一确定([3]，[5]－[7])．

由某一泛代数簇的所有代数的合同格生成的格簇称为一个合同簇(congruence variety)．并非每一格簇都是合同簇．存在这样的合同簇，它不是模的，并且不同于一切格的簇([7]，[8])．

**参考文献**


[1] Cohn, P. M., Universal algebra, Reidel, 1981.

[2] Курош, А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973 (中译本：A. Г. 库洛什，一般代数学讲义，上海科学技术出版社，1962)．

[3] Мальцев, А. И., Алгебраические системы, М., 1970 (英译本：Mal'tsev, A. I., Algebraic systems, Springer, 1973).

[4] Скорняков, Л. А., Элементы общей алгебры, М., 1983.

[5] Чакань, Б., *Acta Scient. Math.*, **24** (1963), 1－2, 157－164.

[6] Чакань, Б., *Acta Scient. Math.*, **25** (1964), 3－4, 202－208.

[7] Grätzer, G., Universal algebra, Springer, 1979.

[8] Jónsson, B., Varieties of lattices, some open problems, in B. Csákány, E. Fried and E. T. Schmidt (eds), Universal Algebra (Esztergom, 1977), Coll. Math. Soc. J. Bolyai, Vol. 29, North-Holland, 1982, 421－436.

[9] Smith, J. D. H., Mal'cev varieties, Springer, 1976.

[10] Taylor, W., Characterizing Mal'cev conditions, *Algebra Universalis*, 3 (1973), 3, 351－397.


Л. А. Скорняков 撰

【补注】 泛代数簇这个术语也用于在一个给定的簇内(在上述定义意义下)所有的代数和它们之间所有的同态所形成的**范畴**(category)；对于一个在给定的表征 $\Omega$ 内的代数来说，这些恰是一切 $\Omega$ 代数**范畴中的簇**(variety in a category)．作为簇而出现的范畴可以被刻画为对于集合范畴配备一个底函子，它是一元的(见**三元组**(triple))且保持滤过上极限．

两个簇称为森田等价的(Morita equivalent)，如果它们作为(抽象的)范畴是等价的；这推广了环的**森田等价**(Morita equivalence)概念．两个簇作为具体范畴是等价的(即在它们之间有一个等价，它在基础集上约缩为恒等函子)，当且仅当它们是如上所定义的有理等价．簇的很多在有理等价范围内不变的性质可以用范畴的术语来定义．例如，一元代数簇正是那些基础集函子保持上积的簇，有理等价于模簇的簇正是那些是 **Abel 范畴**(Abelian category)的簇．注意，这些簇类的第二个在森田等价之下是封闭的，而第一类则不是．簇的任何可以用子代数格或合同格的语言来叙述的性质都自动地在森田等价范围内保持不变．

在相反的方向上，可以寻求对应于一个簇常见的范畴性质的语法条件(即在运算和它们所满足的方程上的条件)，例如，对于那些是 Descartes 闭的范畴的簇，那些是**拓扑斯**(topos)的簇，这种刻画已被给出([A3])．

第一部关于泛代数的权威性论述已经出现([A5])．关于 Мальцев 运算(Mal'tsev operations)(三元运算 $f$ 满足条件 $f(x,x,y)=f(y,x,x)$)的课题有强劲发展的势头；截止到 1989 年，主要的工作是 E. Faro 和 J. Lambek 在[A6]中所做的(见 **Мальцев 积**(Mal'tsev product))．

**参考文献**


[A1] Manes, E. G., Algebraic theories, Springer, 1976.

[A2] Wraith, G. C., Algebraic theories, Lecture notes series, 22, Aarhus Univ., 1975.

[A3] Johnstone, P. T., Collapsed toposes and cartesian closed varieties, *J. Algebra*, **129** (1990), 446－480.

[A4] Freese, R. and McKenzie, R., Commutator theory for congruence modular varieties, Cambridge Univ. Press, 1987.

[A5] McKenzie, R., McNulty, G. and Taylor, W. Algebras, lattices, varieties, 1, Wadsworth, 1987.

[A6] San Luis Fernandez, A. M., Sobre teorias algebraicas con una operación de Malcev, *Alxebra*, **55** (1989).


郝钢新 译

**Varignon 定理[Varignon theorem; Вариньона теорема]**

**滑移向量**(vector)理论的基本定理之一．根据 Varignon 定理，如果滑移向量系 $\mathbf{F}_\nu$ 可以化简为一个单一的合矢量 $\mathbf{F}$，则该合向量对于某一点 O(或 $l$ 轴)的矩等于组成该向量系的所有向量对于该点(或该轴)的矩的和：

$$\mathrm{mom}_0\mathbf{F}=\sum_\nu \mathrm{mom}_0\mathbf{F}_\nu,\ \mathrm{mom}_l\mathbf{F}=\sum_\nu \mathrm{mom}_l\mathbf{F}_\nu.$$

该定理是 P. Varignon 在 1687 年对于收敛力系确定的，其在几何静力学、刚体运动学和材料力学中有广泛应用．

B. B. Румянцев 撰 王克仁 译

**向量[vector; вектор]**，几何向量(geometric vector)

Euclid 空间的一条直线上一个定向线段，它的一

个末端(点 $A$)称为起点，而另一个(点 $B$)称为该向量的终点．这样一个向量可以记作 $\mathbf{a}$, $\bar{a}$, $\bar{a}$ 或 $\overline{AB}$．起点和终点相重合的向量称为零向量(zero vector)，通常记作 $\mathbf{0}$．刻画一个向量是由它的模(modulus)(或长度(length))，它等于线段 $AB$ 的长且记作 $|\mathbf{a}|$，以及它的方向：由 $A$ 到 $B$．向量 $\overline{BA}$ 称为与 $\overline{AB}$ 相反的向量．长度等于 1 的向量称为单位向量(unit vector)．零向量可以赋以任意方向．两个向量称为共线的(collinear)，如果它们位于同一条直线或两条平行直线上；称它们为共面的(coplanar)，如果它们位于同一个平面或两个平行平面上．两个共线的向量称为指向相同(identically directed)(指向相反(oppositely directed))，如果它们的终点在连接其起点的直线的同侧(相对的侧)，或者在它们的公共起点的同侧．位于同一条直线的两个向量 $\overline{AB}$ 和 $\overline{A'B'}$ 称为指向相同(相反)，如果两半直线 $AB$ 与 $A'B'$ 之中有(没有)一条被完全包含于另一条里．两个向量称为相等的(equal)，如果它们具有相等的模且指向相同(这种向量亦称为自由向量(free vectors))．所有零向量称为相等的．

除自由向量外，即其起点是不重要的向量，而在力学与物理学里往往考虑向量是由它们的长度、方向及其起点的位置(作用点(point of application))来刻画的．位于同一条直线上的一组相等的向量称为一个滑动向量(sliding vector)．同样考虑约束向量(bound vectors)，两约束向量称为相等的，如果它们不仅具有相等的模和方向相同，而且有一个共同的作用点．**向量演算**(vector calculus)研究向量运算，它是基于自由向量的，因为给定一个滑动或约束向量相当于给定两个自由向量．

事物的数学的抽象产生了向量的概念，所论对象用其长度和方向来描述，诸如位移、速度、磁场或电场强度．

向量的概念可以按照公理被引入(见**向量空间**(vector space))．

А. Б. Иванов 撰

【补注】 上面所定义的几何向量来自力学中力的概念，一个具有长度、方向和作用点的量．数学的描述是一个**仿射空间**(affine space)的设定，它是一个向量空间"不计其原点的位置"，或者更精确地说，向量空间 $L$ 在一个集合 $A$ 上的一个单可迁的群(基础加群)作用 $\varphi$．该单可迁性定义映射 $\theta: A\times A\to L$，由 $\varphi(\theta(x, y), x)=y$ 来刻画．$\theta(x, y)$ 记作 $\overrightarrow{xy}$，$\overrightarrow{xy}$ 是由约束向量或几何向量所定义的自由向量，$(x, y)$ 或 $(x, \overrightarrow{xy})$ (它具有作用点 $x$ 以及由 $\overrightarrow{xy}$ 给出的方向和长度)．对于任意三个点 $x, y, z\in A$，在 $L$ 中有 $\overrightarrow{xy}+\overrightarrow{yz}+\overrightarrow{zx}=\vec{0}$，它称为 Chasles 关系(Chasles relation)(见[A1]和**仿射空间**(affine space))．

力学中位移定律指出，一个力作用于刚体可以沿着其作用线位移到任何一个新的作用点，因此，一个力作用于一个刚体是一个滑动向量(sliding vector)．

**参考文献**

[A1] Berger, M., Geometry, 1, Springer, 1987, Chapt. 2(中译本：M．贝尔热，几何，第一－五卷，科学出版社，1987－1991)．

[A2] Ziegler, H., Mechanics, 1, Addison-Wesley, 1965.

【译注】 设 $A$ 为与域 $k$ 上向量空间 $L$ 相关联的仿射空间，$\varphi$ 是加群 $L$ 在 $A$ 上的单可迁的群作用，映射 $\theta: A\times A\to L$，使得 $\varphi(\theta(x, y), x)=y$，对任意 $x, y\in A$．令 $\theta(x, y)=\overrightarrow{xy}$，有时称 $\overrightarrow{xy}$ 为与点偶 $(x, y)$ 或约束向量 $(x, \overrightarrow{xy})$ 相关联的自由向量([A1])．

蒋滋梅 译

**向量代数[vector algebra; векторная алгебра]**

**向量演算**(vector calculus)的一个分支，讨论有关(自由)**向量**(vector)的最简单的运算．这些包括线性运算(linear operations)，即向量的加法及向量乘以数的乘法．

两个向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$，如果 $\mathbf{a}$ 的终点与 $\mathbf{b}$ 的起点相重合，则其和(sum) $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ 是由 $\mathbf{a}$ 的起点画到 $\mathbf{b}$ 的终点的向量．向量的加法运算具有以下性质：

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a} \text{（交换性）;}$$

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c}) \text{（结合性）;}$$

$$\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a} \text{（零元素的存在）;}$$

$$\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0} \text{（逆元素的存在）.}$$

这里 $\mathbf{0}$ 是零向量，$-\mathbf{a}$ 是与向量 $\mathbf{a}$ 相反的(opposite)向量(它的逆(inverse))．两个向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的差(difference)是向量 $\mathbf{x}$，它使得 $\mathbf{x}+\mathbf{b}=\mathbf{a}$．

向量 $\mathbf{a}$ 乘以数 $\lambda$，如果 $\lambda\neq 0$, $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$，则其积 $\lambda\mathbf{a}$ 是模等于 $|\lambda|\ |\mathbf{a}|$ 的向量，当 $\lambda>0$，其方向就是 $\mathbf{a}$ 的方向，当 $\lambda<0$，其方向与 $\mathbf{a}$ 相反．如果 $\lambda=0$ 或(且) $\mathbf{a}=\mathbf{0}$，则 $\lambda\mathbf{a}=0$．向量乘以数的乘法运算具有性质：

$$\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b} \text{（关于向量加法的分配性）;}$$

$$(\lambda+\mu)\mathbf{a}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a} \text{（关于数的加法的分配性）;}$$

$$\lambda(\mu\mathbf{a})=(\lambda\mu)\mathbf{a} \text{（结合性）;}$$

$$1\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a} \text{（乘以数 1）.}$$

空间的所有自由向量的集合连同这些引进的加法运算，乘以数的乘法运算就构成一个**向量空间**(vector space)(线性空间)．以下"向量"意指自由向量，或等价地，指一个给定向量空间的元素．

向量的线性相关概念是向量代数中一个重要概念．向量 **a**, **b**, …, **c** 称为线性相关的（linear dependent），如果存在数 $\alpha$, $\beta$, …, $\gamma$，其中至少有一个不为零，使得等式

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \cdots + \gamma \mathbf{c} = \mathbf{0} \quad (1)$$

成立．两个向量线性相关的充分必要条件是它们是共线的；三个向量线性相关的充分必要条件是，它们是共面的．如果向量 **a**, **b**, …, **c** 中有一个零向量，那么这些向量线性相关．向量 **a**, **b**, …, **c** 称为线性无关的（linearly independent）如果由（1）式可得数 $\alpha$、$\beta$, …, $\gamma$ 均为零．平面上（相应地三维空间）最多两个（相应地三个）向量线性无关．

三维空间（平面）的三（两）个线性无关的向量 $e_1$, $e_2$, $e_3$ 的集合，取确定的次序，组成一个基（basis）．任何向量 **a** 可以唯一表为和式

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3.$$

数 $a_1$, $a_2$, $a_3$ 称为 **a** 在给定基下的坐标（coordinates）（分量（components））；记作 $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$.

两个向量 $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ 与 $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ 相等，当且仅当在同一个基下它们的坐标相等．两个向量 $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ 与 $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ $(\mathbf{b} \neq \mathbf{0})$ 共线的充分必要条件是其对应的坐标成比例：$a_1 = \lambda b_1$, $a_2 = \lambda b_2$, $a_3 = \lambda b_3$．三个向量 $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ 和 $\mathbf{c} = \{c_1, c_2, c_3\}$ 共面的充分必要条件是等式

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

成立．向量的线性运算可以简化为坐标的线性运算．两个向量 $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ 与 $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ 的和的坐标等于对应坐标的和：$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \{a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3\}$．向量 **a** 乘以数 $\lambda$ 的积的坐标等于 **a** 的坐标乘以 $\lambda$ 的积：$\lambda \mathbf{a} = \{\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3\}$.

两个非零向量 **a** 与 **b** 的标量积（scalar product）（或内积（inner product））$(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 是它们的模乘以它们之间的夹角 $\varphi$ 的余弦的积：

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos\varphi.$$

在这里，$\varphi$ 理解为两向量间不超过 $\pi$ 的那个角．如果 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ 或 $\mathbf{b} = \mathbf{0}$，那么它们的标量积规定为零．标量积具有以下性质：

$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$（交换性）；

$(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{a}, \mathbf{c})$（关于向量加法的分配性）；

$\lambda(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\lambda \mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \lambda \mathbf{b})$（关于乘以一个数的结合性）；

$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ 仅当 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ 或（且）$\mathbf{b} = \mathbf{0}$，或 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.

向量的标量积往往适合于使用正交 Descartes 坐标（orthogonal Cartesian coordinates），即在相互垂直的单位向量 **i**, **j**, **k** 所组成的一个基（规范正交基（orthonormal basis））下的向量坐标．两个向量

$$\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\} \text{ 与 } \mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3\},$$

定义在一个规范正交基下，其标量积由公式

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

来计算．两个非零向量 $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ 与 $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ 间的夹角 $\varphi$ 的余弦可由公式

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}$$

来计算，其中 $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ 及 $|\mathbf{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$.

向量 $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ 与基向量 **i**, **j**, **k** 所构成的诸夹角的余弦称为 **a** 的方向余弦（direction cosines）：

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \quad \cos\beta = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}.$$

这些方向余弦有以下性质：

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

一条直线，在其上选定一个单位向量 **e**，这就规定了该直线的正方向，称为轴（axis）．向量 **a** 在这个轴上的投影（projection）$Pr_{\mathbf{e}}(\mathbf{a})$ 是该轴上的有向线段，其代数值等于 **a** 与 **e** 的标量积．投影是加性的：

$$Pr_{\mathbf{e}}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = Pr_{\mathbf{e}}\mathbf{a} + Pr_{\mathbf{e}}\mathbf{b},$$

和齐次的：

$$\lambda Pr_{\mathbf{e}}(\mathbf{a}) = Pr_{\mathbf{e}}(\lambda \mathbf{a}).$$

一个向量在规范正交基下的每个坐标等于这个向量在相应的基向量所规定的轴上的投影．



空间里的左和右向量三元组是有区别的．不共面的向量 a，b，c 的三元组称为右的（right），如果观察者在公共的向量起点，按 a，b，c 这个顺序的该三向量的运转，呈现为顺时针方向．若呈现为逆时针方向，则 a，b，c 称为左三元组（left triple）．空间里右（左）向量三元组的方向可以伸出右（左）手的大拇指、食指和中指来模拟，如图所示．所有右（左）向量三元组称为指向相同．在下文中，基向量 **i**，**j**，**k** 这个向量三元组假设为右三元组．

假设在平面上正旋转方向（由 **i** 到 **j**）已给定．那么两个非零向量 a 与 b 的伪标量积（pseudo-scalar product）a ∨ b 定义为它们的长度（模）乘以由 a 到 b 正旋转的角 $\varphi$ 的正弦的积：

$$\mathbf{a} \vee \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \sin\varphi .$$

由定义，如果 a 或 b 是零，它们的伪标量积规定等于零．伪标量积具有下列性质：

$\mathbf{a} \vee \mathbf{b} = -\mathbf{b} \vee \mathbf{a}$（反交换性）；

$\mathbf{a} \vee (\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a} \vee \mathbf{b} + \mathbf{a} \vee \mathbf{c}$（关于向量加法的分配性）；

$\lambda(\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} \vee \mathbf{b}$（关于乘以一个数的结合性）；

$\mathbf{a} \vee \mathbf{b} = 0$，仅当 $\mathbf{a}=\mathbf{0}$ 或（且）$\mathbf{b}=\mathbf{0}$，或 a 与 b 共线．

在规范正交基下，如果向量 a 与 b 具有坐标 $\{a_1, a_2\}$ 和 $\{b_1, b_2\}$，那么

$$\mathbf{a} \vee \mathbf{b} = a_1 b_2 - a_2 b_1 .$$

两个不共线的非零向量 a 与 b 的向量积（vector product）[a，b] 是这样一个向量，它的模等于这两个向量的模乘以它们之间的夹角 $\varphi$ 的正弦，这个向量垂直于 a，且垂直于 b，并且其指向使得向量三元组 a，b，[a，b] 为一个右三元组：

$$|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \sin\varphi .$$

这个积规定为零，如果 $\mathbf{a}=\mathbf{0}$ 或（且）$\mathbf{b}=\mathbf{0}$，或这两个向量共线．向量积具有下列性质：

$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}]$（反交换性）；

$[\mathbf{a}, \mathbf{b}+\mathbf{c}] = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] + [\mathbf{a}, \mathbf{c}]$（关于向量加法的分配性）；

$\lambda[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{a}, \lambda\mathbf{b}]$（关于乘以一个数的结合性）；

$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{0}$ 仅当 $\mathbf{a}=\mathbf{0}$ 或（且）$\mathbf{b}=\mathbf{0}$，或 a 与 b 共线．

在规范正交基下，如果向量 a 与 b 的坐标是 $\{a_1, a_2, a_3\}$ 和 $\{b_1, b_2, b_3\}$，那么

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \left\{ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right\}.$$

三个向量 a，b，c 的混合积（mixed product）（a，b，c）是 a 与向量 b，c 的向量积之标量积：

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]).$$

混合积具有下列性质：

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) =$$

$$= -(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}) = -(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b});$$

$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$，仅当 $\mathbf{a}=\mathbf{0}$，或（且）$\mathbf{b}=\mathbf{0}$，或（且）$\mathbf{c}=\mathbf{0}$，或向量 a，b，c 共面；

如果向量三元组 a，b，c 是右三元组，则 $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) > 0$；如果 a，b，c 是左三元组，则 $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) < 0$．

混合积的模等于在向量 a，b，c 上构造的平行六面体的体积．如果在规范正交基下，向量 a，b 和 c 具有坐标 $\{a_1, a_2, a_3\}$，$\{b_1, b_2, b_3\}$ 和 $\{c_1, c_2, c_3\}$，那么

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

三个向量 a，b，c 的二重向量积（double vector product）[a，b，c] 是 [a，[b，c]]．

下列公式用来计算二重向量积：

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{b}, (\mathbf{a}, \mathbf{c})] - [\mathbf{c}, (\mathbf{a}, \mathbf{b})],$$

$$([\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{c}, \mathbf{d}]) = (\mathbf{a}, \mathbf{c})(\mathbf{b}, \mathbf{d}) - (\mathbf{a}, \mathbf{d})(\mathbf{b}, \mathbf{c}),$$

$$[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{c}, \mathbf{d}]] = (\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d})\mathbf{b} - (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})\mathbf{a} =$$

$$= (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d})\mathbf{c} - (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})\mathbf{d}.$$

**参考文献**


[1] Александров, П. С., Лекции по аналитической геометрии ···, М., 1968.

[2] Ефимов, Н. В., Краткий курс аналитической геометрии, 9 изд., М., 1967（中译本：叶菲莫夫，解析几何简明教程，高等教育出版社，1956）.

[3] Ильин, В. А., Позняк, Э. Г., Аналитическая геометрия, М., 1968（英译本：Ilin, V. A. and Poznyak, E. G., Analytical geometry, Mir, 1984）.

[4] Погорелов, А. В., Аналитическая геометрия, 3 изд., М., 1968.


Ю. П. Пытьев 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Halmos, P. R., Finite-dimensional vector spaces, v. Nostrand, 1958.

[A2] Capildeo, R., Vector algebra and mechanics, Addison-Wesley, 1968.


蒋滋梅 译

**向量分析** [**vector analysis**; **векторный анализ**]

研究标量场及向量场的**向量演算** (vector calculus) 的一个分支 (见**标量场** (scalar field); **向量场** (vector field)).

向量分析中研究标量场的基本概念之一是**梯度** (gradient). 一个标量场 $u(M)$ 称为在区域 $D$ 中的点 $M$ 处是可微的, 如果场在 $M$ 处的增量能被写成

$$\Delta u = f(\Delta \mathbf{r}) + o(\rho),$$

这里 $\mathbf{r}$ 是连结点 $M$ 和 $M'$ 的向量, $\rho = \rho(M, M')$ 是 $M$ 和 $M'$ 之间的距离, $f(\Delta \mathbf{r})$ 是应用于向量 $\Delta \mathbf{r}$ 的一个线性形式. 线性形式 $f(\Delta \mathbf{r})$ 可唯一地表为

$$f(\Delta \mathbf{r}) = (\mathbf{g}, \Delta \mathbf{r}),$$

这里 $\mathbf{g}$ 是一个不依赖于 $\Delta \mathbf{r}$ (即不依赖于 $M'$ 的选取) 的向量. 称向量 $\mathbf{g}$ 为标量场的梯度 (gradient), 并用记号 $\operatorname{grad} u$ 来表示. 如果标量场在某区域的每点处都可微, 则 $\operatorname{grad} u$ 是一个向量场. 梯度的方向总正交于标量场 $u$ 的等值线 (面) $u(M) =$ 常数, $u$ 的方向导数由

$$\nabla_e u = (\operatorname{grad} u, \mathbf{e})$$

给出.

**散度** (divergence) 和**旋度** (curl) 的概念也被用于向量场的研究之中. 设向量场 $\mathbf{a}(M)$ 在某区域 $D$ 中的点 $M$ 处是可微的, 即在 $M$ 点处的场增量能被唯一地表为

$$\Delta \mathbf{a} = A \Delta \mathbf{r} + o(|\Delta \mathbf{r}|),$$

这里 $\Delta \mathbf{r} = |MM'|$ 和 $A$ 是一个与 $\Delta \mathbf{r}(M'$ 的选取) 无关的线性算子. 向量场 $\mathbf{a}(M)$ 的散度 (divergence) $\operatorname{div} \mathbf{a}$ 是下列的线性算子 $A$ 的数值不变量:

$$\operatorname{div} \mathbf{a} \equiv (\mathbf{r}^i, A\mathbf{r}_i), \qquad (*)$$

这里 $\mathbf{r}^i$, $\mathbf{r}_i$ 是对偶基: $(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}^k) = \delta_i^k$ (Kronecker 符号). 如果向量场 $\mathbf{a}(M)$ 是不可压缩流体的稳定流的速度场, 在点 $M$ 处的 $\operatorname{div} \mathbf{a}$ 表示存在于 $M$ 处的源的强度 ($\operatorname{div} \mathbf{a} > 0$) 或者收点的强度 ($\operatorname{div} \mathbf{a} < 0$), 或它们都不存在 ($\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$).

在 $\mathbf{R}^3$ 中的一个区域上的向量场 $\mathbf{a}(M)$ 的旋度 (curl 或 rotor) $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ 是 $(*)$ 式中的线性算子 $A$ 的下述向量不变量:

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} \equiv [\mathbf{r}_i, A\mathbf{r}^i],$$

这里 $\mathbf{r}^i$, $\mathbf{r}_i$ 是对偶基. 向量场的旋度可解释成该场的"旋转分量".

对 $C^2$ 类的向量场和标量场, 可重复施行运算, 例如:

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = 0,$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{a} = 0,$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a} - \Delta \mathbf{a},$$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \Delta u,$$

这里 $\Delta$ 是 **Laplace 算子** (Laplace operator).

梯度、散度和旋度一起通常称为向量分析的基本微分运算 (basic differential operations). 对其性质及在特殊坐标系中的表达式, 见**旋度** (curl) **梯度** (gradient); **散度** (divergence).

联系着体积、曲面和围道积分的基本积分公式可藉助于向量分析的基本运算写出. 设向量场在一个具有分段光滑边界 $L$ 的有界连续区域 $V$ 中是连续可微的.

令 $S$ 为有界、完全、分段光滑的双侧 (定向) 曲面, 且具有分段光滑的边界 $\partial S$, 则 **Stokes 公式** (Stokes formula) 是适用的:

$$\iint_S (\mathbf{n}, \operatorname{rot} \mathbf{a}) \, ds = \oint_{\partial S} (\mathbf{a}, \mathbf{t}) \, dl,$$

这里, $S$ 的法向量 $\mathbf{n}$ 和 $\partial S$ 的切向量 $\mathbf{t}$ 必须根据曲面 $S$ 及其边界 $\partial S$ 的定向来确定. 积分 $\oint_{\partial S}(\mathbf{a}, \mathbf{t})\,dl$ 称为 $\mathbf{a}$ 沿 $\partial S$ 的环流 (circulation). 如果一个向量场沿在给定区域中的任意一条闭的分段光滑曲线的环流为 0, 则称向量场在此区域中为位势的 (potential) (或保守的 (conservative)). 在单连通区域中, 如果 $\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0$, 则向量场是保守的. 对一个保守向量场, 存在所谓的标量位势 (scalar potential), 它是一个函数 $v(M)$, 使得 $\mathbf{a} = \operatorname{grad} v$; 这里

$$\int_{AB} (\mathbf{a}, \mathbf{t}) \, dl = v(B) - v(A),$$

其中点 $A$, $B \in D$, $AB$ 是 $D$ 中的一条分段光滑曲线, $\mathbf{t}$ 是 $AB$ 的单位切向量, $dl$ 是 $AB$ 的线元.

设向量场 $\mathbf{a}(M)$ 在具有分段光滑边界 $\partial V$ 的有界连通区域 $V$ 中是连续可微的, **Остроградский 公式** (Ostrogradski formula) 为

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{a} \, d\sigma = \iint_{\partial V} (\mathbf{n}, \mathbf{a}) \, ds,$$

这里 $\mathbf{n}$ 是 $\partial V$ 的外法向量.

称积分 $\iint_{\partial V}(\mathbf{n}, \mathbf{a})\,ds$ 为 $\mathbf{a}(M)$ 跨越 $\partial V$ 的流量 (flux). 如果对 $V$ 中任意分片光滑、不自交, 且可作为 $V$ 的某个有界子区域的边界的定向曲面, 向量场跨越该曲面的流量为 0, 则称向量场 $\mathbf{a}(M)$ 在 $V$ 中是螺线的 (solenoidal). 一个连续可微的向量场是螺线的充要条件是在 $V$ 的每点, 有 $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$. 对螺线向量场 $\mathbf{a}(M)$, 存在一个所谓的向量位势 (vector potential): 函数 $A(M)$, 使得

$$\mathbf{a} = \operatorname{rot} A(M).$$

如果向量场的散度和旋度在单连通区域 $D$ 的每点 $M$ 处均有定义，则向量场在 $D$ 中处处能表为势场 $\mathbf{a}_1(M)$ 和螺线场 $\mathbf{a}_2(M)$ 之和（Helmholtz 定理）(Helmholz theorem)：

$$\mathbf{a}(M)=\mathbf{a}_1(M)+\mathbf{a}_2(M).$$

满足 $\mathrm{div}\,\mathbf{a}=0$ 和 $\mathrm{rot}\,\mathbf{a}=0$ 的向量场称为调和的(harmonic)．调和向量场的势 $v$ 满足 Laplace 方程．标量场 $v$ 也称为调和的．参考文献见**向量演算**(vector calculus)．

А. Б. Иванов 撰

【补注】 通常称 Остроградски 公式为 Gauss 公式 (Gauss formula)．

条件 $\mathrm{div}\,\mathbf{a}=0$ 是向量场为螺线的必要条件．在例如凸区域上，它也是充分的．一般的附加条件是区域的二阶同调为 0．这可容易地从 de Rham 上同调理论中看出．存在定义在除去了一点的三维空间中向量场的例子，其散度为 0，但不是螺线的．

向量场的梯度、散度、Laplace 算子、流量的概念以及所给的积分公式可容易地推广至高维 Euclid 空间及 Riemann 流形上去，而且所有其他的概念均可推广至三维 Riemann 流形．

在这方面，所给出的积分公式以统一的方式呈现为 Stokes 公式：$k$ 形式在光滑的定向 $(k+1)$ 维子流形的分段正则边界上的积分等于其外微分在子流形本身上的积分．

**参考文献**

[A1] Marsden, A. and Weinstein, A., Calculus, Ⅲ, Springer, 1988.

[A2] Hicks, N. J., Notes on differential geometry, v. Nostrand, 1965.

沈纯理 译

**向量公理学** [**vector axiomatics**; **векторно-точечная аксиоматика**]，向量点公理学(vector point axiomatics)

一个 $n$ 维仿射空间 $R^n$ 的公理学，其基本概念是"点"和"向量"；它们之间的联结是由建立点偶与一个唯一确定的向量之间的对应来实现．下列公理成立．

Ⅰ．$R^n$ 的所有向量的集合是一个 $n$ 维向量空间 $V^n$．

Ⅱ．任意两个点 $A$ 和 $B$，给了确定的次序，就唯一确定一个向量 $\mathbf{u}$．

Ⅲ．如果任意给定一个向量 $\mathbf{u}$ 和点 $A$，那么唯一存在点 $B$ 使得 $\mathbf{u}=\overrightarrow{AB}$．

Ⅳ．如果 $\mathbf{u}_1=\overrightarrow{AB}$ 与 $\mathbf{u}_2=\overrightarrow{BC}$，那么 $\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2=\overrightarrow{AC}$．

偶"点 $A$ 与向量 $\mathbf{u}$"称为"向量 $\mathbf{u}$ 作用在点 $A$"(或"定位在那个点")；点 $A$ 自身称为作用于其上的向量 $\mathbf{u}$ 的起点，而点 $B$，它是由偶 $A$、$\mathbf{u}$ 唯一确定，称为向量 $\mathbf{u}$(作用于 $A$)的终点．

任给向量 $\mathbf{u}$ 就形成 $R^n$ 的所有点的集合到它自身的一个完全确定的一一映射，它称为 $R^n$ 在向量 $\mathbf{u}$ 上的平移(translation)，该映射为每个点 $A\in R^n$ 联系了向量 $\mathbf{u}=\overrightarrow{AB}$ 的终点 $B$．

**参考文献**

[1] Александров, П. С., Лекции по аналитической геометрии …, М., 1968.

[2] Александров, П. С., Энциклопедия элементарной математики, кн. 4, Геометрия, М., 1963.

А. Б. Иванов 撰

【补注】 亦见**向量**(vector)(补注)或[A1]．

**参考文献**

[A1] Berger, M. Geometry, 1, Springer, 1987, Chapt. 2 (中译本：M. 贝尔热，几何，第一 — 五卷，科学出版社，1987 – 1991)．

蒋滋梅 译

**向量丛** [**vector bundle**; **векторное расслоение**]

**纤维空间**(fibre space) $\pi: X\to B$，它的每个纤维 $\pi^{-1}(b)$ 具有某个除环 $\mathscr{F}$ 上(有限维)**向量空间**(vector space) $V$ 的结构，并满足如下局部平凡性条件(local triviality condition)．每个点 $b\in B$ 有一个开邻域 $U$ 以及纤维丛的 $U$ 同构 $\varphi: \pi^{-1}(U)\to U\times V$，使得对于每个点 $b'\in U$，$\varphi|_{\pi^{-1}(b')}: \pi^{-1}(b')\to b'\times V$ 是向量空间的同构；$\dim V$ 称为该向量丛的维数(dimension of the vector bundle)．向量丛 $\pi$ 的所有截面构成 $B$ 上取值于 $\mathscr{F}$ 的连续函数环上的一个局部自由模 $\Gamma(\pi)$．两个向量丛 $\pi,\pi'$ 间的态射是一个纤维丛的态射 $f:\pi\to\pi'$，它在每个纤维上的限制均是线性映射．向量丛以及它们之间的态射构成范畴 **Bund**．向量丛的概念作为微分几何学中**切丛**(tangent bundle)与**法丛**(normal bundle)的拓展而产生；现已成为研究许多数学分支的基本工具：微分与代数拓扑学，线性连络理论，代数几何学，(伪)微分算子理论等等．

对于子空间 $X'\subset X$，如果 $\pi|X': X'\to B$ 是一个向量丛，并且 $X'\cap\pi^{-1}(b)$ 是 $\pi^{-1}(b)$ 的子向量空间，则称 $\pi|X': X'\to B$ 是向量丛 $\pi$ 的子丛(subbundle of the vector bundle)．例如，当 $V$ 是一个向量空间，$G_k(V)$ 是 $V$ 中 $k$ 维线性子空间的 **Grassmann 流形**(Grassmann manifold)时，乘积空间 $G_k(V)\times V$ 中所有满足 $v\in P$ 的点对 $(p,v)$ 构成的子空间，是平凡向量丛 $G_k(V)\times V$ 的一个子丛 $\nu_k$．在商拓扑下，所有向量空间 $\pi^{-1}(b)/\pi_2^{-1}(b)$ 的并，这里 $\pi_2$ 是 $\pi$ 的某个子丛，称为 $\pi$ 的一个商丛(quotient bundle)．进一步，如果 $V$ 是一个向量空间，$G^k(V)$ 是 $V$ 中余维数为 $k$ 的线性子空间的 Grassmann 流形，

则定义平凡向量丛 $G^k(V)\times V$ 的商丛 $\gamma^k$ 为乘积空间 $G^k(V)\times V$ 关于所有点对 $(p, v)$, $v\in p$, 构成的子丛的商空间. 利用收缩和粘合的运算在商空间上构造向量丛时, 通常要用到子丛和商丛的概念.

向量丛的一个 $B$ 态射 $f: \pi\to\pi'$ 称为**常秩的**(**纯的**) (constant rank (pure)), 如果 $\dim\ker f|\pi^{-1}(b)$ 在 $B$ 上局部常值. 单、满态射均属常秩态射, 并且分别称为**向量丛的单态射**和**满态射** (monomorphism and epimorphism of the vector bundle). 对于一个局部常秩的态射 $f$, 如下四个向量丛是唯一确定的: $\mathrm{Ker}f$($f$ 的**核** (kernel)), 它是 $\pi$ 的一个子丛; $\mathrm{Im}f$($f$ 的**象** (image)), 它是 $\pi'$ 的一个子丛; $\mathrm{Coker}f$($f$ 的**余核** (cokernel)), 它是 $\pi$ 的商丛; 最后 $\mathrm{Coim}f$($f$ 的**余象** (co-image)), 它是 $\pi'$ 的商丛. 任何一个子丛 $\pi_1$ 是某个单态射 $i: \pi_1\to\pi$ 的象, 而任何一个商丛 $\pi_2$ 又是某个满态射 $j: \pi\to\pi_2$ 的余核. 向量丛的 $B$ 态射序列

$$\cdots\to\pi'\to\pi\to\pi''\to\cdots$$

叫做**正合的** (exact), 如果对于每个点 $b\in B$, 向量空间的同态序列

$$\cdots(\pi')^{-1}(b)\to(\pi)^{-1}(b)\to(\pi'')^{-1}(b)\to\cdots$$

是正合的. 作为特例, 如果用 0 表示零维向量丛, 则序列

$$0\to\pi_1\xrightarrow{i}\pi\xrightarrow{j}\pi_2\to 0$$

是正合的, 如果 $i$ 是单态射, $j$ 是满态射, 并且 $\mathrm{Im}\,i=\mathrm{Ker}\,j$. $B$ 上的所有向量丛与局部常秩的 $B$ 态射的集合, 构成范畴 **Bund** 的一个正合子范畴 $\mathbf{Bund}_B$.

对于任意一个向量丛 $\pi: X\to B$ 以及映射 $u: B_1\to B$, **诱导纤维丛** (induced fibre bundle) $u^*(\pi)$ 具有向量丛的结构, 使得态射 $U: u^*(\pi)\to\pi$ 是向量丛态射. 这个结构是唯一的, 并具有下述性质: 每一个纤维映射 $(u^*(\pi))^{-1}(b)\to\pi^{-1}(b)$ 是向量空间的同构. 例如, 对于仿紧空间 $B$ 上的一个 $k$ 维向量丛, 存在确定的映射 $u: B\to G_k(V)$ 以及 $\tilde{u}: B\to G^k(V)$, 使得该向量丛同构于诱导丛 $u^*(\gamma_k)$ 与 $\tilde{u}^*(\gamma^k)$ 之一; 此外, 同伦的映射诱导同构的向量丛, 并且当 $\dim V\neq\infty$ 时, 逆命题也成立: 彼此同构的向量丛对应于彼此同伦的映射 $u$ 和 $\tilde{u}$. 这正是向量丛同伦分类的基本定理之一, 它阐述了向量丛 $\gamma_k$ 与 $\gamma^k$ 对于分类映射 $u$ 和 $\tilde{u}$ 的万有性质.

向量空间范畴上的任意一个连续运算 (函子 (functor)), 唯一地决定了空间 $B$ 上向量丛范畴上的一个连续函子; 正是由于这个缘故, 有可能从给定的向量丛, 来构造新的向量丛: 张量丛, 态射向量丛 $\mathrm{Hom}_B(\pi,\pi')$, 尤其是, 对偶向量丛 $\pi^*$, 向量丛的外幂等等, 它们的截面赋予向量丛附加的结构. 这些新向量丛在实际应用中广泛被使用.

对于两个向量丛 $\pi$ 和 $\pi'$, 已经定义了它们的直和 (Whitney 和 (Whitney sum)) $\pi\oplus\pi'$ 与张量积 $\pi\otimes\pi'$. 对于这两种运算, $B$ 上的所有向量丛的同构类的集合 $\mathrm{Vect}_B$ 构成一个半环, 它在 **$K$ 函子** ($K$-functor) 的构造中起了重要的作用; 具体地说, 对于向量丛 $\pi$ 和 $\pi'$, 如果存在平凡丛 $\theta$ 和 $\theta'$ 使得 $\pi\oplus\theta$ 同构于 $\pi'\oplus\theta'$ (即 $\pi$ 稳定等价于 $\pi'$), 则它们在半环 $\mathrm{Vect}_B$ 的"完全化" $K(B)$ 中决定同一元素. 此外, 仿紧空间 $B$ 上任意向量丛的逆丛的存在性, 保证了环 $K(B)$ 与向量丛的稳定等价类的集合一致.

对于仿紧空间 $B$ 上的任意一个向量丛 $\pi: X\to B$, 存在向量丛

$$\pi^*\oplus\pi^*=\mathrm{Hom}(\pi\oplus\pi, P)$$

的一个截面 $\beta$, 这里 $P$ 是一维平凡向量丛, 它在每个纤维 $\pi^{-1}(b)$ 上是一个正定二次型, 换言之, $\pi$ 可度量化; 值得一提的是, 利用这一事实, 可以证实向量丛的任何一个正合序列

$$0\to\xi\xrightarrow{u}\pi\xrightarrow{v}\zeta\to 0,$$

其中 $\pi$ 可度量化, 都有可裂性, 即存在态射 $w: \xi\oplus\zeta\to\pi$, 使得 $wi=u$, $vw=j$, 这里 $i$ 是到第一项的嵌入, $j$ 是到第二项的投射.

在向量丛 $\pi: X\to B$ 的每个纤维 $\pi^{-1}(b)$ 中, 将通过原点的每条直线上的所有点等同, 得到一个丛 $\pi_0: \Pi_{(x)}\to B$, 它与 $\pi$ 相配、并且称为 $\pi$ 的**射影化** (projectivization); $\pi_0$ 的纤维是与 $V$ 相配的射影空间 $\Pi(V)$. 向量丛的射影化丛, 常用于研究 **Thom 空间** (Thom space) $T(\pi)=\Pi(\pi\oplus P)/\Pi(\pi)$, 用于流形配边类的同伦解释, 以及利用向量丛的示性类描述流形的同调性质等等.

向量丛的概念可以推广到纤维是无穷维向量空间的情形; 但是同时, 需要区别态射空间 $\mathrm{Hom}(\pi,\pi')$ 的不同拓扑, 恰当地修改纯态射、态射的正合序列的定义, 以及与无穷维向量空间的范畴上的连续函子相对应的向量丛构造的定义.

**参考文献**


[1] Godbillon, C., Géometrie différentielle et mécanique analytique, Hermann, 1969.

[2] Atiyah, M. F., $K$-theory: lectures, Benjamin, 1967.

[3] Lang, S., Introduction to differentiable manifolds, Interscience, 1967.

[4] Husemoller, D., Fibre bundle, McGraw-Hill, 1966.

[5] Chern, S. S., Complex manifolds without potential theory, Springer, 1979.

[6] Hirzebruch, F., Topological methods in algebraic geo-

metry, Springer, 1978(译自德文).

А. Ф. Щекутьев 撰

【补注】 关于丛 $\nu^k$ 和 $\nu_k$ 的万有性和分类性质的详细内容，见**分类空间**(classifying space)或[A1].

**参考文献**

[A1] Milnor, J. W. and Stasheff, J. D., Characteristic classes, *Princeton Univ. Press*, 1974.

段海豹 译 沈信耀 校

**代数向量丛**[**vector bundle, algebraic**; **векторное алгебраическое расслоение**]

一个簇态射 $E\to X$，它在局部上(在 **Zariski 拓扑**(Zariski topology)下)具有从直积 $k^n\times X$ 到 $X$ 的投影结构，并且使得粘合保持向量空间的线性结构. 这里 $E$ 称为纤维空间(fibre space)(或丛空间(bundle space))，$X$ 称为底(base)，而 $n$ 称为该丛的秩(rank)或维数(dimension). 一个代数向量丛的态射的定义方式，与拓扑情形相同. 一个较为一般、适用于任何一个概形的定义，涉及层(sheaf)的概念. 令 $\mathscr{E}$ 为一个有限(常)秩 $\mathscr{O}_X$ 模的局部自由层；设 $\mathrm{Sym}(\mathscr{E})$ 为 $\mathscr{E}$ 的一个对称代数层，则仿射态射 $V(\mathscr{E})$: $\mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}\,\mathscr{E})\to X$ 称为与 $\mathscr{E}$ 相伴的向量丛(vector bundle associated with $\mathscr{E}$). 有时这一术语也用于 $\mathscr{E}$ 是任意一个拟凝聚层的情形. 层 $\mathscr{E}$ 可以由代数向量丛 $V(\mathscr{E})$ 唯一地复原，并且 $X$ 上的代数向量丛的范畴对偶于 $\mathscr{O}_X$ 模的局部自由层的范畴. 此外，对于一个 $X$ 概形 $Y$, $X$ 态射 $Y\to V(\mathscr{E})$ 的集合一一映射地对应于 $\mathscr{O}_X$ 模同态 $\mathscr{E}\to f_*(\mathscr{O}_Y)$ 的集合，这里 $f$ 是一个 $X$ 概形 $Y$ 的结构同态. 尤其是，代数向量丛 $V(\mathscr{E})$ 截面的芽层等同于 $\mathscr{E}$ 的对偶层 $\mathscr{E}^\vee$. 代数向量丛 $V(\mathscr{O}_X^n)$ 称为秩 $n$ 的平凡丛(trivial vector bundle of rank $n$). 概形 $X$ 上的所有秩 $n$ 代数向量丛的集合一一对应于上同调集 $H^1(X, \mathrm{GL}(n, \mathscr{O}_X))$，这里 $\mathrm{GL}(n, \mathscr{O}_X)$ 是 $n$ 秩平凡向量丛的自同构层. 秩 1 的代数向量丛也称为线丛(line bundle)；它们对应于 $\mathscr{O}_X$ 模的可逆层，并且和 $X$ 上的除子(divisor)密切相关；在张量积的运算下线丛的集合构成一个群 $\mathrm{Pic}(X)\approx H_1(X, \mathscr{O}_X^*)$ (见 **Picard 群**(Picard group)).

和拓扑的情形相同，对于代数向量丛可以定义直和，张量积，对偶丛，对称与外幂，诱导代数向量丛等等. 对于一个 $n$ 秩的代数向量丛 $E$，线丛 $\lambda_n E$ 称为行列式丛(determinant bundle). 正如一个向量空间可以联系到一个射影空间，一个代数向量丛 $E$ 可以联系到一个射影丛(projective bundle) $P(E)$ (见**射影概形**(projective scheme)).

非平凡代数向量丛的例子包括 **Grassmann 流形**(Grassmann manifold)上的典型代数向量丛；尤其是，射影空间 $P^n$ 上存在一个与层 $\mathscr{O}(1)$ 相对应的典型线丛. 如果概形 $X$ 上的代数向量丛 $E$ 是一个平凡代数向量丛的子丛，则这一嵌入决定 $X$ 到相应 Grassmann 流形的一个态射，Grassmann 流形上的典型代数向量丛用于诱导此态射. 决定 $X$ 到 $P^n$ 中的一个嵌入的线丛，称为极丰富的(very ample)(见**丰富向量丛**(ample vector bundle)).

代数向量丛的其他例子包括光滑簇 $X$ 的切丛 $T(X)$，以及由它出发利用不同的运算所构造的丛(见**切丛**(tangent bundle)；**法丛**(normal bundle)；**典范类**(canonical class)).

定义在复数域 C 上的某个簇上的一个代数向量丛既可认为是一个解析的，亦可认为是一个拓扑的(在复合形的拓扑学中)代数向量丛. 在一个完全代数簇上，解析向量丛等价于代数向量丛(见**比较定理**(comparison theorem)(代数几何学中的)；**解析向量丛**(vector bundle, analytic). 拓扑向量丛并非总是具有代数结构，即使有，这样的结构通常也不唯一. 如果把一个代数向量丛认为是一个拓扑丛，则可以应用拓扑方法；特别可以引进代数向量丛的**陈(省身)类**(Chern class). 陈类也有一个抽象的定义，需要涉及 $K$ **函子**($K$-functor)或**艾达尔上同调**(étale cohomology)的一个不变量.

代数向量丛的性质取决于它的底是完全的，还是仿射的概形. 在底是仿射的情形，$X=\mathrm{Spec}\,A$，代数向量丛对应于环 $A$ 上的有限型**投射模**(projective module). 如果代数向量丛 $E$ 的秩大于底 $X$ 的维数，则 $E$ 可以表示为 $E'\oplus 1$，此处 1 是 1 维平凡丛而 $E'$ 在通常情况下不是唯一确定的. 此外当 $E$ 的秩数大于底 $X$ 的维数且 $E\oplus 1\simeq F\oplus 1$ 时，则 $E\simeq F$([4]). 如果 $X$ 是一个非奇异一维概形(即 $A$ 是一个 **Dedekind 环**(Dedekind ring))，$X$ 上的任意一个代数向量丛是一个平凡丛与某个线丛的直和. 这一结论也适用于代数闭域上的双有理等价于直纹面的非奇异仿射曲面上的代数向量丛.

射影底的情形. 研究射影簇上的线丛是代数几何学的一个经典课题(见 **Picard 群**(Picard group)；**Picard 概形**(Picard scheme)). 对高秩代数向量丛的研究开始于 1957 年，当时 A. Grothendieck 证明了射影直线上的代数向量丛是线丛的直和. M. Atiyah 对椭圆曲线 $X$ 上的代数向量丛做了分类：如果用 $\mathscr{E}(r, d)$ 表示不可分解(为直和)的秩 $r$ 度 $d$ 的代数向量丛的集合("度"应理解为丛的行列式的度数)，则 $\mathscr{E}(r, d)$ 等同于曲线 $X$ 自身的点的集合([3]).

在曲线上的代数向量丛的研究中，稳定代数向量丛的概念十分有用. 对于给定代数向量丛 $E$，令 $\mu(E)$ 等于 $\deg(E)/\mathrm{rank}(E)$；于是丛 $E$ 称为稳定的(stable)(或半稳定的(semi-stable))，如果对于任意

子丛 $E' \subset E$, 都有 $\mu(E') < \mu(E)$ ( 或 $\mu(E') \leqslant \mu(E)$ ). 稳定向量丛是单的 ( 即 $\mathrm{End}(E) \simeq K$ ), 并且是不可分解的. 一条亏格 $\geqslant 2$ 的代数曲线 $X$ 上的度 0 代数向量丛是稳定的, 当且仅当它与基本群 $\pi_1(X)$ 的某个不可约酉表示相配 ([1]). 令 $U(r, d)$ 为所有秩 $r$ 度 $d$ 且可表为稳定代数向量丛的直和的半稳定代数向量丛的集合, 并设 $US(r, d)$ 为稳定代数向量丛构成的子集合. 如果一条光滑曲线 $X$ 的亏格 $g$ 大于 1, 那么 $U(r, d)$ 具有某个 $r^2(g-1)+1$ 维正规射影簇的自然结构, 同时 $US(r, d)$ 是 $U(r, d)$ 的一个光滑开子簇 ([1]). 如果 $r$ 与 $d$ 互素, 则 $U(r, d) = US(r, d)$, 从而也是光滑的. 半稳定代数向量丛的模空间已经被广泛地研究过. 事实上, 已知的结论有: $U(1, d)$ 是 $X$ 的 Picard 概形的一个分支; 行列式映射 det: $U(r, d) \to U(1, d)$ 的纤维是单有理簇; 如果 $r$ 与 $d$ 互素, $U(r, d)$ 唯一决定原来的曲线 $X$. 由于在 $U(r, d)$ 上, 代数向量丛的万有族并非总是存在, $U(r, d)$ 不能做为某个适当函子的表示对象 ([1]). 这些结果中的大多数在域 **C** 上成立, 尽管它们中的许多也适用于任意一个代数闭域. 代数曲面以及射影空间上的代数向量丛的某些特殊性质也被认识到([5]).

**参考文献**


[1] Narasimhan, M. and Seshadri, C. S., Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann surface, *Ann. of Math.*, **82** (1965), 540 – 567.

[2] Тюрина, А. Н., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **30** (1966), 6, 1353 – 1356.

[3] Atiyah, M. F., vector bundles over an elliptic curve, *Proc. London. Math. Soc.* (3), 7 (1957), 414 – 452.

[4] Bass, H., Algebraic *K*-theory, Benjamin, 1968.

[5] Долгачев, И. В., Исковских, В. А., в кн.: Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 12, М., 1974, 77 – 170.


В. И. Данилов 撰

【补注】 S. Donaldson 的近期工作 (见[A2] – [A3]) 表明, 紧复代数曲面上稳定秩 2 向量丛的模空间, 同构于相应的 4 维光滑流形上瞬子酉向量丛的模空间. Riemann 流形上的一个瞬子向量丛 (instanton vector bundle), 是一个配有联络的可微丛, 它的曲率形式满足某个确定的非线性微分方程组. 这些瞬子的模空间与 Riemann 度量的取法无关, 因而是光滑 4 维流形的新不变量. 代数向量丛的理论使得这些不变量的计算在某些场合成为可能. 这种方法提供了同胚、但不微分同胚的紧单连通光滑 4 维流形的第一批例子.

代数曲线与射影空间上的代数向量丛理论中的许多新观念, 来源于理论物理学 ( 规量理论, Yang-Mills 理论以及弦论 ).

**参考文献**


[A1] Atiyah, M. F. and Bott, R., The Yang-Mills equations over Riemann surfaces, *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, **308** (1982), 523 – 615.

[A2] Donaldson, S. K., Instantons in Yang-Mills theory, in D. Quillen, G. Segal and S. Tsou (eds.), The interface of Mathematics and Partical Physics, Oxford Univ. Press, 1990.

[A3] Donaldson, S. and Kronkheimer, P., The geometry of four-manfolds, Oxford Science Publ., 1990.

[A4] Friedman, R. and Morgan, J., Algebraic surfaces and 4-manifolds: some conjectures and speculations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **18** (1988), 1 – 15.

[A5] Okonek, C. and Ven, A. van de, Stable bundles, instantons and $C^\infty$-structures on algebraic surfaces, in A. G. Vitushkin, et al. (ed.): Several Compler Variables VI, Encycl. Math. Sci. Vol. 69, Springer, 1990, 197 – 249.

[A6] Okonek, C., Schneider, M. and Spindler, H., Vector bundles on complex projective spaces, Birkhäuser, 1987.

[A7] Rudakov, A., et al., Helices and vector bundles, Cambridge Univ. Press, 1990.

[A8] Seshadri, C., Fibrés vectoriels surles courbes algebriques, *Astérisque*, **96** (1982).

[A9] Tyurin, A., Algebraic geometric aspects of smooth structure 1. The Donaldson polynomial, *Russian Math. Surveys*, **44** (1989), 113 – 178. (Uspekhi Mat. Nauk, **44** (1989), 93 – 143).

[A10] Mumford, D. and Fogarty, J., Geometric invariant theory, Springer, 1982.

[A11] Hartshorne, R., Algebraic vector bundles on projective spaces: a problem list, *Topology*, **18** (1979), 117 – 128.

[A12] Ven, A. van de, Twenty years of classifying vector bundles, in A. Beauville (ed.), Algebraic Geometry (Angers, 1979), Sythoff & Noordhoff, 1980, 3 – 20.

[A13] Harshorne, R., Four years of algebraic vector bundles, in A. Beauville (ed.): Algebraic Geometry (Angers, 1979), Sythoff & Noordhoff, 1980, 21 – 28.


段海豹 译 沈信耀 校

**解析向量丛 [vector bundle, analytic; векторное аналитическое расслоение]**

某个解析空间上的一个局部平凡的解析丛, 它的纤维具有某个基域 $k$ 上的 $n$ 维向量空间结构 ( 当 $k =$ 复数域 **C** 时, 解析丛也称为全纯的 (holomorphic)). 数 $n$ 称为该丛的维数 (dimension) 或秩 (rank). 类似于拓扑丛 ( 见向量丛 (vector bundle)) 的情形, 解析丛的范畴, 以及子丛、商丛、直积、张量积、外积等等概念, 都可以定义.

以 $X$ 为底空间的解析向量丛 $E$ 的解析截面，构成底空间上解析函数代数 $A(X)$ 上的一个模 $\Gamma(E)$. 如果 $k=\mathbf{C}$ 并且 $X$ 是紧的，则 $\Gamma(E)$ 是 $\mathbf{C}$ 上的有限维向量空间（见**有限性定理**（finiteness theorems））. 另一方面，如果 $X$ 是有限维复 **Stein 空间**（Stein space），则 $\Gamma(E)$ 是 $A(X)$ 上的有限型**投射模**（projective module），并且对应 $E \to \Gamma(E)$ 规定了 $X$ 上解析向量丛范畴与有限型射影 $A(X)$ 模的范畴之间的一个等价（[4]）.

解析向量丛的例子包括解析流形 $X$ 上的切丛（它的解析截面是 $X$ 上的解析向量场）以及子流形 $Y \subset X$ 的法丛.

解析空间 $X$ 上全体 $n$ 秩解析丛的分类问题、等价于 $X$ 上以 $\mathrm{GL}(n, k)$ 为结构群的**主解析纤维化**（principal analytic fibration）的分类问题，并且当 $n>1$ 时，只有若干个特殊情形得到完全解答. 对于复射影代数簇 $X$ 而言，分类问题等价于代数向量丛的分类（见**比较定理（代数几何学中的）**（comparison theorem (algebraic geometry)））.

复空间 $X$ 上的秩 1 解析向量丛（也称复线丛，或线丛（line bundles））在复解析几何学中起着重要作用. 空间 $X$ 上的每个**除子**（divisor）必定规定一个秩 1 解析丛，两个除子决定同构的丛的充分必要条件是它们线性等价. 一个射影代数簇上的所有解析线丛都由某个除子决定. 一个复空间 $X$ 到一个射影空间中的可嵌入性与 $X$ 上的丰富线丛（见**丰富向量丛**（ample vector bundle））的存在性密切相关. 设 $\Gamma$ 是复空间 $X$ 的自同构群的一个离散子群，则 $\Gamma$ 的每个商群决定 $X/\Gamma$ 上一个线丛，以各自的自同构形式为它们的解析截面. 秩 1 的解析向量丛构成群 $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$，此处 $\mathcal{O}_X^*$ 是由结构层的可逆元构成的层. 每个丛到自己的第一陈（省身）类的对应产生同态

$$\gamma: H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \to H^2(X, \mathbf{Z}),$$

它的核是拓扑平凡的线丛的集合. 如果 $X$ 是一个复流形，则 $\mathrm{Im}\,\gamma$ 能够描述为可用 $(1,1)$ 型闭微分形式表示的上同调类的集合. 此外如果 $X$ 是紧 Kähler 流形，则 $\mathrm{Ker}\,\gamma$ 同构于流形 $X$ 的 **Picard 簇**（Picard variety），因此是一个复环面（[2]）.

解析空间 $X$ 上的每个秩 $n$ 的解析向量丛，对应 $V$ 的解析截面的一个芽层，它是 $X$ 上一个秩 $n$、局部自由的解析层. 这个对应决定了 $X$ 上解析向量丛的范畴与 $X$ 上局部自由解析层的范畴之间一个等价关系. 将这一结构推广到任意凝聚解析层的企图，导致解析向量丛概念的如下推广（[3]）：一个满态射 $\pi: V \to X$ 称为 $X$ 上向量空间的解析族（analytic family of vector spaces）（或 $X$ 上的一个线性空间（linear space）），如果它的纤维具有 $k$ 上有限维向量空间的结构，并且加法、乘以标量的乘法，以及零截面的运算满足解析性的自然条件. 当 $k=\mathbf{C}$ 时（或 $k=\mathbf{R}$ 并且 $X$ 是凝聚的），向量空间的解析族 $\pi: V \to X$ 定义了 $X$ 上的一个**凝聚解析层**（coherent analytic sheaf）$F$：对于 $U \subset X$，群 $F(U)$ 是 $\pi^{-1}(U)$ 上在每个纤维上线性的解析函数的空间. 用同样的方式，可以定义向量空间解析族范畴与 $X$ 上凝聚解析层范畴间的对偶性.

**参考文献**


[1] Gunning, R. C. and Rossi, H., Analytic functions of several complex variables, Prentice-Hall, 1965.

[2] Chern, S. S., Complex manifolds without potential theory, Springer, 1979.

[3] Fischer, G., Linear Faserräume und kohärente Modulgarben über komplexen Räumen, *Arch. Math.* (Basel), **18** (1967), 609–617.

[4] Forster, O. and Ramspott, K. J., Über die Anzahl der Erzeugenden von projektiven Steinschen Moduln, *Arch. Math.* (*Basel*), **19** (1968), 417–422.


А. Л. Онищик 撰 段海豹 译 沈信耀 校

**向量演算**［vector calculus; векторное исчисление］

讨论向量运算性质这个数学分支的一个老式的名称（见**向量**（vector））. 向量演算包括向量代数和向量分析. **向量代数**（vector algebra）是研究线性运算（向量的加法及向量乘以数的乘法）以及各种向量积（标量积、伪标量积、向量积、混合积、二重与三重向量积）. **向量分析**（vector analysis）的主题是这样的向量，它们是一个或多个标量自变量的函数.

在 19 世纪，由于力学和物理学的需要产生了向量演算，当时向量运算开始直接地进行，无需预先变换为它们的坐标形式（[1]）、（[2]）、（[3]）. 数学和物理对象的关于坐标系的选择不变的性质的进一步研究，导致了向量演算的推广——**张量演算**（tensor calculus）.

**参考文献**


[1] Wessel, C., *Arch. for Math. og Naturvid*, **18** (1896).

[2] Hamilton, W. R., Elements of quaternions, Chelsea, reprint, 1969.

[3] Gibbs, J. W. and Wilson, E. B., Vector analysis, Yale Univ. Press, 1913.

[4] Кочин, Н. Е., Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, 9 изд., М., 1965.

[5] Дубнов, Я. С., Основы векторного исчисления, 4 изд., ч. 1–2, М.-Л., 1950–1952.


А. Б. Иванов 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Wills, A. P., Vector analysis with an introduction

to tensor analysis, Dover, reprint, 1958.
[A2] Spain, B., Tensor calculus, Oliver & Boyd, 1960.

蒋滋梅 译

**向量场 [vector field; векторное поле]**

此词通常理解为某空间 $X$ 之点的函数，其值为以某种方式定义在此空间中的向量(vector).

在经典的**向量演算**(vector calculus)中，以 Euclid 空间的一个子集为 $X$，而向量场则表示以此子集各点为起点的有向线段. 例如，切于某一光滑曲线(曲面)或其法向的单位长向量之集合，即为其上的向量场.

若 $X$ 是一抽象地确定的微分流形，向量场就理解为一个切向量场，即一个函数，它对 $X$ 的每一点，指定一个(不变地构造的)切于 $X$ 的向量. 若 $X$ 是有限维的，向量场可以等价地定义为依赖于 $X$ 之点的一族单价的反变张量.

在一般情况下，向量场可解释为定义在 $X$ 上的一函数，它取值于一个以某种方式连结于 $X$ 的**向量空间**(vector space) $P$；它与任意向量函数的区别即在于 $P$ 是对于 $X$"内在地"定义的，而不是 $X$ 的"外加的构造". 以 $X$ 为基的**向量丛**(vector bundle)的截面也可看作是一个向量场.　　　　M. И. Войцеховский 撰

【补注】 亦见**流形上的向量场**(vector field on a manifold).　　　　齐民友 译

**流形 $M$ 上的向量场 [vector field on a manifold; векторное поле на многообразии]**

**切丛**(tangent bundle) $\tau(M)$ 的截面. 可微向量场的集合构成 $M$ 上可微函数环 $F$ 上的模.

例1　对于流形 $M$ 上的坐标卡 $U$ 可以定义第 $i$ 个基本向量场 $\partial/\partial x^i$ 如下:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(p)=\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p,\ p\in U,$$

$\partial/\partial x^i|_p$ 是 $p$ 点处 $M$ 的第 $i$ 个基本切向量. 任意向量场 $X$ 可以唯一地表示为

$$X=\sum_i\xi^i(p)\frac{\partial}{\partial x^i}(p),$$

其中 $\xi^i(p)$ 是 $X$ 在 $U$ 中的分量. 因为向量场可以看作环 $F$ 的导子(见例2)，向量场的集合对于交换运算(Lie 括弧)成一 Lie 代数.

例2　对于坐标卡 $U$ 和 $f\in F$，函数 $Xf$ 由下式定义

$$(Xf)(p)=\sum_i\xi^i(p)D_if((x_U^{-1}))\Big|_{x_U(p)}=\sum_i\xi^i(p)\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p(f),$$

其中 $D_i$ 是对于 $x^i$ 的偏导数. 注意 $\xi^i(p)=(Xx^i)(p)$；$Xf$ 称为 $f$ 在方向 $X$ 上的导数.

例3　对于坐标卡 $U$ 和 $f\in F$，向量场

$$X=\sum_i\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}\quad 和\quad Y=\sum_i\eta^i\frac{\partial}{\partial x^i}$$

的交换子(Lie 括弧) $[X, Y]$ 定义为

$$([X,Y]f)(p)=(X(Yf))(p)-(Y(Xf))(p)=\sum_{i,k}\left[\xi^k\frac{\partial\eta^i}{\partial x^k}-\eta^k\frac{\partial\xi^i}{\partial x^k}\right]\left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p.$$

它适合以下的关系式

$$[X,Y]=-[Y,X],$$

$$[[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y]=0;$$

特别是

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right]=0.$$

每一个向量场 $X$ 都在 $M$ 上诱导出一个局部流——即在邻域 $U$ 中的一族微分同胚

$$\Phi:(-\varepsilon,+\varepsilon)\times U\to M,$$

使得对于 $p\in U$ 有 $\Phi(0,p)=p$ 以及

$$\Phi(t,p)=\Phi_p(t):(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$$

是向量场 $X$ 的过 $p$ 的积分曲线，即

$$\Phi^*\left[\frac{\partial}{\partial t}\right](t)=X(\Phi(t,p)),$$

其中 $\Phi^*(\partial/\partial t)(t)$ 是 $M$ 在 $\Phi_p(t)$ 处的切向量 $d\Phi_p(t)$. 反之，对任意局部流 $\Phi(t,p)=\Phi_t(p)$ 都相应有一向量场 $X$，而为映射 $\Phi_0(p)$ 的变分；这里

$$(Xf)(p)=\lim_{t\to 0}\frac{f(\Phi_t(p))-f(p)}{t}.$$

每个向量场都定义了 $\lambda$ 型张量场的 Lie 导子 $L_X$($\lambda$ 的无穷小变换)，其值在一向量空间中，而相应于局部流 $\Phi(t,p)$；其特例包括向量场在 $f\in F$ 上的作用:

$$L_Xf=Xf,$$

以及 Lie 括弧

$$L_XY=[X,Y]=\lim_{t\to 0}\frac{Y-\Phi_t^*Y\Phi_{-t}}{t}.$$

一个无奇点的向量场在 $M$ 上生成一个可积的一维微分方程组以及与之相联系的 **Pfaff 方程组**(Pfaffian system).

流形上的向量场概念的推广有沿映射 $\varphi: N\to M$ 的向量场(vector field along a mapping)，即丛由 $\varphi$ 诱

导的 $\tau_{\varphi}(N)$ 的截面，还有 $\lambda$ 型的张量场，即用函子 $\lambda$ 作出的与 $\tau(M)$ 相关的丛 $\lambda[\tau]$ 之截面.

参考文献


[1] Godbillon, C., Géometrie différentielle et mécanique analytique, Hermann, 1969.

[2] Gromoll, D., Klingenberg, W. und Meyer, W., Riemannsche Geometrie im Grossen, Springer, 1968.

[3] Lang, S., Introduction to differentiable manifolds, Interscience, 1967.

[4] Nomizu, K., Lie groups and differential geometry, Math. Soc. Japan, 1956.

[5] Постников, М. М., Введение в теорию Морса, М., 1971.

[6] Helgason, S., Differential geometry and symmetric spaces, Acad. Press, 1962.


А. Ф. Щекутьев 撰

【补注】


[A1] Klingenberg, W., Riemannian geometry, de Gruyter, 1982 (译自德文).


齐民友 译

**向量场 a 的源** [**vector field, source of a; источник векторного поля**]

**向量场** (vector field) **a** 的具有下述性质的点：通过任何包含该点的充分小的闭曲面 $\partial V$ 的场的流是与该曲面无关，而且是正的. 称流

$$Q=\iint_{\partial V}(\mathbf{n},\mathbf{a})ds$$

为源的势 (power of source)，其中 $\mathbf{n}$ 是 $\partial V$ 的单位外法线，$s$ 是 $\partial V$ 的面积元. 如果 $Q$ 是负的，则称这点是一个汇 (sink). 如果源在所考虑的区域 $V$ 上是连续地分布的，则称极限

$$\lim_{\partial V\to M}\frac{\iint_{\partial V}(\mathbf{a},\mathbf{n})ds}{V}$$

为源在点 $M$ 处的密度 (density) (强度 (intensity))，它等于 $\mathbf{a}$ 在点 $M$ 处的散度 (divergence).

А. Б. Иванов 撰

【补注】 流体动力流中的一个源和一个涡旋的组合产生了一个涡旋流 (swirl flow).

参考文献


[A1] Marsden, J. and Weinstein, A., Calculus, 3, Springer, 1988.

[A2] Triebel, H., Analysis and mathematical physics, Reidel, 1986, Sect. 16.


沈纯理 译

**向量函数** [**vector function; вектор-функция, векторная функция**]

取值于某向量空间 (vector space) $V$ 的自变量 $t$ 的函数 $\mathbf{r}(t)$.

取值于某有限维 ($m$ 维) 向量空间 $V$ 的向量函数，完全决定于它关于 $V$ 的某个基 $\mathbf{e}_1,\cdots,\mathbf{e}_m$ 的分量 $r_j(t)$, $1\leqslant j\leqslant m$:

$$\mathbf{r}(t)=\sum_{j=1}^{m}r_j(t)\mathbf{e}_j. \tag{1}$$

向量函数称为连续，可微，等等 (在一点或在一区域上)，如果所有的函数 $r_j(t)$ 分别连续，可微，等等. 下面的公式对于一元向量函数都是成立的:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t)=\lim_{h\to 0}\frac{\mathbf{r}(t+h)-\mathbf{r}(t)}{h}=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}r_j'(t)\mathbf{e}_j, \tag{2}$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\mathbf{r}(t)dt=\sum_{j=1}^{m}\left(\int_{t_0}^{t_1}r_j(t)dt\right)\mathbf{e}_j, \tag{3}$$

$$\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}(t_0)+\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k!}\mathbf{r}^{(k)}(t_0)(t-t_0)^k+$$

$$+\frac{1}{N!}\int_{t_0}^{t}(t-\tau)^N\mathbf{r}^{(N+1)}(\tau)d\tau$$

(Taylor 公式).

向量 $\mathbf{r}(t)$ (从 $V$ 中的零出发) 的集合称为向量函数的速端曲线 (hodograph). 一元向量函数的一阶导数 $\dot{\mathbf{r}}(t)$ 是 $V$ 中的一个向量，它在点 $\mathbf{r}(t)$ 处与速端曲线相切. 如果 $t$ 为时间，$\mathbf{r}(t)$ 表示某质点的运动，那么 $\dot{\mathbf{r}}(t)$ 是质点在时间 $t$ 的瞬时速度向量. 二阶导数 $\ddot{\mathbf{r}}(t)$ 是质点的加速度向量.

多元向量函数的偏导数和重积分由 (2) 与 (3) 的类似公式定义. 关于向量函数的向量分析概念见**向量分析** (vector analysis)，**梯度** (gradient)，**散度** (divergence)，**旋度** (curl).

在具有基的无限维赋范向量空间中，向量函数的表达式 (1) 是无穷级数，此时用坐标方式定义的数学分析运算，会遇到级数是否收敛，逐项求导与逐项积分的可能性等困难.

参考文献


[1] Кочин, Н. Е., Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, 9 изд., М., 1965 (中译本: Н. Е. 柯钦, 向量计算与张量计算初步, 高等教育出版社, 1956).

[2] Рашевский, П. К., Курс дифференциальной геометрии, 4 изд., М., 1956 (中译本: П. К. 拉舍夫斯基, 微分几何教程, 高等教育出版社, 1956).


Л. П. Купцов 撰

【补注】

参考文献


[A1] Courant, R. and John, F., Intoduction to calculus

and analysis, 1, Wiley-Interscience, 1965 (中译本: R. 柯朗, F. 约翰, 微积分和数学分析引论, 第一卷, 第一、二分册, 科学出版社, 1979 − 1982).
[A2] Marsden, J. E., and Tromba, A. J., Vector calculus, Freeman, 1981.
[A3] Dieudonné, J., Foundations of modern analysis, Acad. Press, 1960 (中译本: J. 迪厄多内, 现代分析基础, 第一、二卷, 科学出版社, 1982 − 1986).
[A4] Jeffrey, A., Mathematics for scientists and engineers, v. Nostrand Reinhold, 1989, p. 493 ff.

王斯雷 译

**向量函数代数** [**vector functions, algebra of; вектор-функций алгебра**]

定义在拓扑空间 $T$ 上, 在每点 $t\in T$ 处取值于某代数 $A(t)$ (通常依赖于 $t$) 中的函数 $x=\{x(t)\}$ 的一个任意集合 $A$, 且对通常的运算构成一个代数. 设所有的代数 $A(t)$ 是 Banach 代数, 则 $A$ 称为向量函数的 Banach 代数, 如果对任一 $x=\{x(t)\}\in A$, 函数 $t\to\|x(t)\|$ 在 $T$ 上连续. 向量函数代数中最重要的一般问题包括用代数 $A(t)$ 中理想来描述 $A$ 中理想和为函数 $x=\{x(t)\}$ 属于代数 $A$ 建立一个准则. 更经常考虑的情形是当 $A$ 是对范数

$$\|x\|=\sup_{t\in T}\|x(t)\|_{A(t)}$$

的一个 **Banach 代数** (Banach algebra), 而 $T$ 是一个局部紧或仿紧空间. 特别有兴趣的是与一个 $C^*$ 代数 ($C^*$-algebra) 的集合 $A(t)$ 联系的向量函数代数; 在这特别情形, **Stone-Weierstrass 定理** (Stone-Weierstrass theorem) 的非交换类似与关于 $C^*$ 代数 (特别是具有连续迹的 $C^*$ 代数) 以向量函数代数形式实现的某些定理已经知道. 同样地, 这些定理使得能够在某些情形下证明与对合代数的对称表示的算子交换的所有算子的交换性 (**Schur 引理** (Schur lemma) 的连续类似).

A. И. Штерн 撰

【补注】

**参考文献**

[A1] Naimark, M. A., Normed rings, Reidel, 1984 (译自俄文).

葛显良 译 吴绍平 校

**向量群** [**vector group; векторная группа**]

可嵌入到**全序群** (totally ordered group) 的完全直积中的**偏序群** (partially ordered group). 群 $G$ 是向量群, 当且仅当它的偏序是 $G$ 上的一些全序的交. 偏序群是向量群, 当且仅当它的正元素的半群 $P$ 满足以下条件: 对 $G$ 的任意元素 $a_1,\cdots,a_n$ 的有限集,

$$\bigcap PS(a_1^{\varepsilon_1}\cdots a_n^{\varepsilon_n},e)=P,$$

其中交集是取在符号 $\varepsilon_i=\pm1$ 的所有组合上, $S(x,\cdots,z)$ 表示 $G$ 的包含 $x,\cdots,z$ 的最小的不变子半群. **序群** (ordered group) $G$ 是向量群, 当且仅当对任意 $g,g_1,\cdots,g_n\in G$, 从 $gg_1^{-1}gg_1\cdots g_n^{-1}gg_n\in P$ 推出 $g\in P$.

**参考文献**

[1] Fuchs, L., Partially ordered algebraic systems, Pergamon, 1963.

А. И. Кокорин, В. М. Копытов 撰
石生明 译 王 杰 校

**向量格** [**vector lattice; векторная решетка**], *K* 线性系 (*K*-lineal)

具有定义格 (lattice) 的序关系的偏序实**向量空间** (vector space) (见**半序空间** (semi-ordered space)).

卢景波 译

**向量测度** [**vector measure; векторная мера**]

【补注】 一个有限加性**集函数** (set function) $F$, 定义在集合 $\Omega$ 的子集族形成的一个域 $\mathscr{S}$ 上, 取值于一个 **Banach 空间** (Banach space) $X$ (或更一般地说, 取值于一个拓扑向量空间). 一个向量测度称为强加性的 (strongly additive), 如果对任一互不相交集列 $E_n\in\mathscr{S}$, $\sum_{n=1}^{\infty}F(E_n)$ 在 $X$ 中收敛; 而称为可数加性的 (countably additive), 如果当 $\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ 属于 $\mathscr{S}$ 时有 $\sum_{n=1}^{\infty}F(E_n)=F(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)$. 若对任一 $x^*\in X^*$, $x^*F$ 是可数加性的, 则称 $F$ 是弱可数加性的 (weakly countable additive). 定义在 $\sigma$ 域上的一个弱可数加性向量测度是可数加性的 (Orlicz-Pettis 定理 (Orlicz-Pettis theorem)): $F$ 的变差 (variation) $|F|$ 是非负有限加性的广义实值集函数, 定义为

$$|F|(E)=\sup_{\pi}\sum_{A\in\pi}\|F(A)\|,\ E\in\mathscr{S},$$

这里的上确界是对把 $E$ 分解为 $\mathscr{S}$ 的不相交元的一切有限划分而取的. 如果 $|F|(\Omega)<\infty$, 那么称 $F$ 具有有界变差 (bounded variation). $|F|$ 是可数加性的, 当且仅当 $F$ 是可数加性的. $F$ 的半变差 (semi-variation) $\|F\|$ 定义为

$$\|F\|(E)=\sup\{|x^*F|(E):\|x^*\|\leqslant1\},\ E\in\mathscr{S}.$$

$\|F\|$ 是一个单调有限次加性集函数, 且若 $\|F\|(\Omega)<\infty$, 则称 $F$ 具有有界半变差 (bounded semi-variation). 因为等价地说, 这就意味着 $F$ 的值域是模有界的. 这样的测度也称为有界的 (bounded). 有界变差的向量测度是强加性的, 而强加性的向量测度是有界的. 一个有界向量测度是强加性的, 当且仅当其值域是相对弱紧的. 特别是, 一个可数加性向量测度具有相对弱紧的值域.

设 $(F_n)$ 是定义在一 $\sigma$ 域 $\Sigma$ 上和 $X$ 值的可数加性向量测度列，且每个 $F_n$ 是 $\mu$ 连续的，即 $\lim_{\mu(E)\to 0}F_n(E)=0$，其中 $\mu$ 是一个非负广义实值测度．现在，如果对每一个 $E\in\Sigma$，存在 $\lim_{n\to\infty}F_n(E)=F(E)$，那么该 $\mu$ 连续对 $n\in N$ 是一致的，即 $\lim_{\mu(E)\to 0}F_n(E)=0$ 对 $n$ 一致．因此 $F$ 是 $\mu$ 连续的．特别是，在 $\mu$ 是有限时就导致 $F$ 是可数加性的．这就是 Vitali-Hahn-Saks 定理（Vitali-Hahn-Saks theorem）．有关向量测度的另一个惊人的结果称为 Nikodym 有界性定理（Nikodym boundedness theorem）：设有定义在 $\sigma$ 域 $\Sigma$ 上的有界向量测度族 $M$，如果对任一 $E\in\Sigma$，有 $\sup_{F\in M}\|F(E)\|<\infty$，那么 $M$ 是一致有界的，即 $\sup_{F\in M,\,E\in\Sigma}\|F(E)\|<\infty$．此外，对著名的吉田 - Hewitt 以及 Lebesgue 的分解定理（decomposition theorems of Yosida-Hewitt and of Lebesgue）的强加性向量测度，也还有一些界说（见[A3]）．最后，如果 $\dim X<\infty$，那么 $\sigma$ 域上的非原子 $X$ 值测度有紧凸域．这就是 Ляпунов 定理（Lyapunov theorem），这在 $X$ 是无穷维时结论不真．

向量测度的理论在其他泛函分析的领域有着重要的应用．首先在算子理论里，其中关于算子在某个函数空间上的表示问题，可以说是研究向量测度最初的动力．此后很久，在 19 世纪 70 年代，研究向量测度的微分问题，使在 Banach 空间的几何里围绕所谓 Radon-Nikodym 性质（Radon-Nikodym property）获得一大批结果．下面，将对此后的发展，简要地介绍向量测度在控制论中所起的作用．

设 $\Omega$ 是一个紧 Hausdorff 空间，$C(\Omega)$ 表示 $\Omega$ 上以上确界为其范数的连续函数空间，$X$ 是任一 Banach 空间．若 $T: C(\Omega)\to X$ 是一个有界线性算子，则 $T$ 可表示为定义在 $\Omega$ 的 Borel 集族的 $\sigma$ 域上，取值于 $X^{**}$ 的一个弱 $^*$ 可数加性向量测度 $F$，这里 $X^{**}$ 是 $X$ 的重对偶（见**伴随空间**（adjoint space））．当 $T$ 是弱紧时，这一表示是特别符合条件的，因为此时 $F$ 的值在 $X$ 中，且是可数加性的（事实上，这些性质中任一个均等价于 $T$ 是弱紧的）．从而，有 $Tf=\int_\Omega f\,dF\,(f\in C(\Omega))$，这里的积分多少有着明显的意义．此表示公式的一个直接推论是，$T$ 把弱紧集变为模紧集（$C(\Omega)$ 具有 Dunford-Pettis 性质（Dunford-Pettis property））．其他的算子类 $T: C(\Omega)\to X$，如核算子、紧以及绝对求和算子，借助于它们的表示测度（见[A3]），容许有相同的良好特征．

现在，设 $T$ 是一个从 $L_1(\Omega,\Sigma,\mu)$ 到 Banach 空间 $X$ 的有界线性算子（$(\Omega,\Sigma,\mu)$ 是有**限测度空间**（measure space）），就存在一个明显的伴随于 $T$ 的向量测度 $F$: $F(E)=T(\chi_E)$, $E\in\Sigma$，而且 $F$ 是 $\mu$ 连续的和有界变差的．如果 $F$ 有一个 Radon-Nikodym 导数（Radon-Nikodym derivative），即如果存在 $\Omega$ 上的 $X$ 值 Bochner 可积函数 $f$，使得 $F(E)=\int_E f\,d\mu$，那么 $T$ 可表示为一个 **Bochner 积分**（Bochner integral）：$Tg=\int_\Omega gf\,d\mu\ (g\in L_1(\mu))$．然而众所周知，一般来说，这样一个导数 $f$ 是不存在的．如果对一个特殊的 $X$ 以及任意的测度空间 $(\Omega,\Sigma,\mu)$，每一个 $\mu$ 连续 $X$ 值的有界变差测度有 Radon-Nikodym 导数，那么 $X$ 称为具有 Radon-Nikodym 性质（Radon-Nikodym property）（RNP）．具有 RNP 的空间的例有：可分对偶空间（Dunford-Pettis 定理（Dunford-Pettic theorem））和自反空间，因此特别是 Hilbert 空间．空间 $C_0$（即零序列空间）以及 $L_1[0,1]$ 没有 RNP．对 $X$ 来说，已经证明 RNP 等价于 $X$ 值鞅（$X$-valued martingales）的各种收敛性．实际上，这种鞅方法已导致具有 RNP 的空间各种纯几何特征（详见[A1]）．如下例：$X$ 具有 RNP，当且仅当对任一有界闭凸子集 $B\subset X$ 以及任一 $\varepsilon>0$，存在 $X$ 中的一个闭超平面 $H$，使得由 $H$ 截 $B$ 确定的半空间以及这些截口之一其直径 $<\varepsilon$（$X$ 是可凹的（dentable））．Крейн-Милман性质（Krein-Milman property）指出，$X$ 的任一有界闭凸集是其诸端点的模闭包．如果一个 Banach 空间具备 RNP，那么它就具有 Krein-Milman 性质（J. Lindenstrauss）．关于对偶空间 $X^*$，这两种性质是等价的．

还可以提出问题：哪一些 $\mu$ 连续 $X$ 值测度是 **Pettis 积分**（Pettis integral）而非 Bochner 积分，这就导致所谓弱 Radon-Nikodym 性质（weak Radon-Nikodym property）（WRNP）（见[A6]）．

**参考文献**


[A1] Bourgin, R. D., Geometric aspects of convex sets with the Radon-Nikodym property, Lecture notes in math., 993, Springer, 1983.

[A2] Dinculeanu, N., Vector measures, Pergamon, 1967.

[A3] Diestel, J. and Uhl, J. J., Jr., Vector measures, Amer. Math. Soc., 1977.

[A4] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear operators, General theory, 1, Interscience, 1958.

[A5] Kluvanek, I. and Knowles, G., Vector measures and control systems, North-Holland, 1975.

[A6] Talagrand, M., Pettis integral and measure theory, *Mem. Amer. Math., Soc.*, 307 (1984).

[A7] Thomas, G. E. F., The Lebesgue-Nikodym theorem for vector valued Radon measures, *Mem. Amer. Math. Soc.*, 139 (1974).


D. van Dulst 撰　周民强 译

**向量积 [vector product; векторное произведение]**，$\mathbf{R}^3$ 中向量 $\mathbf{a}$ 乘以向量 $\mathbf{b}$ 的

向量 $\mathbf{c}$，记为 $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ 或 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$，满足下列条件：

(1) 向量 c 的长度等于向量 a 与 b 的长度之积乘以二者夹角 $\varphi$ 的正弦，即

$$|\mathbf{c}| = |[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \sin\varphi;$$

(2) 向量 c 与向量 a 和 b 正交；

(3) 向量三元组 a，b，c 的定向，与基向量(标准)三元组的定向相同．见**向量代数**(vector algebra)．

А. Б. Иванов 撰

【补注】 如果相对 $\mathbf{R}^3$ 中的规范正交基而言，向量 a，b 具有坐标 $(a_1, a_2, a_3)$ 和 $(b_1, b_2, b_3)$，则向量 $\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ 的坐标是 $(a_2b_3-a_3b_2, a_3b_1-a_1b_3, a_1b_2-a_2b_1)$．

杜小杨 译

**向量环**[vector ring; **векторное кольцо**]

一个偏序环 $R$(见**偏序集**(partially ordered set))，它是若干个全序环 $R_\lambda$(见**全序集**(totally ordered set))的次直和．向量环的每一个元素是其坐标在诸 $R_\lambda$ 中的向量

$$\mathbf{a} = \{\cdots, a_\lambda, \cdots\},$$

并且 $\mathbf{a}\geqslant 0$，当且仅当每一个 $a_\lambda \geqslant 0$．如果偏序环 $R$ 的偏序是若干个全序的交，那么 $R$ 是一个向量环，并且若对 $R$ 的偏序作各种各样的线性序扩张，它们就可取作诸 $R_\lambda$．

**参考文献**

[1] Fuchs, L., Partially ordered algebraic systems, Pergamon, 1963.

О. А. Иванова 撰 卢景波 译

**向量空间**[vector space; **векторное пространство**]，线性空间(linear space)，域 $K$ 上的

一个 **Abel 群**(Abelian group) $E$，运算记作加法，其中定义了元素与标量的乘法运算，即映射

$$K\times E \to E: (\lambda, x) \to \lambda x,$$

它满足下列公理($x, y\in E$; $\lambda, \mu, 1\in K$)：

1) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$;

2) $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$;

3) $(\lambda\mu)x=\lambda(\mu x)$;

4) $1\cdot x = x$.

公理 1)－4) 蕴涵下列重要的向量空间的性质(properties of a vector space) $(0\in E)$：

5) $\lambda\cdot 0=0$;

6) $0\cdot x=0$;

7) $(-1)x=-x$.

向量空间的元素称为它的点(points)或向量(vectors)；$K$ 的元素称为标量(scalars)．

在数学及其应用中最常用到的向量空间是复数域 $\mathbf{C}$ 上的向量空间和实数域 $\mathbf{R}$ 上的向量空间；它们分别称为复向量空间(complex vector space)和实向量空间(real vector space)．

向量空间的公理表示了在分析学中经常遇到的多种对象的代数性质．最基本的和最早的向量空间的例子是 $n$ 维 Euclid 空间．几乎同等重要的是许多函数空间：连续函数空间，可测函数空间，可和函数空间，解析函数空间和有界变差函数空间．

向量空间的概念是环上的模概念的一个特殊情形——向量空间是域上的一个幺模(unitary module)．一个非交换除环上的幺模亦称为除环上的向量空间(vector space over a skew field)；此类向量空间的理论要比域上向量空间的理论难得多．

与向量空间有关的一个重要的工作是向量空间的几何结构的研究，即向量空间中的线、平坦集和凸集、向量子空间和基的研究．

向量空间 $E$ 的一个向量子空间(vector subspace)，或简称子空间(subspace)，是一个子集 $F\subset E$，它关于加法运算及与标量的乘法运算是封闭的．一个子空间，在不考虑包容它的空间的情况下，是基础域上的一个向量空间．

经过向量空间 $E$ 的两个点 $x$ 和 $y$ 的直线(straight line)是 $E$ 中形如 $z=\lambda x+(1-\lambda)y$ 的点 $z$ 的集合，$\lambda\in K$．一个集合 $G\subset E$ 称为平坦集(flat set)，如果对于 $G$ 中任意两个点来说，除这两点外，$G$ 还包含了经过这两个点的直线．任何一个平坦集是由某一子空间经平行位移：$G=x+F$ 而得到的；意指每一个点 $z\in G$ 可以唯一表为 $z=x+y$, $y\in F$，该等式确定了 $F$ 与 $G$ 间的一一对应．

一个给定子空间 $F$ 的所有位移 $F_x=x+F$ 的总体构成 $K$ 上的向量空间，称为商空间(quotient space) $E/F$，其运算定义如下：

$$F_x+F_y=F_{x+y};\ \lambda F_x=F_{\lambda x},\ \lambda\in K.$$

令 $M=\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 $E$ 的向量的任意集合．向量 $x_\alpha\in E$ 的线性组合(linear combination)是一个向量 $x$，由表示式

$$x=\sum_\alpha \lambda_\alpha x_\alpha,\ \lambda_\alpha\in K$$

来确定，其中只有有限个系数不为零．集合 $M$ 的向量的所有线性组合的集合是包含 $M$ 的最小子空间，称为集合 $M$ 的线性包络(linear envelope of the set)．一个线性组合称为平凡的(trivial)，如果所有系数 $\lambda_\alpha$ 都是零．集合 $M$ 称为一个线性无关集(linearly independent set)，如果 $M$ 中向量的所有非平凡线性组合都是非零的．

任何一个线性无关集包含于某个极大线性无关集 $M_0$ 中，即包含于这样一个集合，再添加 $E$ 的任何一个向量到它里面后，它就不再是一个线性无关集．

每一个向量 $x \in E$ 可以唯一地表示为一个极大线性无关集的元素的线性组合：

$$x = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} x_{\alpha}, \ x_{\alpha} \in M_0 .$$

据此理由，一个极大线性无关集称为向量空间的一个基（basis）（代数基（algebraic basis））．一个给定的向量空间的所有基具有相同的基数，它称为这个向量空间的维数（dimension of the vector space）．如果这个基数是有限的，则该向量空间称为有限维的（finite-deminsional）；否则称为无限维向量空间（infinite-demensional vector space）．

域 $K$ 可以看作它自身上的一维向量空间；这个空间的基是单个元素，它可以是任意一个非零元．具有含 $n$ 个元素的基的有限维向量空间称为 $n$ 维空间（$n$-dimensional space）．

凸集理论在实的和复的向量空间理论中起着重要的作用（亦见**凸集**（convex set））．实向量空间中的一个集合 $M$ 称为一个凸集（convex set），如果对此集合中任意两个点 $x$，$y$ 来说，线段 $t(x)+(1-t)y$ ($t \in [0, 1]$) 也属于 $M$．

向量空间上线性泛函的理论及其相关的对偶理论是向量空间理论的重要部分．令 $E$ 是域 $K$ 上的向量空间．一个加性齐次映射 $f: E \to K$，即

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \ f(\lambda x) = \lambda f(x),$$

称为 $E$ 上的一个线性泛函（linear functional）．$E$ 上所有线性泛函的集合 $E^*$ 关于下列运算构成 $K$ 上的一个向量空间：

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x),$$

$$x \in E, \ \lambda \in K, \ f_1, f_2, f \in E^* .$$

这个向量空间称为 $E$ 的共轭空间（conjugate space）或对偶空间（dual space）．一些几何学的概念与共轭空间概念有关．令 $D \subset E$（相应地，$\Gamma \subset E^*$）；集合

$$D^{\perp} = \{ f \in E^* : f(x) = 0, \text{ 对所有 } x \in D \},$$

或 $\Gamma_{\perp} = \{ x \in E : f(x) = 0, \text{ 对所有 } f \in \Gamma \}$，称为 $D$ 的（相应地，$\Gamma$ 的）零化子（annihilator）或正交补（orthogonal complement）；这里 $D^{\perp}$ 和 $\Gamma_{\perp}$ 分别是 $E^*$ 和 $E$ 的子空间．如果 $f$ 是 $E^*$ 的一个非零元，则 $\{f\}_{\perp}$ 是 $E$ 的一个极大的真线性子空间，有时称为超子空间（hypersubspace）；该子空间的一个位移称为 $E$ 的一个超平面（hyperplane）；由此，任何超平面都具有形式

$$\{ x : f(x) = \lambda \}, \ f \neq 0, \ f \in E^*, \ \lambda \in K .$$

如果 $F$ 是向量空间 $E$ 的一个子空间，则存在 $F^*$ 与 $E^*/F^{\perp}$ 之间的自然同构和 $(E/F)^*$ 与 $F^{\perp}$ 之间的自然同构．

一个子集 $\Gamma \subset E^*$ 称为 $E$ 上的一个全子集（total subset），如果它的零化子只含有零元素，$\Gamma_{\perp} = \{0\}$．

每一个线性无关集 $\{x_{\alpha}\}_{\alpha \in A} \subset E$ 可以对应于一个共轭集（conjugate set）$\{f_{\alpha}\}_{\alpha \in A} \subset E^*$，即对应于一个集合，使得对所有的 $\alpha$，$\beta \in A$，有 $f_{\alpha}(x_{\beta}) = \delta_{\alpha\beta}$（**Kronecker** 符号（Kronecker symbol））．偶 $\{x_{\alpha}, f_{\alpha}\}$ 的集合称为一个双正交系（biorthogonal system）．若集合 $\{x_{\alpha}\}$ 是 $E$ 的一个基，则 $\{f_{\alpha}\}$ 是 $E$ 上的全子集．

向量空间理论中重要的一章是这些空间的线性变换（linear transformations）的理论．令 $E_1$，$E_2$ 是同一个域 $K$ 上的两个向量空间，那么 $E_1$ 到 $E_2$ 内的一个加性齐次映射 $T$，即

$$T(x+y) = T(x) + T(y); \ T(\lambda x) = \lambda T(x);$$

$$x, \ y \in E_1,$$

称为一个把 $E_1$ 映射到 $E_2$ 内（或由 $E_1$ 到 $E_2$ 内）的线性映射（linear mapping）或线性算子（linear operator）．这个概念的一个特例是一个线性泛函（linear functional），或一个由 $E$ 到 $K$ 的线性算子．由 $E$ 到商空间 $E/F$ 的自然映射是线性映射的一个例子，它建立了每个元素 $x \in E$ 和平坦集 $F_x \in E/F$ 之间的一个对应．全体线性算子 $T: E_1 \to E_2$ 的集合 $\mathscr{L}(E_1, E_2)$ 关于下列运算构成一个向量空间

$$(T_1 + T_2)x = T_1 x + T_2 x; \ (\lambda T)x = \lambda T x;$$

$$x \in E_1; \ \lambda \in K; \ T_1, \ T_2, \ T \in \mathscr{L}(E_1, E_2).$$

两个向量空间 $E_1$ 和 $E_2$ 称为同构的（isomorphic），如果存在一个线性算子（一个"同构"），它确定了两个空间的元素之间的一个一一对应．$E_1$ 和 $E_2$ 是同构的，当且仅当它们的基具有相等的基数．

令 $T$ 是一个由 $E_1$ 到 $E_2$ 内的线性算子．$T$ 的共轭线性算子（conjugate linear operator）或对偶线性算子（dual linear operator）是由 $E_2^*$ 到 $E_1^*$ 内的线性算子 $T^*$，由等式

$$(T^* \varphi)(x) = \varphi(Tx), \text{对所有 } x \in E_1, \ \varphi \in E_2^*$$

所定义．关系式 $T^{*-1}(0) = [T(E_1)]^{\perp}$，$T^*(E_2^*) = [T^{-1}(0)]^{\perp}$ 成立，由此可推出 $T^*$ 是一个同构，当且

仅当 $T$ 是一个同构.

向量空间的双线性映射和多重线性映射的理论与向量空间的线性映射的理论是密切相关的（见**双线性映射**（bilinear mapping）；**多重线性映射**（multilinear mapping））.

线性映射扩张的问题是向量空间理论中一组重要的题目. 令 $F$ 是向量空间 $E_1$ 的一个子空间，$E_2$ 是与 $E_1$ 在同一个域上的一个线性空间，$T_0$ 是由 $F$ 到 $E_2$ 内的一个线性映射；这时需要求出 $T_0$ 的一个扩张 $T$，它是定义在整个 $E_1$ 上的由 $E_1$ 到 $E_2$ 内的一个线性映射. 这样的扩张总是存在的，但是由于对函数施加额外的限制条件，这个问题可能成为不可解决的（这关系到向量空间附加的结构，例如关系到拓扑结构或一个序关系）. 扩张问题的解法的例子是 **Hahn-Banach 定理**（Hahn-Banach theorem），以及在带有锥的空间中正泛函的扩张定理.

向量空间理论的一个重要分支是向量空间上的运算理论，即由给定的向量空间构造新向量空间的方法. 取一个子空间且利用它构造商空间的众所周知的方法是这种运算的例子. 其他重要的运算包括构造向量空间的直和、直积及张量积.

设 $\{E_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是域 $K$ 上的一族向量空间. 集合 $E$ 是 $E_\alpha$ 的积，通过引进下列运算它可以构成 $K$ 上的向量空间:

$$(x_\alpha)+(y_\alpha)=(x_\alpha+y_\alpha);\ \lambda(x_\alpha)=(\lambda x_\alpha);$$

$$\lambda\in K;\ x_\alpha,\ y_\alpha\in E_\alpha,\ \alpha\in I.$$

所得的向量空间 $E$ 称为向量空间 $E_\alpha$ 的直积（direct product），记作 $\prod_{\alpha\in I}E_\alpha$. 向量空间 $E$ 的这个子空间，它包括所有满足条件：$\{\alpha:\ x_\alpha\neq 0\}$ 为有限集的序列 $(x_\alpha)$，称为向量空间 $E_\alpha$ 的直和（direct sum），记作 $\sum_\alpha E_\alpha$ 或 $\oplus_\alpha E_\alpha$. 当项数有限时，这两个概念是一致的. 此时采用记号:

$$E_1+\cdots+E_n,\ E_1\oplus\cdots\oplus E_n$$

或

$$E_1\times\cdots\times E_n.$$

设 $E_1$ 和 $E_2$ 是同一个域 $K$ 上的向量空间；$E_1^{'}$，$E_2^{'}$ 各是向量空间 $E_1^{*}$，$E_2^{*}$ 的全子空间，$E_1\square E_2$ 是以空间 $E_1\times E_2$ 的全体元素的集合作为基的向量空间. 每个元素 $x\square y\in E_1\square E_2$ 可以对应于 $E_1^{'}\times E_2^{'}$ 上的一个双线性函数 $b=T(x,y)$，这里利用公式 $b(f,g)=f(x)g(y)$，$f\in E_1^{'}$，$g\in E_2^{'}$. 这个在一切基向量 $x\square y\in E_1\square E_2$ 上的映射可以扩张为由向量空间 $E_1\bigcirc E_2$ 到 $E_1^{'}\times E_2^{'}$ 上的所有双线性泛函的向量空间内的一个线性映射 $T$. 令 $E_0=T^{-1}(0)$. $E_1$ 和 $E_2$ 的张量积（tensor product）是商空间 $E_1\otimes E_2=(E_1\square E_2)/E_0$；元素 $x\square y$ 的象记作 $x\otimes y$. 向量空间 $E_1\otimes E_2$ 同构于 $E_1^{'}\times E_2^{'}$ 上的双线性泛函的向量空间（见**向量空间的张量积**（tensor product））.

向量空间理论中最有兴趣的部分是有限维向量空间理论. 然而，无限维向量空间的概念也已经显得富有成果，并且得到了有意义的应用，尤其是在拓扑向量空间（topological vector spaces）即带有以某种方法适合其代数结构的拓扑结构的向量空间的理论中.

**参考文献**


[1] Bourbaki, N., Elements of mathematics, Algebra: Algebraic structures, Linear algebra, 1, Addison-Wesley, 1974. Chapt. 1; 2（译自法文）.

[2] Райков, Д. А., Векторные пространства, М., 1962（英译本: Raikov, D. A., Vector spaces, Noordhoff, 1965）.

[3] Day, M. M., Normed linear spaces, Springer, 1958.

[4] Edwards, R. E., Functional analysis: theory and applications, Holt, Rinehardt, Winston, 1965.

[5] Halmos, P. R., Finite-dimensional vector spaces, v. Nostrand, 1958.

[6] Глазман, И. М., Любич, Ю. И., Конечномерный линейный анализ в задачах, М., 1969（英译本: Glazman, I. M. and Lyubich, Y. I., Finite-dimensional linear analysis: a systematic presentation in problem form, M. I. T., 1974）.


М. И. Кадец 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Strang, G., Linear algebra and its applications, Harcourt, Brace, Jovanovich, 1988.

[A2] Noble, B. and Daniel, J. W., Applied linear algebra, Prentice Hall, 1977.

[A3] Noll, W., Finite dimensional spaces, M. Nijhoff, 1987.


蒋滋梅 译

**向量管**[**vector tube; векторная трубка**]

空间 $\Omega$ 中的一个闭的点集 $\Phi$，在 $\Omega$ 中已指定了一个**向量场**（vector field）$\mathbf{a}(M)$，使得在边界曲面 $S$ 上法向量 $\mathbf{n}$ 与 $\mathbf{a}$ 处处正交. 向量管 $\Phi$ 是由场 $\mathbf{a}$ 的向量线（vector lines）$\Gamma$ 所构成，这里向量线是指 $\Omega$ 中的曲线，使得在其每点上的切向与 $\mathbf{a}$ 的方向重合. 如果 $\Gamma$ 上一点包含在 $\Phi$ 中，则整条线 $\Gamma$ 完全包含在 $\Phi$ 中. 如果 $\mathbf{a}$ 是一个定常液体流的速度场，则 $\Gamma$ 是液体质点的轨线，而 $\Phi$ 是在 $\Omega$ 中由一定量的液体粒子的运动所扫过的部分.

向量管 $\Phi$ 在横截面 $S'$ 中的强度（intensity）$I$ 是 $\mathbf{a}$ 通过 $S'$ 的流量（见**向量分析**（vector analysis））:

$$I(S')=\iint_{S'}(\mathbf{a},\mathbf{n})d\sigma,$$

其中 n 是 $S'$ 的单位法向量. 如果场 a 是螺线的 ($\operatorname{div}\mathbf{a}=0$), 则向量管强度的守恒律成立:

$$I(S')=I(S'').$$

设 $a_1(x,y,z)$, $a_2(x,y,z)$, $a_3(x,y,z)$ 是向量 $\mathbf{a}=\mathbf{a}(M)$ 的 Descartes 直角坐标, $x$, $y$, $z$ 是点 $M$ 的坐标, 那么 $\Phi$ 的边界可局部地由方程

$$F(x,y,z)=\text{常数}$$

来定义, 其中 $F(x,y,z)$ 满足偏微分方程

$$(\mathbf{a},\nabla F)=a_1(x,y,z)\frac{\partial F}{\partial x}+$$

$$+a_2(x,y,z)\frac{\partial F}{\partial y}+a_3(x,y,z)\frac{\partial F}{\partial z}=0.$$

Ю. П. Пытьев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Wills, A. P., Vector analysis with an introduction to tensor analysis, Dover, reprint, 1958, Sec. 45.

沈纯理 译

**Векуа 法 [Vekua method; Векуа метод]**, 无穷小形变理论中的

当某些能刻画具有正 Gauss 曲率 $K$ 的曲面形变的量在共轭等温参数化下是**广义解析函数** (generalized analytic function) 时所用的一种方法. 这种方法可将研究 $K>0$ 的曲面的形变问题化为研究 $K=$ 常数 $>0$ 的曲面的问题, 其**无穷小形变** (infinitesimal deformation) 可由通常的解析函数来描述. 因此, 在 Gauss 曲率为正变量和正常量的曲面的形变性质之间建立了一种广泛的类比.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】

参考文献

[1] Vekua, I. N., Generalized analytic functions, Pergamon, 1962 (译自俄文).

沈纯理 译

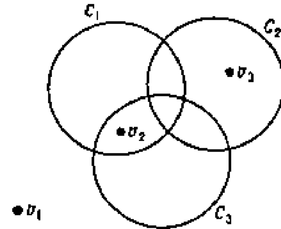
**Venn 图 [Venn diagram; Венна диаграмма]**

数理逻辑公式, 主要是**命题演算** (propositional calculus) 公式的一种图形表示. 在经典命题逻辑中, $n$ 个变元 $a_1,\cdots,a_n$ 的 Venn 图是把平面划分为 $2^n$ 个区域的闭轮廓线 $C_1,\cdots,C_n$ (同胚于圆周) 的一个选择, 它们所划分的某些区域 (记作 $v_1,\cdots,v_k$, $0\leqslant k\leqslant 2^n$) 被标记. 每个标记的区域 $v_i$, $0<i\leqslant k$, 对应于公式 $B_i=b_1\&\cdots\&b_n$, 这里如果 $v_i$ 在闭轮廓线 $C_j$ 的内部, 则 $b_j (0<j\leqslant n)$ 是 $a_j$, 否则 $b_j$ 是 $\neg a_j$. 做为一个整体来看, 对应于图的公式是 $B_1\vee\cdots\vee B_k$. 于是, 下图中的 Venn 图对应的公式就是

$$(\neg a_1\&\neg a_2\&\neg a_3)\vee(a_1\&\neg a_2\&a_3)\vee$$

$$\vee(\neg a_1\&a_2\&\neg a_3).$$

如果没有一个区域被标注 ($k=0$), 则这个图对应于恒假公式, 例如 $a_1\&\neg a_1$. 在命题逻辑中, Venn 图被用来解决判定问题, 即在给定的逻辑前题下可以推出的彼此不等价的所有逻辑推论的问题. 可以把命题逻辑构造为对应于逻辑运算的 Venn 图上的运算.




用图来作注解的方法是 Venn 在解决类的逻辑问题 ([1]) 时提出的. 这种方法还被用于经典的多元谓词演算. Venn 图还被用于数理逻辑和自动机理论, 特别是用来解决神经网络问题.

参考文献

[1] Venn, J. Symbolic logic, London, 1894.

[2] Кузичев, А. С., Диаграммы Венна, М., 1968.

А. С. Кузичев 撰

【补注】 Venn 图的思想可以追溯到 L. Euler, 因此有时也把它称为 Euler 图 (Euler diagram).

参考文献

[A1] Suppes, P., Introduction to logic, v. Nostrand, 1957, § 9.8.

[A2] Birkhoff, G. and Maclane, S., A survey of modern algebra, Macmillan, 1953, 336 ff.

[A3] Rosser, B., Logic for mathematicians, Mcgraw-Hill, 1953, 227 – 228; 237ff.

何 青 译 罗里波 校

**字合同 [verbal congruence; вербальная конгруэнция]**

一个代数 A 上的合同, 它可以表示成 A 上一切这样的合同的交, 这些合同的商代数属于某一固定的 Ω 代数簇. 一个任意代数系统 $\mathbf{A}=\langle A,\Omega\rangle$ 上的合同 $\theta$ 称为字合同 (verbal congruence), 如果存在一个 Ω 系统簇 $\mathfrak{M}$, 使得典范映射 $\mathbf{A}\to\mathbf{A}/\theta$ 在 A 到 $\mathfrak{M}$ 内代数的态射中具有泛性. 一个字合同是一个**全特征合同** (fully-characteristic congruence). 如果 F 是某一簇 $\mathfrak{B}$ 内一个自由 Ω 系统, 则换言之, F 内任意全特征合同 $\eta$ 对于由商系统 $\mathbf{F}/\eta$ 所生成的簇 $\mathfrak{M}$ 而言是字合同.

参考文献

[1] Мальцев, А. И., Алгебраические системы, М., 1970 (英译本: Mal'tsev, A. I., Algebraic systems, Springer, 1973).

Д. М. Смирнов 撰

【补注】 亦见**泛性质** (universal property); **合同** (代

数学中的）(congruence (in algebra)). 郝钢新 译

**字积**[**verbal product**; **вербальное произведение**], 群 $G_i$ 的，$i\in I$

商群 $F/(V(F)\cap C)$，这里 $F$ 是群 $G_i(i\in I)$ 的自由积（见**群的自由积**（free product of groups）），$V$ 是字的某集合，$V(F)$ 是 $F$ 的字 $V$ 子群（见**字子群**（verbal subgroup）），而 $C$ 是 Descartes 子群（Cartesian subgroup）（即 $F$ 到这些群的直积上的自然满同态的核）．作为群类上的运算，字积是结合的，在对应的群簇上还是自由的． О. Н. Головин 撰

【补注】


**参考文献**

[A1] Magnus, W., Karrass, A. and Solitar, D., Combinatorial group theory, Interscience, 1966, p. 412.


石生明 译 王 杰 校

**字子群**[**verbal subgroup**; **вербальная подгруппа**]

群 $G$ 的由某个字集 $V=\{f_v(x_1,\cdots,x_n): v\in I\}$ 的所有字（word）的全部可能的值所生成的子群 $V(G)$，这时 $x_1,x_2,\cdots$，互相独立地遍及 $G$．字子群是正规子群；群上由字子群定义的同余是**字同余**（verbal congruence）（亦见**代数系统簇**（algebraic systems, variety of））．

字子群的例子：1）群 $G$ 的由字 $[x,y]=x^{-1}y^{-1}\cdot xy$ 所确定的换位子群 $G'$；2）第 $n$ 个换位子群 $G^{(n)}=(G^{(n-1)})'$；3）下中心列

$$\Gamma_1(G)=G\supseteq\Gamma_2(G)\supseteq\cdots\supseteq\Gamma_n(G)\supseteq\cdots$$

的项，其中 $\Gamma_n(G)$ 是由换位子

$$[x_1,\cdots,x_n]=[[x_1,\cdots,x_{n-1}],x_n]$$

所定义的字子群；4）群 $G$ 的由字 $x^n$ 定义的幂子群 $G^n$．

等式 $V(G)\varphi=V(G\varphi)$ 对任何同态 $\varphi$ 都成立．特别地每个字子群皆是 $G$ 的**全特征子群**（fully-characteristic subgroup）．对自由群，其逆也真，一般地则不然：两个字子群的交可以不是字子群．

可数秩的自由群 $X$ 的字子群是特别重要的．它们构成其所有子群的格的（模）子格．字子群是“单调”的：若 $R\lhd X$，$s\lhd X$（这里 $R\lhd X$ 表示 $R$ 是 $X$ 的正规子群）且 $R\subset S$ 则 $V(R)\subset V(S)$．


**参考文献**

[1] Курош, А. Г., Теория групп, 3 изд, М., 1967（中译本：А. Г. 库洛什，群论，高等教育出版社，上册，1987；下册，1982）．

[2] Neumann, H., Varietes of groups, Springer, 1967.


О. Н. Головин 撰 石生明 译 王 杰 校

**验证**[**verification**; **верификация**]

确立一个**命题**（proposition）的真实性的过程．较狭义地说，是指确立某种逻辑数学语言中特殊形式的公式的真实性的过程．

А. Г. Драгалин 撰 杜小杨 译

**Veronese 映射**[**Veronese mapping**; **Веронезе отображение**]

以 G. Veronese 命名的**射影空间**（projective space）的一种特殊正则映射．设 $n$，$m$ 是正整数，$v_{nm}=\binom{n+m}{n}-1$，$\mathbf{P}^n$，$\mathbf{P}^{v_{nm}}$ 是任意域（或整数环）上的射影空间，且被看成概形．设 $u_0,\cdots,u_n$ 是 $\mathbf{P}^n$ 内射影坐标，$v_{i_0\cdots i_n}(i_0+\cdots+i_n=m)$ 是 $\mathbf{P}^{v_{nm}}$ 内射影坐标．Veronese 映射（Veronese mapping）是由公式 $v_{i_0\cdots i_n}=u_0^{i_0}\cdots u_n^{i_n}(i_0+\cdots+i_n=m)$ 给出的态射

$$v_m: \mathbf{P}^n\to\mathbf{P}^{v_{nm}}.$$

也可用不变术语把 Veronese 映射定义为用完全线性系 $|mH|$ 给出的正则映射，这里 $H$ 是 $\mathbf{P}^n$ 里的超平面截面．Veronese 映射是闭嵌入，它的象 $v_m(\mathbf{P}^n)$ 称为 Veronese 簇（Veronese variety），它的定义方程为

$$v_{i_0\cdots i_n}v_{j_0\cdots j_n}=v_{k_0\cdots k_n}v_{r_0\cdots r_n},$$

这里 $i_0+j_0=k_0+r_0,\cdots,i_n+j_n=k_n+r_n$．例如 $v_2(\mathbf{P}^1)$ 是 $\mathbf{P}^2$ 中由方程 $x_0x_1=x_2^2$ 表示的曲线．Veronese 簇的次数是 $m^n$．对于 $\mathbf{P}^n$ 内任意超曲面

$$F=\sum_{i_0+\cdots+i_n=m}a_{i_0\cdots i_n}u_0^{i_0}\cdots u_n^{i_n}=0$$

它在 Veronese 映射 $v_m$ 下的象是 Veronese 簇 $v_m(\mathbf{P}^n)$ 与超平面

$$\sum_{i_0+\cdots+i_n=m}a_{i_0\cdots i_n}v_{i_0\cdots i_n}=0$$

的交集．由于这个事实，Veronese 映射可以用来把某些有关超曲面的问题约化到超平面截面的情形．


**参考文献**

[1] Шафаревич, И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972（英译本：Shafarevich, I. R., Basic algebraic geometry, Springer, 1977）．


И. В. Долгачев 撰

【补注】 $\mathbf{P}^2$ 在 Veronese 嵌入（$n=2$，$m=2$）下于 $\mathbf{P}^5$ 内的象称为 Veronese 曲面（Veronese surface）．


**参考文献**

[A1] Griffiths, Ph. and Harris, J., Principles of algebraic geometry, Wiley-Interscience, 1978, p. 178, 674, 179, 349, 525, 532, 535, 632, 743.

[A2] Hartshorne, R., Algebraic geometry, Springer, 1977,

p 13, 170, 316, 381. 陈志杰 译

## 直角旋转仿射量 [versor; версор]

使向量旋转一个直角的**仿射量** (affinor).

## 指标转移张量 [vertor; вертор]

实现张量的指标转移的**向量空间上的张量** (tensor on a vector space).

## Viète 定理 [Viète theorem; Виета теорема], 关于根的

确定**多项式** (polynomial) 的根与系数之间的关系的一个定理. 设 $f(x)$ 是一个 $n$ 次多项式, 其系数取自某一个域, 首项系数为 1. 多项式 $f(x)$ 在包含 $f(x)$ 的所有根的域 (例如 $f(x)$ 的分裂域, 见**多项式的分裂域** (splitting field of a polynomial)) 上分裂为线性因子:

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 =$$

$$= (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n),$$

其中 $\alpha_i$ 是 $f(x)$ 的根, $i=1, \cdots, n$. Viète 定理断言: 下列关系式 (Viète 公式 (Viète formulas)) 成立:

$$a_0 = (-1)^n \alpha_1 \cdots \alpha_n,$$

$$a_1 = (-1)^{n-1}(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1} + \alpha_1\cdots\alpha_{n-2}\alpha_n + \cdots + \alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n),$$

$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$

$$a_{n-2} = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-1}\alpha_n,$$

$$a_{n-1} = -(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n).$$

F. Viète ([1]) 对于一切 $n$ (但是只对正根) 证明了这些关系; 在一般形式下, Viète 定理是由 A. Girard ([2]) 证明的.

**参考文献**


[1] Viète, F., Opera mathematica, Leiden, 1646.

[2] Girard, A., Invention nouvelle en l'algèbre, Bierens de Haan, Leiden, 1884, Reprint.


В. Н. Ремесленников 撰

【补注】 首项系数为 1 的多项式称为首一多项式 (monic polynomial). Viète 定理中的 $a_i$ 的表达式 (除了正负号), 现在称为 ($n$ 元初等) 对称多项式 (见**对称多项式** (symmetric polynomial)).

Viète 有时拼写为 Vièta: Vièta 定理 (Vièta theorem).

**参考文献**


[A1] Waerden, B. L., van der, Algebra, 1, Springer, 1967 (中译本: B. L. 范德瓦尔登, 代数学 1, 科学出版社, 1978).


杜小杨 张鸿林 译

## Vietoris 同调 [Vietoris homology; Вьеториса гомологии]

最早针对非多面体的情形定义的**同调论** (homology theory) 之一. L. E. J. Brouwer 于 1911 年首先考虑了平面的情形, 其后由 L. Vietoris 于 1927 年推广到 Euclid (甚至度量) 空间的任意子集.

设 $A$ 为度量空间 $X$ 的子集. $A$ 的一个 $n$ 维 (有序) $\varepsilon$ 单形 ($\varepsilon$-simplex) $t^n$ 定义为 $A$ 中满足 $\operatorname{diam}\{e_0, \cdots, e_n\} < \varepsilon$ 的一个有序子集 $(e_0, \cdots, e_n)$. 给定系数群 $G$, $A$ 的 $\varepsilon$ 链 ($\varepsilon$-chaim) 是指以 $g_i \in G$ 为系数的 $\varepsilon$ 单形 $t_i^n$ 的形式化的有限线性组合 $\sum g_i t_i^n$. $\varepsilon$ 单形 $t^n = (e_0, \cdots, e_n)$ 的边缘 (boundary of an $\varepsilon$-simplex) 定义为 $\varepsilon$ 链: $\Delta t^n = \sum_i (-1)^i (e_0, \cdots, \hat{e}_i, \cdots, e_n)$. 由线性性质, 可以定义任意 $\varepsilon$ 链的边缘, 边缘为零的 $\varepsilon$ 链称为 $\varepsilon$ 闭链 ($\varepsilon$-cycle). 一个集合的 $\varepsilon$ 链 $x^n$ 称为在 $A$ 中 $\eta$ 同调于零 (记作 $x^n \sim 0$), 如果存在 $A$ 中的某个 $\eta$ 链 $y^{n+1}$ 使得 $\Delta y^{n+1} = x^n$.

集合 $A$ 的真闭链 (true cycle) 是指序列 $z^n = (z_1^n, \cdots, z_k^n, \cdots)$, 其中 $z_k^n$ 为 $A$ 中的 $\varepsilon_k$ 闭链, $\varepsilon_k \to 0$ $(k \to \infty)$. 真闭链构成一个群 $Z^n(A, G)$. 如果对任意 $\varepsilon > 0$, 均存在一个 $N$, 使得 $z_k^n$ 对所有的 $k \geq N$ 均在 $A$ 中 $\varepsilon$ 同调于零, 则称真闭链 $z$ 在 $A$ 中同调于零. 以 $\Delta^n(A, G)$ 记群 $Z^n(A, G)$ 除以子群 $H^n(A, G)$ 得到的商群, 其中 $H^n(A, G)$ 为由同调于零的闭链构成的子群.

真闭链 $z$ 称为收敛的 (convergent), 如果对任意 $\varepsilon > 0$, 均存在一个 $N$, 使得当 $k, m \geq N$ 时, 闭链 $z_k^n$, $z_m^n$ 在 $A$ 中相互 $\varepsilon$ 同调. 以 $Z_c^n(A, G)$ 记由收敛的闭链构成的群, 并设 $\Delta_c^n(A, G) = Z_c^n(A, G)/H_c^n(A, G)$ 为相应的商群.

若存在一个紧集合 $F \subseteq A$, 使得所有闭链 $z_k^n$ 中的所有单形的顶点均包含在 $F$ 内, 则称真闭链 $z$ 具有紧支集 $F$. 通过要求所有用于实现同调的链均包含在一个紧集合中, 可以类似地修正一个闭链同调于零的概念, 进而导致具有紧支集的收敛闭链的定义. 以下标 $k$ 表示考虑具有紧子集的闭链以及同调, 则相应可得到群 $\Delta_k^n(A, G)$ 和 $\Delta_{ck}^n(A, G)$. 后者即为 Vietoris 同调群 (Vietoris homology group). 若多面体是有限的, 则 Vietoris 同调群与标准的同调群相同.

通过模去一个子集 $B \subseteq A$, 还可以定义相对同调群 $\Delta^n(A, B, G)$, $\Delta_c^n(A, B, G)$, $\Delta_k^n(A, B, G)$ 和 $\Delta_{ck}^n(A, B, G)$. 集合 $A$ 中一个模 $B$ $\varepsilon$ 闭链是 $A$ 中任意一个满足 $\Delta x^n \subseteq B$ 的 $\varepsilon$ 链 $x^n$. 类似地, 一个模 $B$ $\varepsilon$ 闭链 $x^n$ 在 $A$ 中模 $B\eta$ 同调于零, 如果 $x^n =$

$\Delta y^{n-1}+w^n$，其中 $y^{n+1}$ 和 $w^n$ 为 $A$ 中的 $\eta$ 链，$w^n$ 包含在 $B$ 中.

**参考文献**

[1] Александров, П. С., Введение в гомологическую теорию разтерности и общую комбинаторную топологию, М., 1975. А. А. Мальцев 撰

【补注】

**参考文献**

[A1] Hocking, J. G. and Young, G. S., Topology, Addison-Wesley, 1961. 李贵松 译 潘建中 校

**Виноградов 估计 [Vinogradov estimates; Виноградова оценки]**

И. М. Виноградов 的若干个定理的名字. 下面是几个熟知的结果.

1) 关于特征标和的 Виноградов 估计 (见 Dirichlet 特征标 (Dirichlet character)). 如果 $\chi$ 为模 $D$ 之非主特征，那么，对 $N>0$ 及 $M\geqslant 1$ 有

$$\left|\sum_{n=N+1}^{N+M}\chi(n)\right|\leqslant\sqrt{D}\,\log D.$$

2) 关于 Weyl 和的 Виноградов 估计 (见 Weyl 和 (Weyl sum)). 设 $n\geqslant 12$ 为常数，并令 $\nu=1/n$. 又设 $n$ 维空间的点被分成两类——第 1 类和第 2 类. 第 1 类中的点是

$$\left(\frac{a_n}{q_n}+z_n,\ \cdots,\ \frac{a_1}{q_1}+z_1\right),$$

其中第一个被加项是分母为正数的不可约有理分数，诸分母之最小公倍数 $Q$ 不大于 $p^{\nu}$，而第二个被加项满足条件

$$|z_s|\leqslant p^{-s+\nu}.$$

第 2 类的点即为不属于第 1 类的点. 对第 2 类的点，令

$$\rho=\frac{1}{8n^2(\log n+0.5\log\log n+1.3)},$$

如果 $m\leqslant P^{2\rho}$，则有

$$|T_m|=\left|\sum_{1\leqslant x\leqslant P}e^{2\pi i m(\alpha_n x^n+\cdots+\alpha_1 x)}\right|\ll P^{1-\rho}.$$

另一方面，若令

$$\delta_s=z_s p^s,\ \delta_0=\max(|\delta_n|,\ \cdots,\ |\delta_1|),$$

如果 $m\leqslant P^{4\nu^2}$，那么对第 1 类的点就有

$$|T_m|\ll P(m,\,Q)^{\nu}Q^{-\nu+\varepsilon},$$

甚至还可以有

$$|\mathrm{T}_m|\ll PQ^{-\nu+\varepsilon}\delta_0^{-\nu}$$

(如果 $\delta_0\geqslant 1$ 的话).

3) 关于素数三角和的 Виноградов 估计. 设 $\varepsilon\leqslant 0.001$. 又按照 2) 中之记号，设 $n$ 维空间中的点如下进行分类.

第 1a 类由满足条件

$$Q\leqslant e^{u^{\varepsilon}},\ \delta_0\leqslant e^{u^{\varepsilon}}\quad(u=\log P)$$

的那些点组成. 第 1b 类由不在 1a 类及满足条件

$$Q\leqslant P^{0.2\nu},\ \delta\leqslant P^{\nu}$$

的点组成. 最后，所有其余的点属于第 2 类.

对 1a 类中的点，令

$$\Delta=u^{9\nu}Q^{-0.5\nu+\varepsilon},\ \mu=(m,\,Q)^{0.5\nu},$$

或者甚至令

$$\Delta=u^{9\nu}\delta_0^{-0.5\nu},\ \mu=m^{-0.5\nu}$$

(如果 $\delta_0\geqslant 1$ 的话). 对 1b 类的点，令 $\varepsilon=2\varepsilon'$，定义

$$\Delta=Q^{-0.5+\varepsilon_1},\ \mu=(m,\,Q)^{0.5\nu}\ (\text{若 } Q>e^{u^{\varepsilon}}),$$

$$\Delta=Q^{-0.5\nu+\varepsilon_1}\delta_0^{-0.5\nu+\varepsilon_1},\ \mu=1\ (\text{若 } \delta_0>e^{u^{\varepsilon}})$$

(如果 $Q>e^{u^{\varepsilon}}$, $\delta_0>e^{u^{\varepsilon}}$，那么取上面 $\Delta$ 和 $\mu$ 的任一对值都可以). 最后，对第 2 类中的点，令

$$\Delta=P^{-\rho_1},\ \rho_1=\frac{1}{17n^2(2\log n+\log\log n+2.9)},$$

$$\mu=1.$$

那么，如果 $m\leqslant\Delta^{-2}$，就有

$$\left|\sum_{p\leqslant P}e^{2\pi i m(\alpha_n p^n+\cdots+\alpha_1 p)}\right|\ll\frac{P}{u}\Delta\mu.$$

**参考文献**

[1] Виноградов, И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М., 1971 (中译本: 伊·马·维诺格拉多夫，数论中的三角和方法，数学进展，1 (1955)，3－106).

[2] Hua, L.-K., Abschätzungen von Exponentialsummen und ihre Anwendung in der Zahlentheorie, in Enzyklopaedie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, Vol. 1, Teubner, 1959. Heft 13, Teil 1 (中译本: 华罗庚，指数和的估计及其在数论中的应用，科学出版社，1963).

А. А. Карацуба 撰

【译注】

**参考文献**

[B1] 潘承洞、潘承彪，解析数论基础，科学出版社，1990 年，第十三章，第十九章，第二十二章.

张明尧 译 戚鸣皋 校

**Виноградов-Goldbach 定理 [Vinogradov-Goldbach theorem; Виноградова-Гольдбаха теорема]**

关于把所有足够大的奇数表示为三个素数之和的一个定理．它是关于素数方程

$$p_1+p_2+p_3=N$$

的解的个数 $I(N)$ 的渐近公式的一个推论，为 И. М. Виноградов 于 1937 年所证明：

$$I(N)=\frac{N^2}{2r^3}S(N)+O\left[\frac{N^2}{r^{3.5-\varepsilon}}\right],$$

其中 $N$ 是奇数，$r=\log N$，和

$$S(N)=$$

$$=\prod_p\left[1+\frac{1}{(p-1)^3}\right]\prod_{p|N}\left[1-\frac{1}{p^2-3p+3}\right]>0.6.$$

见 **Виноградов 法** (Vinogradov method)；**Goldbach 问题** (Goldbach problem)．

**参考文献**


[1] Виноградов, И. М., Избранные труды, М., 1952 (英译本：Vinogradov, I. M., Selected works, Springer, 1985).

[2] Hua, L.-K., (华罗庚), Abschätzungen von Exponentialsummen und ihre Anwendung in der Zahlentheoire, in Enzyklopaedie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, Vol. 1, 1959. Heft 13, Teil 1.


А. А. Карацуба 撰 杜小杨 译

**Виноградов 假设 [Vinogradov hypotheses; Виноградова гипотезы]**

由 И. М. Виноградов ([1], [2]) 在各个不同时期提出的若干与**解析数论** (analytic number theory) 中一些中心问题有关的假设．

**关于幂剩余及非剩余分布的假设**．其中最悠久、最著名的假设是：相邻二次非剩余 mod $p$ 之间的距离有 $p^{\varepsilon}$ 的阶，见**幂剩余** (power residue) 与**二次剩余** (quadratic residue)．

**关于三角和估计的假设**．其中一个假设是

$$\left|\sum_{x=1}^{P}e^{2\pi i f(x)}\right|\ll P^{1-\rho(n)},$$

其中 $f(x)=\alpha_n x^n+\cdots+\alpha_1 x$，$\alpha_r=a/q+\theta/q^2$，$(a,q)=1$，$|\theta|\leqslant 1$，$P^{0.25}<q<P^{r-0.25}$，$r$ 是数 $2,\cdots,n$ 中之一，而 $\rho(n)$ 的阶为 $n^{-1-\varepsilon}$．见**三角和法** (trigonometric sums, method of) 及 **Виноградов 法** (Vinogradov method)．

**关于 Diophantus 方程解数的假设**．一个这样的假设是说，方程组

$$x_1^{n_1}+\cdots+x_r^{n_1}=y_1^{n_1}+\cdots+y_r^{n_1},$$

$$\cdots\quad\cdots$$

$$x_1^{n_m}+\cdots+x_r^{n_m}=y_1^{n_m}+\cdots+y_r^{n_m}$$

$$1\leqslant x_i,\ y_i<P,\ i=1,\cdots,r,\ 1\leqslant n_1<\cdots<n_m=n$$

($n$ 为常数) 的解数的阶是 $P^{2r-k}$，这里对所有 $r\geqslant r_0$ 有 $k=n_1+\cdots+n_m$，$r_0$ 的阶为 $k^{1+\varepsilon}$．见 **Diophantus 方程** (Diophantine equations)．

**关于平面及空间区域中整点个数的假设**．一个这样的假设是说：球 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ 内整点个数可用公式

$$\frac{4}{3}\pi R^3+O(R^{1+\varepsilon})$$

表出．见**整点的分布** (integral points, distribution of)．

**参考文献**


[1] Виноградов, И. М., Некоторые проблемы аналитической теории чисел, в книге: Труды третього Всесоюзного математического съезда, т. 3, Москва, 1958, с. 3 – 13.

[2] Виноградов, И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М., 1971 (中译本：伊·马·维诺格拉多夫，数论中的三角和方法，越民义译，数学进展，1 (1955), 3 – 106).

[3] Виноградов, И. М., Избранные труды, М., 1952 (英译本：Vinogradov, I. M., Selected works, Springer, 1985).


А. А. Карацуба 撰 张明尧 译 戚鸣皋 校

**Виноградов 积分 [Vinogradov integral; Виноградова интеграл]**

形如

$$\int_0^1\cdots\int_0^1|S|^{2k}d\alpha_1\cdots d\alpha_n$$

的一个重积分，其中

$$S=\sum_{1\leqslant x\leqslant P}e^{2\pi i(\alpha_1 x+\cdots+\alpha_n x^n)}.$$

这一积分是一个**三角和** (trigonometric sum) 的模的 $2k$ 次均值．Виноградов 关于此积分值之定理（均值定理）构成 Weyl 和估计之基础．见 **Виноградов 法** (Vinogradov method)；**Виноградов 平均值定理** (Vinogradov theorem about the average)．

А. А. Карацуба 撰 张明尧 译 戚鸣皋 校

**Виноградов 法 [Vinogradov method; Виноградова метод]**

估计三角和的一种新方法，见**三角和法** (trigonometric sums, method of)．用 Виноградов 法可对范

围很广的一类三角和得到很精确的估计，其中求和变数取过一列整数或素数等．用此法可以解决**解析数论**（analytic number theory）中许多经典问题（如：很广泛的一类函数的分数部分之分布，自然数列中的素数分布，象 Waring 及 Goldbach 问题这样的堆垒问题等等）．

Виноградов 法分成两部分：估计 **Weyl 和**（Weyl sum）的方法及估计素数三角和的方法．两者都要用到 Виноградов 的基本思想，即使二重三角和光滑化．二重三角和可叙述于下．

给定和

$$W=\sum_u\sum_v\psi_1(u)\psi_2(v)e^{2\pi i\alpha uv},$$

其中求和变量 $u$ 与 $v$ 相应地取过集合 $U$ 与 $V$ 中（不一定连续）的整数值，$A<u<2A$．设 $\psi_1(u)$ 与 $\psi_2(v)$ 为任意的复值函数．那么

$$|W|^2\leqslant B\sum_{A<u\leqslant 2A}\left|\sum_v\psi_2(v)e^{2\pi i\alpha uv}\right|^2,$$

其中 $u$ 取遍区间 $(A,2A]$ 中的相连整数（光滑化），而

$$B=\sum_n|\psi_1(u)|^2.$$

**估计 Weyl 和的 Виноградов 法**．要估计的和是

$$S=\sum_{1\leqslant x\leqslant P}e^{2\pi if(x)},$$

其中 $f(x)=\alpha_{n+1}x^{n+1}+\cdots+\alpha_1x$；$\alpha_{n+1},\cdots,\alpha_1$ 为实数．对 $Y=[P^{1-n^2/4}]$ 有

$$S=Y^{-1}\sum_{1\leqslant x\leqslant P}\sum_{1\leqslant y\leqslant Y}e^{2\pi if(x+y)}+2\theta Y$$

$$=Y^{-1}\sum_{1\leqslant x\leqslant P}\sum_{1\leqslant y\leqslant Y}e^{2\pi i\mathfrak{A}}+2\theta Y=Y^{-1}W+2\theta Y,$$

其中 $\mathfrak{A}=\alpha_{n+1}x^{n+1}+A_n(y)x^n+\cdots+A_1(y)x+A_0(y)$，字母 $W$ 表示过 $x$ 及 $y$ 的二重和，而 $|\theta|\leqslant 1$．此外，用 $\mathfrak{B}$ 记表达式

$$\alpha_{n+1}x^{n+1}+(A_n(y)+B_n)x^n+\cdots+(A_1(y)+B_1)x,$$

那么对区域

$$|B_n|\leqslant L_n=P^{-n-n^2/4},$$
$$|B_{n-1}|\leqslant L_{n-1}=P^{-n+1-n^2/4},$$
$$\cdots\ \cdots$$
$$|B_1|\leqslant L_1=P^{-1-n^2/4}$$

中任意的 $B_n,\cdots,B_1$ 皆有

$$|W|\leqslant\sum_{1\leqslant y\leqslant Y}\left|\sum_{1\leqslant x\leqslant P}e^{2\pi i\mathfrak{B}}\right|+Y_nP^{1-n^2/4}.$$

对任何整数 $k\geqslant 1$ 有

$$|W|^{2k}\leqslant 2^kY^{2k-1}\sum_{1\leqslant y\leqslant Y}\int_{|B_n|\leqslant L_n}\cdots\int_{|B_1|\leqslant L_1}\left|\sum_{1\leqslant x\leqslant P}e^{2\pi i\mathfrak{C}}\right|dB_n\cdots dB_1+$$

$$+2^k(Y_nP^{1-n^2/4})^{2k}\leqslant$$

$$\leqslant 2^kY^{2k-1}G(Y)\int_0^1\cdots\int_0^1\left|\sum_{1\leqslant x\leqslant P}e^{2\pi i\mathfrak{C}}\right|^{2k}d\gamma_n\cdots d\gamma_1$$

$$+2^k(Y_nP^{1-n^2/4})^{2k},$$

其中 $\mathfrak{C}=\alpha_{n+1}x^{n+1}+\gamma_nx^n+\cdots+\gamma_1x$，$G(Y)$ 表示与坐标为

$$\{A_n(y)+B_n\},\{A_{n-1}(y)+B_{n-1}\},$$
$$\cdots,\{A_1(y)+B_1\}$$

的点相重合的点的最大个数．这里的大括号表示括号内数的分数部分，$y$ 在 1 与 $Y$ 之间变动，且

$$|B_n|\leqslant L_n,|B_{n-1}|\leqslant L_{n-1},\cdots,|B_1|\leqslant L_1.$$

若多项式 $f(x)$ 的系数 $\alpha_{n+1},\cdots,\alpha_2$ 有某种算术性质，则可能得到估计 $G(Y)\leqslant Y^{0.9}$．此外，上面最后那个积分不超过方程组

$$\begin{cases}x_1^n+\cdots+x_k^n=y_1^n+\cdots+y_k^n,\\x_1^{n-1}+\cdots+x_k^{n-1}=y_1^{n-1}+\cdots+y_k^{n-1},\\\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\\x_1+\cdots+x_k=y_1+\cdots+y_k,\\1\leqslant x_1,\cdots,x_k\leqslant P.\end{cases}$$

的解数．这个方程组的解数可以用 **Виноградов 均值定理**（Vinogradov theorem about the average）来进行估计，这一定理是估计 Weyl 和的 Виноградов 方法中的基本定理，见 **Виноградов 估计**（Vinogradov estimates）．

**估计素数三角和的 Виноградов 法**．要估计的和是

$$S'=\sum_{p\leqslant P}e^{2\pi if(p)},$$

其中 $f(p)=\alpha_np^n+\cdots+\alpha_1p$，而 $\alpha_n,\cdots,\alpha_1$ 均为实数．设 $D=\prod_{p\leqslant H}p$，其中 $H\leqslant P^{0.25}$．利用 Möbius 函数的熟知的性质，$S'$ 被转化成为数不多的（不多于 $\ln P/\ln H$ 个）形如

$$W_s=\sum_{d_1|D}\cdots\sum_{d_s|D}\sum_{m_1>0}\cdots\sum_{m_s>0}\mu(d_1)\cdots$$

$$\cdots\mu(d_s)e^{2\pi if(m_1\cdots m_sd_1\cdots d_s)}$$

的和，其中 $m_1\cdots m_sd_1\cdots d_s\leqslant P$．在多重和 $W_s$ 中，变量 $m_1,\cdots,m_s$ 取遍整个求和区间．其中至少有一个变量 $m$ 的求和区间是长的那种和 $W_S$ 用估计 Weyl 和的 Виноградов 法来估计．反之，至少过某个求和变量 $d(d|D)$ 的求和区间是长的．在此情形下，我们要用到 Виноградов 的下述引理，这一引理和他使二重和光滑化的思想一起构成估计素数三角和

的 Виноградов 法之基础.

引理. 设 $0 \leqslant \sigma \leqslant 1/3$, $D$ 是不大于 $x^{\sigma}$ 的所有素数的乘积, 则 $D$ 的所有不大于 $x$ 的因子 $d$ 分布在具有下列性质的少于 $x^{\varepsilon}$ 个集合中:

1) 属于这些集合中一个集合的诸数 $d$ 有同样个数的 ($\beta$ 个) 素因子, 因此 $\mu(d) = (-1)^{\beta}$ 的值皆相同;

2) 这些集合中的一个 (所谓的最简集) 由一个数 $d = 1$ 组成. 对其余的每个集合, 都有一个数 $\varphi$, 使这个集合中所有的数都满足关系式

$$\varphi < d \leqslant \varphi^{1+\varepsilon_1}, \ \varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon);$$

3) 对于数 $d$ 的每个异于最简集的集合, 对任何 $U\,(0 \leqslant U \leqslant \varphi)$ 存在两个由数 $d'$ 及 $d''$ 组成的集合, 相应地有满足关系式

$$U < \varphi' \leqslant U x^{\sigma}, \ \varphi' \varphi'' = \varphi$$

的数 $\varphi'$ 及 $\varphi''$, 使得对每个自然数 $B$, 可以 $B$ 次得到所取集合中的每一个数, 如果我们仅从乘积 $d'd''$ 中选取那些满足关系式 $(d', d'') = 1$ 的乘积.

选取一个适合的 $U$ 的值, 应用引理中第 3) 点即得到

$$W_S = \sum_u \sum_v \psi_1(u) \psi_2(v) e^{2\pi i f(uv)},$$

其中变量 $u$ 与 $v$ 取过长的求和区间. 由此引理可以导出 Виноградов 关于素数三角和的估计式, 见 **Виноградов 估计** (Vinogradov estimates).

若 $F(x)$ (在某种意义下) 可用多项式适当地予以逼近, 那么 **Виноградов 方法**可以用来估计形如

$$S = \sum_{1 \leqslant x \leqslant P} e^{2\pi i F(x)}, \ S' = \sum_{p \leqslant P} e^{2\pi i F(p)}$$

的和 (见 [2], [4]). 形如

$$\sum_{p \leqslant P} \chi(p+a), \ \sum_{1 \leqslant n \leqslant N} \mu(n) \chi(n+a)$$

的及其他类型的和也可以用此法估计. 用这种方法可以解决幂剩余及原根等在形如 $p + a$ 的数列中的分布问题, 其中 $a > 0$ 为一给定整数, 而 $p$ 取过连续的素数 (见 [3], [5]). 有关 Виноградов 法在解析数论中的应用, 见 [1], [2], [4], [5], [6].

**参考文献**


[1] Виноградов, И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М., 1971 (中译本: 伊·马·维诺格拉多夫, 数论中的三角和方法, 越民义译, 数学进展, 1 (1955), 3 – 106).

[2] Виноградов, И. М., Избранные труды, М., 1952 (英译本: Vinogradov, I. M., Selected works, Springer, 1985).

[3] Виноградов, И. М., 《Изв АН СССР, Сер. матем.》, 30 (1966), 3, 481 – 496.

[4A] Карацуба, А. А., 《Труды Матем. ин-та АН СССР》, 112 (1971), 241 – 255.

[4B] Карацуба, А. А., 《Труды Матем. ин-та АН СССР》, 132 (1973), 257 – 261.

[5] Hua, L.-K., Abschätzungen von Exponentialsummen und ihre Anwendung in der Zahlentheorie, in Enzyklopaedie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, Vol. 1, 1959, Heft 13, Teil 1 (中译本: 华罗庚, 指数和的估计及其在数论中的应用, 科学出版社, 1963).

[6] Chandrasekharan, K., Arithmetical functions, Springer, 1970.


А. А. Карацуба 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Vaughan, R. C., The Hardy-Littlewood method, Cambridge Univ. Press, 1981.


【译注】

**参考文献**


[B1] 潘承洞与潘承彪, 解析数论基础, 科学出版社, 1990 年.


张明尧 译 戚鸣皋 校

**Виноградов 均值定理** [**Vinogradov theorem about the average**; **Виноградова теорема о среднем**]

关于 **Виноградов 积分** (Vinogradov integral)

$$J_b = J_{b,n}(P) =$$

$$= \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left| \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i(\alpha_n x^n + \cdots + \alpha_1 x)} \right|^{2b} d\alpha_n \cdots d\alpha_1$$

的值的上界之定理, 其中 $J_b$ 是三角和之平均值. 它可以表述如下. 若对非负整数 $t$ 令

$$D_t = (20n)^{n(n+1)t/2}, \ b_t = nt + \left[ \frac{n(n+1)}{4} + 1 \right],$$

那么, 如果 $t > 0$, 对整数 $b \geqslant b_t$ 就有

$$J_b = J_{b,n}(P) < D_t P^{2b - (1-(1-1/n)^t) n(n+1)/2}.$$

由 Виноградов 定理给出的 $J_b$ 之估计是渐近精确的. 此定理是估计 **Weyl 和** (Weyl sum) 的 **Виноградов 法** (Vinogradov method) 之基本点. 此外, 在数论的一些经典问题中 (见 **Waring 问题** (Waring problem); **Hilbert-Kamke 问题** (Hilbert-Kamke problem); 多项式的**模 1 分布** (distribution modulo one)), 它得到了一些几乎是最优的结果.

**参考文献**


[1] Виноградов, И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М., 1971 (中译本: 伊·马·维诺格拉多夫, 数论中的三角和方法, 越民义译, 数学进展, 1 (1955), 3 – 106).

[2] Hua, L.-K., Abschätzungen von Exponentialsummen und ihre Anwendung in der Zahlentheorie, in Enzyklop-

edie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, Vol. 1, Teubner, 1959. Heft 13, Teil 1(中译本: 华罗庚, 指数和的估计及其在数论中的应用, 科学出版社, 1963). A. A. Карацуба 撰

【译注】

参考文献

[B1] 潘承洞与潘承彪, 解析数论基础, 科学出版社, 1990年, 第二十二章. 张明尧 译 戚鸣皋 校

**Virasoro 代数[Virasoro algebra; Вирасоро алгебра]**

【补注】 **C** 上的 Lie 代数, 记为 Vir, 带有基 $L_n(n\in\mathbf{Z})$, $c$ 和下述交换关系($m,n\in\mathbf{Z}$):

$$[L_m,L_n]=(m-n)L_{m+n}+\delta_{m,-n}\frac{m^3-m}{12}c,$$
$$[c,L_n]=0.$$

由于 $\mathbf{C}\setminus\{0\}$ 上的向量场 $d_n=-z^{n+1}(d/dz)$ $(n\in\mathbf{Z})$ 满足关系 $[d_m,d_n]=(m-n)d_{m+n}$, 所以 Lie 代数 Vir 是具有有限 Laurent 级数的有孔复平面上全纯向量场的 Lie 代数的中心扩张(事实上是泛的). 由于这一原因, Virasoro 代数在共形场论中起关键作用.

另一方面, 令 $z=\exp i\theta$, 这里 $\theta$ 是单位圆周 $S^1$ 上的参数, 得到 $d_n=ie^{in\theta}(d/d\theta)$. 因而带有限 Fourier 级数的 $S^1$ 上向量场的 Lie 代数是由在反线性对合 $L_n\to L_{-n}$, $c\mapsto c$ 下不动的元素组成的 Lie 代数 Vir/**C**$c$ 的实型. 因此, Virasoro 代数与 $S_1$ 的微分同胚群的表示理论, 幺拟群的表示理论及仿射 **Kac-Moody 代数**(Kac-Moody algebra)密切相关.

Virasoro 代数的表示论在数学和理论物理学中有大量应用. 最有趣的是 Vir 在复向量空间的正能量表示(positive-energy representations), 由 $c$ 的作用为纯量来定义, 记作同一字母 $c$(称为中心电荷(central charge)), 而 $L_0$(能量算子(energy operator))可对角化, 本征空间维数有限, 实数谱有下界:

$$V=\bigoplus_{j\geqslant j_0}V_j.$$

这样一个表示的特征标是(形式)级数

$$\operatorname{ch}V=\sum_j(\dim V_j)q^j.$$

Vir 的第一个正能量表示无疑是由 M. A. Virasoro([A1])在 1970 年构造的, 应用了行理论框架中 Sugawara 结构的 Abel 形式(见 **Kac-Moody 代数**(Kac-Moody algebra)). 由此, 特别由于非幻定理(noghost theorem)的证明([A2]), Virasoro 代数的表示论成了行理论的关键组成部分(见[A3]). Virasoro 中心扩张本身首先由数学家发现([A4],[A5]); 在含有中心项校正公式的物理文献中, 论文[A2]是最早的一篇.

Vir 在向量空间 $V$ 上的不可约正能量表示容许一个非零向量 $v_h\in V$, 这里 $h\in\mathbf{R}$, 使得

$$L_n(v_h)=\delta_{n,0}hv_h\ \text{对}\ n\geqslant0,\ c(v_h)=cv_h, \quad (A1)$$

因而有

$$V=\sum_{0<j_1\leqslant j_2\leqslant}\mathbf{C}L_{-j_s}\cdots L_{-j_1}v_h \quad (A2)$$

这个由两个实常数 $c$(中心电荷)和 $h$(共形维数)唯一确定的表示, 记为 $L^{c,h}$. 若(A2)不是直和分解, 则表示称为退化的(degenerate).

Vir 表示论的第一个基本结果[A6](证明参见[A7])说明 $L^{c,h}$ 是退化的, 当且仅当 $c=c(m)$, $h=h(m)$, 对某个 $m\in R\setminus\{0,1\}$ 及某些 $r,s=1,2,\cdots$, 这里

$$c(m)=1-\frac{6}{m(m+1)},$$

$$h_{r,s}(m)=\frac{((m+1)r-ms)^2-1}{4m(m+1)}.$$

共形场论的基础工作([A8])的基本思想是利用 Vir 的退化表示写出相关函数的微分方程. 关于"最高退化"表示, 称为极小级数表示的最完全的结果已经由[A9]得到. 它们对应于 $m=(p')/(p-p')$, 这里 $p$ 和 $p'$ 是互素的正整数, $r<p'-1$, $s\leqslant p-1$([A8]).

[A10]算出特征标 $\operatorname{ch}L^{c,h}$. 这推出令 $q=e^{2\pi i\tau}$, 对某个 $a\in\mathbf{R}$, 函数 $q^a\operatorname{ch}L^{c,h}$ 成为 $\tau$ 在上半平面的模函数, 当且仅当 $L^{c,h}$ 是一个极小级数表示(因而 $a=-c(m)/24$)([A11]).

表示 $L^{c,h}$ 带有唯一的 Hermite 型, 使得 $v_h$ 的范数为 1, 而算子 $L_n$ 和 $L_{-n}$ 伴随. 另一类重要的表示 $L^{c,h}$ 是酉表示, 即它的 Hermite 型是正定的. 酉表示已被完全列出(见[12],[A13],[A7]):

a) $c\geqslant1$, $h\geqslant0$;

b) $m=2,3,\cdots$ 的极小级数.

极小级数表示(特别是酉表示)与统计格模型有密切关系(见[A14]). 例如, $m=3$ 的情形等同于 Ising 模型(Ising model), $m=4$ 的情形等同于 Potts 模型(Potts model), 等等.

Virasoro 代数的另一应用涉及曲线的模空间理论(见[A15]-[A18]).

参考文献

[A1] Virasoro, M. M., Subsidary conditions and ghosts in dual resonance models, *Phys. Rev.*, **D 1**(1970), 2933-2936.

[A2] Goddard, P. and Thorn, C. B., Compatibility of the dual Pomeron with unitarity and the absence of ghosts in the dual resonance model, *Phys. Lett.*, **4**(1972), 235-238.

[A3] Green, M. B., Schwarz, J. H. and Witten, E.,

Superstring theory, Cambridge Univ. Press, 1987.

[A4] Block, R. E., On the Mills-seligman axioms for Lie algebras of classical type, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **121** (1966), 378 – 392.

[A5] Gel'fand, I. M. and Fuks, D. B., The cohomology of the Lie algebra of vector fields in a circle, *Funct. Anal. Appl.*, **2** (1968), 342 – 343. (*Funkts. Anal. i Prilozh.*, **2** (1968), **4**, 92 – 93)

[A6] Kac, V. G., Highest weight representations of infinite dimensional Lie algebras, in Proc. Internat. Congress Mathemat. Helsinki, 1978, Vol. 1, Acad. Sci. Fennica, 1980, 299 – 304.

[A7] Kac, V. G. and Raina, A. K., Bombay lectures on highest weight representations, World Sci., 1987.

[A8] Belavin, A. A., Polyakov, A. M. and Zamolodchikov, A. B., Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory, *Nuclear Phys.*, **B241** (1984), 333 – 380.

[A9] Felder, G., BRST approach to minimal models, *Nuclear Phys.*, **B317** (1989), 215 – 236.

[A10] Feigin, B. L. and Fuchs, D. B. [D. B. Fuks], Verma models over the Virasoro algebra, in L. D. Faddeev and A. A. Mal'tsev (eds.), Topology, Proc. Internat. Topol. Conf. Leningrad 1982, Lecture notes in math., Vol. 1060, Springer, 1984, 230 – 245.

[A11] Kac, V. G. and Wakimoto, M., Modular invariant representations of infinite-dimensional Lie algebras and superalgebras, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **85** (1988), 4956 – 4960.

[A12] Friedan, D., Qui, Z. and Shenker, S., Conformal invariance, unitary and two dimensional critical exponents, *Publ. MSRI*, **3** (1985), 419 – 449.

[A13] Goddard, P., Kent, A. and Olive, D., Unitary representations of the Virasoro and super-Virasoro algebras, *Comm. Math. Phys.*, **103** (1986), 105 – 119.

[A14] Itzykson, C. and Dronffee, J.-M., Statistical field theory, Cambridge Univ. Press, 1989.

[A15] Arbarello, E., Concini, C. De, Kac, V. G. and Procesi, C., Moduli spaces of curves and representation theory, *Comm. Math. Phys.*, **117** (1988), 1 – 36.

[A16] Kontzevich, M. L., Virasoro algebra and Teichmüller spaces, *Funct. Anal. Appl.*, **21** (1987), 2, 156 – 157. (*Funkts. Anal. i Prilozh.*, **21** (1987), 2, 78 – 79)

[A17] Beilinson, A. A. and Schechtman, V. V., Determinant bundles and Virasoro algebras, *Comm. Math. Phys.*, **118** (1988), 651 – 701.

[A18] Kawamoto, N., Namikawa, Y., Tsuchiya, A. and Yamada, Y., Geometric realization of conformal field theory on Riemann surfaces, *Comm. Math. Phys.*, **116** (1988), 247 – 308.


Victor Kac 撰 蔡传仁 译

**位力分解 [virial decomposition; вириальное разложение]**, 位力展开 (virial expansion), 位力级数 (virial series)

气体物态方程右端的级数展开

$$\frac{pv}{kT}=1+\sum_{1\leqslant l<\infty}\frac{B_{l+1}(T)}{v^l},$$

其中 $p$ 是压强，$T$ 是温度，$v$ 是一个分子所占平均体积（数密度的倒数），而 $k$ 是 Boltzmann 常数．级数中含第 $l$ 位力系数 $B_l$ 的项描述归因于 $l$ 分子集团相互作用所引起的对理想气体行为的偏差．$B_l$ 可用集团积分 $b_j$ 或不可约集团积分 $\beta_{l-1}$ 表达为

$$B_l=-\frac{l-1}{l}\beta_{l-1}=$$

$$=\frac{l-1}{l}\sum\frac{(l-2-\Sigma n_j)!}{(l-1)!}(-1)^{\Sigma n_j}\prod_j\frac{(jb_j)^{n_j}}{n_j!},$$

对受下列条件

$$\sum_{2\leqslant j\leqslant l}(j-1)n_j=l-1$$

限制的所有自然数 $n_j(j\geqslant 2)$ 求和，特别是

$$B_2=-\frac{1}{2}\beta_1=-b_2,\ B_3=-\frac{2}{3}\beta_2=4b_2^2-2b_3;$$

$$b_2=\frac{1}{2!V}\iint f_{12}d^3q_1d^3q_2,$$

$$b_3=\frac{1}{3!V}\iiint(f_{12}f_{13}+f_{12}f_{23}+f_{13}f_{23}+$$

$$+f_{12}f_{13}f_{23})d^3q_1d^3q_2d^3q_3,$$

其中

$$f_{ij}=\exp\left[-\frac{\varphi(|\vec{q}_i-\vec{q}_j|)}{kT}\right]-1$$

是 Mayer 函数，$V$ 是气体体积，积分扩展至气体所占据的整个体积，而 $\varphi(|\vec{q}_i-\vec{q}_j|)$ 是二体相互作用势．有一般规则可将任一 $l$ 的 $B_l$ 通过 $f_{ij}$ 写出．经简化后得到 $B_3$ 的表达式为

$$B_3=-\frac{1}{3}\iint f_{12}f_{13}f_{23}d^3q_1d^3q_2.$$

实际上，仅能计算出前几个位力系数．

系数用 $b_l$ 表达的 $v^{-1}$ 的幂级数可用来描述 $s$ 个粒子的平衡关联函数；这个事实的一个推论是，可以用简单方式获得物态方程．

关于位力展开存在量子统计的类似结果．

**参考文献**


[1] Mayer, J. E. and Geppert-Mayer, M. G., Statistical mechanics, Wiley, 1940.

[2] Feynman, R., Statistical mechanics, M. I. T., 1972.

[3] Боголюбов, Н. Н., Избранные труды, т. 2, Киев, 1970 (英译本: Bogolyubov, N. N., Problems of a dynamical theory in statistical physics, North-Holland, 1962).

[4] Uhlenbeck, G. E. and Ford, G. V., Lectures in statistical mechanics, Amer. Math. Soc., 1963.

И. П. Павлоцкий 撰

【译注】 1. 正确条目名应为位力展开 (virial expansion), 而英译名 virial decomposition (位力分解) 是不恰当的.

2. 关于量子系统的位力展开可参考[B3], [B4].

**参考文献**

[B1] Mason, E. A. and Spurling, T. H., The virial equation of state, Pergamon, Oxford, 1969.

[B2] Hirschfelder, J. O., Curtiss, C. F. and Bird, R. B., Molecular theory of gases and liquids, Wiley, New York, 1954.

[B3] Grandy, W. T. Jr., Foundations of statistical mechanics, Vol. I: Equilibrium theory, Reidel, Dordrecht, 1987.

[B4] 彭桓武, 徐锡申, 理论物理基础, 北京大学出版社, 1998.

徐锡申 译

**位力定理** [**virial theorem**; **вириала теорема**]

一个定理: 一个力学系统的动能在无限长时间上的平均值 $\overline{T}$ 等于力的位力在该段时间上的平均值, 即

$$\overline{T} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\overline{\mathbf{F}_i\mathbf{r}_i}, \tag{1}$$

其中 $N$ 为系统的质点的数目, $\mathbf{F}_i$ 为作用于系统 $i$ 点上的力, $\mathbf{r}_i$ 即为该点的矢径. 符号上方的横道表示取相应函数在无限长时间上的平均值.

位力定理是 R. Clausius 于 1870 年证明的, 它是力学系统运动方程的一个结论, 假定该系统的运动限于空间的有限区域, 且其各点的速度 (的模值) 是有界的. 如果作用于系统各点的力是有势的, 则式 (1) 有如下形式:

$$\overline{T} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\overline{(\mathbf{r}_i\nabla_i)U}. \tag{2}$$

如果施加上一个条件, 即如某势能在质点坐标系中的均匀度为 $\nu$, 则从式 (2) 可得到系统动能和势能平均值之间的一个关系:

$$\overline{T} = \frac{\nu}{2}\overline{U}, \tag{3}$$

这个式子有很重要的实用价值. 例如, 对于一个谐振器 ($U \sim r^2$, $\nu=2$), 有 $\overline{T}=\overline{U}$, 而对于一个在 Newton 重力场中运动的点 ($U \sim 1/r$, $\nu=-1$), 有 $\overline{T} = -\overline{U}/2$.

位力定理应用于力学、统计力学、天文学和原子物理 (如推导状态方程, 确定分子间的交互作用常数). 以 (2) 式和 (3) 式表示的位力定理 (对于平均运算以及在 (2) 式和 (3) 式中使用的其他概念作适当的推广之后) 也可用于量子力学.

**参考文献**

[1] Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М., Механика, 3 изд., М., 1973 (英译本: Landau, L. D. and Lifshits, E. M., Mechanics, Pergamon, 1965).

[2] Давыдов, А. С. Квантовая механика, М., 1963 (英译本: Davydov, A. S., Quantum mechanics, Pergamon, 1965).

[3] Hirschfelder, J. O., Curtiss, C. F. and Bird, B. R., Molecular theory of gases and liquids, Wiley, 1954.

[4] Ольховский, И. И., Курс теоретической механики для физиков, 2 изд., М., 1974.

И. И. Ольховский 撰 王克仁 译 诸德超 校

**虚位移原理** [**virtual displacements, principle of**; **возможных перемещений принцип**], 虚速度原理 (principle of virtual velocities), 虚功原理 (principle of virtual work)

一种微分形式的**经典力学变分原理** (variational principles of classical mechanics), 表示由理想约束联结起来的力学系统之平衡的最一般的条件.

根据这个原理, 一系统在某位置上处于平衡, 当且仅当在任何时刻, 主动力在所有离自该位置的虚位移上所做的功等于或小于零:

$$\sum_{\nu}\mathbf{F}_\nu\cdot\delta\mathbf{r}_\nu \leqslant 0, \tag{*}$$

所谓虚位移, 乃是与施加在系统上的约束相容的一个无限小位移 $\delta\mathbf{r}_\nu$.

如果约束是保持形式的 (双面的), 则虚位移是可逆的, 条件 (*) 必须用等号; 如果约束是非保持的 (单面的), 虚位移就可能是不可逆的. 如系统在主动力作用下发生位移, 其约束将通过反作用力 $\mathbf{R}_\nu$ (被动力) 作用在系统的某些点上; 反作用力的确定则基于下述假定, 即约束对于系统的力学上的作用在用其所产生的反作用力来代替约束的意义下已经全部考虑进去了 (释放公理). 如果反作用力所作的元功的和 $\sum_\nu\mathbf{R}_\nu\cdot\delta\mathbf{r}_\nu\geqslant 0$, 那么这些约束就称之为理想约束; 在上面的式子中, 对于可逆虚位移用等号, 对于不可逆位移用等号和大于号. 系统的平衡状态可用 $\mathbf{r}_\nu=\mathbf{r}_\nu(t_0)$ 来表示, 如果系统处于平衡状态时的初始速度 $\mathbf{v}_\nu(t_0)=0$, 那么, 系统将继续保持在这个平衡状态上; 这里所作的假定是: 在任何时刻 $t$, $\mathbf{r}_\nu=\mathbf{r}_\nu(t_0)$ 和 $\mathbf{v}_\nu=0$ 满足约束方程.

条件 (*) 包含着理想约束系统的所有方程和平衡定律; 因此完全有理由说, 全部静力学可以归结为 (*) 这一个普遍的公式.

以虚位移原理所表示的平衡定律，首先是由 G. Ubaldi 对杠杆和动滑轮或滑车组提出的. G. Galileo 针对于斜面的情况建立了这个定律，并把它看作是简单机械平衡的共同特性. J. Wallis 把它作为静力学的一个基本定律，并由此导出机械的平衡理论. R. Descartes 把全部静力学归结为一条原理，其在实质上与 G. Galileo 的原理相同. J. Bernoulli 首先认识到这个原理的普遍性和其在求解静力学问题中的用处. J. L. Lagrange ([1]) 把这个原理表示成一般形式，也就是把静力学归结为一个普遍公式，并对处于保持（双面）约束下的系统作出了一个不完全严格的证明. Lagrange 把这个静力学的普遍公式系统地用于任意力系的平衡问题，他使用自己的方法应用这些公式，证明了物系的一些普遍的性质，解决了静力学的各种各样问题，包括不可压缩的、可压缩的和弹性的液体的平衡问题. Lagrange 认为这个原理是整个力学的基本原理. 虚功原理的严格证明是 J. Fourier ([2]) 和 M. B. Остроградский ([3]) 给出的，他们并将之推广到单面（非保持）约束的情况.

**参考文献**


[1] Lagrange, J. L., Mécanique analytique, A. Blanchard, reprint, 1965.

[2] Fourier, J.: J. École Polytechnique Ⅱ (1798), 20.

[3] Остроградский, М. В., Лекции по аналитической механике, Собр. соч. т. 1, ч. 2, М.-Л., 1946.


В. В. Румянцев 撰

【补注】 如果虚位移不是均匀地分布在整个系统上，则 (*) 式应该用如下对整个系统的积分来代替：

$$\int_V \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r} V \leqslant 0$$

**参考文献**


[A1] Szabo, J., Geschichte der mechanischen Prinzipien, Birkhauser, 1977.

[A2] Szabo, J., Höhere technische Mechanik, Springer, 1958.

[A3] Rosenberg, R. M.: Analytical dynamics of discrete systems, Plenum, 1977.


王克仁 译 诸德超 校

## 虚渐近网 [virtually-asymptotic net; виртуально-асимптотическая сеть]

Euclid 空间中曲面 $V_2$ 上的一个**网**（**微分几何学中的**）(net (in differential geometry))，它在形变 $(f: V_2 \to V_2^*)$ 下变为曲面 $V_2^*$ 的**渐近网** (asymptotic net). **Voss 曲面** (Voss surface) 就是以存在共轭虚渐近网而著称的曲面.

**参考文献**


[1] Шуликовский, В. И., Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении, М., 1963.


В. Т. Базылев 撰 沈纯理 译

## 粘性 [viscosity]

【补注】 由分子间的力引起的阻碍流动的流体和气体的性质. 在"流线型流动"中流体可以看作一些以不同速度运动即单纯剪切运动 (simple shearing motion) 的内含的平行层. 由粘性力引起的阻力给出反抗层之间速度差的切向力. Newton 粘性定律 (Newton law of viscosity) 表明，单位面积的该力正比于速度梯度. 显现这种性质的流体称为 Newton 流体 (Newton fluids).

**参考文献**


[A1] Batchelor, G. K., An introduction to fluid dynamics, Cambridge Univ. Press, 1974.


李维新 译

## 粘性解 [viscosity solutions]

【补注】 形如 $F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) = 0$ 的二阶完全非线性偏微分方程的解的一个概念，其中 $u$ 是定义在集合 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 上的实值函数，$F: \Omega \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathscr{S}^n \to \mathbf{R}$ 是连续的 ($\mathscr{S}^n$ 是实对称 $(n \times n)$ 矩阵空间). 这个概念当 $F$ 满足

$$F(x, r, p, X) \geqslant F(x, s, p, Y), \qquad \text{(A1)}$$

$$\text{每当 } r \geqslant s \text{ 且 } X \leqslant Y$$

（具有通常的关于对称矩阵的次序关系）时是适当的. 对 $X$ 的反单调性是十分弱的椭圆性条件，特别地，它为一阶方程所满足. 例子包括经典的 Hamilton-Jacobi 方程，最优控制中的 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程，微分对策中的 Isaacs 方程，可能退化的线性椭圆型和抛物型方程，微分几何的各种方程 (Monge-Ampère，极小曲面)，等等.

一个上（对应地，下）半连续函数 $u: \Omega \to \mathbf{R}$ 是 $F = 0$ 在 $\Omega$ 中的粘性下解（对应地，粘性上解），如果对每一个 $\varphi \in C^2(\mathbf{R}^n)$ 和 $\Omega$ 中 $u - \varphi$ 的局部极大（对应地，极小）点 $z$，有 $F(z, u(z), D\varphi(z), D^2\varphi(z)) \leqslant 0$（对应地，$F(z, u(z), D\varphi(z), D^2\varphi(z)) \geqslant 0$）. 连续函数 $u: \Omega \to \mathbf{R}$ 是 $F = 0$ 在 $\Omega$ 中的粘性解，如果它同时是 $F = 0$ 在 $\Omega$ 中的粘性下解和粘性上解. 定义粘性下解和粘性上解的不等式，当 $u$ 是 $F \leqslant 0$ 或 $F \geqslant 0$ 在一开集中的古典解时，它们是结构条件 (A1) 和对极值的必要条件的推论，这个事实表明粘性解的概念和二阶椭圆型方程的经典极值原理之间的联系.

这个概念的重要性在于下列事实：相当一般的唯一性定理和存在性定理对粘性解成立. 一个典型例子是唯一有界的和一致连续的函数 $u(x)$，$x = (t, y) \in [0, T] \times \mathbf{R}^m$ 的存在性和唯一性，它是 $u_t + G(D_y u,$

$D_v^2 u) = 0$ 在 $(0, T] \times \mathbf{R}^m$（当 $T > 0$）上的粘性解，且对 $y \in \mathbf{R}^m$ 满足 $u(0, y) = \psi(y)$，其中 $G(q, Z)$ 是在 $(q, Z) \in \mathbf{R}^m \times \mathscr{S}^m$ 中连续且在 $Z$ 中是反单调的，$\psi$ 在 $\mathbf{R}^m$ 上有界且一致连续．事实上，存在性本质上是唯一性证明的一个推论，在此证明中还建立了解对 $\psi$ 的单调性和连续依赖性，还可以用改造过的 **Perron 法**（Perron method）来证明．

除了许多存在性、唯一性和比较性的结果外，粘性解理论现在还包括处理其他一些基本问题，例如，包括经典 Dirichlet，Neumann 和斜微商条件在内的各种边界条件的正确提法；数值近似的收敛性；解的正则性和其他定性性质的研究；包括大变差和均匀化问题的许多渐近问题的分析；拓广到间断数据；以弱方式过渡到极限；和拓广到某些积分 － 微分算子．

粘性解的最初的应用是在对确定性发展和随机性发展的最优控制和微分对策的理论中．特别地，相关的 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程和 Isaacs 方程的唯一定义的粘性解都是对应值的函数，且这个事实提供了动态规划论证的一个完全数学的理由．

该理论的拓广包括在无限维空间中对一阶和二阶方程问题的研究，目的之一是对利用偏微分方程的最优控制的动态规划方式提供一个理论基础．

参考文献提供了关于该理论的某些基本信息，且包含了许多上面所描述的各种论题的参考文献．

**参考文献**


[A1] Barles, G. and Perthame, B., Exit time problems in optimal control and the vanishing viscosity method, *SIAM J. Control Optim.*, **26** (1988), 1133 – 1148.

[A2] Barles, G. and Perthame, B., Discontinuous solutions of deterministic optimal stopping time problems, *Modèl. Math. et Anal. Num.*, **21** (1987), 557 – 579.

[A3] Crandall, M. G., Semidifferentials, quadratic forms and fully nonlinear elliptic equations of second order, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non. Lin.*, **6** (1989), 419 – 435.

[A4] Crandall, M. G., Evans, L. C. and Lions, P. L., Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **282** (1984), 487 – 502.

[A5A] Crandall, M. G. and Lions, P. L., Hamilton-Jacobi equations in infinite dimensions. Part I. Uniqueness of viscosity solutions, *J. Funct. Anal.*, **62** (1985), 379 – 396.

[A5B] Crandall, M. G. and Lions, P. L., Hamilton-Jacobi equations in infinite dimensions. Part Ⅱ. Existence of viscosity solutions, *J. Funct. Anal.*, **65** (1986), 368 – 405.

[A5C] Crandall, M. G. and Lions, P. L., Hamilton-Jacobi equations in infinite dimensions, Part Ⅲ, *J. Funct. Anal.*, **68** (1986), 214 – 247.

[A5D] Crandall, M. G. and Lions, P. L., Hamilton-Jacobi equations in infinite dimensions. Part Ⅳ. Hamiltonians with unbounded linear terms, *J. Funct. Anal.*, **90** (1990), 237 – 283

[A6] Evans, L. C. and Souganidis, P. E., A PDE approach to geometric optics for certain reaction diffusion equations, *Ind. U. Math. J.*, **38** (1989), 141 – 172.

[A7] Ishii, H., Perron's method for Hamilton-Jacobi equations, *Duke Math. J.*, **55** (1987), 369 – 384.

[A8] Ishii, H. and Lions, P. L., Viscosity solutions of fully nonlinear second-order elliptic partial differential equations, *J. Diff. Equations*, **83** (1990), 28 – 78.

[A9A] Lions, P. L., Viscosity solutions of fully nonlinear second-order equations and optimal stochastic control in infinite dimensions. Part Ⅰ: The case of bounded stochastic evolutions, *Acta Math.*, **161** (1988), 243 – 278.

[A9B] Lions, P. L., Viscosity solutions of fully nonlinear second-order equations and optimal stochastic control in infinite dimensions. Part Ⅱ: Optimal control of Zakai's equation, in Proc. Internat. Conf. Infinite Dimensional Stochastic Differential Equations (Trento), Lecture notes in math., Vol. **1390**, Springer, 1989.

[A9C] Lions, P. L., Viscosity solutions of fully nonlinear second-order equations and optimal stochastic control in infinite dimensions. Part Ⅲ. Uniqueness of viscosity solutions of general second order equations, *J. Funct. Anal.*, **86** (1989), 1 – 18.

[A10] Jensen, R., The maximum principle for viscosity solutions of fully nonlinear second order partial differential equations, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **101** (1988), 1 – 27.


P. L. Lions, M. G. Crandal 撰　孙和生 译　陆柱家 校

**Vitali 定理 [Vitali theorem; Витали теорема]**

1) Vitali 覆盖定理（Vitali covering theorem）．如果闭集族 $\{F\}$ 为集合 $A \subset \mathbf{R}^n$ 的 Vitali 覆盖（见下），那么从 $\{F\}$ 中可以取出至多可数个互不相交的集合序列 $\{F_i\}$，$i = 1, 2, \cdots$，使得

$$m_e[A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i] = 0,$$

其中 $m_e$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的外 **Lebesgue 测度**（Lebesgue measure）．

集合 $A \subset \mathbf{R}^n$ 的 Vitali 覆盖（Vitali covering）是 $\mathbf{R}^n$ 中具有以下性质的一些子集所组成的集族 $\{E\}$：对任意 $x \in A$，在 $\{E\}$ 中存在一列 $\{E_n\}$，满足条件

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n; \tag{1}$$

$$\text{当 } n \to \infty \text{ 时}, \ \delta_n = \delta(E_n) \to 0, \tag{2}$$

其中 $\delta(E_n)$ 表示 $E_n$ 的直径；并且

$$\inf_n\left[\sup \frac{m_e E_n}{m I}\right]=\alpha>0, \qquad (3)$$

这里的 sup 是关于所有（面平行于坐标平面且含有集合 $E_n$ 的方体）$I$ 而取的；这个上确界称为 $E_n$ 的正则参数．

当 $\{F\}$ 是由面平行于坐标平面的方体组成时，这个定理是 G. Vitali（[1]）证明的．如果 $\{F\}$ 为集合 $A$ 的 Vitali 覆盖，而不是通常意义下的覆盖，那么前面叙述的 Vitali 定理仍然成立．注意，后面的条件是不可少的，即使 $\{F\}$ 是由线段组成，且对任意 $x\in A$，在 $\{F\}$ 中有一列 $\{F_n\}$，使得 $F_n$ 以 $x$ 为心，且其直径趋于 0．

**参考文献**


[1] Vitali, G., Sui gruppi di punti e sulle funzioni di variabili reali, *Atti Accad. Sci. Torino*, 43 (1908), 75－92.

[2] Saks, S., Theory of the integral, Hafner, 1952（译自波兰文）．


И. А. Виноградова 撰

【补注】 当 $n=1$ 时，Vitali 覆盖定理是证明单调函数几乎处处存在有限导数的 Lebesgue 定理（Lebesgue theorem）的主要工具（[A2]）．

还有其他定理，称为 Vitali 收敛定理（Vitali convergence theorem）．假设 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ 为**一测度空间**（measure space），$1\leqslant p<\infty$，$(f_n)_{n=1}^{\infty}$ 为 $L_p(X)$ 中的一列函数，$f$ 为 $\mu$ 几乎处处有限的 $\mathscr{A}$ 可测函数，而 $f_n\to f\mu$ 几乎处处成立，那么 $f\in L_p(X)$ 且 $\|f-f_n\|_p\to 0$，当且仅当：1）对任意正数 $\varepsilon>0$，存在集合 $A_\varepsilon\in\mathscr{A}$ 且 $\mu(A_\varepsilon)<\infty$ 使得 $\int_{A_\varepsilon}|f_n|^p d\mu<\varepsilon$ 对一切 $n\in\mathbf{N}$ 成立；2）$\lim_{\mu(E)\to 0}\int_E|f_n|^p d\mu=0$ 关于 $n$ 一致成立，见 [A2]．

至少还有两个冠以 Vitali 的名字的常用定理．一个是推广 Lebesgue 控制收敛定理的所谓等度可积或一致可积函数族的 Vitali 定理．另一个是 Vitali-Hahn-Saks 定理（Vitali-Hahn-Saks theorem），这个定理说，在 $\sigma$ 域上一列（$\sigma$ 可加）测度的逐点极限，仍为（$\sigma$ 可加）测度．

**参考文献**


[A1] Royden, H. L., Real analysis, Macmillan, 1963, Chapt. 5.

[A2] Hewitt, E. and Stromberg, K., Real and abstract analysis, Springer, 1965.

[A3] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear operators, I, Interscience, 1958.

[A4] Federer, H., Geometric measure theory, Springer, 1969.


2）关于全纯函数列一致收敛的 Vitali 定理（Vitali theorem on the uniform convergence of a sequence of holomorphic functions）．设复 $z$ 平面的区域 $D$ 上的全纯函数列 $\{f_n(z)\}$ 一致有界（见**一致有界性**（uniform boundedness））且 $\{f_n(z)\}$ 在 $E$ 上收敛，其中 $E$ 有一极限点在 $D$ 内；那么 $\{f_n(z)\}$ 在 $D$ 内部一致收敛于某个全纯函数，即在每个紧集 $K\subset D$ 上一致收敛．这定理由 G. Vitali（[1]）得到．

利用**紧性原理**（compactness principle），上述 Vitali 定理可以作如下改进，把 $D$ 上一致有界性条件换成在每个紧集 $K\subset D$ 上的一致有界性．此外，还有有关亚纯函数的**正规族**（normal family）的 Vitali 定理、拟解析函数族以及多复变全纯函数族的 Vitali 定理；在最后的情形，还必须对集合 $E\subset D\subset\mathbf{C}^n$ 加些限制，例如 $E$ 在 $\mathbf{C}^n$ 中必须含有内点（[3]，[4]）．

**参考文献**


[1A] Vitali, G., *Rend. R. Istor. Lombardo* (2), 36 (1903), 772－774.

[1B] Vitali, G., *Ann. Mat. Pura Appl.* (3), 10 (1904), 73.

[2] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, т. 1, 2 изд., М., 1967, 第 4 章（中译本：А. И. 马库雪维奇，解析函数论，高等教育出版社，1957）．

[3] Montel, P., Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications, Gauthier-Villars, 1927.

[4] Gunning, R. C. and Rossi, H., Analytic functions of several complex variables, Prentice-Hill, 1965.


Е. Д. Соломенцев 撰

**【补注】**

**参考文献**


[A1] Carathéodory, C., Theory of functions of a complex variable, 1, Chelsea, reprint, 1978（译自德文）．

[A2] Conway, J. B., Functions of one complex variable, Springer, 1973（中译本：J. B. 康威，复变函数，上海科学技术出版社，1985）．

[A3] Remmert, R., Funktionentheorie, Ⅱ, Springer, 1991.


王斯雷 译

**Vitali 变差［Vitali variation; Витали вариация］**

多元函数的一种数字特征．它可以看成**一元函数的变差**（variation of a function）在多维情形下的类比．设函数 $f(x)=f(x_1,\cdots,x_n)$，$n=2,3,\cdots$，定义在 $n$ 维平行多面体 $D_n=[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$ 上．引进记号如下：

$$\Delta_{h_k}(f;x)=f(x_1,\cdots,x_k+h_k,\cdots,x_n)+$$

$$-f(x_1,\cdots,x_k,\cdots,x_n),\quad k=1,\cdots,n,$$

$$\Delta_{h_1\cdots h_k}(f;x)=\Delta_{h_k}(\Delta_{h_1\cdots h_{k-1}}f;x),\ k=2,\cdots,n.$$

设 Π 是用超平面

$x_s = x_s^{(r_s)}, x_s^{(r_s)} < x_s^{(r_s+1)}, x_s^{(r_s+1)} - x_s^{(r_s)} = h_s^{(r_s)},$

$x_s^{(0)} = a_s, x_s^{(l_s)} = b_s, r_s = 0, 1, \cdots, l_s, s = 1, 2, \cdots, n$

将 $D_n$ 分成若干个 $n$ 维平行多面体的任意剖分．记 $V(f)$ 为对应于一切可能剖分的和

$$\sum_{r_1=0}^{l_1-1} \cdots \sum_{r_n=0}^{l_n-1} |\Delta_{h_1 \cdots h_n}^{(r_1) \cdots (r_n)}(f; x_1^{(r_1)}, \cdots, x_n^{(r_n)})| \qquad (*)$$

的上确界．如果 $V(f) < \infty$，则称 $f$ 在 $D_n$ 上有有界（限）Vitali 变差（bounded (finite) Vitali variation），而记所有这样的函数所成的类为 $V(D_n)$ 或简记为 $V$．这类函数由 G．Vitali（[1]）定义．H．Lebesgue（[2]）以及 M．Fréchet（[3]）后来也相继提出过同样的变差定义．定义在 $D_n$ 上的实值函数 $f$ 属于 $V(D_n)$，当且仅当它能表成 $f = f_1 - f_2$ 的形式，这里的 $f_1$ 和 $f_2$ 都有这样的性质，使去掉绝对值号后形如（*）的和是非负的（[4]）（一元有界变差函数的 **Jordan 分解**（Jordan decomposition）的类比）．函数类 $V(D_n)$ 可以用来引入多维 **Stieltjes 积分**（Stieltjes integral）．特别是，对于 $D_n$ 上任意连续函数 $g$ 以及 $V(D_n)$ 中的任意函数 $f$，积分 $\int_{D_n} g(x) df(x)$ 存在（[3]）．

**参考文献**


[1] Vitali, G., Sui gruppi di punti e sulle funzioni di variabili reali, *Atti Accad. Sci. Torino*, **43** (1908), 75 – 92.

[2] Lebesgue, H., Sur l'intégration des fonctions discontinues, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, (3), **27** (1910), 361 – 450.

[3] Fréchet, M., Extension au cas d'intégrales multiples d'une définition de l'intégrale due á Stieltjes, *Nouv. Ann. Math. ser.* 4, **10** (1910), 241 – 256.

[4] Hahn, H., Theorie der reellen Funktionen, 1, Springer, 1921.

[5] Riesz, F. and Szökefalvi - Nagy, B., Functional analysis, F. Ungar, 1955（译自法文）（中译本：F．黎茨，B．塞克佛尔维 - 纳吉，泛函分析讲义，科学出版社，第一卷，1963；第二卷，1980）．


Б. И. Голубов 撰　王斯雷 译

**Viviani 曲线** [**Viviani curve**; **Вивиани кривая**]

半径为 $R$ 的球面与其一母线通过球心、半径为 $R/2$ 的某个圆柱面的交线．处于圆柱面内部的球体部分称为 Viviani 体（Viviani solid）．这一曲线因 V．Viviani（17 世纪）而得名．　Е. В. Шикин 撰

【补注】 Viviani 窗（Viviani window）是 $E^3$ 中由 $\{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1, x^2 + y^2 \leqslant x\}$ 给出的点的集合．

**参考文献**


[A1] Berger, M., Geometry, II, Springer, 1987（中译本：M．贝尔热，几何，第一 – 五卷，科学出版社，1987 – 1991）．


杜小杨 译

**Владимиров 法** [**Vladimirov method**; **Владимирова метод**]

基于沿特征线积分的、求解中子在核反应堆中迁移动力学方程的最精确的数值方法之一．1952 年 В．С．Владимиров 在解球面对称反应堆情况中的积分 - 微分动力学方程时提出了这个方法．这个方法的原理可以用带中子源的次临界反应堆作例子来说明．对一个一维球对称几何单速问题，中子通量 $\varphi(r, \mu)$（其中 $r$ 是半径，$0 \leqslant r \leqslant R$，$\mu$ 是中子速度向量和半径夹角的余弦）方程有下列形式

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} + \Sigma(r)\varphi = $$
$$= \frac{\Sigma_s(r)}{2} \int_{-1}^{+1} \varphi(r, \mu') d\mu' + f(r), \qquad (1)$$

其边界条件为

$$\varphi(R, \mu) = 0, \text{ 当 } \mu \leqslant 0 \text{ 时}, \qquad (2)$$

这个条件是指没有从系统的外边界 $r = R$ 外面侵入的中子；$\Sigma(r)$，$\Sigma_s(r)$ 和 $f(r)$ 是给定的 $r$ 的分段连续函数．运用代换

$$x = r\mu; \; y = r\sqrt{1 - \mu^2} \qquad (3)$$

后得到方程

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \Sigma \psi(x, y) = \frac{\Sigma_s}{2} \int_{-1}^{+1} \varphi d\mu + f, \qquad (4)$$

其中 $\psi(x, y) = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2}, x/\sqrt{x^2 + y^2})$，这个方程作为一阶常微分方程可以很容易求解，而且

$$\psi(x, y) = \int_{-\sqrt{R^2 - y^2}}^{x} \left[ \frac{\Sigma_s}{2} \int_{-1}^{+1} \varphi d\mu + f \right] e^{-\int_{x'}^{x} \Sigma dx''} dx'. \qquad (5)$$

对动力学方程（1）的微分部分的每根特征线 $y = y_i$，我们选择一组特殊的结点 $x_{ki} = \sqrt{r_k^2 - y_i^2}$，其中 $r_k$ 是所选网格的半径．方程（5）可以用逐次逼近（见**逐次逼近法**（sequential approximation, method of））求解，从函数的初始逼近开始：

$$Q(r) = \frac{\Sigma_s}{2} \int_{-1}^{+1} \varphi d\mu + f. \qquad (6)$$

其中

$$\varphi(r_k, \mu_{ki}) = \psi(x_{ki}, y_i),$$

（其中 $\mu_{ki} = x_{ki}/r_k$），在用求和代替（5）中的积分，得到特征线上两个相邻点上互相有关的 $\varphi$ 和 $Q$ 值的表达式后，在所有网格结点上，很容易用（5）求得

$\varphi(r_k, \mu_{k,l})$. 为了得到后面逼近中的 $Q(r)$ 值，必须计算 $\int_{-1}^{+1}\varphi d\mu$，这可以用圆 $x^2+y^2=r_k^2$ 上点的求积公式得到．逐次逼近的收敛速度由反应堆的物理特性和规模决定．

本征值问题（确定反应堆的临界参数）可以用类似的方法求解．

Владимиров 法可以推广到几种速度和多维问题，可以很容易编制计算机程序．和 **Carlson 法**（Carlson method）不同，Владимиров 法使用不同 $r$ 的 $\mu$-变量网格，这样，与 $r=0$ 附近的区域相比较，提高了在反应堆-真空边界（靠近 $r=R$）上的计算精度，其中中子通量是几乎各向同性的．

**参考文献**

[1] Марчук, Г. И., Методы расчета ядерных реакторов, М., 1961.

В. А. Чуянов 撰　袁国兴　张宗琳 译

**Владимиров 变分原理 [Vladimirov variational principle; Владимирова вариационный принцип]**

对平稳单速齐次输运方程（见**输运方程，数值方法**（transport equation, numerical method））

$$(\bar\Omega, \nabla\psi) + \Sigma(x)\psi = \lambda\int_{|\bar\Omega'|=1}\theta(x, \mu_0)\psi(\bar\Omega', x)d\bar\Omega', \quad (1)$$

$$\mu_0 = (\bar\Omega', \bar\Omega),$$

带边界条件

$$\psi|_{x\in\Gamma} = 0, \ (\bar\Omega, \bar n) < 0 \quad (2)$$

的一个变分原理，这里 $\Gamma$ 是凸有界区域 $G$ 的边界．如果散射指标 $\theta(x, \mu_0)$ 是 $\mu_0$ 的偶函数，则转换到新的未知函数

$$u = \frac{[\psi(\bar\Omega, x) + \psi(-\bar\Omega, x)]}{2}$$

把问题（1），（2）简化成自伴形式．在这样得出的问题中，对最小本征值 $\lambda_1$ 的 Владимиров 变分原理说明 $\lambda_1$ 是泛函

$$\int_{|\bar\Omega|=1}\int_\Gamma|(\bar\Omega, \bar n)|u^2(\bar\Omega, x)d\bar\Omega ds_x +$$

$$+\int_{|\bar\Omega|=1}\int_G\frac{1}{\Sigma(x)}(\bar\Omega, \nabla u)^2 dx d\bar\Omega +$$

$$+\int_{|\bar\Omega|=1}\int_G\Sigma(x)u^2(\bar\Omega, x)dx d\bar\Omega$$

在满足条件

$$\int_{|\bar\Omega|=1}\int_{|\bar\Omega'|=1}\int\theta(x, \mu_0)u(\bar\Omega', x)dx d\bar\Omega' d\bar\Omega = 1$$

的函数 $u(\bar\Omega, x)$ 的集合上的极小值．其对应的（非负）本征函数实现了该泛函的极小值（[3]）．在这变分原理中相应的边界条件是自然的．对较高本征值和对非齐次问题的变分原理用类似方式表述．

该原理首先由 В. С. Владимиров（[1]）得到，而且它引出了**球面调和函数法**（spherical harmonics, method of）中的最优边界条件．Владимиров 变分原理与有限差分法相结合，广泛地应用于中子物理学的数值计算中．

**参考文献**

[1] Владимиров, В. С., Математические задачи односкоростной теории переноса частиц, М. 1961.

[2] Марчук, Г. И., Методы расчета ядерных реакторов, М., 1961.

[3] Davison, B., Neutron transport theory, Oxford Univ. Press, 1957.

Ю. Н. Дрожжинов 撰

【补注】 亦见 **Владимиров 法**（Vladimirov method）．

葛显良 译　鲁世杰 校

**Власов 动理学方程 [Vlasov kinetic equation; Власова кинетическое уравнение]**

关于带电粒子的动理学方程，其中粒子之间的相互作用通过自洽电磁场予以描述．方程具有形式（见[1]，[2]）

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\mathrm{grad}_{\mathbf r} f_\alpha +$$

$$+\frac{e_\alpha}{m_\alpha}[\mathbf E + [\mathbf V\times\mathbf B]]\cdot\mathrm{grad}_{\mathbf v} f_\alpha = 0, \quad (1)$$

其中 $f_\alpha(t, \mathbf r, \mathbf v)$ 是粒子分布函数，而指标 $\alpha$ 指示粒子种类．自洽电磁场 **E**，**B** 根据 **Maxwell 方程组**（Maxwell equations）

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\mu_0}\operatorname{rot}\mathbf B = \varepsilon_0\frac{\partial\mathbf E}{\partial t} + \mathbf j, \ \operatorname{div}\mathbf E = \frac{\rho}{\varepsilon_0},\\ \operatorname{rot}\mathbf E = -\frac{\partial\mathbf B}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}\mathbf B = 0\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

得出，其中 $\varepsilon_0$ 和 $\mu_0$ 为真空电容率和真空磁导率，而体电荷密度 $\rho$ 和体电流密度 **j** 则与粒子分布函数 $f_\alpha$ 通过

$$\left.\begin{aligned}\rho(t, \mathbf r) = \sum_\alpha e_\alpha\int f_\alpha(t, \mathbf r, \mathbf v)d^3\mathbf v,\\ \mathbf j(t, \mathbf r) = \sum_\alpha e_\alpha\int f_\alpha(t, \mathbf r, \mathbf v)\mathbf v d^3\mathbf v\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

相联系．如果忽略粒子间相互作用或者假定多粒子分布函数是单粒子分布函数的乘积，则 Власов 动理学方程可由给定种类 $\alpha$ 的全部粒子的分布函数的 **Liouville 方程**（Liouville equation）获得（见[3]，[4]）．

А. А. Власов 所提出的方程组（1），（2），（3），被广泛应用于等离子体物理学．以方程组（1），（2），（3）的线性化为基础的线性理论是得到最充分发展的理论．它被用于研究等离子体的小振荡

和稳定性([5]).拟线性理论,它使非线性效应的研究成为可能,正处于全力发展中.

**参考文献**


[1] Власов, А. А., 《ЖЭТФ》, **8** (1938), 291.

[2] Власов, А. А., Теория многих частиц, М.-Л., 1950 (英译本: Vlasov, A. A., Many-particle theory and its application to plasmas, Gordon & Breach, 1961).

[3] Боголюбов, Н. Н., Проблемы динамической теории в статистической физике, М.-Л., 1946 (英译本: Bogolyubov, N. N., Problems of a dynamic theory in statistical physics, North-Holland, 1962).

[4] Силин, В. П., Введение в кинетическую теорию газов, М., 1971.

[5] Силин, В. П., Рухадзе, А. А., Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, М., 1961.


Д. П. Костомаров 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Ecker, G., Theory of fully ionized plasmas, Acad. Press, 1972.


【译注】

**参考文献**


[B1] R. Balescu, Transport processes in plasmas, Vol. 1, Classical transport, North-Holland, Amsterdam, 1988 (中译本: R. Balescu, 等离体中的输运过程, 第一卷, 经典输运理论, 首都师范大学出版社, 1995).

[B2] R. Balescu, Transport processes in plasmas, Vol. 2, Neoclassical transport, North-Holland, Amsterdam, 1988 (中译本: R. Balescu, 等离体中的输运过程, 第二卷, 新经典输运理论, 首都师范大学出版社, 1996).


徐锡申 译

**Volterra 方程 [Volterra equation; Вольтерра уравнение]**

形如

$$\int_a^x K(x,s)\varphi(s)ds = f(x) \qquad (1)$$

(第一类线性 Volterra 积分方程 (linear Volterra integral equation of the first kind)) 或形如

$$\varphi(x) - \lambda\int_a^x K(x,s)\varphi(s)ds = f(x) \qquad (2)$$

(第二类线性 Volterra 积分方程 (linear Volterra integral equation of the second kind)) 的一种积分方程 (integral equation). 这里 $x, s, a$ 是实数, $\lambda$ 是 (一般是复的) 参数, $\varphi(s)$ 是未知函数, $f(x)$, $K(x,s)$ 是给定的函数, 分别在 $[a,b]$ 上和区域 $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant s \leqslant x$ 中平方可积. 函数 $f(x)$ 称为自由项 (free term), 而函数 $K(x,s)$ 称为核 (kernel).

Volterra 方程可以看成 **Fredholm 方程** (Fredholm equation) 的特殊情形, 其核 $K(x,s)$ 定义在正方形 $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant s \leqslant b$ 上而在三角形 $a \leqslant x < s \leqslant b$ 中为零. 无自由项的第二类 Volterra 方程称为齐次 Volterra 方程 (homogeneous Volterra equation). 表达式

$$\int_a^x K(x,s)\,\varphi(s)ds$$

定义一个作用在 $L_2$ 上的积分算子; 它称为 **Volterra 算子** (Volterra operator).

(2) 型方程首先由 V. Volterra ([1], [2]) 作了系统的研究. Volterra 方程 (1) 的一种特殊情况, **Abel 积分方程** (Abel integral equation), 首先由 N. H. Abel 作了研究. 第二类 Volterra 方程理论的主要结果可描述如下. 对每一个复数 $\lambda \neq \infty$, 第二类 Volterra 方程存在平方可积的解且解是唯一的. 这个解可以由逐次逼近得到 (见**序列逼近法** (sequential approximation, method of)), 即作为均方收敛序列:

$$\varphi_{n+1}(x) = \lambda\int_a^x K(x,s)\varphi_n(s)ds + f(x) \qquad (3)$$

的极限, 其中 $\varphi_0$ 是一个任意的平方可积函数. 在连续核 $K(x,s)$ 和 $f \in C([a,b])$ 的情况, 此序列在 $[a,b]$ 上一致收敛到唯一的连续解.

以下的几个定理适用于第一类 Volterra 方程. 如果 $f(s)$ 和 $K(x,s)$ 是可微的, $K(x,x) \neq 0$, $x \in [a,b]$, 且设 $K(x,x)$ 和 $K'_x(x,s)$ 分别在 $[a,b]$ 上和 $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant s \leqslant b$ 上平方可和, 则第一类 Volterra 方程等价于由微分第一类 Volterra 方程得到的且具有形式

$$\varphi(x) + \int_a^x \frac{K'_x(x,s)}{K(x,x)}\,\varphi(s)ds = \frac{f'(x)}{K(x,x)}$$

的第二类 Volterra 方程. 如果至少在一点 $K(x,x) = 0$, 则第一类 Volterra 方程的求解必须更仔细周到地研究. 另一方面, 如果 $K(x,x) \equiv 0$, 在某些条件下, 微分运算可以重复. 如果微分不可能或者其结果不是第二类 Volterra 方程, 则这个第一类方程可以求解, 例如用**正则化** (regularization) 算法.

在第二类 Volterra 方程的实际应用中, 很重要的是其解至少可近似地找到, 例如用逐次逼近法. 然而, 其他一些方法通常是更方便, 将这样的方法之一描述如下. 设 $f$ 和 $K$ 是连续函数. 借助于分点 $x_i$, 和 $x_0 = a$, $x_N = b$ 把区间 $[a,b]$ 细分成 $N$ 个相等部分. 为求 $\varphi(x_i)$ 的近似值, 此区间上的积分用求积和代替, 例如用具有结点 $x_0, \cdots, x_{i-1}$ 的矩形公式:

$$\int_a^{x_i} K(x_i,s)\varphi(s)ds \approx \sum_{j=0}^{i-1} K(x_i,x_j)\varphi(x_j)\frac{b-a}{N}.$$

于是 $\varphi(x_i)$ 的近似值利用关系式

$$\varphi(x_i)=\lambda\frac{b-a}{N}\sum_{j=0}^{i-1}K(x_i,x_j)\varphi(x_j)+f(x_i),$$
$$\varphi(x_0)=f(a) \qquad (4)$$

得到．该近似解在 $[a,b]$ 上位于划分点之间点上的值可以求得，例如，由关系式

$$\varphi(x)\approx\lambda\frac{b-a}{N}\sum_{j=1}^{i-1}K(x,x_j)\varphi(x_j)+f(x),$$
$$x_{i-1}<x\leqslant x_i. \qquad (5)$$

当 $N\to\infty$ 这近似解一致收敛于第二类 Volterra 方程的精确解．

以上方法的很多修改是可能的．

上面所述的一切也适用于其核 $K(x,s)$ 为 $r\times r$ 维矩阵而 $\varphi$ 和 $f$ 为 $r$ 维向量函数的 Volterra 方程．

Volterra 方程或广义 Volterra 方程（generalized Volterra equation）这名称也给予更一般的形如

$$\varphi(P)-\lambda\int_{D(P)}K(P,Q)\varphi(Q)dQ=f(P) \qquad (6)$$

的方程，如果像（3）这样的逐次逼近在函数 $\varphi$ 和 $f$ 的定义区域上对所有的 $\lambda\neq\infty$ 在某种意义下收敛（例如一致地或平均地）．这里 $P$ 和 $Q$ 是 $n$ 维 Euclid 空间的点，$D(P)$ 是积分区域，它通常依赖于点 $P$，对任意的 $P, D(P)\subset D$，以下方程可作为一个例子：

$$\varphi(x,y)-\lambda\int_a^x\int_a^b K(x,y,\xi,\eta)\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta=$$
$$=f(x,y).$$

如果函数 $K(x,y,\xi,\eta)$ 对 $a\leqslant x\leqslant b$, $a\leqslant y\leqslant b$, $a\leqslant\xi\leqslant b$, $a\leqslant\eta\leqslant b$ 平方可积，而 $f(x,y)$ 对 $a\leqslant x\leqslant b$, $a\leqslant y\leqslant b$ 平方可积，则序列（3）对 $\lambda\neq\infty$ 是均方收敛的．第一类广义 Volterra 方程通常不能化成第二类 Volterra 方程，虽然在特殊情形这是可能的．

（2）和（6）型的 Volterra 方程的一种进一步的推广是线性算子方程（linear operator equation）：

$$\varphi-\lambda A\varphi=f, \qquad (7)$$

其中 $\varphi$ 和 $f$ 是一个 Banach 空间 $E$ 的元素，$\lambda$ 是一个复参数而 $A$ 是完全连续的线性算子（见**完全连续算子**（completely-continuous operator））．这方程称为 Volterra 算子方程（Volterra operator equation），而算子 $A$ 称为 Volterra 算子（Volterra operator），或抽象 Volterra 算子（abstract Volterra operator），如果算子 $(I-\lambda A)$ 对所有的 $\lambda\neq\infty$ 在 $E$ 中是可逆的．在这种情况下以下类型的序列：$\varphi_0\in E$ 任意，$\varphi_{n+1}=\lambda A\varphi_n+f$，按 $E$ 的范数收敛到方程（7）的一个解．在 Volterra 算子和 Volterra 方程的现代理论中，在抽象的和普通的 Volterra 算子之间已建立了深刻的关系．

非线性 Volterra 方程（non-linear Volterra equation）有时是给予这样一些 Volterra 方程的名称，其中乘积 $K(x,s)\varphi(s)$ 已换成某一关于 $\varphi(s)$ 是非线性的函数 $K(x,s,\varphi(s))$．这种类型的方程在理论和应用的研究中经常遇到．例如，一个常微分方程的 **Cauchy 问题**（Cauchy problem）可以无困难地化成解非线性 Volterra 方程的问题．应用位势论到抛物型方程的边值问题就化这样的问题到一个广义 Volterra 方程．在非线性 Volterra 方程的情况可以证明，如果关于 $K(x,s,\varphi(s))$ 作某些假设，则类型（3）的逐次逼近在一区间 $[a,a+\Delta a]$ 上收敛，这里 $\Delta a$ 充分小．非线性 Volterra 方程的近似解可用递推关系（4）求得；只要把 $K(x_i,x_j)\varphi(x_j)$ 换成 $K(x_i,x_j,\varphi(x_j))$．如果 $K(x,s,\varphi(s))$ 不依赖于 $x$，则这方法与 **Euler 法**（Euler method）是一样的．

**参考文献**


[1] Volterra, V., Sulla inversione degli integrali definiti, *Rend. Accad. Lincei*, 5 (1896), 177-185, 289-300.

[2] Volterra, V., Sopra alcune questioni di inversione di integrali definiti, *Ann. di Math.* (2), 25 (1897), 139-187.

[3] Смирнов, В.И., Курс высшей математики, т. 4, 5 изд., М., 1958（中译本：В.И.斯米尔诺夫，高等数学教程，第四卷第一、二分册，人民教育出版社，1958）.

[4] Владимиров, В.С., Уравнения математической физики, М., 1967（英译本：Vladimirov, V.S., Equations of mathematical physics, Mir, 1984）.

[5] Петровский, И.Г., Лекции по теории интегральных уравнений, 3 изд., М., 1965（中译本：И.Г.彼得罗夫斯基，积分方程论讲义，高等教育出版社，1954）.

[6] Тихонов, А.Н.,《Бюллетень Моск.ун-та》(А), 1 (1938), 8, 1-25.


А.Б.Бакушинский 撰

【补注】 上面给出的数值方法是 Nyström 法（Nyström method）对 Volterra 方程的特殊情形．而对一般的 Fredholm 方程，（4）是一个要求解的线性组，这方程组在这里有递推关系的形式．另外的数值方法，见[A1]．第一类 Volterra 方程一般是不适定的（见**不适定问题**（ill-posed problems））．如果用微分法化成第二类方程，则其不适定性包含于 $f$ 的微分中．

**参考文献**


[A1] Baker, C.T.H., The numerical treatment of integral equations, Clarendon Press, 1977.

[A2] Burton, T.A., Volterra integral and differential equations, Acad. Press, 1983.

[A3] Miller, R. K., Nonlinear Volterra integral equations, Benjamin, 1971.
[A4] Corduneanu, C., Integral equations and applications, Cambridge Univ. Press, 1991.
[A5] Gohberg, I. C. and Goldberg, S., Basic operator theory, Birkhäuser, 1981.
[A6] Gohberg, I. C., Goldberg, S. and Kaashoek, M. A., Classes of linear operators, I, Birkhäuser, 1990.
[A7] Gohberg, I. C. and Kreĭn, M. G., Theory and applications of Volterra operators in Hilbert space, Amer. Math. Soc., 1965 (译自俄文).
[A8] Jörgens, K., Lineare Integraloperatoren, Teubner, 1970.
[A9] Zabreĭko, P. P., et al., Integral equations-a reference text, Noordhoff, 1975 (译自俄文).
[A10] Taylor, A. E. and Lay, D. C., Introduction to functional analysis, Wiley, 1980.

葛显良 译 吴绍平 校

**Volterra 核 [Volterra kernel; Вольтерра ядро]**

两个实变量 $s, t$ 的(矩阵)函数 $K(s, t)$ 使得或者当 $a \leqslant s < t \leqslant b$ 时 $K(s, t) \equiv 0$, 或者当 $a \leqslant t < s \leqslant b$ 时 $K(s, t) \equiv 0$. 如果这样一个函数是作用在空间 $L_2(a, b)$ 上的线性积分算子的核, 且它本身在它不为零的三角形上平方可积, 则由它生成的算子称为 Volterra 积分算子(见 **Volterra 算子**(Volterra operator)). А. Б. Бакушинский 撰

【补注】 亦见 **Volterra 方程**(Volterra equation).

葛显良 译 吴绍平 校

**Volterra 算子 [Volterra operator; Вольтерра оператор]**

作用在 Banach 空间上, 其谱仅由点零组成的一个完全连续的线性算子 $V$ (见**完全连续算子**(completely-continuous operator)). $[a, b]$ 上平方可和函数的空间上一个线性 Volterra 积分算子(linear Volterra integral operator)的例子是

$$V\varphi(x) = \int_a^x K(x, s)\varphi(s)ds.$$

一个非线性 Volterra 积分算子(non-linear Volterra integral operator)是形如

$$V\varphi(x) = \int_a^x K(x, s, \varphi(s))ds$$

的算子. 按 V. Volterra 的名字而命名, 他研究了对应于这样的算子的 Volterra 积分方程(见 **Volterra 方程**(Volterra equation)). А. Б. Бакушинский 撰

【补注】 Hilbert 空间上 Volterra 算子的谱理论(不变子空间, 典范模型, 酉不变量)是非自伴算子理论中的一个重要课题. 由于这个谱仅由一个点所组成, 来自自伴算子理论的经典谱方法不能应用于 Volterra 算子, 而新的工具用于研究这样的算子, 其中有特征算子函数理论. 更多的信息见 [A1], [A2]. Volterra 算子也用来对人口动力学问题提供数学模型([A3]). 对 Volterra 积分和泛函方程的一般理论见 [A4].

**参考文献**

[A1] Gohberg, I. C. and Kreĭn, M. G., Theory and applications of Volterra operators in Hilbert space, Amer. Math. Soc., 1970 (译自俄文).
[A2] Brodskiĭ, M. S., Triangular and Jordan representations of linear operators, Amer. Math. Soc., 1971 (译自俄文).
[A3] Metz, J. A. J. and Diekmann, O. (eds.), The dynamics of physiologically structured populations, Lecture notes in biomath., 68, Springer, 1986.
[A4] Grippenberg, G., Londen, S.-O. and Staffans, O., Volterra integral and functional equations, Cambridge Univ. Press, 1990.
[A5] Moiseiwitsch, B. L., Integral equations, Longman, 1977.
[A6] Jerri, A. J., Introduction to integral equations with applications, M. Dekker, 1985.

葛显良 译 吴绍平 校

**Volterra 级数 [Volterra series; ряд Вольтерры]**, 积分幂级数(integro-power series)

一个级数, 其各项含有积分, 而积分号下含有未知函数的幂. 设 $K(s, t_1, \cdots, t_k)$ 是立方体 $[a, b]^{k+1}$ 内各自变量的连续函数, $U(s)$ 是 $[a, b]$ 上任一连续函数. 表达式

$$U^{\alpha_0}(s)\int_a^b \cdots \int_a^b K(s, t_1, \cdots, t_k)U^{\alpha_1}(t_1) \cdots U^{\alpha_k}(t_k)dt_1 \cdots dt_k$$

称为 $U$ 的 $m$ 次 Volterra 项(Volterra term), 其中 $\alpha_0, \cdots, \alpha_k$ 是非负整数, 且 $\alpha_0 + \cdots + \alpha_k = m$. 称两个 $m$ 次 Volterra 项属于同一类型, 如果它们的表达式中只有核 $K$ 不同. $m$ 次(各种类型的) Volterra 项的有限和称为函数 $U$ 的 $m$ 次 Volterra 形式(Volterra form), 记作

$$W_m\binom{s}{U}.$$

以

$$|W|_m\binom{s}{U}$$

记核 $K$ 代之以 $|K|$ 的 Volterra 形式, 并令

$$\widetilde{U} = \max_{[a, b]}|U(s)|, \quad \widetilde{W}_m = \max_{[a, b]}|W|_m\binom{s}{U},$$

则有

$$\left| W_m \binom{s}{U} \right| \leqslant \widetilde{W}_m \widetilde{U}^m.$$

表达式

$$W_0\binom{s}{U} + W_1\binom{s}{U} + W_2\binom{s}{U} + \cdots$$

称为 Volterra 级数（Volterra series）．如果数项级数 $\widetilde{W}_0 + \widetilde{W}_1\widetilde{U} + \widetilde{W}_2\widetilde{U}^2 + \cdots$ 收敛，则称所给 Volterra 级数是正则收敛的（regularly convergent）．此时所给 Volterra 级数在 $[a, b]$ 上绝对并一致收敛且其和连续．

类似地可引进多个函数变元的 Volterra 级数以及用有限维 Euclid 空间中某个闭有界集代替区间 $[a, b]$ 的 Volterra 级数．Volterra 级数是抽象**幂级数**（power series）这一更一般概念的一种特殊情形．

**参考文献**


[1] Ляпунов, А. М., О фигурах равновесия, мало отличающихся от эллипсоидов вращающейся однородной массы жидкости, Собр. соч. т. 4, М., 1959.

[2] Schmidt, E., Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen, Ⅲ, *Math. Ann.*, 65 (1908), 370 – 399.

[3] Вайнберг, М. М., Треногин, В. А., Теория ветвления решений нелинейных уравнений, М., 1969 (英译本：Vainberg, M. M., Trenogin, V. A., Theory of branching of solutions of non-linear equations, Noordhoff, 1974). В. А. Треногин 撰


【补注】 一个输入为 $u$，输出为 $y$ 的非线性输入 - 输出动力系统引出形如

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau_1)u(t-\tau_1)d\tau_1 +$$
$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h_2(\tau_1, \tau_2)u(t-\tau_1)u(t-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 +$$
$$+\cdots+\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} h_n(\tau_1, \cdots, \tau_n)u(t-\tau_1)\cdots$$
$$\cdots u(t-\tau_n)d\tau_1\cdots d\tau_n + \cdots$$

的 Volterra 级数，其中 $h_n(\tau_1, \cdots, \tau_n) = 0$，如果对某个 $j$ 有 $\tau_j < 0$．这种级数由 V. Volterra 首次导入（[A1]），N. Wiener 首次把它应用于系统论问题并导致 Wiener 积分（[A2]）．关于系统论中 Volterra 级数的广泛讨论，见 [A3]．

**参考文献**


[A1] Volterra, V., Theory of functionals and of integral and integro-differential equations, Dover, reprint, 1959（译自法文）.

[A2] Wiener, N., Nonlinear problems in random theory, M.I.T., 1958.

[A3] Schetzen, M., The Volterra and Wiener theories of nonlinear systems, Wiley, 1980. 沈永欢 译


**体积 [volume; объем трехмерного тела]**

a）三维物体的体积（volume of a three-dimensional body）是该物体的一个数字特征；在物体可分解为有限个单位方体（即边长为 1 的方体）这种最简单的情形，它的体积等于这些单位方体的个数．对于可以定义体积的三维物体（即三维 Euclid 空间的点集），其体积具有类似于平面图形**面积**（area）的一些性质：1）体积是非负的；2）体积是可加的：若两个无公共内点的物体 $P$ 和 $Q$ 分别有体积 $v(P)$ 和 $v(Q)$，则它们的并的体积等于其各个体积的和，$v(P\cup Q) = v(P) + v(Q)$；3）体积关于位移是不变的：若物体 $P$ 和 $Q$ 均可定义体积，且它们是全等的，那么 $v(P) = v(Q)$；以及 4）单位方体的体积等于 1．这些性质意味着体积是单调的：若物体 $P$ 和 $Q$ 都可定义体积 $v(P)$ 和 $v(Q)$，且 $P\subset Q$，则 $v(P)\leqslant v(Q)$；以及，两相似物体的体积与它们相应的相似系数的立方成正比．

此外，在所有多面体所成的集合上，存在着唯一的非负函数满足性质 1）– 4）．然而，在平面上，任何两个相等（即面积相等）的多边形有相同的形状，即它们中的任何一个可以分解成一些多边形，使它们拼起来成为另一个多边形，而这条性质在三维空间中不再成立：存在着两个相等（体积相等的）多面体，它们不是等一分解的（见**等容与等部件的图形**（equal content and equal shape, figures of））．

通过从多面体集合的极限过程，可以将体积概念拓广到更广的一类物体，而仍保持性质 1）– 4）．例如，边界为逐片光滑的物体，特别是，球，球壳，球截形，球心角体，圆柱体，锥体等．如果有界物体 $G$ 的边界是光滑曲面，那么体积 $v(G)$ 可以定义如下．考虑含在 $G$ 内的所有多面体 $P$，以及包含 $G$ 的所有多面体 $Q: P\subset G\subset Q$．那么下面的等式成立：

$$\sup_{P\subset G} v(P) = \inf_{Q\supset G} v(Q).$$

这个公共值称为 $G$ 的**体积**（volume）$v(G)$．与计算平面图形面积的情形类似，物体体积也可以用以下方法计算：将它分解成几个其体积为已知或容易计算的若干部分．在这方面，Cavalieri 原理（Cavalieri principle）对体积是正确的：用平行于某给定平面的任何平面，去截可以定义体积的两个物体，假如每一截面所截得的两平面图形的面积相等，那么两物体有相同的体积．积分学提供了计算体积的一般方法，把它归结成相应重积分的计算．用积分学也可以证明 Cavalieri 原理．

b) 体积概念到三维 Euclid 空间中更广的子集类上的扩张，导致 Jordan 容度 (Jordan content) 以及可方体化集的概念 (见 **Jordan 测度** (Jordan measure)). 上面提到的物体都是可方体化集，所以它们的 Jordan 容度是可以定义的．

如果 $M^3$ 是三维连续可微流形，具有 Riemann 度量

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij} dx^i dx^j,$$

而 $g = \det \| g_{ij} \|$，那么 $M^3$ 内集合 $E$ 的体积 (volume of a set) 由积分值

$$\iiint_E |g| dx^1 dx^2 dx^3$$

定义．这样定义的体积，与给定流形上局部坐标的选取无关．

c) 三维物体体积的概念可以推广到任意 $n$ 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 的子集中去；$n$ 维体积 ($n$-dimensional volume) 或容度 (content) 是满足条件 1) − 4) 的集函数，而立方体应理解为 $n$ 维立方体．$n$ 维空间中集合体积的计算，归结为 $n$ 重积分的计算．

设 $E$ 为 $n$ 维平行多面体，由向量 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n$ 张成，则

$$v(E) = \sqrt{|\det \| \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \| |}$$

(根号内表达式是向量 $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$ 的 **Gram 行列式** (Gram determinant)).

以

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx^i dx^j$$

为度量的 $n$ 维 Riemann 流形的子集 $E$ 的体积是积分

$$\int_E \cdots \int |g| dx^1 \cdots dx^n,$$

其中 $g = \det \| g_{ij} \|$.

d) 体积概念不仅可以在 Euclid 空间中考虑，而且可以在仿射空间中考虑．假设 $E$ 为 $n$ 维仿射空间 $\mathbf{R}^n$ 的子集，而 $(x^1, \cdots, x^n)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 的一个给定的仿射坐标系．设

$$V_x(E) = \int_E \cdots \int dx^1 \cdots dx^n.$$

如果 $(y^1, \cdots, y^n)$ 为另一坐标系且 $y^i = a^i_j x^j + b^i$，则

$$V_y(E) = |\det \| a^i_j \| | V_x(E),$$

也就是说，积分 $V_x(E)$ 是关于权 −1 的定号的相对不变量．相对不变量 $V_x(E)$ 是集合 $E$ 的仿射体积 (affine volume). 仿射体积在平行位移下不变，且若 $E = E_1 \cup E_2$，$E_1 \cap E_2 = \phi$ 以及 $V_x(E_1)$，$V_x(E_2)$ 都有定义，那么 $V_x(E) = V_x(E_1) + V_x(E_2)$. 在坐标的仿射变换下，仿射体积不变；仿射体积还有以下性质：$\alpha$) 两物体若在同一坐标下有相同的体积，那么它们在另外的坐标系下也是相等的；$\beta$) 若在同一坐标内，某集合的体积等于另外两集合的体积之和，那么在其他坐标下，这也是对的；以及 $\gamma$) 两集合体积之比在坐标的仿射变换下不变．

设 $\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中坐标系 $x_1, \cdots, x_n$ 的坐标向量，又设原点为某固定点 $0 \in \mathbf{R}^n$. 假设 $\mathbf{a}_i = a^j_i \mathbf{e}_j$ $(i = 1, \cdots, n)$ 为原点在 0 的向量系，而 $E$ 是由 $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n$ 张成的 $n$ 维平行多面体，那么

$$V_x(E) = |\det \| a^j_i \| |.$$

量 $\det \| a^j_i \|$ 称为 $E$ 关于所选基 $\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n$ 的有向体积 (oriented volume).

**参考文献**

[1] Никольский, С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1 − 2, М., 1975 (中译本：С. М. 尼科尔斯基，数学分析教程，第一卷，一、二分册，人民教育出版社，1980 − 1981，第二卷，高等教育出版社，1992).

[2] Колмогоров, А. Н., Фомин, С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М. 1981 (中译本：А. Н. 柯尔莫果洛夫，С. В. 佛明，函数论与泛函分析初步，上、下册，高等教育出版社，1992).

[3] Рашевский, П. К., Риманова геометрия и тензорный аналио, 3 изд., М., 1967 (中译本：П. К. 落薛夫斯基，黎曼几何与张量解析，高等教育出版社，1955).

[4] Ильин, В. А., Позняк, Э. Г., Основы математического анализа, 3 изд., т. 1, М., 1971 (英译本：Il'in, V. A. and Poznyak, E. G., Fundamentals of mathematical analysis, 1 − 2, Mir, 1982).

Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】

**参考文献**

[A1] Eves, H., A survey of geometry, 1 − 2, Allyn and Bacon, 1963.

王斯雷 译

**体积形式** [**volume form**; **объема форма**]，体积元 (volume element)

【补注】令 $V$ 是一个具有已给定向 (orientation) 和一个内积 (inner product) 的 $n$ 维向量空间．相应的体积形式或称体积元素即 $V$ 上的 $n$ 形式 (见外形式 (exterior form)) 空间中唯一的对具有给定定向的规范正交基 (相对于已给内积) 使得 $\omega(v_1, \cdots, v_n) = 1$ 的元素 $\omega \in \wedge^n(V)$. 回忆一下，$\wedge^n(V)$ 是一维的．若 $V = \mathbf{R}^n$ 且有标准内积和定向，则对 $n$ 个向量 $v_1, \cdots, v_n$ 所成的组，$\omega(v_1, \cdots, v_n) = \det(v_1, \cdots, v_n)$ (这里 $v_1, \cdots, v_n$ 要对标准基写出，来计算行列式)，而 $|\det(v_1, \cdots, v_n)|$ 是由零点起到 $v_1, \cdots, v_n$ 作出的线段所

成的平行多面体的体积.

若 $M$ 是一有定向的 Riemann 流形，则在定义 $M$ 上的体积形式 $\omega \in \wedge^n M$ 时，要求 $\omega(x): T_x M \times \cdots \times T_x M \to \mathbf{R}$ 对每点 $x \in M$ 都恰好是由 $T_x M$ 的内积与定向所确定的 $T_x M$ 上的唯一体积元素. 时常用 $dV$ 来表示 $M$ 上的体积形式，虽然在 $M$ 上可能并没有一个 $(n-1)$ 形式 $V$ 使体积形式恰为其外导数.

在已给局部坐标 $x_1, \cdots, x_n$ 下，令 $g(x)$ 为决定 $T$ 上内积的 2 形式（或矩阵）（相对于基 $\partial/\partial x_1, \cdots, \partial/\partial x_n$，见**切向量**（tangent vector）），则在此局部坐标下

$$dV = \varepsilon \det(g)^{1/2} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

$\varepsilon = \pm 1$ 视 $\partial/\partial x_1, \cdots, \partial/\partial x_n$ 之定向与 $\mathbf{R}^n$ 上的标准定向是否符合而定（在已给的坐标卡下）.

在 Riemann 流形 $M$ 上，积分函数 $f$ 是在**流形上的积分**（integration on manifolds）意义下在 $M$ 上积分 $n$ 形式 $fdV$.

令 $*$ 表示 Hodge 的星算子（见 **Laplace 算子**（Laplace operator））. 则局部地由 $\psi = \sum \psi^j (\partial/\partial x_j)$ 给出的向量场的散度（divergence of a vector field）由函数

$$\operatorname{div}(\psi) = \sum_j \det(g)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x_j} (\det(g)^{1/2} \psi^j)$$

来定义. 于是有

$$d(*\psi) = \operatorname{div}(\psi) dV,$$

且在 $M$ 上的一个 $n$ 链上积分，应用 Stokes 公式即得高维散度定理（higher-dimensional divergence theorem）, 当 $M$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中的有边的三维子流形时，即得通常的散度定理为其特例.

**参考文献**


[A1] Spivak, M., Calculus on manifolds, Benjamin, 1965.（中译本：M. 斯皮瓦克，流形上的微积分，科学出版社，1980）.

[A2] Hazewinkel, M., A tutorial to differentiable manifolds and calculus on manifolds, in W. Schiehlen and W. Wedig (eds.), Analysis and Estimation of Stochastic Mechanical Systems, Springer, Wien, 1988, 316 – 340.

[A3] Choquet-Bruhat, Y., DeWitt-Morette, C. and Dillard-Bleick, M., Analysis, manifolds and physics, North-Holland, 1977.


齐民友 译

**von Neumann 代数** [**von Neumann algebra**; **Неймана алгебра**]

Hilbert 空间 $H$ 上有界线性算子的代数 $\mathscr{B}(H)$ 的一个子代数 $A$，它是自伴的（即对其中每一算子 $T$ 同时包含其伴随算子 $T^*$）且与其双交换子一致（即它包含所有这样的算子 $T \in \mathscr{B}(H)$，$T$ 与 $A$ 中一切算子可交换的每一算子可交换）. 这些代数是由 J. von Neumann（[1]）引入的. 根据 von Neumann 定理（theorem of von Neumann），一个自伴子代数 $A \subset \mathscr{B}(H)$ 是 von Neumann 代数，当且仅当 $A$（或其单位球）按弱、强、超弱或超强**算子拓扑**（operator topology）是闭的（按一致算子拓扑闭是不充分的）. 一个给定的对称 **Banach 代数**（Banach algebra）$B$（亦见**对称代数**（symmetric algebra））等距同构于某个 von Neumann 代数，当且仅当它是一个等距于某个对偶空间的 **$C^*$ 代数**（$C^*$-algebra）; 满足 $E^* = B$ 的 Banach 空间 $E$ 是在等距同构意义下唯一确定的且可认为等同于等距同构于 $B$ 的 von Neumann 代数上超弱连续线性型的空间; 此空间用 $B_*$ 表示且称为 $B$ 的前对偶（predual）. 这样的对称 Banach 代数称为 $W^*$ 代数（$W^*$-algebra）. 设 $A$ 是 Hilbert 空间 $H$ 上的一个 von Neumann 代数，$A'$ 是它的交换子，$Z = A \cap A'$ 是它的中心，$P$ 是属于 $A$ 的一个投影，且 $P'$ 是属于 $A'$ 的一个投影. 子空间 $P'H$ 在 $A$ 下是不变的，且从 $A$ 限制到 $P'H$ 的算子族构成 $P'H$ 中一个 von Neumann 代数，它用 $A_{P'}$ 表示且称为诱导代数（induced algebra），而映射 $T \to T|_{P'H}$ 称为 $A$ 到 $A_{P'}$ 上的诱导映射（induced mapping）; 在子空间 $PH$ 上形如 $PTP$，$T \in A$ 的有界算子族构成 $PH$ 中的一个 von Neumann 代数 $A_P$，它称为约化的（reduced）. 如果 $P = P' \subset Z$，则约化的和诱导的 von Neumann 代数是同一个. von Neumann 代数的一个等距同构称为是代数的（algebraic）; Hilbert 空间 $H$ 上的一个 von Neumann 代数称为空间同构（spatially isomorphic）于空间 $K$ 上 von Neumann 代数 $B$，如果存在一个映射 $H$ 到 $K$ 上的**酉算子**（unitary operator）$U$ 且使得 $B = UAU^{-1}$. 在给定 Hilbert 空间上的任意一族 von Neumann 代数的交是一 von Neumann 代数; 包含一个给定集合 $M$ 的最小的 von Neumann 代数称为由集合 $M$ 生成的 von Neumann 代数. 设 $H_i$, $i \in I$ 是 Hilbert 空间，$H = \sum^{\oplus} H_i$ 是它们的直和，$A_i$ 是 $H_i$ 上一个 von Neumann 代数，$T$ 是 $\mathscr{B}(H)$ 中的这样一些算子，每一个 $H_i$ 在 $T$ 作用下不变且 $T$ 到 $H_i$ 的限制在 $A_i$ 中，$A$ 是由这些 $T$ 生成的 $H$ 上 von Neumann 代数; 这个 von Neumann 代数称为 $A_i$ 的直积（direct product），且表示成 $A = \times_{i \in I} A_i$. 构成张量积的运算，包括有限和无限两者，也可对 von Neumann 代数定义. 一个 von Neumann 代数称为一个**因子**（factor），如果它的中心由单位元素的乘子组成.

设 $A$ 是一个 von Neumann 代数而 $A^+$ 是其正算子的集合. $A$ 上的一个权（weight）是从 $A^+$ 到 $[0, \infty]$ 中的一个加性映射 $\varphi$ 且在用正数相乘下是齐性

的．一个权 $\varphi$ 称为迹（trace），如果对所有的 $T\in A^+$ 和 $A$ 中所有的酉算子 $U$，$\varphi(UTU^{-1})=\varphi(T)$．一个迹称为有限的（finite），如果对所有 $T\in A$，$\varphi(T)<\infty$；迹称为半有限的（semi-finite），如果对任何 $S\in A^+$，量 $\varphi(S)$ 是形如 $\varphi(T)$ 的数的最小上界，其中 $\varphi(T)<\infty$ 且 $0\leqslant T\leqslant S$；迹称为正合的（exact），如果 $\varphi(T)=0$，$T\in A^+$ 蕴涵 $T=0$；迹称为正规的（normal），如果对任何具有最小上界 $T$ 的 $A^+$ 中递增元素族 $T_\alpha$，量 $\varphi(T)$ 是数 $\varphi(T_\alpha)$ 的最小上界．一个 von Neumann 代数 $A$ 称为有限的，如果存在 $A$ 上一族正规有限迹分离 $A$ 的点；$A$ 称为真无限的（properly infinite），如果不存在 $A$ 上非零有限迹；$A$ 称为半有限的，如果存在一个 $A$ 上正合正规半有限迹；$A$ 称为纯无限的（purely infinite），或 Ⅲ 型代数（algebra of type Ⅲ），如果不存在 $A$ 上非零正规半有限迹．一个 von Neumann 代数称为离散的（discrete），或 Ⅰ 型的（algebra of type Ⅰ），如果它代数地同构于一个具有可交换的交换子的 von Neumann 代数；这样的代数是半有限的．一个 von Neumann 代数称为连续的（continuous），如果对任何非零中心投影 $P$，von Neumann 代数 $A$ 不是离散的．一个连续的半有限代数称为 Ⅱ 型的（algebra of type Ⅱ）．一个有限 Ⅱ 型代数称为 $\text{Ⅱ}_1$ 型的（algebra of type $\text{Ⅱ}_1$）；真无限 Ⅱ 型代数称为 $\text{Ⅱ}_\infty$ 型的（algebra of type $\text{Ⅱ}_\infty$）．一个 von Neumann 代数是否属于一个确定类型等价于其交换子属于同样类型这一事实，但是一个有限 von Neumann 代数的交换子不必是有限 von Neumann 代数．

设 $A$ 是一个 von Neumann 代数，$P$ 和 $Q$ 是属于 $A$ 的投影．则 $P$ 和 $Q$ 称为等价的，$P\sim Q$，如果存在元素 $U\in A$ 使得 $P=U^*U$ 且 $Q=UU^*$．如果存在一个投影 $P_1\in A$ 使得 $P\sim P_1$ 且 $P_1\leqslant Q$，则记作 $P\prec Q$；关系 $\prec$ 是偏序关系．von Neumann 代数按照型的分类可借助于这个关系来实行；特别地：一个投影 $P\in A$ 称为有限的，如果 $P_1\in A$，$P_1\sim P$，$P_1\leqslant P$ 蕴涵 $P_1=P$；一个 von Neumann 代数 $A$ 是有限的，当且仅当其恒等投影是有限的；$A$ 是半有限的，当且仅当其有限投影族的最小上界是恒等投影．

一个 von Neumann 代数 $A$ 是半有限的，当且仅当它可以被当作某一 **Hilbert 代数**（Hilbert algebra）的左 von Neumaun 代数；相应的 Hilbert 代数的元素是使得 $\varphi(x^*x)<\infty$ 的那些 $x\in A$，其中 $\varphi$ 是 $A$ 上一个正合正规半有限迹．对 Ⅲ 型代数相对应的实现可借助于广义 Hilbert 代数和 von Neumann 代数上的权得到．

设 $H_p$ 是维数为 $p$ 的固定的 Hilbert 空间，$p=1,\cdots,\aleph_0$，设 $Z$ 是一个 Borel 空间，设 $\mu$ 是 $Z$ 上的一个正测度，设 $Z=\bigcup_{p=1}^{\aleph_0}Z_p$ 是分成不相交可测子集的一个划分，设 $L_2(Z_p,\mu,H_p)$ 是 $Z_p$ 到 $H_p$ 中平方可和 $\mu$ 可测映射的 Hilbert 空间，设

$$H=\bigoplus_{p=1}^{\infty}L_2(Z_p,\mu,H_p),$$

又设 $H(\zeta)=H_p$ 对 $\zeta\in Z_p$．如果 $f\in H$，则 $f=\Sigma_p f_p$，其中 $f_p\in L_2(Z_p,\mu,H_p)$．设对 $\zeta\in Z_p$，$f(\zeta)=f_p(\zeta)$．当 $T(\zeta)$ 是 Hilbert 空间 $H(\zeta)$ 上的一个连续线性算子，映射 $\zeta\mapsto T(\zeta)$ 称为算子的可测域（measurable field of operators），如果对任何 $f\in H$ 函数 $\zeta\mapsto T(\zeta)f(\zeta)$ 在每一集合 $Z_p$ 上是可测的．如果 $\zeta\mapsto T(\zeta)$ 是算子的可测域且函数 $\zeta\mapsto\|T(\zeta)\|$ 在 $Z$ 上本质有界，则对每一个 $f\in H$ 存在一个单位向量 $g\in H$ 使得 $\mu$ 几乎处处 $g(\zeta)=T(\zeta)f(\zeta)$．由 $Tf=g$（对所有的 $f\in H$）定义的映射 $T:H\to H$ 是 $H$ 上有界线性算子，且

$$\|T\|=\operatorname*{ess\,sup}_{\zeta\in Z}\|T(\zeta)\|.$$

$H$ 上这样一个算子 $T$ 称为可分解的（decomposable）．假设对任意 $\zeta\in Z$ 一个 von Neumann 代数 $A(\zeta)$ 定义在 $H(\zeta)$ 上；映射 $\zeta\mapsto A(\zeta)$ 称为 von Neumann 代数的可测域，如果存在算子可测域的序列 $\{\zeta\mapsto T_n(\zeta)\}$，使得对任一个 $\zeta\in Z$，相应的 von Neumann 代数 $A(\zeta)$ 由算子 $T_n(\zeta)$ 生成．对每个 $\zeta\in Z$ 使得 $T(\zeta)\in A(\zeta)$ 的 $H$ 上所有可分解算子的集合是 $H$ 中一个 von Neumann 代数．它表示成

$$A=\int^{\oplus}A(\zeta)d\mu(\zeta),$$

且称为该 von Neumann 代数 $A(\zeta)$ 在 $\mu$ 上的直接积分（direct integral）．可分 Hilbert 空间上的每一个 von Neumann 代数同构于因子的直接积分．任一 von Neumann 代数有一个代数的分解，这就是为什么因子理论对 von Neumann 代数的一般理论是有价值的原因．

von Neumann 代数在与 Hilbert 空间算子相联系的问题中自然地出现，且在算子理论本身和在群与代数的表示理论中，也在动力系统理论、统计物理学和量子场论中有很多应用．

**参考文献**

[1A] Murray, F. J. and Neumann, J. von, On rings of operators, *Ann. of Math.* (2), 37 (1936), 116–229.

[1B] Murray, F. J. and Neumann, J. von, On rings of operators Ⅱ, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 41 (1937), 208–248.

[2] Murray, F. J. and Neumann, J. von, On rings of operators, Ⅳ, *Ann. of Math.* (2), 44 (1943), 713–808.

[3] Dixmier, J., Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien: algèbres de von Neumann, Gauthier-Villars, 1957.

[4] Dixmier, J., $C^*$ algebras, North-Holland, 1977 (译自法文).

[5] Sakai, S., $C^*$-algebras and $W^*$-algebras, Springer, 1971

[6A] Neumann, J. von, On infinite direct products, *Compos. Math.*, **6** (1938), 1 – 77.

[6B] Neumann, J. von, On rings of operators Ⅲ, *Ann. of Math.* (2), **41** (1940), 94 – 161.

[7] Guichardet, A., Produits tensoriels infinis et répresentations des rélations d'anticommutation, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup*, **83** (1966), 1 – 52.

[8] Takesaki, M., Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications, Lecture notes in math., 128, Springer, 1970.

[9] Zsidó, L., Topological decompositions of operator algebras, in A. Salam (ed.): Global Analysis and Its Applications (Trieste, 1972), Vol. 3, Internat. Atom. Energy Agency, 1974, 305 – 308.

[10] Наймарк, М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968 (英译本: Naimark, M. A., Normed rings, Reidel, 1984).

А. И. Штерн 撰

【补注】 借助于上面定义的优化关系 $\prec$, von Neumann 代数的型可表述如下. von Neumann 代数 $A$ 是 Ⅰ 型的, 如果 $A$ 中每一非零中心投影优于一个非零 Abel 投影. (一个 Abel 投影 (Abelian projection) 是一投影 $e$ 使得 $eAe$ 是 Abel 的.) 如果 $A$ 中不存在非零有限投影, 即 $A$ 是纯无限的 (purely infinite), 则它是 Ⅲ 型的. 如果 $A$ 没有非零 Abel 投影且 $A$ 中每一非零中心投影优于 $A$ 的一个非零有限投影, 则 $A$ 是 Ⅱ 型的. 如果 $A$ 是有限的且是 Ⅱ 型的, 则它是 $Ⅱ_1$ 型的. 如果 $A$ 是 Ⅱ 型的且没有非零中心有限投影, 则 $A$ 是 $Ⅱ_\infty$ 型的. 每一个 von Neumann 代数是唯一地可分解成 Ⅰ, $Ⅱ_1$, $Ⅱ_\infty$, Ⅲ 型 von Neumann 代数的直和, 且因而一个因子属于这些型之一.

一个 Ⅰ 型因子同构于对某个 Hilbert 空间 $H$ 的 $\mathscr{B}(H)$. 一个 $Ⅰ_n$ 型因子是 $\mathbf{C}$ 上 $(n\times n)$ 矩阵的代数.

一个 von Neumann 代数或因子是超有限的 (hyperfinite), 如果它由有限因子 (finite factors) 即矩阵代数的一个上升序列生成. 恰好存在一个超有限 $Ⅱ_1$ 型因子和一个超有限 $Ⅱ_\infty$ 型因子 (精确到同构), ([A7]). 关于型和因子的更详细情况, 例如 $Ⅲ_0$, $Ⅲ_1$, $Ⅲ_\lambda$ 型和更精细的分类结果, 见 [A1], [A4], [A5], [A7] – [A9].

纽结理论最近的突破性进展的一部分来自关于子因子分类的工作; 见**纽结理论** (knot theory) 的补注及那里给出的参考文献, 亦见 [A3], [A6].

**参考文献**

[A1] Bratteli, O. and Robinson, D. W., Operator algebras and quantum statistical mechanics, Ⅰ – Ⅱ, Springer, 1979.

[A2] Kadison, R. V. and Ringrose, J. R., Fundamentals of the theory of operator algebras, Ⅰ – Ⅱ, Acad. Press, 1986.

[A3] Jones, V. F. R., A new knot polynomial and von Neumann algebras, *Notices Amer. Math. Soc.*, **33** (1986), 219 – 225.

[A4] Jones, V. F. R., Subfactors and related topics, in D. E. Evans and M. Takesaki (eds.): Operator Algebras and Appl., Vol. 2, Cambridge Univ. Press, 1988, 103 – 118.

[A5] Ocneanu, A., Quantized groups, strong algebras, and Galois theory for algebras, in D. E. Evans and Masamichi Takesaki (eds.), Operator Algebras and Appl., Vol. 2, Cambridge Univ. Press, 1988, 119 – 172.

[A6] de la Harpe, P., Kervaire, M. and Weber, C., On the Jones polynomial, *Enseignement Math.*, **32** (1986), 271 – 335.

[A7] Connes, A., Classification of injective factors, *Ann. of Math.*, **104** (1976), 73 – 115.

[A8] Connes, A. and Takesaki, M., The flow of weights on factors on type Ⅲ, *Tohoku Math. J.*, **29** (1977), 473 – 573.

[A9] Connes, A., Une Classification des facteurs de type Ⅲ, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, **6** (1973), 133 – 252.

葛显良 译 鲁世杰 校

**von Neumann 遍历定理** [**von Neumann ergodic theorem; Неймана теорема эргодическая**]

对 Hilbert 空间 $H$ 上任一等距算子 $U$ 以及任一 $h\in H$, 极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}U^k h=\bar{h}$$

(按 $H$ 的范数收敛意义下) 存在. 对 $H$ 上酉变换的一个连续单参数群 $\{U_t\}$ 以及任一 $h\in H$, 极限

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T U_t h\,dt=\bar{h}$$

(在同一意义下) 存在. 这里 $\bar{h}$ 是 $h$ 到 $H$ 的 $U$ (或 $\{U_t\}$) 不变元的空间上的正交投影.

J. von Neumann 在 [1] 中首次以此命题在遍历论中应用的下述形式陈述并证明了这一定理: 在**测度空间** (measure space) $(X,\mu)$ 中给定了一个自同态 $T$ (或**可测流** (measurable flow) $\{T_t\}$), $H=L_2(X,\mu)$, 而 $U$ 是位移算子:

$$Uh(x)=h(Tx) \text{ 或 } U_t h(x)=h(T_t(x)).$$

此时 von Neumann 定理表明, $h(x)$ 的时间平均即

$h(T^k x)$ 在时间区间 $0 \leqslant k < n$ 或 $h(T_t x)$ 在时间区间 $0 \leqslant t < T$ 上的平均值当区间增长时关于 $x$ 均方收敛于 $\bar{h}(x)$ (此点常用术语平均遍历定理 (mean ergodic theorem) 加以强调). 特别是, 对充分长的区间, $h(x)$ 的平均时间均值对大多数 $x$ 接近于 $\bar{h}(x)$. 因此, von Neumann 定理 (及其推广) 常被 (尤其当应用于一种给定情形时) 称为统计遍历定理 (statistical ergodic theorem), 以与个体遍历定理 (individual ergodic theorem) 即 **Birkhoff 遍历定理** (Birkhoff ergodic theorem) (及其推广) 相对照. 在所述情形下, 从后者 (以及当 $\mu(x) = \infty$ 时从其证明所用的论证) 可推出 von Neumann 遍历定理. 然而, 一般地说, 当 $H$ 不实现为 $L_2(X, \mu)$ 且算子 $U$ 或 $U_t$ 不同 $X$ 中任一变换相联结时, 不能从 Birkhoff 定理推出 von Neumann 定理.

von Neumann 原先的证明基于酉算子的谱分解. 后来发表了一些别的证明 (最简单的属于 F. Riesz, 见[2]), 并被推广到 Banach 空间上更广的算子群或半群类 (见[3], [4]).

von Neumann 定理及其推广属于**算子遍历定理** (operator ergodic theorem).

**参考文献**


[1] Neumann, J. von, Proof of the quasi-ergodic hypothesis. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **18** (1932), 70 - 82.

[2] Halmos, P. R., Lectures on ergodic theory, Math. Soc. of Japan, 1956.

[3] Вершик, А. М., Юзвинский, С. А., 载于 Итоги науки. Математический анализ, 1967, М., 1969, 133 - 187.

[4] Каток, А. Б., Синай, Я. Г., Степин, А. М., 载于 Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 13, М., 1975, 129 - 262.


Д. В. Аносов 撰

【补注】 关于比较广泛的各种遍历定理, 见[A1].

**参考文献**


[A1] Krengel, U., Ergodic theorems, de Gruyter, 1985.


沈永欢 译

**Вороной 格型 [Voronoǐ lattice types; Вороного типы решеток]**

$n$ 维 Euclid 空间 $E^n$ 中点格 (lattice of points) 的型, 由 Г. Ф. Вороной 于 1908 年在关于平行多面体一个问题的背景下提出 ([1]).

$E^n$ 中的一个点集 $\varepsilon$ 称为一个 $(r, R)$ 系统 ($(r, R)$-system), 如果其中任意两点间的距离不小于给定的 $r > 0$, 而任意一个半径大于某个给定的 $R$ 的球至少包含 $\varepsilon$ 的一个点. 设 $D$ 是 $\varepsilon$ 中一点的 Dirichlet 区域 (Dirichlet domain) (或 Dirichlet 胞腔 (Dirichlet cell)) 的凸多面体, 即空间中如下点的区域, 这些点离该点不比离系统中其他任何点远. 一个 $(r, R)$ 系统 $\varepsilon$ 的这些点的 Dirichlet 区域两两无公共内点, 覆盖整个空间 (即构成一个分块 (partitioning)), 且所有面都是公共的 (即构成一个正规分块 (normal partitioning)). 系统 $\varepsilon$ 可联系分为 (内接于球面的) 多面体 $L$, 对偶于 $\{D\}$ 的另一个正规分块 $\{L\}$, 其中的每一个是系统 $\varepsilon$ 的某些点的凸包, 而这些点是对应于相会于分块 $\{D\}$ 的一个顶点的所有的 $D$.

两个 $n$ 维点格具有相同的 Вороной 型 (Voronoǐ type), 如果它们的分块是彼此仿射的. 如果一个标架满足: 在度量参数 (它的向量的标量平方 $a_{ii}$ 和标量积 $a_{ik} (i \neq k)$) 充分小变化下, 用相同于把原标架变换为新标架的仿射变换, 由原标架构造的格分块 $\{L\}$ 得到新标架构造的格分块, 则这个标架称为本原的 (primitive) 或一般的 (general). 对此一个充分必要条件是原标架的分块 $\{L\}$ 是单纯的. 对应于这样一个标架的参数 $a_{ik}$ 的空间 $E^N$ 中的点 $M$ 也称为一般的 (general), 这里 $N = n(n+1)/2$. 包含一个一般点的完全线性连通域 $\Delta$, 其中所有点的分块 $\{L\}$ 是由对应于点 $M$ 的标架上构造的格的分块 $\{L\}$, 通过与将原标架变为对应的其他点的标架相同的仿射变换得到, 称为点 $M$ 的型域 (type domain of the point). Вороной 证明了 $E^N$ 中的域 $\Delta$ 具有顶点在坐标原点的、有限个面的凸多面角的形式, 且对任意给定的 $n$, 只存在有限数 $\psi$ 个不等价域 $\Delta$. 他还提出了找出这些数的一个算法 ([1]). 对 $n = 1, 2, 3, 4$, $\psi$ 分别为 1, 1, 1, 3. Вороной 还证明了将 $E^n$ 分为相同的凸平行多面体, 使得顶点处有 $n+1$ 个平行多面体相交 (本原平行多面体) 的最一般 (即不一定是 Dirichlet 型) 的正规分块, 是格的分块 $\{D\}$ 的一个仿射象. 因此, 他就将这样的平行多面体的研究归结为二次型理论. 对非本原的平行多面体 (即某些顶点处有多于 $n+1$ 个平行多面体相交), 其到格的域 $D$ 中的仿射变换的可能性 (对任意 $n$) 尚未解决. 仅知道对 $n = 2, 3, 4$ 答案是肯定的.

二维格的本原域 $D$ 是内接于圆且具有一个对称中心的凸六边形, 并且反之亦然. 在三维格的情形, 它是一个 14 边形, 组合地类似一个具有 8 个六边形和 6 个四边形面的立方八面体; 每一个这样的面有一个对称中心, 使得从它的中心发出到这些面的中心的线段垂直于这些面, 并且反之亦然. $n = 2$ 时非本原域 $D$ 是一个矩形. 对 $n = 3$, 它或是一个具有 4 个六边形和 8 个平行四边形面的 12 面体, 或是一个平行四边形式的 12 面体, 或是以本原 2 维 $D$ 为底的垂直六面棱柱, 或是一个长方平行六面体. 对 $n = 4$, 存在 3 个不同 Вороной 格型的本原 $D$, 和 49 个非本原

的．过渡到 $n=5$ 有一个很大的跳跃，有 221 个不同的本原 $D$([4])．这个结果是由引进新概念 $C$ 型格（$C$-type lattice）而得到的：分块 $\{L\}$ 的一维骨架而不是分块本身彼此仿射的格称为有相同的 $C$ 型．

**参考文献**


[1] Вороной, Г. Ф., Собр. соч., т. 2, К., 1952, 239－368.

[2] Делоне, Б. Н., «Изв. АН СССР, 7 сер., Отд. физ.-матем. наук», 1929, No. 1, 79－110; No. 2, 147－164.

[3] Делоне, Б. Н., «Успехи матем наук», 1937, в. 3, 16－62; 1938, в. 4, 102－164;

[4] Ryshkov, S. S. and Baranovskiĭ, E. P., $C$-types of $n$-dimensional lattices and 5-dimensional primitive parellohedra (with an application to the theory of coverings), *Proc. Steklov Inst. Math.*, 137 (1975) (*Trudy Mat. Inst. Steklov.*, 137 (1975).


Б. Н. Делоне 撰

【补注】 人们也用下述一些短语代替"Dirichlet 胞腔"："Вороной区域"(Voronoï region)，"第一 Brillouin 带"(first Brillouin zone)，"Dirichlet-Вороной 区域"(Dirichlet-Voronoï region)，"Wabenzelle"，"蜂巢形"(honeycomb)，"$z$ 作用域"(domain of action of $z$)．按 Dirichlet-Вороной 区域铺砌或分块称为 Dirichlet-Вороной 铺砌（Dirichlet-Voronoï tiling)，或 Dirichlet 铺砌（Dirichlet tiling)，或 Вороной 铺砌（Voronoï tiling)．Вороной 问题（Voronoï problem）是：是否每一个平行多面体是一个格的 Dirichlet-Вороной 区域的仿射象．对 $n\leqslant 4$ 答案是肯定的([2A])，进一步的结果见[A3]，p. 170 及其以下．

**参考文献**


[A1] Conway, J. H. and Sloane, N. J. A., Sphere packings, lattices and groups, Springer, 1988.

[A2] Erdös, P., Gruber, P. M. and Hammer, J., Lattice Points, Longman, 1989.

[A3] Gruber, P. M. and Lekkerkerker, C. G., Geometry of numbers, North-Holland, 1987.

[A4] Grünbaum, B. and Shephard, G. C., Tilings and patterns, Freeman, 1987.

[A5] Delone, B. N., Galivlin, R. V. and Shtogrin, N. I., The types of Bravais lattices, *J. Soviet Math.*, 4 (1975), 1, 79－156. (*Sovrem. probl. Mat.*, 2 (1973), 119－257).


刘振宏 译

## Вороной 求和法 [Voronoï summation method; Вороного метод суммирования]

序列的一种**矩阵求和法**（matrix summation method)．它是由数值序列 $\{p_n\}$ 定义的，并记作 $(W, p_n)$．序列 $\{s_n\}$ 依方法 $(W, p_n)$ 可和于数 $S$，如果

$$\frac{s_0p_n+s_1p_{n-1}+\cdots+s_np_0}{p_0+\cdots+p_n}\to S.$$

特别地，若 $p_0=1$，$p_k=0\,(k\geqslant 1)$，序列依 $(W, p_n)$ 方法可和于数 $S$，意即序列收敛于 $S$．若 $p_k=1\,(k\geqslant 0)$，得到 **Cesàro 求和法**（Cesàro summation methods)．若 $p_0>0$，$p_k\geqslant 1\,(k\geqslant 1)$，$(W, p_n)$ 方法是正则的（见**正则求和法**（regular summation methods))，当且仅当 $p_n/(p_0+\cdots+p_n)\to 0$．任何两个正则方法 $(W, p_n')$ 与 $(W, p_n'')$ 相容（见**求和法的相容性**（compatibility of summation methods))．

Вороной 求和法首先由 Г. Ф. Вороной 引进([1])，1919 年 N. E. Nörlund 也发现了．所以这个方法在西方文献中有时称之为 Nörlund 法（Nörlund method)，并使用记号 $(N, p_n)$ 或 $N(p_n)$．

**参考文献**


[1] Вороной, Г. Ф., в кн.: Дневник одиннадцатого съезда русских естествоиспытателей и врачей, СПБ, 1902, 60－61.

[2] Hardy, G. H., Divergent series, Clarendon, 1949.


Ф. И. Харшиладзе 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Moore, C. N., Summable series and convergence factors, Dover, reprint, 1966.


罗嵩龄 译

## 涡环 [vortical ring; вихревое кольцо]

一种具有小横截面圆环形状的涡线．由涡决定液体质点速度的一般公式使得有可能将无限液体中由涡环产生的流动之速度势 $\varphi(z, r)$ 和 Stokes 流函数 $\psi(z, r)$ 表示为含零阶和一阶的 Bessel 函数的积分：

$$\varphi(z, r)=\frac{1}{2}a\kappa\int_0^\infty e^{-kz}J_0(kr)J_1(ka)dk,$$

$$\psi(z, r)=-\frac{1}{2}a\kappa r\int_0^\infty e^{-kz}J_1(kr)J_1(ka)dk.$$

在这些对 $z>0$ 适用的公式中，$a$ 是环的半径，$\kappa$ 是涡环的强度．坐标 $z$ 是从运动中的环的平面算起．在速度的影响下，该影响本身是在液体中产生的，环在 $z$ 轴方向上按下列近似公式给出的常速 $c$ 运动：

$$c=\frac{\kappa}{4\pi\varepsilon}\left[\ln\frac{8\varepsilon}{a}-\frac{1}{4}\right],$$

其中 $\varepsilon$ 是涡环截面的半径．对于几个涡环，函数 $\varphi$ 和 $\psi$ 则表示为每个环的相应函数之和．

**参考文献**


[1] Milne-Thomson, L. M., Theoretical hydrodynamics, MacMillan, 1950.


Л. Н. Сретенский 撰 李维新 译

## Voss 网 [Voss net; Фосса сеть]

一个共轭的测地网（geodesic net)．带有 Voss 网

的曲面称为 Voss 曲面(Voss surface). 在极小曲面(minimal surface)上, Voss 网是迷向的. 二维曲面上的每个 Voss 网是此曲面形变的一组主基. 仅在螺旋面上才有无穷多个 Voss 网. 是否存在带有 Voss 网的曲面的问题是由 A. Voss 在[1]中提出的.

**参考文献**

[1] Voss, A., Sitzungsber, *Bayrischen Akad. Wiss. München Math. Naturwiss. Kl*, 18 (1888), 95 – 102.

[2] Фиников, С. П., Изгибание на главном основании. М.-Л., 1937.

B. T. Базылев 撰 沈纯理 译

**Voss 曲面 [Voss surface; Фосса поверхность]**

支撑一个 Voss 网(Voss net)的曲面.

# W

**$W$ 分布** [$W$-distribution; $W$-распределение]

见 **Wishart 分布** (Wishart distribution).

**Wald 恒等式** [Wald identity; Вальда тождество]

**序贯分析** (sequential analysis) 中的恒等式, 表明随机数 $\tau$ 个独立同分布随机变量 $X_1, X_2, \cdots$ 之和 $S_\tau = X_1 + \cdots + X_\tau$ 的数学期望, 等于数学期望 $\mathrm{E} X_1$ 与 $\mathrm{E}\tau$ 之积:

$$\mathrm{E}(X_1 + \cdots + X_\tau) = \mathrm{E} X_1 \cdot \mathrm{E}\tau.$$

Wald 恒等式成立的充分条件是, 数学期望 $\mathrm{E}|X_1|$ 和 $\mathrm{E}\tau$ 存在, 且 $\tau$ 是 Марков 时间 (即对于任意 $n = 1, 2, \cdots$, 事件 $\{\tau = n\}$ 决定于随机变量 $X_1, \cdots, X_n$ 的值, 或者说事件 $\{\tau = n\}$ 属于由随机变量 $X_1, \cdots, X_n$ 产生的 $\sigma$ 代数). Wald 恒等式是序贯分析基本定理的特殊情形. 该定理断定, 对于一切使 $\varphi(\lambda) = \mathrm{E} e^{\lambda X_1}$ 存在且 $|\varphi(\lambda)| \geqslant 1$ 的复 $\lambda$, 有

$$\mathrm{E}[e^{\lambda S_\tau}(\varphi(\lambda))^{-\tau}] = 1. \qquad (*)$$

此结果是 A. Wald ([1]) 得到的.

**参考文献**


[1] Wald, A., Sequential analysis, Wiley, 1952.

[2] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, 1, Wiley, 1957, Chapt. 14 (中译本: W. 费勒, 概率论及其应用, 上册, 科学出版社, 1964).


A. Н. Ширяев 撰

【补注】 一般结果 $(*)$ 亦称为 Wald 公式 (Wald formula).


[A1] Skorohod, A. V. [A. V. Skorokhod], Random processes with independent increments, Kluwer, 1991, p. 23 (译自俄文).


周概容 译

**Wall 群** [Wall group; Уолла группа]

一个与环有关的 Abel 群, 这种环具有一个反同构的对合. 特别地, 对任何群环 $\mathbf{Z}[\pi_1(X)]$, 它被定义, 其中 $\pi_1(X)$ 是一个空间的基本群. 如果 $X$ 是一个 **Poincaré 复形** (Poincaré complex), 则对 $\Omega_*(x, \nu)$ 中的下配边 (bordism) 类 $\alpha$, 在该群中对 $\alpha$ 中的单同伦等价的存在有一个**阻碍** (obstruction), 这个阻碍称为 **Wall 不变量** (Wall invariant), 见 [1].

设 $R$ 是一个具有反同构 (即 $\overline{ab} = \overline{b}\,\overline{a}$) 对合 $R \to R$ 的环, 如果 $P$ 是一个左 $R$ 模, 则 $\mathrm{Hom}_R(P, R)$ 是一个关系到作用 $(af)(x) = f(x)\overline{a}$ 的左 $R$ 模, $f \in \mathrm{Hom}_R(P, R)$, $a \in R$, $x \in P$. 这个模用 $P^*$ 表示. 对有限生成的投影 $R$ 模 $P$, 存在同构 $P \to P^{**}: x \mapsto (f \mapsto \overline{f(x)})$. 可用该同构将 $P$ 和 $P^{**}$ 视为等同.

具有对合的环 $R$ 上的一个二次 $(-1)^k$ 形式 (quadratic $(-1)^k$-form) 是一个对 $(P, \varphi)$, 其中 $P$ 是一个有限生成投影 $R$ 模, $\varphi: P \to P^*$ 是同态使得 $\varphi = (-1)^k \varphi^*$. 形式的一个态射 $f: (P, \varphi) \to (Q, \psi)$ 是一个同态 $f: P \to Q$, 使得 $f^* \psi f = \varphi$. 如果 $\varphi$ 是一个同构, 那么形式 $(P, \varphi)$ 称为非退化的 (non-degenerate). 非退化形式的一个 Lagrange 平面 (Lagrange plane) 是一个直接被加数 $L \subset P$, 对此, $L = \mathrm{Ann}\,\varphi(L)$. 如果 $L \subset P$ 是一个直接被加数使得 $L \subset \mathrm{Ann}\,\varphi(L)$, 则 $L$ 称为子 Lagrange 平面 (subLagrange plane). 一个形式 $(P, \varphi)$ 的两个 Lagrange 平面 $L, G$ 称为互补的 (complementary), 如果 $L + G = P$ 及 $L \cap G = \{0\}$.

设 $L$ 是一个投影 $R$ 模. 则非退化 $(-1)^k$ 形式

$$H_{(-1)^k}(L) = \left( L \oplus L^*, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^k & 0 \end{pmatrix} \right)$$

称为 Hamilton 的 (Hamiltonian), $L$, $L^* \subset L \oplus L^*$ 称为它的补 Lagrange 平面. 如果 $L$ 是形式 $(P,\varphi)$ 的一个 Lagrange 平面, 那么这个形式同构于 Hamilton 形式 $H_{(-1)^k}(L)$. 补于 $L$ 的 Lagrange 平面的选择等价于同构 $(P,\varphi) \to H_{(-1)^k}(L)$ 的选择, 且这补平面可与 $L^*$ 相叠合.

设 $U_{2k}(R)$ 是由非退化二次 $(-1)^k$ 形式 $(P,\varphi)$ (在同构下)的等价类生成的 Abel 群, 具有关系: 1) $[(P,\varphi)]+[(Q,\psi)]=[(P\oplus Q),\ \varphi\oplus\psi)]$; 2) 如果 $P$ 有 Lagrange 平面, 则 $[(P,\varphi)]=0$. 由非退化 $(-1)^k$ 形式 $H$ 和一对 Lagrange 平面所组成的三元组 $(H;\ F,L)$ 称为 $(-1)^k$ 构造 ($(-1)^k$-formation). 如果 $F$ 和 $L$ 是互补的, 则构造称为平凡的 (trivial), 如果存在 $H$ 的一个 Lagrange 平面, 它与 $F$ 和 $L$ 两者互补, 则构造称为初等的 (elementary). 平凡的构造 $(H_{(-1)^k}(G);\ G,G^*)$ 称为 Hamilton 的 (Hamiltonian). 通过构造的同构 (isomorphism of formation) $f:(H;\ F,L) \to (H_1;\ F_1,L_1)$, 可以理解形式的同构 $f: H \to H_1$, 对于它, $f(F)=F_1$, $f(L)=L_1$. 每个平凡构造都同构于一个 Hamilton 构造.

设 $U_{2k+1}(R)$ 为由 $(-1)^k$ 构造 (在同构下) 的等价类生成的 Abel 群, 它具有下列关系: a) $[(H;\ F,L)]\oplus[(H_1;\ F_1,L_1)]=[(H\oplus H_1;\ F\oplus F_1,\ L\oplus L_1)]$; b) 如果构造是初等的或平凡的, 则 $[(H;\ F,L)]=0$.

群 $U_n(R)$ 称为环 $R$ 的 Wall 群 (Wall group).

**参考文献**


[1] Wall, C. T. C., Surgery on compact manifolds, Acad. Press, 1970.

[2] Ranicki, A. A., The algebraic theory of surgery I, *Proc. London Math. Soc.*, **40** (1980), 1, 87 - 192.


А. В. Шокуров 撰

【补注】 在 $R=\mathbf{Z}[\pi_1(X)]$ 和 Wall 割补术阻碍不变量 (Wall surgery obstruction invariant) 的情形中, $R$ 上的对合由 $g \mapsto W(g)g^{-1}$ 给出, $g\in\pi_1(X)$, 其中群同态 $w:\pi_1(X)\to\{1,-1\}$ 由在下配边类 $\Omega_*(X,\nu)$ 中的丛 $\nu$ 的第一 Stiefel-Whitney 类给出.

Wall 群 $U_n(R)$ 更经常被称为 $L$ 群 ($L$-groups) 且用 $L_n(R)$ 表示; 它们的理论涉及到 $L$ 理论 ($L$-theory), 它与 $K$ 理论 ($K$-theory) 密切相关. (事实上, 一些作者论及形式的 $K$ 理论, [A2].) $L$ 群是 4 循环的, 即 $L_n(R)\simeq L_{n+4}(R)$. $L$ 群可在更一般的意义下定义, 且存在一些与 $L$ 群有点不同的变化. 例如见 [A1], [A2].

**参考文献**


[A1] Ranicki, A., Lower $K$- and $L$-theory, Cambridge Univ. Press, 1992.

[A2] Bak, A., $K$-theory of forms, Princeton Univ. Press, 1981.


薛春华 译

**Wall 不变量 [Wall invariant; Уолла инвариант]**

表示单同伦等价的下配边 (bordism) 的割补术的阻碍 (obstruction) 的 **Wall 群** (Wall group) 的一个元素.

设 $X$ 是一个有限 **Poincaré 复形** (Poincaré complex), $\nu$ 是 $X$ 上的纤维丛而 $x=[(M,\varphi,F)]\in\Omega(X,\nu)$ 是一个下配边类, 其中 $m$ 是 $X$ 的形式维数, $\varphi: M\to X$ 有度 1. 这个映射总可由一个用割补术的有限序列得到的 $[m/2]$ 连通的映射表示. 设 $\Lambda=\mathbf{Z}[\pi_1(X)]$ 是一个群环, 且设 $^-$ 是 $\Lambda$ 上由公式 $\overline{\sum_g n(g)g}=\sum w(g)n(g)g^{-1}$ 给出的对合, 其中 $w:\pi_1(X)\to\{1,-1\}$ 是由 $\nu$ 的第一 **Stiefel-Whitney 类** (Stiefel-Whitney class) 定义的. 令

$$K^*(M)=\operatorname{coker}(\varphi^*: H^*(X)\to H^*(M)),$$

$$K_*(M)=\ker(\varphi_*: H_*(M)\to H_*(X))$$

(系数在 $\Lambda$ 中). 对合是一个反同构且定义 Wall 群 $U_n(\Lambda)=L_n(\pi_1(X),\ w)$.

现假定 $m=2k\geqslant 4$, 则在稳定自由 $\Lambda$ 模 $G=K_k(M)=\pi_{k+1}(\varphi)$ 中, 可以选取一个基, 且 **Poincaré 对偶性** (Poincaré duality) 诱导了单同构 $\lambda: G\to G^*=K^k(M)$, 其中 $(G,\lambda)$ 是 $(-1)^k$ 形式. 因此得到类 $\Theta_{2k}(x)=[(G,\lambda)]\in L_{2k}(\pi_1(X),\ w)$.

其次假定 $m=2k+1\geqslant 5$. 可以在 $\pi_{k+1}(\varphi)=K_k(M;\Lambda)$ 中选取生成元以便它们表示嵌入 $f_i: S^k\times D^{k+1}\to M$, 它具有不交象, 且这些象通过道路与基点相连通. 设 $U=\bigcup_i \operatorname{Im} f_i$, $M_0=M\setminus\operatorname{Int} U$. 因为 $\varphi\circ f_i\sim 0$, 故可用同伦代替 $\varphi$ 和假设 $\varphi(u)=*$. 因为 $X$ 是一个 Poincaré 复形, 故可用具有唯一的 $m$ 胞腔的复形代替 $X$, 即有 Poincaré 对 $(X_0,\ S^{m-1})$ 和 $X=X_0\cup e^m$. 通过选择一个适当的胞腔逼近得到度 1 的 Poincaré 三元组的一个映射: $\varphi:(M;\ M_0,U)\to(X;\ X_0,e^m)$. 随之, 有正合序列的图表:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & K_{k+1}(M,M_0)\cong K_{k+1}(U,\partial U) & & \longrightarrow & & K_k(M_0) & \longrightarrow & 0\\
& \searrow \quad \nearrow & & & \searrow \quad \nearrow & & \searrow \quad \nearrow & & \\
& K_{k+1}(M) & & & K_k(\partial U) & & K_k(M) & & \\
& \swarrow \quad \searrow & & & \nearrow \quad \searrow & & \nearrow \quad \searrow & & \\
0 & \longrightarrow & K_{k+1}(M,U)\cong K_{k+1}(M_0,\partial U) & & \longrightarrow & & K_k(U) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

进一步, 有非退化对 $\lambda: K_k(\partial U)\times K_k(\partial U)\to\Lambda$, 其中 $H=(K_k(\partial U),\ \lambda)$ 是一个二次 $(-1)^k$ 形式, 而 $K_{k+1}(U,\ \partial U)$ 和 $K_{k+1}(M_0,\partial U)$ 定义了它的 Lagrange 平面 $L$ 和 $P$, 因此

$$\Theta_{2k+1}(x)=[(H;\ L,P)]\in U_{2k+1}(\Lambda)=$$

$$= L_{2k+1}(\pi_1(x), w).$$

上面所定义的元素 $\Theta_m(x)\in L_m(\pi_1(x), w)$ 就称为 Wall 不变量 (Wall invariant). 一个重要的性质是 $\Theta(x)$ 对结构选择的独立性和等式 $\Theta(x)=0$ 相对于作为单同伦等价的类的可表示性的等价性, 见[1].

**参考文献**


[1] Wall, C. T. C., Surgery on compact manifolds, Acad. Press, 1970.

[2] Ranicki, A. A., The algebraic theory of surgery Ⅰ, *Proc. London Math. Soc.*, **40** (1980), 1, 87 − 192.

[3] Новиков, С. П., 《Изв. АН СССР, Сер. мате м.》, **34** (1970), No. 2, 253 − 288, No. 3, 475 − 500.


А. В. Шокуров 撰 薛春华 译

**Wallis 公式 [Wallis formula; Валлиса формула]**

把数 $\pi/2$ 表示为**无穷积** (infinite product) 的一个公式:

$$\frac{\pi}{2}=\left[\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\right]\left[\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\right]\cdots\left[\frac{2k}{2k-1}\cdot\frac{2k}{2k+1}\right]\cdots=\lim_{m\to\infty}\prod_{k=1}^{m}\frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}. \tag{1}$$

存在这个公式的另外一些形式, 例如

$$\sqrt{\pi}=\lim_{m\to\infty}\frac{(m!)^2\cdot 2^{2m}}{(2m)!\sqrt{m}}. \tag{2}$$

J. Wallis([1]) 首先利用公式 (1) 计算圆盘的面积; 它是最早出现的无穷积之一.

**参考文献**


[1] Wallis, J., Arithmetica infinitorum, Oxford, 1656.


Т. Ю. Попова 撰

**【补注】** 公式 (1) 是 **Euler 积公式** (Euler product formula)

$$\sin z = z\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right]$$

(当 $z=\pi/2$ 时) 的一个直接推论.

把 $\int_0^{\pi/2}\sin^{2m}x\,dx$ 和 $\int_0^{\pi/2}\sin^{2m+1}x\,dx$ 通过 $m$ 来表示, 并且证明

$$\frac{\int_0^{\pi/2}\sin^{2m}x\,dx}{\int_0^{\pi/2}\sin^{2m+1}dx}\to 1\ (m\to\infty),$$

也可得到公式 (1).

公式 (2) 可由公式 (1) 推出: 只需把

$$\prod_{k=1}^{m}\frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}$$

的分子和分母乘以 $2^2\cdot 4^2\cdots(2m)^2$.

**参考文献**


[A1] Apostol, T. M., Calculus, 2, Blaisdell, 1964.

[A2] Edwards, C. H. jr., The historical development of the calculus, Springer, 1979 (中译本: C. H. 爱德华, 微积分发展史, 北京出版社, 1987).

[A3] Lax, P., Burnstein, S. and Lax, A., Calculus with applications and computing, 1, Springer, 1976.

[A4] Struik, D. J. (ed.), A source book in mathematics: 1200 − 1800, Harvard Univ. Press, 1986.


杜小杨 张鸿林 译

**Wallman 紧化 [Wallman compactification; Уолмена бикомпактное расширение]**, 满足 $T_1$ 公理 (见**分离公理** (separation axiom)) 的拓扑空间 $X$ 的 Wallman-Shanin 紧化 (Wallman-Shanin compactification) $\omega X$.

一个空间, 它的全部点是 $X$ 中的极大有心闭集族 $\xi=\{F_\alpha\}$ (见**有心集族** (centred family of sets)). $\omega X$ 中的拓扑由闭基 $\{\Phi_F\}$ 给出, 其中 $F$ 遍取 $X$ 的所有闭集, 且 $\Phi_F$ 严格地由使 $F=F_\alpha$ (某 $\alpha$) 的那些 $\xi=\{F_\alpha\}$ 组成.

这种紧化是 H. Wallman([1]) 描述的.

Wallman 紧化总是紧 $T_1$ 空间; 对于正规空间, 它与 **Stone-Čech 紧化** (Stone-Čech compactification) 一致.

如果定义扩张 $\omega X$ 时, 不选所有的闭集, 而仅选取被某个固定闭集所包含的那些闭集, 就得到所谓 Wallman 型的紧化. **Тихонов 空间** (Tikhonov space) 的 Hausdorff 紧化并不都是 Wallman 型紧化.

**参考文献**


[1] Wallman, H., Lattices and topological spaces, *Ann. of Math.*, **39** (1938), 112 − 126.


П. С. Александров 撰

**【补注】** 非 Wallman 型紧化的紧化, 是 В. М. Ульянов ([A1]) 构造的.

**参考文献**


[A1] Ul'yanov, V. M., Solution of a basic problem on compactifications of Wallman type, *Soviet Math. Dokl.*, **18** (1977), 567 − 571 (*Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, **233** (1977), 6, 1056 − 1059).

[A2] Alo, R. A. and Shapiro, H. L., Normal bases and compactifications, *Math. Ann.*, **175** (1968), 337 − 340.

[A3] Frink, O., Compactifications and semi-normal spaces, *Amer. J. Math.*, **86** (1964), 602 − 607.

[A4] Walker, R. C., The Stone-Čech compactification, Springer, 1974.


罗嵩龄 译

**Walsh 函数系 [Walsh system; Уолша система]**, 区间

[0,1] 上的

函数系 $\{W_n\}$: $W_0(x)\equiv 1$, $W_n(x)=r_{\nu_1}(x)\cdots r_{\nu_m}(x)$, $n\geq 1$, 其中的 $r_k(x)=\text{sign}\sin 2^{k+1}\pi x(k=0,1,\cdots)$ 是 Rademacher 函数 (Rademacher functions) (见 **Rademacher 函数系** (Rademacher system)), $n=2^{\nu_1}+\cdots+2^{\nu_m}(\nu_1>\cdots>\nu_m)$ 是数 $n\geq 1$ 的二进制表示. 这一函数系由 J. L. Walsh ([1]) 定义并研究, 但在 1900 年, 在与电子在开的导曲线弧上的分布有关的问题中, J. A. Barrett 已经研究了这一函数系. 在该理论中, 更喜欢采用的是 Walsh 函数系的另外一种定义. 即令

$$W_0^*(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1),\\ 0, & x\in(-\infty,0)\cup[1,\infty),\end{cases}$$

$W_n(x)$ 由下面的递推公式定义:

$$W_{2j+p}^*(x)=W_j^*(2x)+(-1)^{j+p}W_j^*(2x-1),$$
$$p=0,1;\ j=0,1,\cdots,$$

函数系 $\{W_n\}$ 与 $\{W_n^*\}$ 之间的差别仅仅在于在范围 $2^m\leq n\leq 2^{m+1}-1(m=1,2,\cdots)$ 内的函数的排列顺序. 例如: $W_{2^m}^*=W_{3\cdot 2^{m-1}}$, $W_{2^{m+1}-1}^*=W_{2^m}$, $W_{2^{m+1}-2}^*=W_{2^m+1}$, $\cdots$. 函数 $W_k^*$ 中的脚标 $k$ 相应于这一函数在区间 (0,1) 中的符号改变的次数, 即, 它类似于加倍正弦函数的频率. Walsh 函数系是区间 [0,1] 上的完全规范正交系, 并可视为 **Rademacher 函数系** (Rademacher system) 的自然的完全化.

Walsh 函数系构成一个交换乘法群, 其中的单位元素是函数 $W_0$, 同时每一个 $W_k$ 都是其本身的逆元素.

**参考文献**


[1] Walsh, J. L., A closed set of normal orthogonal functions, *Amer. J. Math.*, 45(1923), 5 – 24.

[2] Fowle, F. F., *Trans. AJEE*, 23(1905), 659 – 687.

[3] Fine, N. J, On the Walsh functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 65(1949), 372 – 414.

[4] Kaczmarz, S. and Steinhaus, H., Theorie der Orthogonalreihen, Chelsea, reprint, 1951.

[5] Harmut, H. F., Transmission of information by orthogonal functions, Springer, 1972.


A. B. Ефимов 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Golubov, B., Efimov, A. and Skvortsov, V., Walsh series and transforms, Kluwer, 1987 (译自俄文).


朱学贤 译

## 游荡点 [wandering point; блуждающая точка]

**动力系统** (dynamical system) $f(p,t)$ 的相空间 $R$ 中的点 $q$, 它具有一个邻域 $U(q)$, 使得对于 $U(q)$ 存在一个时刻 $T$ 而 $f(U(q),t)$ 对一切 $t\geq T$ 都与 $U(q)$ 没有公共点 (即 $U(q)$ 之一切点到某时刻 $T$ 以后, 都会离开该邻域 $U(g)$). 没有这种邻域的点 $q$ 称为非游荡的 (non-wandering). 一个点是游荡的或非游荡的, 这个性质在时间上是双向的: 如果 $f(U(q),t)$ 与 $U(q)$ 没有公共点, 则 $U(q)$ 与 $f(U(q),-t)$ 也没有公共点. 一个游荡点当空间 $R$ 扩张后可能成为非游荡的. 例如, 若 $R$ 是一个圆且有一个静止点 $r$, 则 $R\setminus r$ 的一切点都是游荡点. 如果某个没有静止点的螺线从圆内侧或外侧绕此圆绕行, 把这些点都加到 $R$ 上去以后, $R\setminus r$ 的点就成为非游荡的.

K. C. Сибирский 撰

【补注】 集合 $A\subset R$ 对于集合 $B\subset R$ 称为正递归的 (positively recursive), 如果对一切 $T$ 当 $t>T$ 时均有 $f(B,t)\cap A\neq\varnothing$. 负递归的 (negatively recursive) 的定义类似. 于是点 $x$ 是非游荡的, 如果它的每一个邻域均对于其自身是正递归的 (自正递归的 (self-positively recursive)). 点 $x$ 称为正 Poisson 稳定的 (positively Poisson stable) (负 Poisson 稳定的 (negatively Poisson stable)) 如果它的每一个邻域对于 $\{x\}$ 都是正递归的 (负递归的). 如果一点既是正 Poisson 稳定的, 又是负 Poisson 稳定的, 就称之为 Poisson 稳定的 (Poisson stable). 如果 $P\subset R$ 使得每一点 $x\in P$ 均为正或负 Poisson 稳定的, 则 $\bar{P}$ 的各点均为非游荡的. 亦见**游荡集** (wandering set).

**参考文献**


[A1] Bhatia, N. P. and Szegö, G. P., Stability theory of dynamical systems, Springer, 1970, 30 – 36.


齐民友 译

## 游荡集 [wandering set; блуждающее множество]

某**动力系统** (dynamical system) $f(p,t)$ 的所有**游荡点** (wandering point) 的集合 $W$. 因为对 $W$ 中的每个点 $q$, 集合 $W$ 包含其某个邻域 $U(q)$ 的一切点, 所以 $W$ 是相空间 $R$ 的开集合. 依此, 一切非游荡点的集合 $M=R\setminus W$ 是闭的. 集合 $W$ 与 $M$ 都是不变的 (invariant), 即若包含点 $q$, 亦必包含对于任意 $t$ 的 $f(q,t)$. 在一紧空间 $R$ 中, 每个游荡点 $f(q,t)$ 当 $t\to\infty$ 和 $t\to-\infty$ 时均趋于 $M$.

**参考文献**


[1] Birkhoff, G. D., Dynamical systems, Amer. Math. Soc. 1927.

[2] Немыцкий, В. В., Степанов, В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.-Л., 1949 (中译本: В. В. 涅梅茨基, В. В. 斯捷巴诺夫, 微分方程定性理论, 科学出版社, 1956).

[3] Сибирский, К. С., Введение в топологическую динамику, кишенев, 1970 (英译本: Sibirskii, K. S., Introduction to topological dynamics, Noordhoff, 1975).


K. C. Сибирский 撰

【补注】

**参考文献**

[A1] Smale, S., Differentiable dynamical systems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73 (1967) 747 – 817.

[A2] Bhatia, N. P. and Szegö, G. P., Stability theory of dynamical systems. Springer, 1970, 30 – 36.

齐民友 译

**Ward 定理 [Ward theorem; Варда теорема]，关于加性区间函数微分的**

设 $F$ 为实值加性区间函数，$\underline{F}(x)(\overline{F}(x))$ 为数列 $F(G_n)/|G_n|$ 的极限的下（上）确界，其中 $|G_n|$ 为 $G_n$ 的 Lebesgue 测度，并且 $\{G_n\}$ 取遍所有收缩趋于点 $x$ 的正则区间列．于是等式 $\overline{F}(x)=\underline{F}(x)$ 在集合 $\{x:\underline{F}(x)>-\infty$ 或 $\overline{F}(x)<\infty\}$ 上（依 Lebesgue 测度）几乎处处成立．区间列 $G_n$ 是正则的，如果存在数 $\alpha>0$ 以及两个球列 $S_n'$ 和 $S_n''$，使得对一切 $n$，成立

$$\operatorname{diam} S_n' > \alpha \operatorname{diam} S_n''$$

和

$$S_n' \subset G_n \subset S_n''.$$

假如去掉上述正则性条件，就得到 Ward 第二定理．这些定理推广了关于一元函数的 **Denjoy 定理（关于导数的）**（Denjoy theorem on derivatives），这些定理是由 A. J. Ward（[1]）建立的．

**参考文献**

[1A] Ward, A. J., On the differentiation of additive functions of rectangles, *Fund. Math.*, 28 (1936), 167 – 182.

[1B] Ward, A. J., On the derivation of additive functions of intervals in *m*-dimensional space, *Fund. Math.*, 28 (1937), 265 – 279.

Л. Д. Иванов 撰

【补注】

**参考文献**

[A1] Saks, S., Theory of the integral, Hafner, 1952（译自波兰文）.

王斯雷 译

**Waring 问题 [Waring problem; Варинга проблема]**

数论中的一个问题，1770 年由 E. Waring 以下述形式提出：任何自然数均为四个平方数之和，均为九个立方数之和，均为十九个四方数之和．换言之，对所有 $n\geqslant 2$ 存在一个仅与 $n$ 有关的数 $k=k(n)$，使每个自然数都是 $k$ 个非负整数的 $n$ 次幂之和．1909 年 D. Hilbert 首先给出 Waring 问题的一般解，并把 $k$ 表成 $n$ 的函数而得到 $k$ 的一个很粗略的估计值．故而这个问题有时也称为 Hilbert-Waring 问题（Hilbert-Waring problem）．设 $J_{k,n}(N)$ 为方程

$$x_1^n+\cdots+x_k^n=N \qquad (1)$$

的非负整数解数．Hilbert 定理提出：存在一个 $K=k(n)$，对任何 $N\geqslant 1$ 有 $J_{K,n}(N)\geqslant 1$．G. H. Hardy 与 J. E. Littlewood 把**圆法**（circle method）用于 Waring 问题，他们于 1928 年证明了：对 $k\geqslant(n-2)2^{n-1}+5$，$J_{k,n}(N)$ 的值由形如

$$J_{k,n}(N)=AN^{k/n-1}+O(N^{k/n-1-\gamma}) \qquad (2)$$

的渐近公式给出，其中 $A=A(N)\geqslant c_0>0$，$c_0$ 与 $\gamma>0$ 均为常数．从而，只要 $N\geqslant N_0(n)$，方程（1）就有解．这一结果提出了三个问题：确定满足下述条件的取最小整数的三个量 $G(n)$，$g(n)$ 与 $k_0(n)$ 的阶：a）使方程（1）对 $k\geqslant G(n)$ 及 $N\geqslant N_0(n)$ 有解；b）使方程（1）对 $k\geqslant g(n)$ 及 $N\geqslant 1$ 有解；c）当 $k\geqslant k_0(n)$ 时 $J_{k,n}(N)$ 有渐近公式（2）．

a）已知 $G(n)\geqslant n+1$．1934年 И. М. Виноградов 用他自己的方法证明了

$$G(n)\leqslant 3n(\ln n+9).$$

此外，对小的 $n$ 有许多关于 $G(n)$ 的结果：$G(4)=16$（H. Davenport，1939）；$G(3)\leqslant 7$（Ю. В. Линник，1942）．

b）1936 年 L. Dickson 与 S. Pillai 同样用 **Виноградов 法**（Vinogradov method）证明了，对满足条件

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n-\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n\right]\leqslant$$

$$\leqslant 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\left\{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n\right]+3\right\}$$

的所有 $n>6$ 皆有

$$g(n)=2^n+\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n\right]-2.$$

1957 年 K. Mahler 证明了，对所有充分大的 $n$ 上述条件是成立的．

c）最好的结果应归功于 Виноградов，他证明了

$$k_0(n)\leqslant 4n^2\ln n.$$

1942 年 Ю. В. Линник 给出 Waring 问题的一个初等证明．Waring 问题有许多不同的推广（例如变数取自然数的某个子集；$N$ 用多项式 $f_1(x_1)$，…，$f_k(x_k)$ 表出，而不是用单项式 $x_1^n$，…，$x_k^n$ 表出；方程（1）换成同余式等等）．

Waring 问题的重要性在于：为了求解这一问题，创造出了**解析数论**（analytic number theory）中一些强有力的方法．

**参考文献**

[1] Виноградов, И. М., Избранные труды, М., 1952（英译本：Vinogradov, I. M., Selected works, Sprin-

ger, 1985).

[2] Виноградов, И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М., 1971 (英译本: Vinogradov, I. M., The method of trigonometric sums in the theory of numbers, Interscience, 1954).

[3] Hua, L.-K., Abschätzungen von Exponentialsummen und ihre Anwendung in der Zahlentheorie, in Enzyklopaedie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, Vol. 1, 1959. Heft 13, Teil 1 (中译本: 华罗庚, 指数和的估计及其在数论中的应用, 科学出版社, 1963).

[4] Делоне, Б. Н., Петербургская школа теории чисел, М.-Л., 1947.

[5] Хинчин, А. Я., Три жемчужины теории чисел, 2 изд., М.-Л., 1948 (英译本: Khinchin, A. Ya., Three pearls of number theory, Graylock, 1952).

А. А. Карацуба 撰

【补注】 已知 $g(2)=4$ (J. L. Lagrange, 1770), $g(3)=9$ (A. Wieferich, A. Kempner, 1912), $g(4)=19$ (R. Balusabramanian, J. Deshouillers, F. Dress, 1986), $g(5)=37$ (陈景润, 1964). 亦见圆法 (circle method) 及 [A1]－[A3].

**参考文献**

[A1] Hardy, G. H. and Wright, E. M., An introduction to the theory of numbers, Oxford Univ. Press, 1979.

[A2] Vaughan, R. C., The Hardy-Littlewood method, Cambridge Univ. Press, 1981.

[A3] Shanks, D., Solved and unsolved problems in number theory, Chelsea, reprint, 1978.

**【译注】**

(1) $g(n)\geqslant 2^n+\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n\right]-2$ (L. Euler, 1772).

(2) $g(6)=73$ (S. Pillai, 1940).

(3) 关于不等式

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n-\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n\right]\leqslant \leqslant 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\left\{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n\right]+3\right\} \qquad (2)$$

的验证, 至今 (1996) 尚未完全解决. K. Mahler 于 1957 年证明了: 存在绝对常数 $N_0$, 当 $n\geqslant N_0$ 时 (2) 成立, 但 $N_0$ 是非实效的. 目前关于 (2) 式数值验证的最好结果属于 J. M. Kubina 与 M. C. Wunderlich, 他们于 1989 年验证了 (2) 式对 $2\leqslant n\leqslant 471,600,000$ 成立 (见 B1).

(4) 1992 年 J. M. Deshouillers 与 F. Dress 证明了: 每个大于 $10^{367}$ 的整数均可表为十九个四方数之和. 1993 年他们又证明了: 每个小于 $10^{448}$ 的正整数均可表为十九个四方数之和. 有关 $g(4)=19$ 的文献及上述两个结果, 见 B2－B4.

(5) $n$ 较大时 $G(n)$ 上界的已知最好的估计属于 А. А. Карацуба ([B5]), 他于 1985 年用 $p$ 进形式的 Виноградов 方法得到, 对 $n\geqslant 4000$ 有

$$G(n)<2n(\ln n+\ln\ln n+6).$$

$n$ 较小时 $G(n)$ 上界估计之结果见 B6－B8. 此外, 1990 年 J. Brüdern ([B9]) 得到 $G(5)\leqslant 18$, 1993 年 R. C. Vaughan 与 T. D. Wooley ([B10]) 得到 $G(8)\leqslant 42$.

(6) 关于渐近公式 (2), 1938 年华罗庚证得对 $k\geqslant 2^n+1$ 有 (2) 成立; 后来, И. М. Виноградов 又改进为: 对 $k\geqslant 2n^2(2\ln n+\ln\ln n+5)$ 及 $n\geqslant 4$ 有 (2) 成立. 这是目前已知最好的结果. 在 1956 年召开的全苏第三次数学大会上, И. М. Виноградов 曾问及下述问题: 能否证明 (2) 式对 $k\geqslant k_0(n)$ 成立, 而 $k_0(n)$ 的阶为 $n^{1+\varepsilon}$? 根据 Hardy 与 Littlewood 的一个猜想容易推出: (2) 式对 $k\geqslant 2n+1$ 成立. 参见 [1] (英文版) p. 245－256 及 p. 167; [3] (中译本) p. 59－61. 目前的方法与结果离这些猜想还很遥远.

关于渐近公式 (2) 当 $n=3$ 的情形, 由 Hardy 与 Littlewood 的结果知, (2) 式对 $k\geqslant 9$ 成立. 他们猜想 $n=3$ 时 (2) 式对 $4\leqslant k\leqslant 8$ 也成立. 1986 年 R. C. Vaughan (MR 87j:11103) 证明了 $k=8$, $n=3$ 时 (2) 式成立, 并证明了

$$J_{7,3}(N)\gg N^{\frac{142}{115}}(\log N)^{-5}.$$

1989 年他 (MR 90c: 11073) 进一步证明了

$$J_{7,3}(N)\gg N^{\frac{4}{3}},$$

这离 $k=7$、$n=3$ 的渐近公式仅差一步之遥. 此外, 他 (MR 87j: 11104) 还研究了 $k=2^n (n\geqslant 4)$ 的情形, 得到类似 (2) 的渐近式, 但误差项估计要换成

$$O(N^{\frac{k}{n}-1}(\log N)^{\varepsilon-\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}).$$

(7) 关于 $G(n)$ 的精确值, 目前知之甚少. 由 Hardy 与 Littlewood 的一个猜想可推出如下猜测:

① 对 $n=2^m$ 及 $m\geqslant 2$ 有 $G(n)=4n$;

② 对其他情形皆有 $G(n)\leqslant 2n+1$.

除个别情形外, 这些猜想至今仍未解决.

**参考文献**

[B1] Kubina, J. M. and Wunderlich, M. C., Extending Waring's conjecture to 471, 600,000, *Math. Comp.*, 55 (1990), 192, 815－820 (MR 91b: 11101).

[B2] Balasubramanian, R., Deshouillers, J.-M. and Dress, F., Problème de Waring pour les bicarrés. I. Schéma de la solution, *C. R. Acad. Sci Paris Sér. 1 Math.*, 303 (1986), 4, 85－88; II. Résultats

auxiliaires pour le théorème asymptotique, *ibid*. *Sér*. 1 *Math*., **303** (1986), 5, 161 – 163 (MR 87m: 11099, MR 88e: 11095).

[B3] Deshouillers, J.-M. and Dress, F., Sums of 19 biquadrates: on the representation of large integers, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4), **19** (1992), 1, 113 – 153 (MR 94g: 11079).

[B4] Deshouillers, J.-M. and Dress, F., Numerical results for sums of five and seven biquadrates and consequences for sums of 19 biquadrates, *Math. Comp.*, **61** (1993), 203, 195 – 207 (MR 94C: 11096).

[B5] Карацуба, А. А., О функции $G(n)$ в проблеме Варинга, ИАН СССР, Сер. мат., **49** (1985), 5, 935 – 947 (MR 87C: 11092).

[B6] Vaughan, R. C., Homogeneous additive equations and Waring's problem, *Acta Arith.*, **33** (1977), 231 – 253.

[B7] Balasubramanian, R. and Mozzochi, C. J., An improved upper bound for G(k) in Waring's problem for relatively small k, *Acta Arith.*, **43** (1984), 283 – 285.

[B8] Vaughan, R. C., A new iterative method in Waring's problem, *Acta Math.*, **162** (1989), 1 – 2, 1 – 71 (MR 90C: 11072).

[B9] Brüdern, J., On Waring's problem for fifth powers and some related topics, *Proc. London Math. Soc.* (3), **61** (1990), 3, 457 – 479 (MR 91h: 11101).

[B10] Vaughan, R. C. and Wooley, T. D., Further improvement in Waring's problem, Ⅲ. Eighth powers. *Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A*, **345** (1993), 1676, 385 – 396 (MR 94m: 11118).

张明尧 译 戚鸣皋 校

**Watson 引理 [Watson lemma; Ватсона лемма]**

【补注】 一个联系函数在 0 附近的渐近性态与其 **Laplace 变换** (Laplace transform) 在 ∞ 附近的渐近性态的结果. 令 $f(t)$ 有渐近展开

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^{\lambda_n},\ t \to 0,$$

$-1 < \mathrm{Re}(\lambda_1) < \mathrm{Re}(\lambda_2) < \cdots$, 并令 $F$ 是 $f$ 的 Laplace 变换,

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)\,dt.$$

则 $F$ 有相应的渐近展式

$$F(p) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \lambda_n!}{p^{\lambda_n+1}},\ |p| \to \infty,$$

$$-\pi/2 < \arg(p) < \pi/2.$$

**参考文献**

[A1] Davies, B., Integral transforms and their applications, Springer, 1978, § 1.3. 王仁宏、檀结庆 译

**Watson 变换 [Watson transform; Ватсона преобразование]**

函数 $f \in L_2(0, \infty)$ 的一种变换 $g$, 定义如下:

$$g(x) = \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \tilde{\omega}(xu) f(u) \frac{du}{u}. \quad (1)$$

这里 $x$ 是实变量, 核 $\tilde{\omega}(x)$ 具有形式

$$\tilde{\omega}(x) = \frac{x}{2\pi} \operatorname*{l.i.m}_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \frac{\Omega\left(\frac{1}{2}+it\right)}{\frac{1}{2}-it} x^{-\left(it+\frac{1}{2}\right)} dt \quad (2)$$

(l.i.m 表示 $L_2$ 中平均极限) 且函数 $\Omega\left(it+\frac{1}{2}\right)$ 满足条件

$$\Omega(s)\Omega(1-s) = 1.$$

以下条件对核 $\tilde{\omega}(x)$ 的存在性和包含关系 $\tilde{\omega}(x)/x \in L_2(0, \infty)$ 是充分的:

$$\Omega\left(\frac{1}{2}-it\right) = \Omega\left(\frac{1}{2}+it\right)$$

且

$$\frac{\Omega\left(\frac{1}{2}+it\right)}{\frac{1}{2}-it} \in L_2(-\infty, \infty).$$

对函数 $f \in L_2(0, \infty)$, 公式 (1) 几乎处处定义函数 $g \in L_2(0, \infty)$. Watson 变换 (1) 的反演公式具有形式

$$f(x) = \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \tilde{\omega}(xu) g(u) \frac{du}{u}.$$

G. N. Watson ([1]) 首先研究这种变换, 因而以他的名字命名.

**参考文献**

[1] Watson, G. N., General transforms, *Proc. London Math. Soc.* (2), **35** (1933), 156 – 199.

А. П. Прудников 撰

【补注】 十分一般地, 令 $\psi$ 是 $\mathbf{R}_{>0}$ 上的 Lebesgue 可测函数且令

$$\varphi = \int_0^x \psi(t)\,dt.$$

核 $\psi$ (或 $\varphi$) 称为广义核 (generilized kernel), 或广义变换的核 (kernel of a generilized transform), 如果

a) $\psi(x)$ 在 $\mathbf{R}_{>0}$ 上是实值的;

b) $x^{-1}\varphi(x) \in L_2(\mathbf{R}_{>0})$;

c) $\int_0^{\infty} \varphi(xu)\varphi(yu)u^{-2}du = \min(x, y)$.

在 $L_2(\mathbf{R}_{>0})$ 上由

$$\Phi(f)(x)=\frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{\varphi(xt)f(t)}{t}dt$$

定义的算子 Φ 称为广义变换(generalized transform)或 Watson 变换(Watson transform).

**参考文献**

[A1] Okikiolu, G. O., Aspects of the theory of bounded operators in $L^p$-spaces, Acad. Press, 1971, § 6.7.

葛显良 译 吴绍平 校

**波动方程[wave equation; волновое уравнение]**

描述各种振动过程和波的传播过程的形如

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}=0$$

的方程. 对于波动方程(它是双曲型方程), 通常研究两个问题: **Cauchy 问题**(Cauchy problem)和**混合问题**(mixed problem).

Cauchy 问题的经典解是描述 $n$ 维 Euclid 空间 $E^n$ 中波的传播的函数 $u(x,t)$, 它在 $n+1$ 维空间 $\{x\in E^n, t\geqslant 0\}$ 中连续可微, 在半空间 $\{x\in E^n, t>0\}$ 中二阶连续可微, 满足波动方程且满足初始条件

$$u(x,+0)=\varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,+0)=\psi(x),$$

其中 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 是给定的函数.

混合问题的经典解是描述有界区域 $G\subset E^n$ 中的振动的函数 $u(x,t)$, 它在闭圆柱 $\{x\in\overline{G}, t\geqslant 0\}$ 上连续可微, 在开圆柱 $\{x\in G, t>0\}$ 中二阶连续可微且满足波动方程, 并对 $x\in G$ 满足初始条件

$$u(x,+0)=\varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,+0)=\psi(x).$$

此外, 在所给圆柱的"侧面"上, 它满足某些边界条件.

对于充分光滑的 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$, Cauchy 问题的经典解由所谓 **Poisson 公式**(Poisson formula)给出, 此公式当 $n=1$ 时就是 **d'Alembert 公式**(d'Alembert formula). 如果波动方程的右端不是零而是某个给定的函数 $f(x,t)$, 则此方程称为非齐次的(non-homogeneous), 而其解由所谓 Kirchhoff 公式(Kirchhoff formula)给出. 波动方程的混合问题可用 Fourier 法、有限差分法或 Laplace 变换法求解.

以经典方式表述的上述问题的研究已推广到研究 Cauchy 问题和混合问题较弱意义下的经典解([4])和广义解([2], [3])的存在性和唯一性.

**参考文献**

[1] Тихонов, А. Н., Самарский, А. А., Уравнения математической физики, 3 изд., М., 1966 (中译本: A. H. 吉洪诺夫, A. A. 萨马尔斯基, 数学物理方程, 上、下册, 高等教育出版社, 1956).

[2] Соболев, С. Л., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1966 (中译本: C. Л. 索伯列夫, 数学物理方程, 高等教育出版社, 1954).

[3] Ладыженская, О. А., Смешанная задача для гиперболического уравнения, М., 1953.

[4] Ильин, В. А., 《Успехи матем. наук》, 15 (1960), в. 2(92), 97–154.

[5] Соболев, С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Новосиб., 1962 (C. Л. 索伯列夫, 泛函分析在数学物理中的应用, 科学出版社, 1959).

Ш. А. Алимов 撰

【补注】 波动方程的更一般的形式是

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\Delta u=0,$$

其中 $c$(可为 $x,t$ 的函数)是波的传播速度.

[A1] 中讨论了波动方程的许多经典论题. [A2] 中提供了一般的现代观点.

**参考文献**

[A1] Courant, R. and Hilbert, D., Methods of mathematical physics, 2. Partial differential equations, Interscience, 1965 (中译本: R. 柯朗, D. 希尔伯特, 数学物理方法, Ⅱ, 科学出版社, 1977).

[A2] Hörmander, L., The analysis of linear partial differential operators, 3, Springer, 1985, Chapts. 23–24.

[A3] Hadamard, J., Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations, Dover, reprint, 1952.

[A4] John, F., Partial differential equations, Springer, 1978 (中译本: F. 约翰, 偏微分方程, 科学出版社, 1986).

[A5] Garabedian, P. R., Partial differential equations, Wiley, 1964.

[A6] Schwartz, L., Théorie des distributions, Hermann, 1966.

[A7] Schwartz, L., Mathematics for the physical sciences, Hermann, 1966.

[A8] Baker, B. B., Copson, E. T., The mathematical theory of Huygen's principle, Clarendon Press, 1950.

[A9] Hellwig, G., Partial differential equations, Blaisdell, 1964.

沈永欢 译

**波前集[wave front 或 wave front set; фронт волновой]**, 亦称"波阵面", 广义函数(分布)或超函数的

在其上给定所考虑广义函数或超函数的流形的余切丛中的一个锥形集, 它刻画其奇性特征. 超函数(hyperfunction)是全纯函数的形式边界值之和. 两个这样的和认为是等同的, 如果它们在由一个与 Боголюбов "楔边"定理类似的定理(见 **Боголюбов 定理**(Bogolyubov theorem))给出的等价意义下是等价的, 然而其中没有在任何意义下假设所考虑的全纯函数有极限.

超函数的波前集通常也称为解析波前集（analytic wave front set）或奇异支集（singular support）（最后这术语更经常地在一种完全不同的意义下使用，此时它表示该广义函数在此流形本身上而不是在其余切丛中的某种正则性集合的补集）．波前集的概念是微局部分析的基础，后者是一些方法和想法的综合，利用波前集和其他有关的概念和技术（特别是拟微分算子和 Fourier 积分算子）去研究偏微分方程（主要是线性方程）．

设 $X$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中一个区域且设 $u \in D'(X)$，即 $u$ 是 $X$ 上的一个广义函数．则 $u$ 的波前集 $\mathrm{WF}(u)$ 是 $T^*X\setminus 0 = X \times (\mathbf{R}^n\setminus 0)$ 的闭锥形子集，定义如下：如果 $(x_0, \xi_0) \in X \times (\mathbf{R}^n \setminus 0)$，则 $(x_0, \xi_0) \notin \mathrm{WF}(u)$ 是指存在函数 $\varphi \in C_0^\infty(X)$，在 $x_0$ 的某邻域中等于 1，且在 $\mathbf{R}^n\setminus 0$ 中有 $\xi_0$ 的锥形邻域 $\Gamma$，使得对每一个 $N>0$，

$$|\widehat{\varphi u}(\xi)| \leqslant C_N(1+|\xi|)^{-N},\ \xi \in \Gamma,$$

其中

$$C_N > 0,\ \widehat{\varphi u}(\xi) = \langle u(x), \varphi(x)e^{-ix\cdot\xi}\rangle,$$

即 $\widehat{\varphi u}$ 是 $\varphi u$ 的 Fourier 变换．

如果 $X$ 是一流形且 $u$ 是 $X$ 上的广义函数（或更一般地，光滑向量丛的广义截面），则 $\mathrm{WF}(u)$ 按上述同样方式定义（在转移到局部坐标后）．在这种情况 $\mathrm{WF}(u)$ 可证明是 $T^*X\setminus 0$ 的一个有确切定义的锥形子集（余切丛没有零截面）．

引入典范投影 $\pi: T^*X\setminus 0 \to X$，则

$$\pi(\mathrm{WF}(u)) = \operatorname{sing\,supp} u, \tag{1}$$

其中 $\operatorname{sing\,supp} u$ 是在其上 $u$ 与一无穷次可微函数重合的 $X$ 的最大开子集的补集．这关系式表明 $\mathrm{WF}(u)$ 确实是比 $\operatorname{sing\,supp} u$ 更精细的刻画 $u$ 的奇异性的一个特征．

设 $A$ 是 $X$ 上具有主象征 $a_m(x,\xi)$ 的 $m$ 阶伪微分算子（pseudo-differential operator），且设 $\operatorname{char} A$ 是它的特征方向的集合，即

$$\operatorname{char} A = \{(x,\xi) \in T^*X\setminus 0 : a_m(x,\xi) = 0\}.$$

这时

$$\mathrm{WF}(Au) \subset \mathrm{WF}(u) \subset \mathrm{WF}(Au) \cup \operatorname{char} A. \tag{2}$$

这里第一个包含关系刻画了 $A$ 的拟局部性，而第二个包含式是关于具有光滑系数的椭圆型方程解的光滑性定理的一个深远的推广．

如果 $A$ 的主象征 $a_m(x,\xi)$ 是实值的，则关于奇点传播的以下定理成立：如果给定了一个次特征（即 $T^*X\setminus 0$ 上具有 Hamilton 函数 $a_m$ 的 Hamilton 向量域的一个轨道）的连通片 $\gamma$，与 $\mathrm{WF}(Au)$ 不相交，则或者 $\gamma \subset \mathrm{WF}(u)$ 或者 $\gamma \cap \mathrm{WF}(u) = \varnothing$．

这定理表明一个具有光滑右端 $f$ 的方程 $Au=f$ 的解的奇点（即它们的波前集）沿着 $A$ 的主象征 $a_m$ 的次特征传播（见[3]，[4]，[8]，[11]，[12]，[16]）．

对广义函数 $u \in D'(X)$ 的解析波前集 $\mathrm{WF}_a(u)$ 可按以下三个等价方式之一来定义（见[13]）（这里为简单起见，$X$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中区域）：

1）$(x_0, \xi_0) \notin \mathrm{WF}_a(u)$，如果存在 $x_0$ 的邻域 $\omega$，$\mathbf{R}^n$ 中开的真凸锥 $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_N$ 和在 $\omega + i\Gamma_j$ 中全纯的函数 $f_j$，使得 $\xi_0 \notin \Gamma_j^\circ$，$j=1,\cdots,N$，且 $u = \sum_{j=1}^N b(f_j)$，其中 $\Gamma_j^\circ$ 是对偶于 $\Gamma_j$ 的锥且 $b(f_j)$ 是全纯函数 $f_j(x+iy)$ 当 $y \to 0$，$y \in \Gamma_j$ 时的边界值，在广义函数弱收敛意义下．这定义也适用于超函数，如果边界值作不同的解释．

2）设

$$F_u(\xi, \lambda; x) = \int \exp[-iy\cdot\xi - \lambda|y-x|^2]u(y)\,dy$$

（一种广义 Fourier 变换）；则 $(x_0,\xi_0) \notin \mathrm{WF}(u)$，当且仅当对任何在 $x_0$ 的某邻域中解析的函数 $\chi \in C_0^\infty(X)$ 存在 $\xi_0$ 的锥形邻域 $\Gamma$ 和正常数 $\alpha, \gamma, C_N$ 使得

$$F_{\chi u}(\xi, \lambda; x_0) \leqslant C_N(1+|\xi|)^{-N}e^{-\lambda\alpha},$$

$$\xi \in \Gamma,\ 0 < \lambda < \gamma|\xi|.$$

3）$(x_0, \xi_0) \notin \mathrm{WF}(u)$，当且仅当存在 $x_0$ 在 $X$ 中的邻域 $\omega$，具有紧支集的广义函数的有界序列 $u_k$，$k=1,2,\cdots$，和常数 $C>0$，使得在 $\omega$ 中 $u_k = u$ 且

$$|\hat{u}_k(\xi)| \leqslant C^{k+1}k!|\xi|^{-k},\ \xi \in \Gamma.$$

对解析波前有性质（1）的类似：

$$\pi(\mathrm{WF}_a(u)) = \operatorname{sing\,supp}_a u,$$

这里 $\operatorname{sing\,supp}_a u$ 是 $u$ 在其上实解析的最大集合的补集．有性质（2）的类似，这里可取具有实解析系数的微分算子或解析拟微分算子作为 $A$（见[6]，[9]，[11]，[15]，[16]）．对这种具有实主象征的算子 $A$，一个类似于上述对通常波前集的，关于解析波前集的传播的定理成立（见[11]）．

**参考文献**


[1] Sato, M., Hyperfunctions and partial differential equations, in Proc. 2nd Conf. Functional Anal. Related Topics, Tokyo Univ. Press, 1969, 91 – 94.

[2] Hörmander, L., Fourier integral operators I, *Acta Math.*, **127** (1971), 79 – 183.

[3] Duistermaat, J. J. and Hörmander, L., Fourier integral operators II, *Acta Math.*, **128** (1972), 183 –

269.

[4] Duistermaat, J. J., Fourier integral operators, Courant Inst. Math., 1973.

[5] Шубин, М. А., Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория, М., 1978(英译本: Shubin, M. A., Pseudo-differential operators and spectral theory, Springer, 1983).

[6] Trèves, F., Introduction to pseudo-differential and Fourier integral operators, 1 2, Plenum, 1980.

[7] Taylor, M., Pseudo-differential operators, Princeton Univ. Press, 1981.

[8] Nirenberg, L., Lectures on linear partial differential equations, Amer. Math. Soc., 1972.

[9] Sato, M., Kawai, T. and Kashiwara, M., Microfunctions and pseudo-differential equations, in Hyperfunctions and Pseudo-Differential Equations, Lecture notes in math., Vol. 287, Springer, 1973, 265 − 529.

[10] Schapira, P., Théorie des hyperfonctions, Springer, 1970.

[11] Sjöstrand, J., Singularités analytiques microlocales, Univ. Paris-Sud, 1982(Prepublication.)

[12] Lascar, R., Propagation des singularités des solutions d'équations pseudo-differentielles à caractéristiques de multiplicités variables, Springer, 1981.

[13] Bony, J., Equivalence des diverses notions de spectre singulier analytique, Sém. Goulaouic-Schwartz Ⅲ (1976 − 1977).

[14A] Bros, J. and Iagolnitzer, D., Tuboïdes et structure analytique des distributions Ⅰ. Tuboïdes et généralisation d'un théorème de Grauert, Sém. Goulaouic-Lions-Schwartz, **16** (1974).

[14B] Bros, J. and Iagolnitzer, D., Tuboïdes et structure analytique des distributions Ⅱ. Support essentiel et structure analytique des distributions, Sém. Goulaouic-Lions-Schwartz, **18** (1975).

[15] Hörmander, L., On the singularities of solutions of partial differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, **23** (1970), 329 − 358.

[16] Hörmander, L., The analysis of linear partial differential equations, Ⅰ − Ⅳ, Springer, 1983 − 1985.

М. А. Шубин 撰

【补注】

**参考文献**

[A1] Guillemin, V. and Sternberg, S., Geometric asymptotics, Amer. Math. Soc., 1977

[A2] Arnol'd, V. I., Singularities of caustics and wave fronts, Kluwer, 1990.

葛显良 译 鲁世杰 校

**波向量 [wave vector; волновой вектор]**

在表达式

$$a\exp\left(i\sum_{j=1}^{m}k_jx_j - i\omega t\right) \qquad (*)$$

中的向量 $\mathbf{k}=(k_1,\cdots,k_m)$，其中 $a$ 和 $\omega$ 都是常数，$t$ 表示时间.

$(*)$ 的通常的物理解释是：频率为 $\omega$ 的一个平面波，在向量 $\mathbf{k}$ 的方向上传播，其波长为 $\lambda=2\pi/|\mathbf{k}|$，其中 $|\mathbf{k}|=\sqrt{k_1^2+\cdots+k_m^2}$. 许多偏微分方程的线性齐次方程和方程组(包括数学物理的更重要的方程，如 **Maxwell 方程**(Maxwell equation)和**波动方程**(wave equation))都有 $(*)$ 形式的解.

В. М. Бабич 撰

【补注】

**参考文献**

[A1] John, F., Plane waves and spherical means applied to partial differential equations, Interscience, 1955.

[A2] Gel'fand, I. M. and Shilov, G. E., Generalized functions, I. Properties and operations, Acad. Press, 1964(译自俄文).

孙和生 译 陆柱家 校

**小波分析 [wavelet analysis; небольшей волны анализ]**

【补注】 粗浅地说，小波是一个在时间和频率两方面都充分局部化的(波形)函数. 熟知的例子有墨西哥帽小波(Mexican hat wavelet)：

$$g(x)=(1-x^2)e^{-x^2/2} \qquad (A1)$$

及 Morlet 小波(Morlet wavelet)：

$$g(x)=\pi^{-1/4}(e^{-i\xi_0x}-e^{-\xi_0^2/2})e^{-x^2/2}. \qquad (A2)$$

在小波分析中，对基小波(basic wavelet)作展缩和平移，用于信号分析和图象处理. $s(t)$ 的连续小波变换(wavelet transform)是实变量 $a>0$ 和 $b$ 的二元函数

$$S(a,b)=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\bar{g}_{a,b}\,s(t)dt, \qquad (A3)$$

其中的

$$g_{a,b}(t)=g\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

以及 $\bar{g}$ 是 $g$ 的复共轭. 使用 $g$ 的 Fourier 变换 $\hat{g}$，则有

$$S(a,b)=\sqrt{a}\int\bar{\hat{g}}(a\omega)e^{ib\omega}\hat{s}(\omega)d\omega. \qquad (A4)$$

在基小波 $g$ 上附加容许性条件

$$c_g=2\pi\int|\hat{g}(\omega)|^2\frac{d\omega}{|\omega|}<\infty \qquad (A5)$$

(这意指，如果 $\hat{g}(\omega)$ 可微，则 $\hat{g}(0)=0$ 即 $\int g(t)dt=0$). 如果(A5)成立，则有反演公式

$$s(t)=c_g^{-1}\int\left[\int S(a,b)g_{a,b}(t)db\right]\frac{da}{a^2}. \qquad (A6)$$

小波变换与小波群(wavelet group) $\{T_{ab}: a>0, b\in\mathbf{R}\}$ $(T_{ab}(x)=ax+b)$ 及其子群 $\{T_{ab}: a=2^k, k, b\in\mathbf{Z}\}$ 之间的联系，非常类似于 Fourier 变换与群

R 及 Z 之间的联系．为小波理论早期的蓬勃发展作出重要贡献的有 J. Morlet, A. Grosmann, Y. Meyer, I. Daubechies 以及他们的学生和合作者．激发这一理论的一个源泉是 D. Gabor 的窗口 Fourier 分析（[A1]）.

规范正交小波基（wavelet basis）是 $L_2(\mathbf{R})$ 的形式为

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k), \ j,k \in \mathbf{Z}$$

的一组基．不可微小波基的一个例子是 Haar 函数系（Haar system）. Daubechies 构造了由紧支集的 $r$ 阶可微的 $\psi$ 组成的规范正交基，称为 Daubechies 基（Daubechies bases）. 可微阶数越高（即 $r$ 越大），则这些基的支集将越大．

小波似乎特别适合用于分析和发现信号、函数和图象的各种性质，例如间断性及分形结构．它被誉为数学显微镜．另外，小波作为一个统一的概念，连结了跨越繁多领域的技术和概念，例如：子带编码、相干态及重正规化、Calderon - Zygmund 算子、数值分析中的嵌套组、多解分析以及图象处理中的角锥编码等．

**参考文献**


[A1] Gabor, D., Theory of communication, *J. Inst. Electr. Eng.*, 93(1946), 429 − 457.

[A2] Meyer, Y., Les ondelettes, A. Colin, 1992.

[A3] Meyer, Y., Ondelettes et opérateurs, I. Ondelettes, Hermann, 1990（中译本：Y. 迈耶，小波与算子，世界图书出版公司，1995）.

[A4] Daubechies, I., Ten lectures on wavelets, SIAM, 1992.

[A5] Chui, C. K., An introduction to wavelets, Acad. Press, 1992（中译本：崔锦泰，小波分析导论，西安交通大学出版社，1995）.

[A6] Chui, C. K. (ed.), Wavelets: a tutorial in theory and applications, Acad. Press, 1992.

[A7] Ruskai, M. B., et al. (eds.), Wavelets and their applications, Jones & Bartlett, 1992.

[A8] Combes, J. M., Grosmann, A. and Tchamitchian, Ph. (eds.), Wavelets. Time-frequency methods and phase space, Springer, 1989.

[A9] Lemarié, P. G. (ed.), Les ondelettes en 1989, Springer, 1990.

[A10] Argoul, F., Arnéodo, A., Elezgaray, J. and Grasseau, G., Wavelet transform of fractal aggregates, *Physics Letters A*, **135**(1989), 327 − 336.

[A11] Holschneider, M., On the wavelet transformation of fractal objects, *J. Stat. Phys.*, **50** (1988), 963 − 993.

[A12] Holschneider, M. and Tchamitchian, Ph., Pointwise analysis of Riemann's nondifferentiable function, *Invent. Math.*, **105**(1991), 157 − 176.

[A13] Antonini, M., Barlaud, M., Daubechies, I. and Mathieu, P., Image coding using vector quantization in the wavelet transform domain, in IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech, and Signal Processing, IEEE, 1991, 2273 − 2276.

[A14] Beylkin, G., Coifman, R. and Rokhlin, V., Fast wavelet transforms and numerical algorithms, *Comm. Pure Appl. Math.*, **44**(1991), 141 − 183.

[A15] Mallat, S. G., A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation, *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **11** (1989), 674 − 693.


朱学贤 译 刘和平 译

**波 [waves; волны]**，液体表面上的

液体表面相对于平衡状态的偏离，这偏离在趋于恢复该状态的力的作用下传播着．依据这些力的性质——表面张力或重力——液体表面上的波分为张力波和重力波．

对液体的有势运动特别是对平面平行运动已很好地发展了重力波（gravitational waves）理论；作用于液体质点的体积力是重力．决定波运动的速度势要求在特殊形式的边界条件下对 **Laplace 方程**（Laplace equation）$\Delta\varphi = 0$ 求积分．沿整个液体表面压力是常数，表面的方程 $\xi = f(x, y, t)$ 可在问题被求解后求得．由此，根据熟知的流体力学方程的积分，得到了第一个边界条件

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}\left|\nabla\varphi\right|^2 - gz = \text{常数}, \qquad (1)$$

它应在 $z = \xi$ 时得到满足．根据在整个运动期间液体表面是由同一些质点组成的事实，得到第二个边界条件，即在 $z = \xi$ 时：

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\xi}{\partial y} - \frac{\partial\xi}{\partial t}. \qquad (2)$$

此外，须满足的其他要求是，对液体中的固体流动是与之相切的，与边界条件一起同时还须满足如下初始条件：在 $t = 0$ 时液体质点应具有规定的初始速度，而液体表面须有给定的形状．这等价于给定 $t = 0$ 时的作为 $x, y, z$ 函数的速度势和给定 $t = 0$ 时的函数 $f(x, y, t)$.

问题的主要困难在于所有上述条件必须在表面 $\xi = f(x, y, t)$ 上满足，而此表面的方程只在问题本身被求解之后才能求得．在这方面波理论中的问题与旋转液体的射流及平衡态形状的理论中的问题有许多共同之处．

由于在上述边界条件下严格求解波理论的问题实际上不可能，于是发展了无限小波的理论．该理论假定，液体质点的速度和液体表面相对水平平衡而的偏离都是小量．在这假设下，边界条件（1）和（2）取

如下形式:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}-g\xi=\text{常数},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{\partial\xi}{\partial t}=0.$$

与此同时,允许在速度势的偏导数中将变量 $z=\xi$ 换为零. 在这样的假设下函数 $\varphi$ 的边界条件取形式:

$$\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+g\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right]_{z=0}=0,$$

而波面的方程则取形式:

$$\xi=\frac{1}{g}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]_{z=0}.$$

在无限小波理论中所获得的主要结果使有可能处理地球物理学的许多重要问题和阐明例如海洋中潮汐波的传播规律. 无限小波理论给出了由航行的船舶产生的波形成问题的解并使得可能建立波浪中船只摇摆的流体力学理论. 复变函数理论诸方法的广泛应用使有可能求解关于不同深度水库中波的传播以及波在漂浮物体上的绕射及反射一系列非常复杂的问题.

有限振幅波的理论是由 A. И. Некрасов ([3]) 发展的. 他通过严格求解具有边界条件 (1) 和 (2) 的平面问题得到了周期波的形状. 相应速度势的确定被化为求找将单波占据的区域变换为圆或圆环区的保角映象的表达函数, 该函数由求解某非线性积分方程而得到.

随着非线性边值问题和积分方程理论的发展, 有限振幅波的理论也充实了新成果. 特别是, 证明了存在单波和其剖面上有角点的极限 Stokes 波. 在有限振幅驻波的即液体表面周期性固有振动的理论中, 只存在建立在应用 Lagrange 变量基础上的近似解.

三维流动表面上的驻波和行波的确定, 甚至在求其近似解时也是一个难题.

**参考文献**


[1] Lamb, H., Hydrodynamics, Cambridge Univ. Press, 1906.

[2] Milne-Thomson, L. M., Theoretical hydrodynamics, MacMillan, 1950.

[3] Некрасов, А. И., Сбор. соч., т. 1, М., 1961, 358 - 439.

[4] Stoker, J. J., Water waves, Interscience, 1957.

[5] Теория поверхностных волн, сб. переводов, М., 1959.


Л. Н. Сретенский 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Philips, O. M., The dynamics of the upper ocean, Cambridge Univ. Press, 1977.

[A2] Whitham, G. B., Linear and nonlinear waves, Wiley, 1964.


李维新 译

**概率测度的弱收敛 [weak convergence of probability measures; слабая сходимость вероятностной меры]**

【补注】 概率测度弱收敛的一般背景是在完全可分**度量空间** (metric space) $(X,\rho)$ (亦见**完全空间** (complete space), **可分空间** (separable space)) 上讨论的, $\rho$ 是距离. 具有定义在 $X$ 的 Borel 子集上的概率测度 $\mu_n$, $n=0,1,\cdots$. 如果对定义在 $X$ 上的每个有界连续函数 $f$, 当 $n\to\infty$ 时, 有 $\int fd\mu_n\to\int fd\mu_0$, 则称 $\mu_n$ 弱收敛到 $\mu_0$. 如果在 $X$ 中取值的随机变量 $\xi_n$ 的分布是 $\mu_n$, $n=0,1,\cdots$, 如果 $\mu_n$ 弱收敛到 $\mu_0$ 就写作 $\xi_n\xrightarrow{d}\xi_0$, 并且称 $\xi_n$ 依分布收敛到 $\xi_0$ (亦见**依分布收敛** (convergence in distribution)).

在概率论中使用最普通的距离空间是 $k$ 维 Euclide 空间 $\mathbf{R}^k$, $[0,1]$ 上连续函数空间 $C[0,1]$ 以及在 $[0,1]$ 上右连续具有左极限的函数空间 $D[0,1]$.

更为丰富的距离空间中的弱收敛比在 Euclid 空间中的用处大得多. 这是因为在 $\mathbf{R}^1$ 中依分布收敛的各种各样的结果可由它借助于连续映射定理 (continuous mapping theorem) 导出. 该定理说, 如果在 $(X,\rho)$ 中 $\xi_n\xrightarrow{d}\xi_0$ 且映射 $h: X\to\mathbf{R}$ 是连续的 (或至少是可测的, 且 $\mathsf{P}(\xi_0\in D_h)=0$. 其中 $D_h$ 是 $h$ 的不连续点集), 则 $h(\xi_n)\xrightarrow{d}h(\xi_0)$. 在许多应用中极限随机元是 **Brown 运动** (Brownian motion), 它以概率 1 具有连续轨道.

最基本的弱收敛结果之一是关于和 $S_n=\sum_{i=1}^n X_i$, $n\geqslant 1$, 的 Donsker 定理 (Donsker theorem), 其中 $X_i$ 是具有 $\mathsf{E}X_i=0$, $\mathsf{E}X_i^2=1$, $i=1,2,\cdots$, 的独立同分布随机变量. 可以这样来陈述其轮廓: 在 $C[0,1]$ 中, 令 $S_0=0$, $S_n(t)=n^{-1/2}\{S_{[nt]}+(nt-[nt])\cdot X_{[nt]+1}\}$, $0\leqslant t\leqslant 1$, 其中 $[x]$ 表示 $x$ 的整数部分. 则 Donsker 定理断言 $S_n(t)\xrightarrow{d}W(t)$, 其中 $W(t)$ 是标准 Brown 运动. 应用连续映射定理很容易提供对诸如 $\max_{1\leqslant k\leqslant n}S_k$, $\max_{1\leqslant k\leqslant n}k^{-1/2}|S_k|$, $\sum_{k=1}^n I(S_k\geqslant a)$ 和 $\sum_{k=1}^n\gamma(S_k, S_{k+1})$ 等函数的依分布收敛结果, 其中 $I$ 是示性函数而 $\gamma(a,b)=1$, 如 $ab<0$; $=0$, 其他.

**参考文献**


[A1] Billingsley, P., Convergence of probability measures, Wiley, 1968.


C. C. Heyde 撰 刘秀芳 译 陈培德 校

**弱导数 [weak derivative; слабая производная]**

同 **Gâteaux 导数** (Gâteaux derivative).

**弱极值 [weak extremum; слабый экстремум]**

由泛函 $J(y)$ 在曲线 $\tilde{y}(x)$ $(x_1\leqslant x\leqslant x_2)$ 上达到的一个极小值或极大值 $J(\tilde{y})$, 其中对所有满足以下条件的比较曲线 $y(x)$, 以下不等式之一成立:

$$J(\tilde{y})\leqslant J(y)\text{ 或 }J(\tilde{y})\geqslant J(y),$$

这些 $y(x)$ 位于关于 $y$ 及其导数都是 $\varepsilon$ 邻近的 $\tilde{y}(x)$ 的一个邻域中:

$$|y(x)-\tilde{y}(x)|\leqslant\varepsilon,\ |y'(x)-\tilde{y}'(x)|\leqslant\varepsilon.$$

曲线 $\tilde{y}(x)$, $y(x)$ 必须满足给定的边界条件.

由于 $J(y)$ 的极大化等价于 $-J(y)$ 的极小化,因而常常谈论弱极小以代替弱极值.术语"弱"强调了这样一个事实,即比较曲线 $y(x)$ 不但满足在纵坐标上的 $\varepsilon$ 邻近条件且其导数也满足 $\varepsilon$ 邻近性条件(相对于**强极值**(strong extremum)情形,这时 $y(x)$ 和 $\tilde{y}(x)$ 的 $\varepsilon$ 邻近性仅对纵坐标而言).

由定义,弱极值是**弱相对极值**(weak relative minimum),因为后者在使 $J(y)$ 有意义的容许比较曲线 $y(x)$ 的整个类的一个子集的成员中给出一个极小值.然而为简便起见,术语"弱极值"用于两者的情形.

**参考文献**


[1] Лаврентьев, М. А., Люстерник, Л. А., Курс вариационного исчисления, 2 изд., М.-Л., 1950(中译本: М. А. 拉弗林契叶夫, Л. А. 留斯切尔涅克,变分学教程,高等教育出版社,1955).

[2] Смирнов, В. И., Курс высшей математики, 3 изд., т. 4, М., 1957(中译本: В. И. 斯米尔诺夫,高等数学教程,第四卷第一、二分册,人民教育出版社,1958).


И. Б. Вапнярский 撰 葛显良 译 吴绍平 校

## 弱同调[weak homology; слабая гомология]

闭链间的一种等价关系,用于定义**谱同调**(spectral homology)群 $\check{H}_p(C;G)$. 紧空间的 Steenrod-Ситников 同调群 $H_p(C;G)$ 满态射地映满 $\check{H}_p(C;G)$,而这一满态射的核 $K$ 同构于空间 $C$ 的相应于开覆盖 $\alpha$ 的神经的同调群 $H_p(\alpha;G)$ 的逆向极限的第一个导出函子 $\varprojlim^1$. 群 $H_p$ 最初是通过 Vietoris 闭链定义的.用于给出子群 $K\subset H_p(C;G)$ 的元素的闭链被称为弱同调于零的(weakly homologous to zero).另一方面,在群 $\check{H}_p$ 的以上定义中同调于零的 Vietoris 闭链有时被称为强同调于零的(strongly homologous to zero)(相应的等价关系则称为强同调(strong homology)).当 $G$ 为紧群或域时,核 $K$ 为零,此时强同调和弱同调等价.

**参考文献**


[1] Александров, П. С., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», **54** (1959), 3-136.

[2] Massey, W., Notes on homology and cohomology theory, Yale Univ. Press, 1964.


Е. Г. Скляренко 撰 李贤松 译 潘建中 校

## 弱极对极小值[weak relative minimum; слабый относительный минимум]

由泛函 $J(y)$ 在曲线 $\tilde{y}(x)$ $(x_1\leqslant x\leqslant x_2)$ 上达到的一个极小值 $J(\tilde{y})$,使得对在整个区间 $[x_1,x_2]$ 上满足一阶 $\varepsilon$ 邻近性条件

$$|y(x)-\tilde{y}(x)|\leqslant\varepsilon,\ |y'(x)-\tilde{y}'(x)|\leqslant\varepsilon \quad (1)$$

的所有比较曲线 $y(x)$, $J(\tilde{y})\leqslant J(y)$. 假设曲线 $\tilde{y}(x)$, $y(x)$ 满足给定的边界条件.

如果忽视(1)中在导数上的 $\varepsilon$ 邻近性条件,则这导致零阶 $\varepsilon$ 邻近性条件.泛函 $J(y)$ 在零阶 $\varepsilon$ 邻域中的极小值称为**强相对极小值**(strong relative minimum),因为零阶 $\varepsilon$ 邻近性条件比一阶 $\varepsilon$ 邻近性条件划分出更广的一类曲线,每个强极值也是一个弱极值,反之不然.

为了一条曲线 $\tilde{y}(x)$ 给出弱相对极值,在其上 **Legendre 条件**(Legendre condition)必须成立,对强相对极值,更一般的 **Weierstrass 条件(对变分极值的)**(Weierstrass condition (for a variational extremum))必须成立.按照最优控制理论的术语,这些必要条件之间的区分在于对弱(强)相对极小值,在极值曲线的点上,**Hamilton 函数**(Hamilton function)必须关于控制有一局部极大值(绝对极大值)(与 **Понтрягин 最大值原理**(Pontryagin maximum principle)一致).

关于弱相对极小值的充分条件仅在极值曲线 $\tilde{y}(x)$ 上加一定的要求,而对强极小值的情形,要求意义上类似的条件不但在 $\tilde{y}(x)$ 上成立,而且在它的某一个零阶 $\varepsilon$ 邻域内也成立.一条极值曲线成为弱相对极值,如果沿着它强 Legendre 和强 Jacobi 条件成立.一条极值曲线成为强相对极值,如果它可以嵌入于一个极值曲线场中而在该场的所有点 Weierstrass 函数是非负的.

**参考文献**


[1] Лаврентьев, М. А., Люстерник, Л. А., Курс вариационного исчисления, 2 изд., М.-Л., 1950(中译本: М. А. 拉弗林契叶夫, Л. А. 留斯切尔涅克,变分学教程,高等教育出版社,1955).

[2] Смирнов, В. И., Курс высшей математики, 3 изд., т. 4, М., 1957(В. И. 斯米尔诺夫,高等数学教程,第四卷第一、二分册,人民教育出版社,1958).


И. Б. Вапнярский 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Luenberger, D. G., Optimization by vector space methods, Wiley, 1969.

[A2] Cesari, L., Optimization-Theory and applications. Problems with ordinary differential equations, Springer, 1983.


葛显良 译 吴绍平 校

**弱奇异性**[**weak singularity**; **слабая особенность**], 极奇异性(polar singularity)

当乘积 $M(x, s)=|x-s|^{\alpha}K(x, s)$ ($(x, s)\in\Omega\times\Omega$) 有界时积分核 $K(x, s)$ 的无界性(见**积分算子的核**(kernel of an integral operator)). 这里 $\Omega$ 是空间 $\mathbf{R}^n$ 中的一个集合, $|x-s|$ 是两点 $x$ 和 $s$ 之间的距离且 $0<\alpha=$ 常数 $<n$. 由这样的一个核生成的积分算子

$$K\varphi(t)=\int_{\Omega}\frac{M(x, s)}{|x-s|^{\alpha}}\varphi(s)ds \qquad (1)$$

称为具有弱奇异性(或具有极奇异性)的积分算子(integral operator with a weak singularity (with a polar singularity)). 设 $\Omega$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个紧子集. 如果 $M(x, s)$ 在 $\Omega\times\Omega$ 上连续, 则算子(1)是连续函数空间 $C(\Omega)$ 上的**完全连续算子**(completely-continuous operator), 又如果 $M$ 是有界的, 则算子(1)在空间 $L_2(\Omega)$ 上是完全连续的.

核

$$(K_1\otimes K_2)\ (x, s)=\int_{\Omega}K_1(x, t)K_2(t, s)dt \qquad (2)$$

称为核 $K_1$ 和 $K_2$ 的卷积(convolution of the kernels). 设 $K_1$, $K_2$ 有弱奇异性, 且

$$|K_i(x, s)|\leqslant\frac{\text{常数}}{|x-s|^{\alpha_i}},\ \alpha_i=\text{常数}<n,\ i=1, 2;$$

则它们的卷积(2)有界或有弱奇异性, 且

$$|K_1\otimes K_2(x, s)|\leqslant\begin{cases}c & \text{如}\ \alpha_1+\alpha_2<n,\\ c|\ln|x-s|| & \text{如}\ \alpha_1+\alpha_2=n,\\ c|x-s|^{n-\alpha_1-\alpha_2} & \text{如}\ \alpha_1+\alpha_2>n,\end{cases}$$

其中 $c$ 是一个常数.

如果一个核有弱奇异性, 则从某一叠代以后它的所有叠核都是有界的.

**参考文献**


[1] Смирнов, В. И., Курс высшей математики, т. 5, М., 1959 (中译本: В. И. 斯米尔诺夫, 高等数学教程, 第五卷第一、二分册, 人民教育出版社, 1963, 1964 第 2 版).

[2] Владимиров, В. С., Уравнения математической физики, 3 изд, М., 1976 (英译本: Vladimirov, V. S., Equations of mathematical physics, Mir, 1984).

[3] Красносельский, М. А. [и др.], Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций, М., 1966 (英译本: Krasnosel'skiĭ, M. A., et al., Integral operators in spaces of summable functions, Noodhoff, 1976).


Б. В. Хведелидзе 撰

【补注】 在解椭圆型方程的边界积分方程法(boundary integral equation method)中弱奇异性核经常出现(见[A1]). 另一个重要的具有弱奇异性核的积分方程是 **Abel 积分方程**(Abel integral equation)([A2]).

**参考文献**


[A1] Colton, D. and Kress, R., Integral equation methods in scattering theory, Wiley, 1983.

[A2] Gorenflo, R and Vessella, S., Abel integral equations in analysis and applications, Springer, 1991.

[A3] Zabreyko, P. P., et al., Integral equations-a reference text, Noordhoff, 1975, Sects. 1.1.2; 11.6.

[A4] Hochstadt, H., Integral equations, Wiley, (Interscience), 1975, Sect. 11.4.


葛显良 译 吴绍平 校

**弱解**[**weak solution**; **слабое решение**]

微分方程

$$Lu\equiv\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_{\alpha}(x)D^{\alpha}u=f \qquad (*)$$

在区域 $D$ 的弱解是一局部可积函数 $u$, 它对在 $D$ 中具有紧支集的所有光滑函数 $\varphi$ (比如, $C^{\infty}$ 类函数)满足等式

$$\int_D uL^*\varphi dx=\int_D f\varphi dx.$$

这里, $(*)$ 中的系数 $a_{\alpha}(x)$ 假定是充分光滑的, 而 $L^*$ 是 $L$ 的形式的 Lagrange 伴随算子:

$$L^*\varphi=\sum_{|\alpha|\leqslant m}(-1)^{|\alpha|}D^{\alpha}(a_{\alpha}\varphi).$$

例如, 广义导数 $f=D^{\alpha}u$ 可以定义为局部可积函数 $f$, 使得 $u$ 是方程 $D^{\alpha}u=f$ 的一个弱解.

在考虑 $(*)$ 的弱解时, 产生下面的问题: 在什么条件下它们是强解(见**强解**(strong solution))? 例如, 在椭圆型方程情形下, 每一个弱解都是强解.

**参考文献**


[1] Бицадзе А. В., Некоторые классы уравнений в частных производных, М., 1981.


А. П. Солдатов 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Agmon, S., Lectures on elliptic boundary value problems, v. Nostrand, 1965.

[A2] Gilbarg, D. and Trüdinger, N. S., Elliptic partial differential equations of second order, Springer, 1983 (中译本: D. 吉耳巴格, N. S. 塔丁格著, 二阶椭圆型偏微分方程, 上海科学技术出版社, 1981).


孙和生 译 陆柱家 校

**弱拓扑**[**weak topology**; **слабая топология**]

向量空间 $X$ 上由**半范数**(semi-norm)族 $p(x)=|f(x)|$ 生成的**局部凸拓扑**(locally convex topology), 这里 $f$ 跑遍(代数的)对**偶空间**(dual space) $X^*$ 的某个子集 $F$.

参考文献

[1] Люстерник, Л. А., Соболев, В. И., Краткий курс функционального анализа, М., 1982 (中译本: Л. А. 刘斯铁尔尼克, В. И. 索伯列夫, 泛函分析概要, 第二版, 科学出版社, 1985).

[2] Schaeffer, H., Topological vector spaces, Springer, 1971.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 上面引入的弱拓扑常常记为 $\sigma(X, F)$. 它是 Hausdorff 拓扑, 当且仅当 $F$ 分离 $X$ 的点.

亦见**强拓扑** (strong topology).

参考文献

[A1] Jarchow, H., Locally convex spaces, Teubner, 1981 (译自德文).

葛显良 译 鲁世杰 校

**弱无穷维空间** [**weakly infinite-dimensional space**; **слабо бесконечномерное пространство**]

一个**拓扑空间** (topological space) $X$, 使得对其闭子集偶对的任意无穷系 $(A_i, B_i)$,

$$A_i \cap B_i = \varnothing, \quad i = 1, 2, \cdots,$$

存在 ($A_i$ 与 $B_i$ 之间的) **分划** (partition) $C_i$, 满足 $\bigcap C_i = \varnothing$. 不是弱无穷维的无穷维空间称为强无穷维 (strongly infinite dimensional) 空间. 弱无穷维空间也称为 $A$ 弱无穷维 ($A$-weakly infinite dimensional) 空间. 若在上述定义中, 进一步要求 $C_i$ 的某有限子族有空的交集, 就得出 $S$ 弱无穷维空间 ($S$-weakly infinite-dimensional space) 的概念.

参考文献

[1] Александров, П. С., Пасынков, Б. А., Введение в теорию размерности, М., 1973.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 除上述外, $A$ 弱就是 Александров 弱 (Aleksandrov weakly), $S$ 弱就是 Смирнов 弱 (Smirnov weakly). 还有一种已经弃之不用的概念 Hurewicz 弱无穷维空间 (Hurewicz-weakly infinite-dimensional space), 见综述 [A1].

为避免 "无穷维空间" 这个词的混乱, 空间 $X$ 要求可度量化, 见 [A2].

参考文献

[A1] Aleksandrov, P. S., Some results in the theory of topological spaces, obtained within the last twenty-five years, *Russian Math. Surveys*, **15** (1960), 2, 23 – 83 (Uspekhi Mat. Nauk., **15** (1960), 2, 25 – 95).

[A2] Mill, J. van., Infinite-dimensional topology, North-Holland, 1989.

[A3] Engelking, R. and Pol. E., Countable-dimensional spaces: a survey, *Diss. Math.*, **216** (1983), 5 – 41.

罗嵩龄 译

**弱游荡集** [**weakly-wandering set**; **слабо блуждающее множество**], 对可测空间 $(X, \mathfrak{B})$ 的一个可逆可测变换 $T$ 的

一个可测子集 $A \subset X$, 存在无穷正整数列 $\{n_i\}$, 使得集列 $\{T^{n_i}A\}$ 互不相交 (这里, $T$ 的可逆性是指存在可测的 $T^{-1}$). 如果 $T$ 有一个 $\sigma$ 有限的**拟不变测度** (quasi-invariant measure) $\mu$ (定义在 $\mathfrak{B}$ 上), 那么 $T$ 有一个有限**不变测度** (invariant measure) 的必要充分条件是: 它等价于 $\mu$ 对任一弱游荡集 $A$ 有 $\mu A = 0$.

注意, 在**拓扑动力学** (topological dynamics) 中, 有一个弱非游荡点 (weakly non-wandering point, 见 [3]) 的概念, 它与上述概念无关.

参考文献

[1] Hajian, A. B. and Kakytani, S., Weakly wandering sets and invariant measures, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **110** (1964), 1, 136 – 151.

[2] Hajian, A. and Itô, Y., Weakly wandering sets and invariant measures for a group of transformations, *J. Math. Mech.*, **18** (1969), 12, 1203 – 1216.

[3] Anosov, D. V. and Bronshtein, I. V., Topological dynamics, in Dynamical Systems I, Encyclopaedia of math. sciences, Vol. 1, Springer, 1988, 197 – 219 (译自俄文).

Д. В. Аносов 撰 周民强 译

**罗** [**web**; **сеть**]

【补注】 关于 "罗" 一词的不同意义 (并非不相似), 可参见**罗的几何学** (webs, geometry of) 与**球面罗** (web of spheres). 罗和网这两个词有时互相替换. 亦见**网 (微分几何学中的)** (net (in differential geometry)).

沈纯理 译

**罗微分** [**web differentiation**; **дифференцирование по сети**]

集函数 $\psi$ 的一种特殊微分. 罗 (web) $N$ 是指带测度 $\mu$ 的基础空间 $X$ 的 $\{A_j^i\}$ 剖分的总体, 使得

$$\bigcup_j A_j^i = X,$$

$$A_{j_1}^i \cap A_{j_2}^i = \varnothing, \; j_1 \neq j_2, \; i = 1, 2, \cdots,$$

且对每个 $A_{j_1}^{i+1}$, 可以找到包含它的集合 $A_{j_2}^i$. 一切 $A_j^i$ 都是可测的, 且其总体在一定意义下 ([1]) 可逼近所有的可测集. 如果 $i$ 固定, 那么称 $A_j^i$ 为秩 $i$ 的集族 (sets of rank $i$). 对每个点 $x_0$ 和任意的 $n$, 恰有一个包含 $x_0$ 的秩为 $n$ 的集合 $A_n(x_0)$.

如果下式的极限存在, 则称

$$D_N(x_0) = \lim_{n \to \infty} \frac{\psi[A_n(x_0)]}{\mu[A_n(x_0)]}$$

为在点 $x_0$ 处函数 $\psi$ 沿罗 $N$ 的导数 (derivative of the

function $\psi$ along the web $N$)，也还可定义沿罗 $N$ 的各种导数概念.

罗微分的最简单例子，是由形如 $(j/2^r, (j+1)/2^r]$ 的有理二进区间引出的单变量函数的增量的微分.

可数加性集函数 $\psi$ 的罗导数是几乎处处存在的，且等同于 $\psi$ 的绝对连续分量的密度．在 $n$ 维空间中人们经常研究的是，当秩增大时其直径趋于零的半开区间套的罗微分.

网以及罗微分的概念还可推广到无测度的抽象空间的情形.

**参考文献**


[1] Шилов, Г. Е., Гуревич, Б. Л., Интеграл, мера и производная, 2 изд.. М., 1967（英译本：Shilov, G. E. and Gurevich, B. L., Integral, measure and derivative: a unified approach, Dover, 1977）.

[2] Saks, S.. Theory of the integral, Hafner, 1952（译自波兰文）.

[3] Kenyon, H. and Morse, A. P., Web derivatives, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **132** (1973).


В. А. Скворцов 撰

【补注】 在[1]中，"罗微分"已被译为"沿一个罗的微分"（第 10.2 节）. 在该书的第 10.3 节，还将其推广于 Vitali 系统（Vitali systems）.

关于测度的罗微分概念的提出似乎属于 Ch. J. de la Vallée-Poussin([A1]). 今日，它可以看作是一个关于**鞅**（martingale）收敛定理的特殊情形，且是证明 **Radon-Nikodym 定理**（Radon-Nikodym theorem）的最佳方法之一.

**参考文献**


[A1] de la Vallée-Poussin, Ch. J., Intégrales de Lebesgue Fonctions d'ensembles. Classe de Baire, Gauthier-Villars, 1936.


周民强 译

## 球面罗 [web of spheres; сеть сфер]

对一给定点（罗的中心（centre of the web）或根心（radical centre）），有给定的势 $p$（罗的势（power of the web））的所有球面的集合. 存在三类球面罗:

1）双曲罗（hyperbolic web）（$p>0$），它由正交于一个给定球面的所有球面构成;

2）椭圆罗（elliptic web）（$p>0$），它由与一个给定球面相交于其大圆的所有球面构成;

3）抛物罗（parabolic web）（$p=0$），它由通过一给定点的所有球面构成.

两个罗所共有的所有球面的集合称为球面网（net）. 中心不在一条直线上的三个罗的所有公共球面的集合称为球面束（pencil of spheres）.

А. Б. Иванов 撰

【补注】 也用术语"球面丛"和"球面网"来代替"球面罗". 见**线性系**（linear system）; **子簇系**（system of subvarieties）的补注.

**参考文献**


[A1] Todd, J. A., Projective and analytical geometry, Pitman, 1947, Chapt. Ⅵ.


沈纯理 译

## Weber 方程 [Weber equation; Вебера уравнение]

二阶线性常微分方程

$$y'' + \left(\nu + \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4}\right)y = 0, \quad \nu = 常数, \quad (*)$$

而点 $x=\infty$ 是强**奇点**（singular point）. 这类方程由 H. Weber 首次在位势论中联系抛物柱面加以研究（[1]）; 此方程可由抛物坐标写出的 **Laplace 方程**（Laplace equation）经分离变量得出. 代换 $y=x^{-1/2}w$, $z=x^2/2$ 把 Weber 方程变换为 **Whittaker 方程**（Whittaker equation），它是**汇合型超几何方程**（confluent hypergeometric equation）的特殊情形. 代换 $y=u\exp(-x^2/4)$ 把 Weber 方程变换为

$$u'' - xu' + \nu u = 0.$$

方程（*）的解称为抛物柱面函数（parabolic cylinder functions）或 Weber-Hermite 函数（Weber-Hermite functions）. 特别当 $\nu$ 为非负整数时，函数

$$y = \exp(-x^2/4)H_\nu(x)$$

满足方程（*），这里 $H_\nu(x)$ 是 **Hermite 多项式**（Hermite polynomials），见[2]，[3]，[4].

**参考文献**


[1] Weber, H. F., Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung $\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 + k^2 u = 0$, *Math. Ann.*, **1** (1869), 1－36.

[2] Whittaker, E. T. and Watson, G. N., A course of modern analysis, Cambridge Univ. Press, 1952.

[3] Bateman, H., Erdélyi, A., Higher transcendental functions. Bessel functions, 2, McGraw-Hill, 1953（中译本：A. 爱尔台里，高级超越函数，上海科学技术出版社，1957－1958）.

[4] Jahnke, E., Emde, F., Tables of functions with formulae and curves, Dover, reprint, 1945（译自德文）.


Н. Х. Розов 撰 沈永欢 译

## Weber 函数 [Weber function; Вебера функция]

函数

$$E_\nu(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(\nu\theta - z\sin\theta)\,d\theta,$$

其中 $z$ 是复数，$\nu$ 是实数. 这个函数满足非齐次 Bes-

sel 方程（Bessel equation）

$$z^2y''+zy'+(z^2-\nu^2)y=$$
$$=-\frac{1}{\pi}[(z+\nu)+(z-\nu)\cos\nu\pi].$$

对于非整数 $\nu$，下列展开式成立：

$$E_\nu(z)=\frac{1-\cos\nu\pi}{\nu\pi}\left[1-\frac{z^2}{2^2-\nu^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{z^4}{(2^2-\nu^2)(4^2-\nu^2)}-\cdots\right]+$$
$$-\frac{1+\cos\nu\pi}{\pi}\left[\frac{z}{1^2-\nu^2}-\frac{z^3}{(1^2-\nu^2)(3^2-\nu^2)}+\right.$$
$$\left.+\frac{z^5}{(1^2-\nu^2)(3^2-\nu^2)(5^2-\nu^2)}-\cdots\right].$$

如果 $|z|\to\infty$ 和 $|\arg z|<\pi/2$，则下列渐近展开式成立：

$$E_\nu(z)\approx-N_\nu(z)-\frac{1+\cos\nu\pi}{\pi z}\left[1-\frac{1^2-\nu^2}{z^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{(1-\nu^2)(3-\nu^2)}{z^4}-\cdots\right]-\frac{1-\cos\nu\pi}{\pi z}\left[\frac{\nu}{z}-\right.$$
$$\left.-\frac{\nu(2^2-\nu^2)}{z^3}+\frac{\nu(2^2-\nu^2)(4^2-\nu^2)}{z^5}-\cdots\right],$$

其中 $N_\nu$ 是 **Neumann 函数**（Neumann function）．如果 $\nu$ 不是整数，则 Weber 函数与 **Anger 函数**（Anger function）$\mathbf{J}_\nu(z)$ 之间存在下列等式：

$$\sin\nu\pi\cdot\mathbf{J}_\nu(z)=\cos\nu\pi E_\nu(z)-E_{-\nu}(z),$$
$$\sin\nu\pi\cdot E_\nu(z)=\mathbf{J}_{-\nu}(z)-\cos\nu\pi\cdot\mathbf{J}_\nu(z).$$

Weber 函数最先为 H．Weber 所研究（[1]）．

**参考文献**


[1] Weber, H. F., *Zurich Vierteljahresschrift*, **24** (1879), 33－76.

[2] Watson, G. N., A treatise on the theory of Bessel functions, 1, Cambridge Univ. Press, 1952.


А. П. Прудников 撰　杜小杨 译

**罗的几何学［webs, geometry of; тканей геометрия］**

微分几何学中研究曲线和曲面族——所谓（平坦的，空间的或多维的）罗的那部分课题．

平坦 $p$ 罗（flat $p$-web）（平面 $p$ 罗（planar $p$-web））是平面中的一个区域，它有充分光滑的 $p$（通常 $p\geq3$）族曲线满足：1）对区域中任一点，每一族中恰有一条曲线通过这点；2）取自不同族的曲线至多只有一个公共点．例如：平行于一等边三角形各边所得到的三族直线形成一个 3 罗（正则罗（regular web））．

在罗的几何学中，研究的基本对象是在微分－拓扑变换下不变的性质．存在（局部或整体）微分同胚的两个罗称为等价的．对 $p=2$，一个罗微分同胚于由两组平行线所形成的罗（这种罗称为网，见**网（微分几何学中的）**（net (in differential geometry)））．当 $p=3$ 时，一般来说，罗既不微分同胚于三组平行线（即它不是六角线罗（hexagonal web）），甚至也不微分同胚与三组直线（即它不是可求长罗（rectifiable web））．在几何形式上，罗的六角性是一**闭包条件**（closure condition）．可求长性的条件不能用明显的形式来描述；它常与图算法问题一起来研究．

空间曲线罗（spatial curvilinear web）由空间中 $p$ 族曲线构成，使得对区域中每一点，每一族曲线中有一条曲线通过此点．即使对 $p=2$，这些罗也不全是微分同胚的．四边形罗具有特殊的兴趣，它的线形成单参数族的曲面上的网．

空间曲面罗（spatial surface web）由 $p$ 族曲面构成，使得对区域中每一点，每一曲面族中有一个曲面通过此点，且不同曲面族中的三个曲面至多只有一个公共点．关于这类罗，以及它们的多维类似，也可导入可求长性的概念（即微分同胚于由平面（超平面）族形成的罗）．一个 4 罗称为八面体罗（octahedral web），如果由任意三个曲面族与第四个曲面族中一个曲面的交形成的 3 罗是六角形的．

多维罗（multi-dimensional web）由多维空间中的 $p$ 族子流形构成．例如，$2r$ 维空间中的三族 $r$ 维子流形形成一个 3 罗，如果对任一点，每一族中有一个子流形通过此点，且两个不同族中的子流形至多只有一个公共点．

罗的几何学也考虑罗的射影微分性质，仿射微分性质和与带有罗的流形的几何学相联系的罗的其他性质．人们也考虑那些由**测地线**（geodesic line），与 **Darboux 张量**（Darboux tensor）相联系的线，等等组成的罗．

（在平坦 3 罗的情形）藉助于其他两族曲线，第三族中曲线的定义可以看成拟群型的一种代数运算．因而出现了抽象罗或代数网的概念（见**拟群**（quasi-group））．

**参考文献**


[1] Blaschke, W., Einführung in die Geometrie der Waben, Birkhäuser, 1955.

[2] Рыжков, В. В., Белоусов, В. Д., в сб.: Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, 1971, М., 1972, 159－188.

[3] Шуликовский, В. И., Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении, М.,

1963. В. В. Рыжков 撰

【补注】

参考文献

[A1] Blaschke, W. and Bol, G., Geometrie der Gewebe, Springer, 1938.
[A2] Goldberg, V. V., Theory of multicodimensional ($n+1$)-webs, Kluwer, 1988.
[A3] Chern, S. S. and Griffiths, P. A., Abel's theorem and webs, *Jahresber. Deutsch. Math. Verein.*, **80** (1978), 13 – 110. (Addenda et corrigenda: **83** (1981), pp. 78 – 83.)
[A4] Chern, S. S., Web geometry, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **6** (1982), 1 – 8.
[A5] Akivis, M. A. and Shelekhov, A. M., Geometry and algebra of multidimensional three webs, Kluwer, 1992(译自俄文). 沈纯理 译

**Wedderburn - Artin 定理 [Wedderburn - Artin theorem; Веддерберна - Артина теорема]**

完整描述不含幂零理想的结合 **Artin 环** (Artinian ring) 结构的定理. 一个结合环 $R$ (见**结合环与代数** (associative rings and algebras)) 对右理想有极小条件而没有幂零理想, 当且仅当 $R$ 是有限个理想的直和, 其中每个理想同构于相应的除环上的有限阶全矩阵环, 除了各项的顺序外, 这一直和分解是唯一的. J. Wedderburn 首先对域上的有限维代数得到这一定理, 而 E. Artin 证明了它的最终形式.

参考文献

[1] Artin, E., The influence of J. H. M. Wedderburn on the development of modern algebra, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **56** (1950), 65 – 72. К. А. Жевлаков 撰

【补注】

参考文献

[A1] Wedderburn, J. H. M., Lectures on matrices, Dover, reprint, 1964.
[A2] Faith, C., Algebra I: rings, modules, and categories, Springer, 1973, p. 369, 380.
[A3] Cohn, P. M., Algebra, 2, Wiley, 1989, p. 174 ff. 蔡传仁 译

**Wedderburn - Мальцев 定理 [Wedderburn - Mal'tsev theorem; Веддерберна - Мальцева теорема]**

设 $A$ 是域 $F$ 上的有限维结合代数 (见**结合环与结合代数** (associateve rings and algebras)), 根为 $N$, 设商代数 $A/N$ 是**可分代数** (separable algebra) (这对于特征为零的域上的代数, 总是为真). 则 $A$ (作为线性空间) 可分解为根 $N$ 和某个半单子代数 $S$ 的直和:

$$A = N \oplus S,$$

并且若存在另一个分解 $A = N \oplus S_1$, 这里 $S_1$ 是一个半单子代数, 则存在代数 $A$ 的一个自同构 $\varphi$, 将 $S$ 映到 $S_1$ 上 (这个自同构 $\varphi$ 是内的 (inner), 即存在元素 $a$, $a' \in A$, 使得 $a \cdot a' = a' \cdot a = 0$, 而对所有 $x \in A$, $x\varphi = a \cdot x \cdot a'$, 这里 $x \cdot y = x + y + xy$). J. H. M. Wedderburn ([1]) 证明了这个分解的存在性, А. И. Мальцев ([2]) 证明了分解精确到半单项自同构的唯一性. 这个定理连同刻画半单代数结构的 Wedderburn 定理 (见**结合环与结合代数** (associative rings and algebras)) 构成了有限维代数经典理论的核心部分.

参考文献

[1] Wedderburn, J. H. M., On hypercomplex numbers, *Proc. London. Math. Soc.* (2), **6** (1908), 77 – 118.
[2] Мальцев, А. И., 《Докл АН СССР》, **36** (1942), 1, 42 – 45.
[3] Albert, A. A., Structure of algebras, Amer. Math. Soc., 1939.
[4] Curtis, C. W. and Reiner, I., Representation theory of finite groups and associative algebras, Interscience, 1962. Л. А. Бокуть 撰

【补注】 Lie 代数的类似定理成立, 设 $\mathfrak{g}$ 是特征为零的域上的一个有限维 Lie 代数, 根为 $\mathfrak{r}$, 则存在 $\mathfrak{g}$ 的半单子代数 $\mathfrak{h}$, 使得 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{r}$. 这样一个分解称为 Levi 分解 (Levi decomposition), 而 $\mathfrak{h}$ 称为 **Levi 因子** (Levi factor) 或 **Levi 子代数** (Levi subalgebra). 唯一性精确到内自同构.

参考文献

[A1] Jacobson, N., Lie algebras, Dover, reprint, 1962, p. 91 ff (中译本: N. 贾柯勃逊, 李代数, 上海科技出版社, 1964). 蔡传仁 译

**楔 (向量空间中的) [wedge (in a vector space); клин]**, **凸锥** (convex cone)

序域上向量空间中的一个凸集, 它关于变换 $x \mapsto \lambda x$, $\lambda \geqslant 0$, 是不变的, 即是这样的一种集合 $K$, 如果 $x, y \in K$ 且 $\lambda, \mu \geqslant 0$, 则 $\lambda x + \mu y \in K$. 凸锥 $K$ 称为**真 (凸) 锥** (proper (convex) cone), 如果满足条件: 若 $x, -x \in K$ 则 $x = 0$. 每一个真锥在向量空间中诱导出一个拟序: $x \geqslant y$ 当 $x - y \in K$ 时. 空间 $X$ 中真锥 $K$ 称为**再生的** (reproducing) (或**正性区域** (domain of positivity)), 如果 $K - K = X$.

Б. З. Вулих 撰

【补注】 像上面一样, 对开集 $K$, 如要求满足 $x \in K$ 蕴涵对一切 $\lambda \geqslant 0$, $\lambda x \in K$, 且 $x, y \in K$ 蕴涵 $x + y \in K$, 则通常称之为 (开) 锥.

设 $K$ 是实拓扑向量空间 $k$ 中的一个开锥, 设 $V$ 是 $K$ 和一个中心在 $0 \in k$ 的有界开球之交, 且设 $U \neq \varnothing$ 是 $k$ 中一个开集, 令

$$W^+ = U + iV,\ W^- = U - iV$$

是 $k$ 的复化中的集合（$i^2 = -1$），则 $W^+$ 和 $W^-$ 称为楔（且 $U + i0$ 是它们的"边"）．关于楔在解析延拓理论中的一个应用见 **Боголюбов 定理**（Bogolyubov theorem）．

葛显良 译　鲁世杰 校

**Weibull 分布 [Weibull distribution; Вейбулла распределение]**

随机变量 $X_w$ 的一种专门的**概率分布**（probability distribution），其分布函数为

$$F_w(t;p,\sigma,\mu) = \begin{cases} 1 - \exp\left\{-\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^p\right\}, & \text{若 } t > \mu, \\ 0, & \text{若 } t \leqslant \mu, \end{cases} \quad (*)$$

其中 $p$ 是分布曲线的形状参数，$\sigma$ 是尺度参数，而 $\mu$ 是移位参数．分布族 (*) 以 [1] 的作者 W. Weibull 的姓命名．W. Weibull 首先用此分布逼近钢抗拉强度疲劳试验的极值数据，并且提出估计 (*) 中分布参数的方法．Weibull 分布，是顺序统计量序列的第三类极值分布，它广泛用于描绘诸如滚珠轴承、真空设备、电气元件故障的规律性．**指数分布**（exponential distribution）（$p = 1$）和 **Rayleigh 分布**（Reyleigh distribution）（$p = 2$）是 Weibull 分布的特殊情形．分布函数 (*) 的曲线不属于 Pearson 分布族．编有计算 Weibull 分布函数的辅助表（见 [2]）．在 $\mu = 0$ 的情形下，水平 $q$ 分位数等于 $\sigma[-\ln(1-q)]^{1/p}$，

$$\mathsf{E}\, X_w^k = \sigma^k \Gamma\left(1 + \frac{k}{p}\right),\quad k = 1, 2, \cdots,$$

$$\mathsf{D}\, X_w = \sigma^2\left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{p}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{p}\right)\right],$$

其中 $\Gamma(x)$ 是 $\Gamma$ 函数（gamma-function）；变异系数、偏斜度和**超越系数**（excess coefficient）都与 $\sigma$ 无关，这使得容易编制其数值表和求参数估计值的辅助表．当 $p \geqslant 1$ 时，Weibull 分布是单峰的，其众数等于 $\sigma(p-1)^{1/p}$，而故障的风险函数 $\lambda(t) = pt^{p-1}/\sigma^p$ 是不减的．当 $p < 1$ 时，函数 $\lambda(t)$ 单调减小．可以绘制所谓 Weibull 概率纸（Weibull probability paper；[3]）．在此概率纸上，$F_w(t;p,\sigma,0)$ 的图形是一条直线；当 $\mu > 0$ 时 $F_w(t;p,\sigma,\mu)$ 的图象是凹的，当 $\mu < 0$ 时是凸的．用分位数法估计 Weibull 分布的参数，所得方程本质上比用最大似然法更为简单．利用水平 0.24 和 0.93 分位数，（当 $\mu = 0$ 时）由分位数法求的参数 $p$ 和 $\sigma$ 估计量之联合渐近效率最高（等于 0.64）．用对数正态分布函数

$$\Phi\left[\frac{\ln(t-b) - a}{c}\right]$$

（$\Phi(x)$ 是标准正态分布函数，$-\infty < b < \infty$，$-\infty < a < \infty$，$c > 0$）可以很好地逼近分布函数 (*)：

$$\inf_{p,a,b,c}\sup_t\left|F_w(t;p,\sigma,0) - \Phi\left(\frac{\ln t - a}{c}\right)\right| =$$

$$= \inf_{a,c}\sup_t\left|F(t;1,1,0) - \Phi\left(\frac{\ln t - a}{c}\right)\right| = 0.038.$$

**参考文献**

[1] Weibull, W., A statistical theory of the strength of materials, Stockholm, 1939.

[2] Гнеденко, Б. В., Беляев, Ю. К., Соловьев, А. Д., Математические методы в теории надежности, М., 1965（英译本：Gnedenko, B. V., Belyaev, Yu. K. and Solov'ev, A. D., Mathematical methods of reliability theory, Acad. Press, 1969）.

[3] Johnson, L., The statistical treatment of fatigue experiments, Amsterdam, 1964.

[4] Cramér, H., Mathematical methods of statistics, Princeton Univ. Press, 1946（中译本：H. 克拉美，统计学数学方法，上海科学技术出版社，1966）.

Ю. К. Беляев, Е. В. Чепурин 撰

**【补注】**

**参考文献**

[A1] Johnson, N. L. and Kotz, S., Distribution in statistics. Continuous univariate distribution, Wiley, 1970.

[A2] Galambos, J., The theory of extreme order statistics, Wiley, 1987.

周概容 译

**Weierstrass $\sigma$ 函数 [Weierstrass $\sigma$-function; Вейерштрасса $\sigma$-функция]**

见 **Weierstrass 椭圆函数**（Weierstrass elliptic functions）．

**Weierstrass $\zeta$ 函数 [Weierstrass $\zeta$-function; Вейерштрасса $\zeta$-функция]**

见 **Weierstrass 椭圆函数**（Weierstrass elliptic functions）．

**Weierstrass 条件（对变分极值的）[Weierstrass conditions (for a variational extremum; Вейерштрасса условия экстремума]**

经典变分法中对强极值的必要和（部分地）充分条件（见**变分学**（variational calculus））．由 K. Weierstrass 于 1879 年提出．

Weierstrass 必要条件（Weierstrass necessary condition）：为使泛函

$$J(x)=\int_{t_0}^{t_1} L(t,\ x(t),\ \dot{x}(t))dt,$$

$$L:\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R},$$

在极值曲线 $x_0(t)$ 上达到一个强局部极小值，其必要条件是不等式

$$\mathscr{E}(t,\ x_0(t),\ \dot{x}_0(t),\ \xi)\geqslant 0$$

对所有的 $t$, $t_0\leqslant t\leqslant t_1$ 和所有的 $\xi\in\mathbf{C}^n$ 都满足，其中 $\mathscr{E}$ 是 **Weierstrass** $\mathscr{E}$ **函数** (Weierstrass $\mathscr{E}$-function)．这条件可借助于函数

$$\prod(t,\ x,\ p,\ u)=(p,\ u)-L(t,\ x,\ u)$$

来表示(见 **Понтрягин 最大值原理** (Pontryagin maximum principle))．Weierstrass 条件(在极值曲线 $x_0(t)$ 上 $\mathscr{E}\geqslant 0$) 等价于函数 $\Pi(t,\ x_0(t),\ p_0(t),\ u)$ 当 $u=\dot{x}_0(t)$ 在 $u$ 上达到极大值，其中 $p_0(t)=L_{\dot{x}}(t,\ x_0(t),\ \dot{x}_0(t))$．这样，Weierstrass 必要条件是 Понтрягин 最大值原理的特殊情形．

Weierstrass 充分条件 (Weierstrass sufficient condition)：为了泛函

$$J(x)=\int_{t_0}^{t_1} L(t,\ x(t),\ \dot{x}(t))dt,$$

$$L:\ \mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$$

在向量函数 $x_0(t)$ 上达到一个强局部极小值，其充分条件是在曲线 $x_0(t)$ 的一个邻域 $G$ 中存在一个向量值场斜率函数 $U(t,\ x)$ (测地斜率)(见 **Hilbert 不变积分** (Hilbert invariant integral))，使得

$$\dot{x}_0(t)=U(t,\ x_0(t))$$

和

$$\mathscr{E}(t,\ x,\ U(t,\ x),\ \xi)\geqslant 0$$

对所有 $(t,\ x)\in G$ 和任何向量 $\xi\in\mathbf{R}^n$ 成立．

**参考文献**


[1] Лаврентьев, М. А., Люстерник, Л. А., Курс вариационного исчисления, 2 изд., М.-Л., 1950 (中译本：М. А. 拉弗林契叶夫，Л. А. 留斯切尔涅克，变分学教程，高等教育出版社，1955).

[2] Bliss, G. A., Lectures on the calculus of variations, Chicago Univ. Press, 1947.

[3] Понтрягин, Л. С. [и др.], Математическая теория оптимальных процессов, 2 изд., М., 1969 (英译本：Pontryagin, L. S. et al., The mathematical theory of optimal processes, Wiley, 1962).


В. М. Тихомиров 撰

【补注】 对在极值曲线的隅角的必要条件，亦见 **Weierstrass-Erdmann 隅角条件** (Weierstrass-Erdmann corner conditions)．

**参考文献**


[A1] Gel'fand, I. M. and Fomin, S. V., Calculus of variations, Prentice-Hall, 1963 (译自俄文).

[A2] Cesari, L., Optimization-theory and applications. Problems with ordinary differential equations, Springer, 1983.


葛显良 译 吴绍平 校

**Weierstrass 坐标** [**Weierstrass coordinates; Вейерштрасса координаты**]

椭圆空间中坐标的一种类型．令 $M^n$ 是粘合 $(n+1)$ 维 Euclid 空间中的单位球面 $S^n$ 的对径点得到的椭圆空间．$M^n$ 中一点的 Weierstrass 坐标 $(x_0,\ \cdots,x_n)$ 是它在 $S^n$ 中对应点的正交 Descartes 坐标．由于 $M^n$ 到 $S^n$ 中的等距映射不是单值的，Weierstrass 坐标定义到相差一个符号．$M^n$ 中的一个超平面由齐次线性方程

$$a_0x_0+\cdots+a_nx_n=0$$

给出．由于 1872 年 K. Weierstrass 在他的 Лобачевский 几何学教程中用到这种坐标，故以他的名字命名．

Е. В. Шикин 撰

【补注】 椭圆空间的这些坐标可以正规化，使得

$$x_0^2+\cdots+x_n^2=1.$$

对于双曲空间，类似的 Weierstrass 坐标满足

$$x_0^2-\cdots-x_n^2=1,$$

对于超平面，有相同的方程 $\sum a_\nu x_\nu=0$.

**参考文献**


[A1] Liebmann, H., Nichteuklidische Geometrie, Goschen, 1912, 114－119.

[A2] Coxeter, H. S. M., Non-Euclidean geometry, Univ. Toronto Press, 1965, p.121, 281.


林向岩 译 陆珊年 校

**Weierstrass 准则** [**Weierstrass criterion; Вейерштрасса критерий**]，极小曲面的

为使 $n$ 维 Euclid 空间 $E^n(n\geqslant 3)$ 中的一个带有 $C^2$ 类**等温坐标** (isothermal coordinates) $u$, $v$ 的 2 维曲面是极小的(见**极小曲面** (minimal surface))，其必要充分条件为它的位置向量的分量是 $(u,\ v)$ 的调和函数．

И. Х. Сабитов 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Nitsche, J. C. C., Vorlesungen über Minimalflächen, Springer, 1975.

[A2] Weierstrass, K., Math. Werke, 3, G. Olms, reprint, 1967. 沈纯理 译

**Weierstrass 准则(关于一致收敛的)[Weierstrass criterion (for uniform convergence); Вейерштрасса признак (равномерной сходимости)]**

这是将函数级数(series)或序列与适当的数值级数和序列对照所给出的关于一致收敛(uniform convergence)充分条件的一个定理;它是 K. Weierstrass 建立的([1]).若对定义在某集合 $E$ 上的实值或复值函数的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_k(x),$$

存在非负数的收敛级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

使得

$$|u_n(x)| \leqslant a_n,\ n=1,2,\cdots.$$

则原来级数在集合 $E$ 中一致收敛且绝对收敛(见绝对收敛级数(absolutely convergent series)).例如,级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n x}{n^2}$$

在整个实数轴上一致且绝对收敛,因为

$$\left| \frac{\sin n x}{n^2} \right| \leqslant \frac{1}{n^2},$$

而级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

收敛.

若集合 $E$ 上的实值或复值函数序列 $f_n(n=1,2,\cdots)$ 收敛于函数 $f$,且存在数列 $\alpha_n(\alpha_n>0)$,当 $n\to\infty$ 时 $\alpha_n\to 0$,使得 $|f(x)-f_n(x)|\leqslant\alpha_n(x\in E, n=1,2,\cdots)$,则序列在 $E$ 上一致收敛.例如序列

$$f_n(x)=1-\frac{(-1)^n}{x^2+n}$$

在整个实数轴上一致收敛于函数 $f(x)=1$,因为

$$|1-f_n(x)|<\frac{1}{n} \text{ 且 } \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

关于一致收敛的 Weierstrass 准则也可以应用于在赋范线性空间中取值的函数.

参考文献

[1A] Weierstrass, K., Abhandlungen aus der Funktionenlehre, Springer, 1866.

[1B] Weierstrass, K., Math. Werke, 1-7, G. Olms & Johnson, reprint, 1927. Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Apostol, T. M., Mathematical analysis, Addison Wesley, 1974.

[A2] Knopp, K., Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Springer, 1964 (英译本:Blackie, 1951).

[A3] Rudin, W., Real and complex analysis, McGraw-Hill, 1974. 罗嵩龄 译

**Weierstrass $\mathscr{E}$ 函数[Weierstrass $\mathscr{E}$-function; Вейерштрасса $\mathscr{E}$-функция]**,经典变分法中的

当极值曲线变化时,借助于在该极值曲线固定点其导数的给定值的局部(针形的)变分分离出泛函增量主要部分的函数.在泛函

$$J(x)=\int_{t_0}^{t_1} L(t,x,\dot{x})dt,\ L:\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$$

的情形,$\mathscr{E}$ 函数有形式

$$\mathscr{E}(t,x,\dot{x},x')= \tag{1}$$
$$=L(t,x,x')-L(t,x,\dot{x})+$$
$$-(x'-\dot{x},L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})).$$

如果引进函数

$$\Pi(t,x,p,x')=(p,x')-L(t,x,x')$$

(见 **Legendre 变换**(Legendre transform);**Понтрягин 最大值原理**(Pontryagin maximum principle)),则 $\mathscr{E}$ 函数取形式

$$\mathscr{E}(t,x,\dot{x},x')=\Pi(t,x,p,\dot{x})-\Pi(t,x,p,x'),$$

其中 $p=L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})$.类似于 $\mathscr{E}$ 函数(1)的函数的一般构造如下.设 $f$ 是定义在 Banach 空间 $X$ 上的可微或凸函数,又设 $X^*$ 是对偶空间.如果函数 $\Pi: X^*\times X\to\mathbf{R}$ 是由方程

$$\Pi(x^*,x')=\langle x^*,x'\rangle-f(x')$$

定义,其中 $x^*$ 是 $f$ 在 $x$ 的导数 $f'(x)$(或次微分元素,如果 $f$ 是凸的),则函数

$$\mathscr{E}(x,x',x^*)=\Pi(x^*,x)-\Pi(x^*,x')$$

是由 $f$ 构造的 $\mathscr{E}$ 函数.如果 $f$ 是可微的,

$$\mathscr{E}(x,x')=f(x')-f(x)-\langle x'-x,f'(x)\rangle, \tag{2}$$

即 $\mathscr{E}$ 函数是在 $x'$ 点处函数 $f$ 与在 $x$ 处与 $f$ 相切的线性函数之间的差.比较(1)和(2)两式显示经典变分法中 $\mathscr{E}$ 函数是由对与导数有关变量的构造(2)

得到，而变量 $t$, $x$ 起参数的作用.

多维变分问题中在泛函

$$\int_T L(t, x, \dot{x})dt,\ t=(t_1, \cdots, t_n),\ T\subset \mathbf{R}^m,$$

$$L: \mathbf{R}^m \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R},\ \dot{x}=\left[\frac{\partial x}{\partial t_1}, \cdots, \frac{\partial x}{\partial t_m}\right]$$

的情形，$\mathscr{E}$ 函数有以下形式:

$$\mathscr{E}(t, x, z, z')=L(t, x, z')-L(t, x, z)+$$
$$-(z'-z, L_z(t, x, z)).$$

在具有边界条件 $\varphi_i(t, x, \dot{x})=0$ 和 **Lagrange 乘子** (Lagrange multipliers) $\lambda_i(t)$, $i=1, \cdots, s$, 的 **Lagrange 问题** (Lagrange problem) 的情形，$\mathscr{E}$ 函数有形式 (1)，其中已经用

$$\widetilde{L}=L+\sum_{i=1}^{s}\lambda_i\varphi_i$$

代替 $L$.

$\mathscr{E}$ 函数，首先由 K. Weierstrass 于 1879 年引入 ([1])，是变分法理论的基础 (见**变分学** (variational calculus))，它是用以表示极值的必要和 (部分地) 充分条件 (见 **Weierstrass 条件 (对变分极值的)** (Weierstrass condition (for a variational extremum)))，且以有限积分形式表示泛函 $J$ 在一条极值曲线上的增量 (见 **Weierstrass 公式** (Weierstrass formula)).

在变分学中起特别重要作用的是这样一些光滑泛函，它们满足在一个给定的参数范围内，对所有 $\dot{x}$, $x'$, $\mathscr{E}(\cdot, \dot{x}, x')\geqslant 0$, 或者更强的，对所有 $\dot{x}\neq x'$, $\mathscr{E}(\cdot, \dot{x}, x')>0$. 它们分别地称为拟正则的 (quasi-regular) 和正则的 (或椭圆的 (elliptic)). 对这样一些泛函，**Legendre 条件** (Legendre condition) 和必要的 **Weierstrass 条件 (对变分极值的)** 总是有效的，存在性和正则性定理也正确 ([7]).

**参考文献**


[1] Weierstrass, K., Vorlesungen über Variationsrechnung, in Math. Werke, Vol. 7, Akademie Verlag, 1927.

[2] Carathéodory, C., Calculus of variations and partial differential equations of the first order, 1-2, Holden-Day, 1965-1967 (译自德文).

[3] Bolza, O., Lecture on the calculus of variations, Chelsea, reprint, 1960 (译自德文).

[4] Ахиезер, Н. И., Лекции по вариационному исчислению, М., 1955 (英译本: Akhiezer, N. I., The calculus of variations, Blaisdell, 1962).

[5] Понтрягин, Л. С. [и др.], Математическая теория оптимальных процессов, 2 изд., М., 1969 (英译本: Pontryagin, L. S. et al., The mathematical theory of optimal processes, Wiley, 1962).

[6] Hestenes, M. R., Calculus of variations and optimal control theory, Wiley, 1966.

[7] Hilbert problems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **8** (1902), 437-479.

[8] Bliss, G. A., Lectures on the calculus of variations, Chicago Univ. Press, 1947.


В. М. Тихомиров 撰

**【补注】**

**参考文献**


[A1] Cesari, L., Optimization-theory and applications. Problems with ordinary differential equations, Springer, 1983.

[A2] Ewing, G. M., Calculus of variations with applications, Dover, reprint, 1985.

[A3] Lee, E. B. and Marcus, L., Foundations of optimal control theory, Wiley, 1967.


葛显良 译 吴绍平 校

**Weierstrass 椭圆函数** [**Weierstrass elliptic functions**; **Вейерштрасса эллиптические функции**]

作为 K. Weierstrass **椭圆函数** (elliptic function) 一般理论的基础，由他于 1862 年在柏林大学的讲授中陈述的函数([1], [2])．与较早由 A. Legendre, N. H. Abel 和 C. G. Jacobi 开发的椭圆函数论——它基于在周期平行四边形中具有两个单极点的二阶椭圆函数——不同，Weierstrass 椭圆函数在周期平行四边形中具有一个二阶极点．从理论角度看，Weierstrass 的理论更加简单，因为作为其基础的函数 $\wp(z)$ 及其导数是生成具有给定原始周期的椭圆函数代数域的椭圆函数.

对于给定的原始周期 $2\omega_1$, $2\omega_3$ ($\mathrm{Im}(\omega_3/\omega_1)>0$) 的 Weierstrass $\wp$ 函数 (Weierstrass $\wp$-function) ($\wp$ 是 Weierstrass 用的记号) 定义为级数

$$\wp(z)=\wp(z; 2\omega_1, 2\omega_3)=$$

$$=\frac{1}{z^2}+\sum_{m_1, m_3=-\infty}^{+\infty}{}'\left[\frac{1}{(z-2\Omega_{m_1, m_3})^2}-\frac{1}{(2\Omega_{m_1, m_3})^2}\right]=$$

$$=\frac{1}{z^2}+c_2z^2+c_4z^4+\cdots, \tag{1}$$

其中 $\Omega_{m_1, m_3}=m_1\omega_1+m_3\omega_3$, $m_1$, $m_3$ 取遍除 $m_1=m_3=0$ 外的所有整数．函数 $\wp(z)$ 是二阶偶椭圆函数，在每个周期平行四边形中有唯一的残数为零的二阶极点．$\wp(z)$ 的导数 $\wp'(z)$ 是具有相同原始周期的三阶奇椭圆函数；$\wp'(z)$ 在同余于 $\omega_1$, $\omega_2=\omega_1+\omega_3$, $\omega_3$ 的点处具有单零点．函数 $\wp(z)$ 最重要的性质是任一具有给定原始周期 $2\omega_1$, $2\omega_3$ 的椭圆函数可表示为

$\wp(z)$ 和 $\wp'(z)$ 的有理函数，即 $\wp(z)$ 和 $\wp'(z)$ 生成具有给定周期的椭圆函数的代数域．单周期三角函数中起类似于函数 $\wp(z)$ 作用的是 $1/\sin^2 z$．

函数 $\wp(z)$ 满足微分方程

$$\wp'^2(z)=4\wp^3(z)-g_2\wp(z)-g_3\equiv$$

$$\equiv 4[\wp(z)-e_1][\wp(z)-e_2][\wp(z)-e_3],$$

$$e_1+e_2+e_3=0, \tag{2}$$

其中模形式（modular form）

$$g_2=20c_2=60\sum_{m_1,m_3=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{(2\Omega_{m_1,m_3})^4},$$

$$g_3=28c_4=140\sum_{m_1,m_3=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{(2\Omega_{m_1,m_3})^6}$$

称为 $\wp(z)$ 的相对不变量（relative invariant），而 $e_1=\wp(\omega_1)$，$e_2=\wp(\omega_2)$，$e_3=\wp(\omega_3)$ 称为 $\wp(z)$ 的无理不变量（irrational invariant）．$\wp(z)$ 的绝对不变量（absolute invariant）是 $j=g_2^3/g_3^2$ 或 $J=g_2^3/\Delta$ 的任一有理函数，其中 $\Delta=g_2^3-27g_3^2$ 是判别式（discriminant）；这里的不变性是关于模变换（见**模函数**（modular function））的．在应用中，$g_2$，$g_3$ 通常是实数；如果加之还有 $\Delta>0$，则 $e_1$，$e_2$，$e_3$ 也是实的．方程（2）表明 $\wp(z)$ 可定义为第一类 Weierstrass 标准型**椭圆积分**（elliptic integral）

$$u=-\int_{(z,w)}^{\infty}\frac{dz}{w},\ w^2=4z^3-g_2z-g_3$$

的逆．函数 $\wp(z)$ 是周期平行四边形到亏格为 1，具有分支点 $e_1$，$e_2$，$e_3$，$\infty$ 的典型分割双叶紧 Riemann 曲面 $F$ 上的一个一一共形映射；有时称 $F$ 为椭圆象（elliptic image）．上面的第一类积分在主覆叠曲面 $\tilde{F}$ 上是单值的，且是 $F$ 上的单值化变量．

具有给定周期 $2\omega_1$，$2\omega_3$ 的椭圆函数域的第二类椭圆积分，作为上述单值化的结果，变成 Weierstrass $\zeta$ 函数（Weierstrass zeta-function）$\zeta(z)$，它由级数

$$\zeta(z)=\frac{1}{z}+\sum_{m_1,m_3=-\infty}^{+\infty}{}'\left[\frac{1}{z-2\Omega_{m_1,m_3}}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\Omega_{m_1,m_3}}+\frac{z}{(2\Omega_{m_1,m_3})^2}\right] \tag{3}$$

定义．函数 $\zeta(z)$ 是奇亚纯函数，与 $\wp(z)$ 以关系 $\zeta'(z)=-\wp(z)$ 相联系．它不是周期函数；当它的自变量加以周期时，它按 $\zeta(z\pm 2\omega_i)=\zeta(z)\pm 2\eta_i$ 变换，其中 $\eta_i=\zeta(\omega_i)$．$\omega_1$，$\omega_3$，$\eta_1$，$\eta_3$ 之间成立 Legendre 关系（Legendre relation）：

$$\eta_1\omega_3-\eta_3\omega_1=\frac{\pi i}{2},$$

它等价于完全椭圆积分之间的关系：

$$EK'+E'K-KK'=\frac{\pi}{2}.$$

任一具有给定周期 $2\omega_1$，$2\omega_3$ 的椭圆函数 $f(z)$ 可由 $\zeta(z)$ 通过下述 Hermite 公式（formula of Hermite）表示：

$$f(z)=$$

$$C+\sum_{k=1}^{s}\left[B_1^k\zeta(z-b_k)-B_2^k\zeta'(z-b_k)+\right.$$

$$+\frac{B_3^k}{2!}\zeta''(z-b_k)-\cdots+$$

$$\left.+(-1)^{\nu_k-1}\frac{B_{\nu_k}^k}{(\nu_k-1)!}\zeta^{(\nu_k-1)}(z-b_k)\right], \tag{4}$$

其中 $C$ 是常数，$b_1$，$\cdots$，$b_s$ 是 $f(z)$ 的极点的完全系，而数 $B_1^k$，$\cdots$，$B_{\nu_k}^k$ 是 $f(z)$ 在 $b_k$ 邻域内 Laurent 展开式主部的系数．展开式（4）类似于任意有理函数展为部分分式的展开式．三角函数中类似于函数 $\zeta(z)$ 的是 $\cot z$．

Weierstrass $\sigma$ 函数（Weierstrass sigma-function）$\sigma(z)$ 定义为**无穷积**（infinite product）

$$\sigma(z)=z\prod_{m_1,m_3=-\infty}^{+\infty}{}'\left(1-\frac{z}{2\Omega_{m_1,m_3}}\right)\times$$

$$\times e^{z/(2\Omega_{m_1,m_3})+z^2/(8\Omega_{m_1,m_3}^2)}.$$

函数 $\sigma(z)$ 是具有零点 $2\Omega_{m_1,m_3}$ 的奇整函数，并由关系

$$\frac{d^2\ln\sigma(z)}{dz^2}=-\wp(z),\quad \frac{d\ln\sigma(z)}{dz}=\zeta(z)$$

与函数 $\wp(z)$，$\zeta(z)$ 相联系．它不是双周期函数；它满足恒等式

$$\sigma(z+2\Omega_{mn})=(-1)^{m+n+mn}\sigma(z)e^{H_{mn}(z+\Omega_{mn})},$$

其中

$$H_{mn}=2m\eta_1+2n\eta_3,\ \eta_i=\zeta(\omega_i)=\frac{\sigma'(\omega_i)}{\sigma(\omega_i)}.$$

任一具有周期 $2\omega_1$，$2\omega_3$ 的椭圆函数 $f(z)$ 可由 $\sigma(z)$ 表示为

$$f(z)=C\frac{\sigma(z-a_1)\cdots\sigma(z-a_s)}{\sigma(z-b_1)\cdots\sigma(z-b_s)},$$

其中 $C$ 是常数，$a_1$，$\cdots$，$a_s$，$b_1$，$\cdots$，$b_s$ 分别是 $f(z)$ 的零点和极点的完全系．三角函数中类似于 $\sigma(z)$ 的

是 $\sin z$.

下述加标 $\sigma$ 函数（indexed sigma-functions）在 Weierstrass 理论中也是重要的：

$$\sigma_i(z)=\frac{\sigma(z+\omega_i)}{\sigma(\omega_i)}e^{-\eta_i z},\ i=1,2,3.$$

函数 $\sigma(z)$, $\sigma_1(z)$, $\sigma_2(z)$, $\sigma_3(z)$ 可通过 $\theta$ **函数**（theta-function）$\theta_0(v)$, $\theta_1(v)$, $\theta_2(v)$, $\theta_3(v)$ 表示（见 **Jacobi 椭圆函数**（Jacobi elliptic functions）），而函数 $\wp(z)$ 可通过 $\sigma(z)$, $\sigma_1(z)$, $\sigma_2(z)$, $\sigma_3(z)$ 表示．后者构成 Weierstrass 函数计算的基础．也能用 Jacobi 椭圆函数来显式表示 Weierstrass 椭圆函数，例如下述形式：

$$\wp(z+\omega_3)-e_1=(e_3-e_1)\mathrm{dn}^2(z\sqrt{e_1-e_3}),$$

$$\wp(z+\omega_3)-e_2=(e_1-e_2)\mathrm{cn}^2(z\sqrt{e_1-e_3}),$$

$$\wp(z+\omega_3)-e_3=(e_2-e_3)\mathrm{sn}^2(z\sqrt{e_1-e_3}).$$

在应用问题中，相对不变量 $g_2$, $g_3$ 通常是给定的．原始周期 $2\omega_1$, $2\omega_3$ 通常借助绝对不变量 $J=g_2^3/\Delta$ 来计算，$J$ 是周期之比 $\tau=\omega_3/\omega_1$ 的**模函数**（modular function）.

**参考文献**


[1] Weierstrass, K., Math. Werke, 1 – 2, Mayer & Müller, 1894 – 1895.

[2] Schwarz, H. A., Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Funktionen, Berlin, 1893.

[3] Hurwitz, A. and Courant, R., Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen, 2, Springer, 1964, Chapt. 8.

[4] Whittaker, E. J. and Watson, G. N., A course of modern analysis, Cambridge Univ. Press, 1952.

[5] Ахиезер, Н. И., Элементы теории эллиптических функций, 2 изд., М., 1970 (中译本：Н. И. 阿希泽尔，椭圆函数论纲要，商务印书馆，1959).


Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Tannery, J., Molk, J., Eléments de la théorie des fonctions elliptiques, 1 – 2, Chelsea, reprint, 1972.

[A2] Lang, S., Elliptic functions, Addison-Wesley, 1973.

[A3] Lawden, D. F., Elliptic functions and applications, Springer, 1989.

[A4] Weil, A., Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker, Springer, 1976.


沈永欢 译

**Weierstrass-Erdmann 隅角条件 [Weierstrass-Erdmann corner conditions; Вейерштрасса-Эрдмана угловые условия]**

补充到 **Euler 方程**（Euler equation）上的极值的必要条件，给定在极值曲线有隅角的点上．设

$$J(x)=\int L(t,x,\dot{x})dt$$

是经典变分法的一个泛函（见**变分学**（variational calculus）），又设**极值曲线**（extremal）$x_0(t)$ 在点 $\tau$ 的一个邻域中除了点 $\tau$ 本身以外连续可微，而在 $\tau$ 有一隅角．在这情形下，为了 $x_0(t)$ 至少是泛函 $J(x)$ 的一个弱局部极值，其必要条件是方程

$$p(\tau-0)=p(\tau+0),$$
$$H(\tau-0)=H(\tau+0)$$

在隅角点 $\tau$ 被满足，其中

$$p(t)=\frac{\partial L(t,x_0(t),\dot{x}_0(t))}{\partial\dot{x}}$$

和

$$H(t)=(\dot{x}_0(t),p(t))-L(t,x_0(t),\dot{x}_0(t)).$$

这些方程称为 K. Weierstrass (1865) 和 G. Erdmann (1877) 的隅角条件（corner conditions）([1]).

Weierstrass-Erdmann 隅角条件的意义是典则变量和 Hamilton 函数在极值曲线的隅角点上是连续的；它们在经典力学中的意义是动量和能量在隅角点上的连续性.

在正则问题中，当 $L$ 是 $\dot{x}$ 的严格凸函数时，极值曲线不能有隅角点．如果 $L(t,x,\dot{x})$ 以及由此引起的 **Weierstrass $\mathscr{E}$ 函数**（Weierstrass $\mathscr{E}$-function）包含 $\dot{x}$ 的线段，则出现隅角点．对带有条件 $\varphi_i(t,x,\dot{x})=0$ 和 **Lagrange 乘子**（Lagrange multipliers）$\lambda_i(t)$ 的 **Lagrange 问题**，Weierstrass-Erdmann 隅角条件中的 $L$ 用 $\widetilde{L}=L+\sum_i\lambda_i\varphi_i$ 代替.

**参考文献**


[1] Erdmann, G., Ueber die unstetige Lösungen in der Variationsrechnung, *J. Reine Angew. Math.*, 82 (1877), 21 – 30.

[2] Bolza, O., Lectures on the calculus of variations, Chelsea, reprint, 1960 (译自德文).


В. М. Тихомиров 撰

【补注】 亦见 **Weierstrass 条件（对变分极值）**（Weierstrass conditions (for a variational extremum)).

**参考文献**


[A1] Cesari, L., Optimization-theory and applications. Problems with ordinary differential equations, Springer, 1983.

[A2] Ewing, G. M., Calculus of variations with applications, Dover, reprint, 1985.

[A3] Petrov, Yu. P., Variational methods in optimum control theory, Acad. Press, 1968.


葛显良 译 吴绍平 校

**Weierstrass 公式 [Weierstrass formula; Вейерштрасса формула]**，对泛函的增量的

经典变分法中的一个公式（见**变分学**（variational calculus）），以 **Weierstrass $\mathscr{E}$ 函数**（Weierstrass $\mathscr{E}$-function）的曲线积分形式确定泛函

$$J(x)=\int_{t_0}^{t_1} L(t,\ x,\ \dot{x})dt,$$

$$L: \mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$$

的值．设向量函数 $x_0(t)$ 是泛函 $J(x)$ 的一条**极值曲线**（extremal），又设它包含于这样一个**极值曲线场**中，该场具有对应于它的向量值场斜率函数 $U(t,\ x)$ 和作用 $S(t,\ x)$（见 **Hilbert 不变积分**（Hilbert invariant integral））．Weierstrass 公式

$$J(x)=S(t_1,\ x(t_1))-S(t_0,\ x(t_0))+ \quad (1)$$

$$+\int_\gamma \mathscr{E}(t,\ x,\ U(t,\ x),\ \dot{x})dt$$

适用于被该场覆盖的区域中的任何曲线 $\gamma=x(t)$．特别地，如果曲线 $\gamma=x(t)$ 和 $\gamma_0=x_0(t)$ 的边界条件是相同的，即如果 $x(t_i)=x_0(t_i)$，$i=0,\ 1$，则得到对泛函增量的 Weierstrass 公式：

$$\Delta J=J(x)-J(x_0)= \quad (2)$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\mathscr{E}(t,\ x(t),\ U(t,\ x(t)),\ \dot{x}(t))dt$$

公式（1）和（2）有时被称为 Weierstrass 基本定理（Weierstrass fundamental theorem）．

**参考文献**

[1] Carathéodory, C., Calculus of variations and partial differential equations of the first order, 1－2, Holden-Day, 1965－1967（译自德文）.

[2] Young, L., Lectures on the calculus of variations and optimal control theory, Saunders, Philadelphia, 1969.

[3] Ахиезер, Н. И. Лекции по вариационному исчислению, М., 1955（英译本：Akhiezer, N. I., The calculus of variations, Blaisdell, 1962）.

В. М. Тихомиров 撰　葛显良 译　吴绍平 校

**Weierstrass $\wp$ 函数 [Weierstrass $\wp$-function; Вейерштрасса $\wp$-функция]**

见 **Weierstrass 椭圆函数**（Weierstrass elliptic functions）．

**Weierstrass 点 [Weierstrass point; Вейерштрасса точка]**

亏格 $g$ 的代数曲线（algebraic curve）（或 **Riemann 曲面**（Riemann surface））$X$ 上的点，在这个点上以下条件被满足：存在 $X$ 上不是常数的有理函数，它在这个点上有一个不超过 $g$ 阶的极，而在 $X$ 的其他点上没有奇点．$X$ 上只可能存在有限多个 Weierstrass 点，而且如果 $g$ 是 0 或 1，则根本没有这样的点，如果 $g\geqslant 2$，则 Weierstrass 点必定存在．这些结果是 K. Weierstrass 对于 Riemann 曲面得到的．对于亏格 $g\geqslant 2$ 的代数曲线，总是存在至少 $2g+2$ 个 Weierstrass 点，而且只有亏格 $g$ 的超椭圆曲线恰有 $2g+2$ 个 Weierstrass 点．Weierstrass 点的个数的上界是 $(g-1)g(g+1)$．亏格 $g\geqslant 2$ 的代数曲线 $X$ 上的 Weierstrass 点的出现保证了从曲线 $X$ 到射影直线 $P^1$ 上的次数不超过 $g$ 的态射的存在性．

**参考文献**

[1] Чеботарев, Н. Г., Теория алгебраических функций, М.-Л., 1948.

[2] Springer, G., Introduction to Riemann surfaces, Addison-Wesley, 1957.

В. Е. Воскресенский 撰

**【补注】**

**参考文献**

[A1] Griffiths, P. and Harris, J., Principles of algebraic geometry, Wiley (Interscience), 1978.

[A2] Arbarello, E., Cornalba, M., Griffiths, P. A. and Harris, J., Geometry of algebraic curves, 1, Springer, 1985.

[A3] Gunning, R. C., Lectures on Riemann surfaces, Princeton Univ. Press, 1966.

陈志杰 译

**Weierstrass 环 [Weierstrass ring; Вейерштрасса кольцо]**

满足下述条件的 Hensel 伪几何环（见**几何环**（geometric ring）；**Hensel 环**（Hensel ring））：它对于每个素理想的商环都是**正则局部环**（local ring）（亦见**正则环（交换代数中的）**（regular ring (in commutative algebra）））的有限扩张．Weierstrass 环是解析不可约的．Weierstrass 环的任一有限扩张是 Weierstrass 环．完全域上的解析环（收敛幂级数环，见**解析环**（analytic ring））是 Weierstrass 环的例子，对于这样的环 Weierstrass 预备定理（见 **Weierstrass 定理**（Weierstrass theorem））是可以应用的．

**参考文献**

[1] Nagata, M., Local rings, Interscience, 1962.

[2] Seydi, H., Sur la théorie des anneaux de Weierstrass I, *Bull. Soc. Math. France*, **95** (1971), 227－235.

В. И. Данилов 撰　赵春来 译

**Weierstrass 定理 [Weierstrass theorem; Вейерштрасса теорема]**

1) Weierstrass 无穷积定理（Weierstrass infinite

product theorem)([1])：对复平面 C 中每个给定的点列

$$0, \cdots, 0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \qquad (1)$$

$$0 < |\alpha_k| \leqslant |\alpha_{k+1}|, \ k = 1, 2, \cdots; \lim_{k\to\infty} |\alpha_k| = \infty,$$

存在以且只以这一序列中的点 $\alpha_k$ 为零点的整函数．这一函数可以构造为**典型积**(canonical product)

$$W(z) = z^\lambda \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) e^{P_k(z)}, \qquad (2)$$

其中 $\lambda$ 是序列(1)中零的重数，而

$$P_k(z) = \frac{z}{\alpha_k} + \frac{z^2}{2\alpha_k^2} + \cdots + \frac{z^{m_k}}{m_k \alpha_k^{m_k}}.$$

乘子

$$W\left(\frac{z}{\alpha_k}; m_k\right) = \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) e^{P_k(z)}$$

称为 Weierstrass 素乘子(Weierstrass prime multiplier)或 Weierstrass 初等因子(Weierstrass elementary factor)．指数 $m_k$ 要选得足以保证积(2)的收敛性；例如，选取 $m_k = k$ 可保证对任何形如(1)的序列(2)均收敛．

从这一定理还能得到，任一以(1)为其零点序列的整函数具有

$$f(z) = e^{g(z)} W(z)$$

的形式，其中 $W(z)$ 是典型积(2)，$g(z)$ 是整函数(亦见关于整函数的 **Hadamard 定理**(Hadamard theorem))．

Weierstrass 无穷积定理可以推广到任意区域 $D \subset$ C 的情形：对任一在 $D$ 中没有极限点的点列 $\{\alpha_k\} \subset D$，存在 $D$ 中的全纯函数 $f$，它以且只以所给诸点 $\alpha_k$ 为零点．

上述定理中涉及具有任意指定零点的整函数存在性的部分可以如下地推广到多复变量函数的情形：设复空间 $\mathbf{C}^n (n \geqslant 1)$ 的每个点 $\alpha$ 都对应于该点的一个邻域 $U_\alpha$ 和在 $U_\alpha$ 中全纯的一个函数 $f_\alpha$，且假定这一对应满足：如果点 $\alpha, \beta \in \mathbf{C}^n$ 所对应的邻域之交 $U_\alpha \cap U_\beta$ 非空，则商 $f_\alpha / f_\beta \neq 0$ 是 $U_\alpha \cap U_\beta$ 中的全纯函数．在这些条件下，存在 $\mathbf{C}^n$ 中的整函数 $f$，使得商 $f / f_\alpha$ 在每个点 $\alpha \in \mathbf{C}^n$ 处是全纯函数．这一定理称为 Cousin 第二定理(Cousin second theorem)(亦见 **Cousin 问题**(Cousin problems))．

**参考文献**


[1] Weierstrass, K., Mathem. Werke, Mayer & Müller, Vol. 2, 1895.

[2] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, т. 2, 2 изд., М., 1968 (中译本：А. И. 马库雪维奇，解析函数论，高等教育出版社，第七章)．

[3] Шабат, Б. В., Введение в комплексный анализ, ч. 1－2, 2 изд., М., 1976 (第二卷英译本：Shabat, B. V., Introduction to complex analysis, Part II Functions of several variables, Amer. Math. Soc., 1992)．


Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Remmert, R., Funktionentheorie, II, Springer, 1991.


2) 关于函数逼近的 Weierstrass 定理：对区间 $[a, b]$ 上的任一连续实值函数 $f(x)$，存在在 $[a, b]$ 上一致收敛于所给函数 $f(x)$ 的代数多项式序列 $P_0(x), P_1(x), \cdots, P_n(x), \cdots$；此定理系 K. Weierstrass 所建立([1])．

类似结果对所有空间 $L_p[a, b]$ 均成立．**Jackson 定理**(Jackson theorem)是这一定理的加强．

所述定理对周期为 $2\pi$ 的实值连续函数与三角多项式也成立；同样对在 $m$ 维空间的有界闭域上连续的实值函数和 $m$ 元多项式成立．关于此定理的推广，见 **Stone-Weierstrass 定理**(Stone-Weierstrass theorem)．关于用多项式逼近复变函数，见[3]．

**参考文献**


[1A] Weierstrass, K., Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkülicher Funktionen reeller Argumente, *Sitzungsber. Akad. Wiss. Berlin*, 1885, 633－639; 789－805.

[1B] Weierstrass, K., Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkülicher Funktionen reeller Argumente, 载于其 Werke, Vol. 3, Preuss. Akad. Wiss., 1903.

[2] Ахиезер, Н. И., Лекции по теории аппроксимации, 2 изд., М., 1965 (中译本：Н. И. 阿赫叶裴尔，逼近论讲义，科学出版社，1957)．

[3] Шабат, Б. В., Введение в комплексный анализ, ч. 1－2, 2 изд., М., 1976 (第二卷英译本：Shabat, B. V., Introduction to complex analysis, Part II Functions of several variables, Amer. Math. Soc., 1992)．


Ю. Н. Субботин 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Gaier, D., Vorlesungen über Approximation im Komplexen, Birkhäuser, 1980 (中译本：D. 加意耳，复变函数逼近论，湖南教育出版社，1985)．

[A2] Werner, J., Banach algebras and several complex variables, Springer, 1976.


【译注】

**参考文献**


[B1] 沈燮昌，复变函数逼近论，科学出版社，1992.


3) 关于一致收敛解析函数项级数的 Weierstrass 定理([1])：如果在复平面 C 的区域 $D$ 内的任一紧

统上一致收敛的级数

$$s(z)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(z) \qquad (*)$$

的各项是 $D$ 内的解析函数，则此级数的和 $s(z)$ 是 $D$ 内的解析函数．加之还有，对任一 $m$，由级数 $(*)$ 逐项 $m$ 次微分所得的级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}u_k^{(m)}(z)$$

在 $D$ 内的任一紧统上也一致收敛于级数 $(*)$ 之和的 $m$ 阶导数 $s^{(m)}(z)$．这一定理已推广到在复空间 $\mathbf{C}^n$ $(n\geqslant 1)$ 的区域 $D$ 内的任一紧统上一致收敛的多复变量解析函数项级数；而且由级数 $(*)$ 各项某一固定阶偏导数所成的级数在 $D$ 内的任一紧统上一致收敛于所给级数的和的对应阶偏导数：

$$\frac{\partial^m s(z)}{\partial z_1^{m_1}\cdots\partial z_n^{m_n}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\partial^m u_k(z)}{\partial z_1^{m_1}\cdots\partial z_n^{m_n}},$$

$$z=(z_1,\cdots,z_n),\ m=m_1+\cdots+m_n.$$

Е. Д. Соломенцев 撰

4）关于在区域边界上的一致收敛性的 Weierstrass 定理（[1]）：如果级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}u_k(z)$$

的各项在复平面 $\mathbf{C}$ 的有界闭域 $\bar{D}$ 上连续，在 $D$ 内解析，则此级数在所给区域边界上的一致收敛性蕴涵它在闭域 $\bar{D}$ 上的一致收敛性．

解析函数项级数的这一性质也适用于定义在复空间 $\mathbf{C}^n(n\geqslant 1)$ 的区域中的解析函数或 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ $(n\geqslant 2)$ 的区域中的调和函数．在适用**最大模原理**(maximum-modulus principle）的所有情形下此性质作为一个一般规则均成立．

**参考文献**


[1A] Weierstrass, K., Abhandlungen aus der Funktionenlehre, Springer, 1866.

[1B] Weierstrass, K., Mathem. Werke, Mayer & Müller, Vol. 2, 1895.

[2] Whittaker, E. T., Watson, G. N., A course of modern analysis, 1, Cambridge Univ. Press, 1952, Chapt. 3.

[3] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967, гл. 3, т. 2, М., 1968, гл. 7（中译本：A. И. 马库雪维奇，解析函数论，高等教育出版社，1957，第 3，7 章）．


Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Remmert, R., Theory of complex functions, 1, Springer, 1990（译自德文）．


5）Weierstrass 预备定理（Weierstrass preparation theorem）．由 K. Weierstrass 于 1860 年（[1]）得到并最早表述的一条预备引理，用于证明由方程 $f(z,w)=0$ 所定义的复变量隐函数的存在性和解析性，此方程的左端是两个复变量的全纯函数．这一定理把单复变量全纯函数的下述重要性质推广到多复变量情形：如果 $f(z)$ 是坐标原点的一个邻域内的全纯函数且 $f(0)=0$，$f(z)\not\equiv 0$，则它可表示为 $f(z)=z^s g(z)$ 的形式，其中 $s(\geqslant 1)$ 是 $f(z)$ 在原点处零点的重数，而全纯函数 $g(z)$ 在原点的某个邻域内恒不等于零．

对于 $n$ $(n\geqslant 1)$ 个复变量函数的 Weierstrass 预备定理的表述．设

$$f(z)=f(z_1,\cdots,z_n)$$

是 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ 的在多圆柱

$$U=\{z:|z_i|<a_i,\ i=1,\cdots,n\}$$

内的全纯函数，且

$$f(0)=0,\ f(0,\cdots,0,z_n)\not\equiv 0,$$

则在某个多圆柱

$$V=\{z:|z_i|<b_i\leqslant a_i,\ i=1,\cdots,n\}$$

中，函数 $f(z)$ 可表示为

$$f(z)=[z_n^s+f_1(z_1,\cdots,z_{n-1})z_n^{s-1}+\cdots+$$
$$+\cdots+f_s(z_1,\cdots,z_{n-1})]g(z)$$

的形式，其中 $s$ 是函数

$$f(z_n)=f(0,\cdots,0,z_n)$$

在坐标原点处零点的重数，$s\geqslant 1$；函数 $f_j(z_1,\cdots,z_{n-1})$ 在多圆柱

$$V'=\{(z_1,\cdots,z_{n-1}):|z_i|<b_i,\ i=1,\cdots,n-1\}$$

内全纯，且

$$f_j(0,\cdots,0)=0,\ j=1,\cdots,s;$$

函数 $g(z)$ 在 $V$ 内全纯且恒不等于零．函数 $f_j(z_1,\cdots,z_{n-1})$ $(j=1,\cdots,s)$ 和 $g(z)$ 由定理的条件唯一确定．

如果适当修改上面的表述，则坐标原点就可代之以复空间 $\mathbf{C}^n$ 中任何点 $a=(a_1,\cdots,a_n)$．由 Weierstrass 预备定理得知，当 $n>1$ 时，与单复变量情形不同，全纯函数的零点的每个邻域含有该函数的其他零点的一个无穷集合．

Weierstrass 预备定理是一条纯代数性质的定理，因而可对形式幂级数（formal power series）加以表述．设 $\mathbf{C}[[z_1,\cdots,z_n]]$ 是变量 $z_1,\cdots,z_n$ 的系数取自复数域 $\mathbf{C}$ 的形式幂级数环，$f$ 是此环中的一个级

数，其各项具有最低可能次数 $s \geqslant 1$，且假定存在形如 $cz_n^s(c \neq 0)$ 的一个项，则级数 $f$ 可表示为

$$f = (z_n^s + f_1 z_n^{s-1} + \cdots + f_s) g,$$

其中 $f_1, \cdots, f_s$ 是 $\mathbf{C}[[z_1, \cdots, z_{n-1}]]$ 中的级数，其常数项为零，$g$ 是 $\mathbf{C}[[z_1, \cdots, z_n]]$ 中具有非零常数项的级数．形式幂级数 $f_1, \cdots, f_s$ 和 $g$ 由 $f$ 唯一确定．

有时也把下述除法定理（division theorem）称为 Weierstrass 预备定理：设级数

$$f \in \mathbf{C}[[z_1, \cdots, z_n]]$$

满足上面开列的条件，并设 $g$ 是 $\mathbf{C}[[z_1, \cdots, z_n]]$ 中任一级数．则存在级数

$$h \in \mathbf{C}[[z_1, \cdots, z_n]]$$

和 $s$ 个级数

$$a_j \in \mathbf{C}[[z_1, \cdots, z_{n-1}]],\ a_j(0, \cdots, 0) = 0,$$

$$j = 0, \cdots, s-1,$$

满足下述方程

$$g = hf + a_0 + a_1 z_n + \cdots + a_{s-1} z_n^{s-1}.$$

Weierstrass 预备定理也可应用于形式有界级数（formally bounded series）的环．它提供了例如从 $\mathbf{C}[[z_1, \cdots, z_{n-1}]]$ 到 $\mathbf{C}[[z_1, \cdots, z_n]]$ 的一种归纳转移方法．通过这一途径就有可能建立环 $\mathbf{C}[z_1, \cdots, z_n]$ 和 $\mathbf{C}[[z_1, \cdots, z_n]]$ 的某些性质，诸如它是 Noether 环或具有唯一因子分解性质等．也存在这一定理到可微函数的推广（[6]）．

**参考文献**


[1A] Weierstrass, K., Abhandlungen aus der Funktionenlehre, Springer, 1866.

[1B] Weierstrass, K., Mathem. Werke, Mayer & Müller, Vol. 2, 1895.

[2] Шабат, Б. В., Введение в комплексный анализ, ч. 1-2, 2 изд., М., 1976（第二卷英译本：Shabat, B. V., Introduction to complex analysis, Part II Functions of several variables, Amer. Math. Soc., 1992）.

[3] Bochner, S., Martin, W. T., Several complex variables, Princeton Univ. Press, 1948.

[4] Gunning, R. C., Rossi, H., Analytic functions of several complex variables, Prentice-Hall, 1965.

[5] Шафаревич, И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972, гл. 2（英译本：Shafarevich, I. R., Basic algebraic geometry, Springer, 1977, Chapt. 2）.

[6] Malgrange, B., Ideals of differentiable functions, Tata Inst. Fundam. Res., 1966.


Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 Weierstrass 预备定理中出现的多项式

$$z_n^s + f_1(z_1, \cdots, z_{n-1}) z_n^{s-1} + \cdots + $$
$$+ f_s(z_1, \cdots, z_{n-1}),$$

称为 $z_n$ 的 $s$ 次 Weierstrass 多项式（Weierstrass polynomial）.

Weierstrass 预备定理对于可微函数的推广有多种名称．它称为可微预备定理（differentiable preparation theorem），或 Malgrange 预备定理（Malgrange preparation theorem），或 Malgrange-Mather 预备定理（Malgrange-Mather preparation theorem）．设 $F$ 是 $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ 中 0 的某个邻域上的光滑实值函数，且 $F(t, 0) = g(t)t^k$，其中 $g(0) \neq 0$ 且 $g$ 在 $\mathbf{R}$ 中 0 的邻域内光滑．此时 Malgrange 预备定理（Malgrange preparation theorem）断言，存在 0 的邻域中的光滑函数 $q$，使对适当的光滑函数 $\lambda_i$，有 $(qF)(t, x) = t^k + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i(x) t^i$；而 Mather 除法定理（Mather division theorem）断言，对每个在 $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ 中 0 的邻近光滑的函数 $G$，存在 $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ 中 0 的邻近光滑的函数 $q$ 和 $r$，使得 $G = qF + r$，且 $r(t, x) = \sum_{i=0}^{k-1} r_i(x) t^i$．关于可微预备定理（differentiable preparation theorem）和可微除法定理（differentiable division theorem）的更加复杂的陈述，见 [A2]－[A4].

上述定理的一个重要应用是可微对称函数定理（differentiable symmetric function theorem）（可微 Newton 定理（differentiable Newton theorem）），它断言 $x_1, \cdots, x_n$ 的对称可微函数在 0 处的芽 $f$ 可写为初等对称函数（elementary symmetric function）$\sigma_1 = x_1 + \cdots + x_n, \cdots, \sigma_n = x_1 \cdots x_n$ 的可微函数的芽（[A7]，[A8]）.

上述预备定理和除法定理也有 $p$ 进推广．设 $k$ 是完全非 Archimedes 赋范域（见域上的范数（norm on a field）），$T_n(k) = k\langle z_1, \cdots, z_n\rangle$ 是满足下述条件的幂级数 $\sum a_\alpha z^\alpha$ $(\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n))$，$\alpha_i \in \mathbf{N} \cup \{0\}$，$z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}$）构成的代数：当 $|\alpha| \to \infty$ $(|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n)$ 时，有 $|a_\alpha| \to 0$．$T_n(k)$ 上的范数由 $\|\sum a_\alpha z^\alpha\| = \max_\alpha |a_\alpha|$ 定义．设子环 $A_n(k)$ 由满足 $\|f\| \leqslant 1$ 的所有 $f \in T_n(k)$ 组成，而 $\mathfrak{m}_n(k)$ 是满足 $\|f\| < 1$ 的所有 $f \in A_n(k)$ 构成的理想．设 $\bar{T}_n(k)$ 是剩余环 $A_n(k)/\mathfrak{m}_n(k)$，而 $f \mapsto \bar{f}$ 是商映射．于是有 $\bar{T}_n(k) = \bar{k}[z_1, \cdots, z_n]$，其中 $\bar{k}$ 是 $k$ 的剩余域．满足 $\|f\| = 1$ 的元素 $f \in T_n(k)$ 称为对 $z_n$ 为 $d$ 次正则的（regular of degree $d$），如果 $\bar{f}$ 具有形式 $\bar{f} = \lambda z_n^d + \sum_{i=0}^{d-1} c_i z_n^i$，其中 $c_i \in \bar{k}[z_1, \cdots, z_{n-1}]$，且 $0 \neq \lambda \in \bar{k}$．注意 $T_{n-1}(k)[z_n] = k\langle z_1, \cdots, z_{n-1}\rangle[z_n]$ 自然是 $T_n(k)$ 的一个子代数．$p$ 进 Weierstrass 预备定理（$p$-

adic Weierstrass preparation theorem）和 $p$ 进除法定理（$p$-adic division theorem）断言：i）（除法定理）设 $F\in T_n(k)$ 对 $z_n$ 为 $d$ 次正则的，$G\in T_n(k)$，则存在唯一的元素 $q\in T_n(k)$ 和 $r_i\in T_{n-1}(k)$（$i=0,\cdots,d-1$），使得 $G=qF+\sum_{i=0}^{d-1}r_iz_n^i$，而且 $\|G\|=\max(\|F\|,\|r\|)$，其中 $r=\sum_{i=0}^{d-1}r_iz_n^i$；ii）（预备定理）设 $F\in T_n(k)$ 的范数为 1，则存在 $T_n(k)$ 的一个 $k$ 自同构 $\sigma$，使得 $\sigma(F)$ 对 $z_n$ 是正则的.

**参考文献**


[A1] Hörmander, L., An introduction to complex analysis in several variables, North-Holland, 1973.

[A2] Golubitsky, M., Guillemin, V., Stable mappings and their singularities, Springer, 1973, Chapt. Ⅳ.

[A3] Tougeron, J. C., Ideaux de fonction différentiables, Springer, 1972, Chapt. Ⅸ.

[A4] Malgrange, B., Ideals of differentiable functions, Oxford Univ. Press, 1966, Chapt. Ⅴ.

[A5] Fresnel, J., Put, M. van der, Géométrie analytique rigide et applications, Birkhäuser, 1981, §Ⅱ.2.

[A6] Koblitz, N., $p$-adic numbers, $p$-adic analysis, and zeta functions, Springer, 1977, 97.

[A7] Glaeser, G., Fonctions composés différentiables, *Ann. of Math.*, 77 (1963), 193－209.

[A8] Łojasiewicz, S., Whitney fields and the Malgrange-Mather preparation theorem, 载于 Wall, C. T. C. (ed.), Proc. Liverpool Singularities Symposium 1, Springer, 1971, 106－115.


沈永欢 译

**权[weight; вес]，权函数（weight function）**

一个函数乘子，它可以使一个函数给定形式的范数为有限，而没有该乘子时，给定函数的范数（或半范数）可能是无限的. 权（函数）的概念在有关函数逼近（特别是在无界区间上的逼近）问题中，在矩问题中，在函数空间的嵌入理论中（见**加权空间**（weighted space）），在关于函数延拓的问题中以及在微分方程理论中都起着重要的作用.

Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】 例如，可以在区间 $[a,b]$ 上考虑连续函数空间 $C[a,b]$ 中的加权平方范数（weighted square norm）（见[A2]）

$$\|f\|=\int_a^b w(x)f^2(x)dx,$$

其中，$w:[a,b]\to\mathbf{R}$ 是一个取正值的连续函数.

称多项式 $P_j(x)$ 在 $[a,b]$ 上关于权 $w(x)$ 规范正交，如果（[A2]）

$$\int_a^b w(x)P_j(x)P_i(x)dx=\delta_{ij}.$$

关于把权（不同的影响、重要性）配置给和式、积分式或其他数学构式的思想的另一种解释，亦见**加权平均**（weighted average）.

这种思想还有别的一些阐释，例如，加权最小平方（weighted least squares）（[A3]）就是要寻求某种近似估计使得加权和（weighted sum）

$$\sum_{i=1}^n w_i\|\hat{x}-x_i\|^2$$

达到极小，再如加权匹配问题（weighted matching problem），考虑一个加权图（weighted graph）（即每条边均带有一个特定权的图），问题是要找出最大总权的某种匹配（matching）（即任何两条边均无公共顶点的所有边的集合）（[A4]）.

在滤波和识别问题中，加权于观测结果采取重近轻远的方法是明智的. 此时，人们常常谈及的是增益和增益序列而不是权（[A5]，[A6]）.

在带有预先给定的权函数（weighting function）$w(x)$ 的积分公式

$$\int_a^b w(x)f(x)dx=\sum_{k=0}^N w_kf(x_k)+R$$

中，$w_k$ 被称作是权系数（weighting coefficients）（[A7]）.

线性动力输入－输出系统

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t),$$
$$y(t)=Cx(t)$$

产生一个输入与输出函数之间的关系

$$y(t)=\int_0^t W(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

（有时称为黑盒表示（black-box representation）），其中 $W(t)$ 被称为传递函数（transfer function）或权函数（[A8]）.

在有限范围或无限范围的优化中，例如，在最优经济增长理论中，人们的目的是要极大化远景回报函数

$$\int_{t_0}^{t_1} e^{-\lambda(t-t_0)}U(c(t))dt,$$

其中，$U$ 是一个效用函数，$c(t)$ 是现存消费品的流量. 这里使用的加权函数 $\exp(-\lambda t)$ 由折扣因子（discount factor）$\lambda$ 唯一确定（[A9]）.

**参考文献**


[A1] Rice, J. R., The approximation of functions, 1, Addison-Wesley, 1964.

[A2] Davis, Ph. J., Interpolation and approximation, Dover, reprint, 1975, p. 49; 134.

[A3] Maybeck, P. S., Stochastic models, estimation, and control, 1, Acad. Press, 1979, p. 120; 232.

[A4] Papadimitriou, Chr. H. and Steiglitz, K., Combinatorial optimization, Prentice Hall, 1982, p. 247ff.

[A5] Ljung, L., Recursive identification, in M. Hazewinkel and J. C. Willems (eds.): Stochastic Systems:

the Mathematics of Filtering and identification and Applications, Reidel, 1981, 247 – 283; esp. 272.

[A6] Maybeck, P. S. Stochastic models, estimation, and control. Ⅲ, Acad. Press, 1982, 242 – 244.

[A7] Hildebrand, F. B., Introduction to numerical analysis, Dover, reprint, 1987. p. 209.

[A8] Beveridge, G. S. G. and Schechter, R. S., Optimization: theory and practice, McGraw-Hill, 1970, p. 53.

[A9] Intrilligator, M. D., Mathematical optimization and economic theory, Prentice Hall, 1971, p. 407.

王仁宏、檀结庆 译

**权函数**[**weight function; обложение**]

正交多项式系$\{P_n(x)\}$的权$d\sigma(x)$．如果$\sigma$是区间$[a,b]$上的有界非减函数且有无穷多个增点，则测度$d\sigma(x)$(称为权函数(weight function))唯一地定义了具有正首项系数且满足规范正交条件的多项式系$\{P_n(x)\}$．

分布函数(distribution function)或积分权(integral weight)$\sigma$可以分解为形式

$$\sigma=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3,$$

其中的$\sigma_1$是绝对连续函数(称为核)，$\sigma_2$是连续的奇异分量，$\sigma_3$是跳跃函数．如果$\sigma_2\equiv\sigma_3\equiv 0$，则在积分号下可作代换$d\sigma(x)=\sigma_1'(x)dx$，这里的导数$\sigma_1'=h$称为多项式系的微分权(differential weight)．

在分布函数的3个分量中，只有核$\sigma_1$反映了正交多项式系的渐近性质．

参考文献见**正交多项式**(orthogonal palynomials)．

П. К. Суетин 撰

【补注】 术语"权函数"经常专门用于这里称谓的"微分权"．

朱学贤 译

**Lie 代数表示的权**[**weight of a representation of a Lie algebra; вес представления алгебры Ли**]，在向量空间$V$上

**Lie 代数**(Lie algebra)$L$到定义域$k$上的线性映射$\alpha$，对此存在$V$的非零向量$x$，使得对于表示$\rho$，等式

$$(\rho(h)-\alpha(h)1)^{n_{x,h}}(x)=0$$

对所有$h\in L$及某个整数$n_{x,h}>0$(一般取决于$x$和$h$)成立．这里1表示$V$的恒等变换．这时也可以称$\alpha$是由表示$\rho$确定的$L$模$V$的一个权(weight of the $L$-module $V$)．满足这一条件的所有向量$x\in V$的集合，连同零，形成子空间$V_\alpha$，通常称为权$\alpha$(或对应于$\alpha$)的权子空间(weight subspace)．若$V=V_\alpha$，则$V$称为$L$上权$\alpha$的权空间(weight space)或权模(weight module)．

若$V$是$L$上权$\alpha$的有限维模，它的逆步模(见逆步表示(contragredient representation))$V^*$是权$-\alpha$的权模；若$V$和$W$分别是$L$上权$\alpha$和$\beta$的权模，则它们的张量积$V\otimes W$是权$\alpha+\beta$的权模．若$L$是幂零 Lie 代数，则权$\alpha$在$V$中的权子空间$V_\alpha$是$L$模$V$的$L$子模．若还有

$$\dim_k V<\infty$$

并且$\rho(L)$是模$V$的线性变换的一个分裂 Lie 代数，则$V$可分解成有限个不同权的权子空间的直和：

$$V=V_\sigma\oplus V_\delta\oplus\cdots\oplus V_\tau$$

($V$关于$L$的权分解(weight decomposition))．如果$L$是有限维 Lie 代数$M$的幂零子代数，将$M$视为关于$M$的伴随表示$\mathrm{ad}_M$的一个$L$模(见**Lie 群的伴随表示**(adjoint representation of a Lie group))，而$\mathrm{ad}_M L$是$M$的线性变换的分裂 Lie 代数，则$M$关于$L$所对应的权分解

$$M=M_\alpha\oplus M_\beta\oplus\cdots\oplus M_\gamma$$

称为$M$关于$L$的 Fitting 分解(Fitting decomposition)，权$\alpha,\beta,\cdots,\gamma$称为根(root)，而空间$M_\alpha$，$M_\beta,\cdots,M_\gamma$称为$M$关于$L$的根子空间(root subspace)．如果指定代数$M$在有限维向量空间$V$上的一个表示$\rho$，$\rho(L)$是$V$的线性变换的一个分裂 Lie 代数，而

$$V=V_\sigma\oplus V_\delta\oplus\cdots\oplus V_\tau$$

是$V$关于$L$的对应的权分解，则当$\alpha+\sigma$是$V$关于$L$的一个权时，$\rho(M_\alpha)(V_\sigma)\subseteq V_{\alpha+\sigma}$，否则$\rho(M_\alpha)(V_\sigma)=0$．特别地，若$\alpha+\beta$是一个根，则$[M_\alpha,M_\beta]\subseteq M_{\alpha+\beta}$，否则$[M_\alpha,M_\beta]=0$．如果$k$是特征为零的域，则权$\sigma,\delta,\cdots,\tau$和根$\alpha,\beta,\cdots,\gamma$是$L$上的线性函数，它们在$L$的换位子子代数上取值为零．

**参考文献**

[1] Jacobson, N., Lie algebras, Interscience, 1962(中译本：N．贾柯勃逊，李代数，上海科学技术出版社，1964)．

В. Л. Попов 撰

【补注】 域$k$上向量空间的线性变换的集合(代数，Lie 代数，等等)$L$称为分裂的(split 或 splitting)，如果每个变换的特征多项式的所有的根都在$k$中，即$k$包含所有$h\in L$的特征多项式的分裂域(见**多项式的分裂域**(splitting field of a polynomial))．

Lie 代数的表示$\rho: L\to\mathrm{End}(V)$是分裂的，若$\rho(L)$是线性变换的分裂 Lie 代数(split Lie algebra of linear transformation)．

**参考文献**

[A1] Bourbaki, N., Groupes et algèbres de Lie, Eléments de mathématique, Hermann, 1975, Chapts, 7; 8.

**拓扑空间的权 [weight of a topological space; вес топологического пространства]**

拓扑空间 (topological space) 开基 (base) 的基数中的最小基数. 权, 连同基数, 都是拓扑空间的最重要的基数不变量. П. С. Александров 撰

【补注】 亦见基数特征 (cardinal characteristic).

**参考文献**

[A1] Arkhangel'skiĭ, A. V., Topological function spaces, Kluwer, 1991 (译自俄文).

[A2] Juhasz, J., Cardinal functions in topology, Math. Centre, Amsterdam, 1971.

罗嵩龄 译

**权空间 [weight space; весовое пространство]**

一个有限维空间 $V$, 承担着域 $F$ 上 **Lie 代数** (Lie algebra) 的一个表示 $\rho$, 且满足下述条件: 存在函数 $\alpha: L \to F$, 使得对任何 $x \in V$, $l \in L$,

$$(l^{\rho} - \alpha(l)1)^k x = 0$$

对某个正整数 $k$. 函数 $\alpha$ 称为权 (weght). $L$ 在权为 $\alpha_1$ 和 $\alpha_2$ 的权空间 $V_1$ 和 $V_2$ 中的两个表示 $\rho_1$ 和 $\rho_2$ 的张量积 $\rho_1 \otimes \rho_2$ 是 $L$ 在空间 $V_1 \otimes V_2$ 中的表示, 这也是一个权空间, 权为 $\alpha_1 + \alpha_2$. 由表示 $\rho$ 导出逆步表示 $\rho^*$, 空间 $V$ 由伴随空间 $V^*$ 所取代, $\alpha$ 由 $-\alpha$ 所取代. Е. Н. Кузьмин 撰

【补注】 亦见 **Lie 代数表示的权** (weight of representation of a Lie algebra). 蔡传仁 译

**加权平均值 [weighted average; взвешенное среднее]**

量

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i},$$

其中 $x_1, \cdots, x_n$ 是 $n$ 个分别关于权 $p_1, \cdots, p_n$ 取的量. 王斯雷 译

**加权空间 [weighted space; весовое пространство]**, 带加权范数的函数空间 (function space with weighted norm), 加权类 (weighted class), 具有加权范数的函数空间 (space of functions with weighted norm)

具有包含函数乘子——权 (weigt) 的有限范数 (或半范数) 的函数空间. 该函数的范数 (半范数) 则称为加权范数 (半范数) (weighted norm (semi-norm)), 而此权也称为该范数 (半范数) 的权函数 (weight function of the norm (semi-norm)). 权的引入使得有可能扩大或限制由具有无穷通常非加权范数 (半范数) 的函数所组成的通常非加权赋范和赋半范的函数空间. 例如, 考虑加权空间 $C_{\varphi}(E)$ (这里 $\varphi$ 是权函数), 它的范数由公式

$$\|f\|_{C_{\varphi}} = \sup_{x \in E} |\varphi(x) f(x)|$$

定义. 如果函数 $\varphi$ 是适当选取的, 该空间可以比具有通常范数

$$\|f\|_{C} = \sup_{x \in E} |f(x)|$$

的空间大或小. 例如, 具有范数

$$\|f\|_{C_x} = \sup_{0 < x < 1} |x f(x)|$$

的空间 $C_x(0, 1)$ 包含一些无界函数, 且包含区间 $(0, 1)$ 上的有界函数的空间 $C(0, 1)$ 作为真子空间. 反之, 具有范数

$$\|f\|_{C_{1/x}} = \sup_{0 < x < 1} \left| \frac{1}{x} f(x) \right|$$

的空间 $C_{1/x}(0, 1)$ 是空间 $C(0, 1)$ 的真子空间. 第二个例子: 具有加权半范数 $\sqrt{D_{\alpha}(u)}$ 的赋半范空间, 这里 $u = u(x, y)$ 且

$$D_{\alpha}(u) = \iint_{r<1} (1-r)^{\alpha} (u_x^2 + u_y^2) \, dx \, dy,$$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$, 对 $\alpha > 0$, 它包含具有无权半范数 $\sqrt{D_0(u)}$ 的函数空间作为真子空间, 而对 $\alpha < 0$, 它是这空间的真子空间.

在极大多数情形权函数趋于零或无穷当其自变量趋近一个给定流形时, 该流形可退化成一点, 包括无穷远点. 在函数论中当研究通常 (非加权) 空间时, 以及在函数论的应用中, 例如在偏微分方程的边值问题理论中, 都会自然地出现带权的空间.

研究加权空间中的主要问题是对这样一些空间得到嵌入定理 (imbedding theorem). 在第一类型的嵌入定理中一个函数的范数用它在另一加权空间中的范数来估计, 假设两个范数对有同样定义域的函数都有定义. 这类型的定理包括关于一个加权空间中等价范数的定理, 特别是关于用 Fourier-Bessel 变换定义的范数. 这些包括对在定义域边界上为零的函数, 在适当的空间中, 用较高阶导数的 (加权) 范数来估计较低阶导数, 特别是函数本身的加权范数. 例如, 这些定理可用以确定用什么权一个函数在给定区域中可和, 如果它的所有高阶导数属于给定的加权空间. 在第二类型的嵌入定理中, 用函数的加权范数给出它们在低维流形上迹的范数的估计.

重要的一类加权空间由这样的函数空间组成, 其中函数直到某一阶数的所有导数的绝对值的一定次数

的幂带有一个幂性权是可和的．对这样一些情况加权空间的嵌入已经很详尽地作了研究．例如令加权空间 $W^l_{p,\alpha}(E^n|\infty)$ 是由 $n$ 维 Euclid 空间 $E^n$ 上有直到 $l$ 阶（包含在内）广义导数 $D^k_0 f$, $k=(k_1,\cdots,k_n)$，且使得量（它是该空间的范数）

$$|f;\ W^l_{p,\alpha}(E^n|\infty)| =$$

$$=\sum_{|k|=l}|(1+|x|)^{-\alpha}D^k f;\ L_p(E^n)|+|f;\ L_p(Q^n)|$$

保持有限的函数 $f$ 组成．这里 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in E^n$, $|x|=\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$, $Q^n$ 是 $E^n$ 中 $n$ 维单位球, $1\leqslant p\leqslant\infty$, $\alpha$ 是一实数，且 $|k|=k_1+\cdots+k_n$．则以下的嵌入定理适用：如果 $\alpha>(n/p)-1$, $0\leqslant k\leqslant l$，则

$$W^l_{p,\alpha}(E^n|\infty)\rightarrow W^{l-k}_{p,\alpha+k}(E^n|\infty).$$

如果 $\alpha>0$ 是小的（即在所谓小退化情形），加权空间 $W^l_{p,\alpha}(E^n|\infty)$ 有类似于无权空间的那些性质：如果 $0\leqslant\alpha\leqslant(n/p)-1$，则对任意的 $\varepsilon>0$，嵌入

$$W^l_{p,\alpha}(E^n|\infty)\rightarrow W^0_{p,(n+\varepsilon)/p}(E^n|\infty)$$

成立．如果 $\alpha=0$，可以推出，例如，**Dirichlet 积分**(Dirichlet integral)

$$D(f)=\int\sum_{i=1}^n\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]^2 dE^n_+$$

（其中 $E^n_+=\{x:\ x_n>0\}$ 是半空间）作为属于 $L_2(E^n_+)$ 且在超平面 $E^{n-1}=\{x:\ x_n=0\}$ 上为零的函数的空间上的泛函不是下有界的，但是它在相应的权空间上是下有界的．

如果 $0\leqslant\alpha<(n/p)-l$，则对加权空间 $W^l_{p,\alpha}(E^n|\infty)$ 中的每一个函数，有一个对应的次数至少为 $l-1$ 的多项式使得当点沿半径趋于无穷时它与该函数本身之差趋于零．

对加权空间的逆嵌入定理是对通常函数空间的正和逆嵌入定理的推广，并且对如从区域中一点到区域边界的距离的某个幂的权的情况已经作了深入的研究．

对加权空间的嵌入定理首先用于退化椭圆型方程理论；由此可以给出边值问题的精确的公式表示，且得到（依赖于退化程度和在其上未提出限制的那部分边界）对几个边值问题可解性的必要充分条件（用边界值性质来表示）；在证明相应的加权空间中边界问题解的存在与唯一性中，以及在建立当边值变化时解在能量积分意义下的稳定性中，它们都起着重要作用．如果区域是无界的，加权空间也应用于一致椭圆型方程理论．

在解决扩张函数（或函数系）从一流形到全空间使在该流形的补上无穷可微的最佳扩张问题中，加权空间的嵌入定理已找到直接的应用．这里，最佳扩张是在点趋于给定流形时导数的增长阶最小的意义下理解的．对充分光滑的流形，在流形上函数的整体光滑程度确定了作为扩张结果所得函数的最大可能的整体光滑程度；因此，从某个确定的阶数起，扩张函数的导数仅在带有某一权时才有有限范数，即属于相应的加权空间．

**参考文献**

[1] Никольский, С. М., 《Успехи матем. наук》, 16 (1961), 5, 63 – 114.

[2] Кудрявцев, Л. Д., Никольский, С. М., в сб., Некоторые проблемы математики и механики, Новосибирск, 1961, 87 – 109.

[3] Кудрявцев, Л. Д., 《Тр. Матем. ин-та АН СССР》, 55 (1959), 1 – 181.

[4] Теория вложений классов дифференцируемых функций многих переменных, в. сб.: Дифференциальные уравнения с частными производными, М., 1970. 38 – 63 (英译本: Kudryavtsev, L. D. and Nikol'skiĭ, S. M., Spaces of differentiable functions of several variables and imbedding theorems, in S. M. Nikol'skiĭ (ed.), Analysis, Ⅲ, Encycl. of Math. Sciences, Vol. 26, Springer, 1990, 1 – 140).

Л. Д. Кудряцев 撰　葛显良 译　鲁世杰 校

**Weil-Châtelet 群 [Weil-Châtelet group; Вейля-Шатле группа]**

Abel 簇上主齐性空间(principal homogeneous space)的群．A. Weil（[1]）证明了，而且 F. Châtelet 也对一种特殊的情形证明了对于域 $k$ 上任意的 Abel 簇 $A$，定义在 $k$ 上的 $A$ 上主齐性空间的集合 $\mathrm{WC}(A,k)$ 具有群的结构．群 $\mathrm{WC}(A,k)$ 同构于第一 **Galois 上同调**(Galois cohomology)群 $H^1(k,A)$．群 $\mathrm{WC}(A,k)$ 总是周期的，此外，如果 $k=\mathbf{Q}$，则它含有任意阶的元素（[4]，[5]）．根据 Lang 定理，当 $k$ 是有限域时 $\mathrm{WC}(A,k)=0$．对于任何元素 $D\in\mathrm{WC}(A,k)$ 可以定义指数 $I=\mathrm{ind}_k(D)$ 为扩张 $K/k$ 的最小次数使得存在 $D$ 的 $K$ 有理点．如果 $\dim A=1$ 且 $k$ 是常数的代数闭域上的代数函数域或是局部域，则 $I$ 等于 $D$ 在群 $\mathrm{WC}(A,k)$ 内的阶（[6]，[10]）．在一般的情形下这些数并不相等，但 $\mathrm{ord}(D)$ 总是 $I$ 的因子（[7]）．对局部域 $k$，群 $\mathrm{WC}(A,k)$ 已被计算（见[6]，[8]，[9]）．

如果 $k$ 是整体域，群 $\mathrm{WC}(A,k)$ 的计算是以约化同态(reduction homomorphisms)

$$\varphi_v:\ \mathrm{WC}(A,k)\rightarrow\mathrm{WC}(A,k_v)$$

为基础的，这里 $v$ 是 $k$ 的一个赋值，$k_v$ 是 $k$ 关于 $v$ 的完全化．同态

$$\varphi=\sum\varphi_v: \mathrm{WC}(A, k) \to \sum_v \mathrm{WC}(A, k_v)$$

的核 Ш$(A)$ 是有名的 Abel 簇 $A$ 的 Tate-Шафаревич 群，仅当 $k$ 是常数的代数闭域上单变量代数函数域时才被计算出([5]，[8]，[11])．在这种情形下 $\varphi$ 的余核也被描述了(精确到 $p$ 分量，$p$ 是 $k$ 的特征数)．这些计算的结果被用在椭圆曲面理论里．当 $k$ 是代数数域时，群 Ш$(A)$ 的结构被研究得很少．

**参考文献**


[1] Weil, A., On algebraic groups and homogeneous spaces, *Amer. J. Math.*, 77 (1955), 493 – 512.

[2] Башмаков, М. И., 《Успехи матем. наук》, 27 (1972), 6, 25 – 66.

[3] Cassels, J., Diophantine equations with special reference to elliptic curves, *J. London Math. Soc.*, 41 (1966), 193 – 291.

[4] Шафаревич, И. Р., 《Докл. АН СССР》, 114 (1957), 2, 267 – 270.

[5] Шафаревич, И. Р., 《Докл. АН СССР》, 114 (1957), 4, 714 – 716.

[6] Шафаревич, И. Р., 《Труды Матем. ин-та АН СССР》, 64 (1961), 316 – 346.

[7] Lang, S. and Tate, J., Principal homogeneous spaces over abelian varieties, *Amer. J. Math.*, 80 (1958), 659 – 684.

[8] Ogg, A. P., Cohomology of Abelian varieties over function fields, *Ann. of Math.* (2), 76 (1962), 2, 185 – 212.

[9] Tate, J., WC-groups over p-adic fields, in Sem. Bourbaki, Vol. Exp. 156, Secr. Math. Univ. Paris, 1957.

[10] Lichtenbaum, S., The period-index problem for elliptic curves, *Amer. J. Math.*, 90 (1968), 4, 1209 – 1223.

[11] Raynand, M., Characteristique de Euler-Poincaré d'un faisceau et cohomologie des variétés abéliennes, in Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas, North-Holland, 1968, 12 – 30.


И. В. Долгачев 撰

【补注】 数域上某些椭圆曲线的 Tate-Шафаревич 群最近已被计算([A1]，[A2]，[A5])．关于 Weil-Châtelet 群的 $p$ 分量的一些新结果也已经得到([A3])．

**参考文献**


[A1] Kolyvagin, V. A., Finiteness of $E(\mathbf{Q})$ and Ш$(E/\mathbf{Q})$ for a class of Weil curves, *Math. USSR Izv.*, 32 (1989), 523 – 541. (译自俄文).

[A2] Kolyvagin, V. A., On the structure of Shafarevich-Tate groups, in S. Block, et al. (ed.) Algebraic Geometry, Lecture notes in math., Vol. 1479, Springer, 1991, 94 – 121.

[A3] Milne, J., Arithmetic duality theorems, Acad. Press, 1986.

[A4] Silverman, J. H., The arithmetic of elliptic curves, Springer, 1986.

[A5] Rubin, K., Tate-Shafarevich groups and $L$-functions of elliptic curves with complex multiplication, *Invent. Math.*, 89 (1987), 527 – 560.

[A6] Kolyvagin, V. A., Euler systems, in P. Cartier, et al. (ed.) Grothendieck Festschrift, Vol. II, Birkhäuser, 1990, 435 – 484.

[A7] Rubin, K., The work of Kolyvagin on the arithmetic of elliptic curves, in W. P. Barth, et al. (ed.) Arithmetic of Complex Manifolds, Lecture notes in math., Vol. 1399, Springer, 1989, 128 – 136


陈志杰 译

**Weil 上同调 [Weil cohomology; Вейля когомологии]**

系数在特征数 0 的域里的代数簇的上同调，它具有为得到固定点个数的 **Lefschetz 公式** (Lefschetz formula) 所需要的形式性质．这样的理论的必要性是 A. Weil 指出的([1])，他证明了有限域上簇的 $\zeta$ 函数 (zeta-function) 和 $L$ 函数的有理性可从 Lefschetz 公式导出，而且关于 $\zeta$ 函数的其余假设可以自然地表示成上同调的术语．设簇 $X$ 是固定的代数闭域 $k$ 上的光滑连通射影概形，$K$ 是特征数 0 的域．则系数域 $K$ 的 Weil 上同调 (Weil cohomology) 是从簇的范畴到有限维分次反交换 $K$ 代数的范畴里的反变函子 $X \to H^*(X)$，它满足下列条件:

1) 当 $n=\dim X$ 时，$H^{2n}(X)$ 同构于 $K$，并且由 $H^*(X)$ 内乘法定义的映射

$$H^i(X)\times H^{2n-i}(X) \to H^{2n}(X),$$

对所有的 $i$ 都是非退化的;

2) $H^*(X)\otimes_K H^*(Y) \cong H^*(X\times Y)$ (Künneth 公式 (Künneth formula));

3) 闭链的映射．存在从 $X$ 内余维数 $p$ 的代数闭链的群 $C^p(X)$ 到 $H^{2p}(X)$ 内的函子同态 $\gamma_X$，它把闭链的直积映到张量积并且在下述意义下非平凡：对于点 $P$，$\gamma_P$ 成为 $\mathbf{Z}$ 到 $K$ 内的典范嵌入．数

$$b_i(X)=\dim_K H^i(X)$$

称为簇 $X$ 的第 $i$ 个 Betti 数 ($i$-th Betti number of the variety $X$)．

例．当 $k=\mathbf{C}$ 时，系数在 $\mathbf{C}$ 内的复流形的经典上同调是一种 Weil 上同调．如果 $l$ 是不等于域 $k$ 特征数的素数，则艾达尔 $l$ 进上同调

$$X \to [\varprojlim_{\nu} H^*_{et}(X, \mathbf{Z}/l^\nu\mathbf{Z})]\otimes_{\mathbf{Z}_l}\mathbf{Q}_l$$

是系数在域 $\mathbf{Q}_l$ 内的一种 Weil 上同调．

对 Weil 上同调，以下 Lefschetz 公式 (Lefschetz

formula）成立：

$$\langle u \cdot \Delta \rangle = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \operatorname{Tr}(u_i).$$

在上述公式中 $\langle u \cdot \Delta \rangle$ 是态射 $u: X \to X$ 的图 $\Gamma$ 与对角线 $\Delta \subset X \times X$ 在 $X \times X$ 内的相交数，它也可理解为自同态 $u$ 的固定点个数，而 $\operatorname{Tr}(u_i)$ 是 $u$ 在 $H^i(X)$ 内诱导自同态 $u_i$ 的迹．此外，这个公式对于对应（correspondences），即元素 $u \in H^{2n}(X \times X)$，也正确．

参考文献


[1] Weil, A., Numbers of solutions of equations in finite fields, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55 (1949), 497－508.

[2] Kleiman, S. L., Algebraic cycles and the Weil conjectures, in Dix Exposés sur la Cohomolegie des Schémas. North-Holland, 1968, 359－386.


В. И. Данилов 撰

【补注】

参考文献


[A1] Grothendieck, A., The cohomology theory of abstract algebraic varieties, in J. A. Todd (ed.) Proc. int. Congr. Mathematicians (Edinburgh, 1958), Cambridge Univ. Press, 1960, 103－118.

[A2] Grothendieck, A., Bucur, I., Honzel, C., Illusie, L., Jouanolou, J.-P. and Serre, J.-P., Séminare du Géométrie Algébrique-5, Lecture notes in math., 589, Springer, 1977.

[A3] Milne, J. S., Étale cohomology, Princeton Univ. Press, 1980.

[A4] Freitag, E. and Kiehl, R., Étale cohomology and the Weil conjecture, Springer, 1988.

[A5] Hartshorne, R., Algebraic geometry, Springer, 1977.


陈志杰 译

## Weil 区域 [Weil domain; Вейля область]

一个解析多面体（analytic polyhedron）的特殊情形．$n$ 维空间 $\mathbf{C}^n$ 中的一个有界区域 $D$ 称为一 Weil 区域（Weil domain），如果存在 $N \geqslant n$ 个函数 $f_i(z)$ $(i=1, \cdots, N)$ 在闭包 $\bar{D}$ 的一固定邻域 $U(\bar{D})$ 是全纯的，使得

1) $D = \{z: |f_i(z)| < 1, \ i = 1, \cdots, N, \ z \in U(\bar{D})\}$；

2) Weil 区域 $D$ 的面（faces of the Weil domain $D$），即集合

$$\sigma_i = \{z \in D: |f_i(z)| = 1, |f_j(z)| \leqslant 1, j \neq i\}$$

的维数是 $2n-1$；

3) Weil 区域 $D$ 的边（edges of the Weil domain $D$），即任何 $k(2 \leqslant k \leqslant n)$ 个不同面的交，维数 $\leqslant 2n-k$．

－Weil 区域的所有 $n$ 维边的全体称为区域的骨架（skeleton of the domain）．Weil 区域有 **Bergman-Weil 表示**（Bergman-Weil representation）．这些区域以 A. Weil（[1]）命名，他得到这些区域的首要结果．

参考文献


[1] Weil, A., L'intégrale de Cauchy et les fonctions de plusiers variables, *Math Ann.*, 111 (1935), 178－182.

[2] Шабат, Б. В., Введение в комплексный анализ, ч. 1－2, 2 изд., М., 1976.

[3] Вхадимиров, В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964（英译本：Vladimirov, V. S., Methods of the theory of functions of several complex variables, M. I. T., 1966）.


М. Шиpинбеков 撰

【补注】

参考文献


[A1] Фукс, Б. А., Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных, М., 1962（英译本：Fuks, B. A., Introduction to the theory of analytic functions of several complex variables, Amer. Math. Soc., 1963）.

[A2] Henkin, G. M. [G. M. Khenkin] and Leiterer, J., Theory of functions on complex manifolds, Birkhäuser, 1984.


钟同德 译

## Weingarten 导数公式 [Weingarten derivational formulas; Вейнгартена деривационные формулы]

用一个曲面的位置向量的一阶偏导数来表示这个曲面的单位法向量的导数的展开的公式．设 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ 为曲面的位置向量，$\mathbf{n}$ 为单位法向量，$E, F, G, L, M, N$ 分别表示曲面的第一和第二基本形式的系数；于是 Weingarten 导数公式取下列形式：

$$\mathbf{n}_u = \frac{FM-GL}{EG-F^2}\mathbf{r}_u + \frac{FL-EM}{EG-F^2}\mathbf{r}_v,$$

$$\mathbf{n}_v = \frac{FN-GM}{EG-F^2}\mathbf{r}_u + \frac{FM-EN}{EG-F^2}\mathbf{r}_v.$$

这两个公式是 J. Weingarten 在 1861 年建立的．

参考文献


[1] Рашевский, П. К., Курс дифференциальной геометрии, 4 изд., М., 1956.


А. Б. Иванов 撰

【补注】

参考文献


[A1] Blaschke, W. and Leichtweiss, K., Elementare Differential-geometrie, Springer, 1973.

[A2] Hicks, N. J., Notes on differential geometry, v. Nostrand, 1965.


沈纯理 译

**Weingarten 曲面** [**Weingarten surface**; **Вейнгартена поверхность**]

一个曲面，其平均曲率（mean curvature）和 Gauss 曲率（Gaussian curvature）成函数关系．一个曲面 $S$ 为 Weingarten 曲面的必要充分条件是它的两叶焦集重叠在一个旋转曲面上，而且曲面 $S$ 的曲率线的法线的回归棱（尖棱）重叠在子午线上．旋转曲面、常平均曲率和常 Gauss 曲率曲面都是 Weingarten 曲面的例子．J. Weingarten 在[1]，[2]中导入了寻找所有与给定旋转曲面等距的曲面的问题．这一问题可以化为寻找这个类中所有的 Weingarten 曲面．

**参考文献**


[1] Weingarten, J., Ueber eine Klasse auf einander abwickelbarer Flächen, *J. Reine Angew. Math.*, **59** (1861), 382 – 393.

[2] Weingarten, J., Über die Flächen, derer Normalen eine gegebene Fläche berühren, **62** (1863), 61 – 63.

[3] Шуликовский, В. И., Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении, М., 1963.


А. Б. Иванов 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Struik, D. J., Lectures on classical differential geometry, Addison-Wesley, 1950.


沈纯理 译

**良基关系** [**well-founded relation**; **убедительное отношение**]，良基偏序（well-founded partial order）

【补注】 集合 $A$ 上的（偏序）关系称为良基的（well-founded），或递归的（recursive），如果 $A$ 的每个非空子集有相对于这个关系的最小元．于是，如果集合 $A$ 上的全序（参见**全序集**）是良基的，则 $A$ 是**良序集**（well-ordered set）．

一个 $A$ 上的关系 $R \subset A \times A$ 是良基的，当且仅当对任何集合 $B$ 和函数 $g: \mathscr{P}(B) \to B$ 都存在唯一的函数 $f: A \to B$，使得下列图交换（见[A1]）：

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ r\downarrow & & \downarrow g \\ \mathscr{P}(A) & \xrightarrow[\mathscr{P}(f)]{} & \mathscr{P}(B) \end{array}$$

这里，$\mathscr{P}(A)$ 是 $A$ 的所有子集的集合，对于 $A' \in \mathscr{P}(A)$，$\mathscr{P}(f)(A') = \{f(a'): a' \in A'\}$ 而且 $r(a) = \{a': (a, a') \in R\}$．在这种形式下，良基性在任何初等拓扑斯上可定义．

**参考文献**


[A1] Osius, G., Categorical set theory: a characterization of the category of sets, *J. Pure Appl. Algebra*, **4** (1974), 79 – 119.

[A2] Odifreddi, P., Classical recursion theory, North-Holland, 1989.

[A3] Goldblatt, R., Topoi. The categorical analysis of logic, North-Holland, 1984, 318ff.


何青 译 罗里波 校

**良序集** [**well-ordered set**; **вполне упорядоченное множество**]

具有二元关系 $\leqslant$ 并且满足下列条件的一个集合 $P$：

1) 对任意 $x, y \in P$，或 $x \leqslant y$，或 $y \leqslant x$；

2) 如果 $x \leqslant y$ 并且 $y \leqslant x$，那么 $x = y$；

3) 如果 $x \leqslant y$ 并且 $y \leqslant z$，那么 $x \leqslant z$；

4) 在任意非空子集 $X \subset P$ 中，存在一个元素 $a$，使得对所有 $x \in X$，$a \leqslant x$．

于是，良序集是满足极小条件的**全序集**（totally ordered set）．

良序集概念是由 G. Cantor（[1]）提出的．自然数集对于自然顺序是良序集的一个实例．另一方面，实数区间 $[0, 1]$ 对于自然顺序不是一个良序集．良序集的任一子集是良序的．有限个良序集的 Descartes 积对于**字典序**（lexicographic order）是良序的．一个全序集是良序的，当且仅当它不包含反同构于自然数集的子集（见**偏序集的反同构**（anti-isomorphism of partially ordered set））．

一个良序集 $P$ 的最小元素用零（符号 0）表示．对于任意元素 $a \in P$，集合

$$[0, a) = \{x: x \in P, x < a\}$$

称为 $P$ 的一个初始段（initial segment）．对 $P$ 中任一不是最大元的元素 $a$，存在紧接着它的后继元；通常用 $a+1$ 表示它．一个良序集中没有紧接前元的元素称为极限元（limit element）．

比较定理（comparison theorem）．对任意两个良序集 $P_1$ 和 $P_2$ 有且仅有下列情形之一成立：a) $P_1$ 同构于 $P_2$；b) $P_1$ 同构于 $P_2$ 的一个初始段；或者 c) $P_2$ 同构于 $P_1$ 的一个初始段．

如果**选择公理**（axiom of choice）包含在集合论的公理中，那么可以证明，对任意非空集合可以赋予它一个序关系，使其成为一良序集（即任一非空集合是能够良序的）．这个定理（称为 **Zermelo 定理**（Zermelo theorem））事实上等价于选择公理．Zermelo 定理和比较定理构成了集合的基数之间的比较的基础．良序集的序型称为序数（ordinal number）（见**序型**（order type；**序数**（ordinal number））．

**参考文献**


[1] Cantor, G., Über unendliche, lineaire Punktmannigfaltigkeiten, *Math. Ann.*, **21** (1883), 51 – 58.

[2] Александров, П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, М.-Л., 1948.

[3] Hausdorff, F., Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig, 1914. Reprinted (incomplete) English translation: Set theory, Chelsea (1978).

[4] Bourbaki, N., Theory of sets, Elements of mathematics, Addison-Wesley, 1968(译自法文).

[5] Kuratowski, K. and Mostowski, A., Set theory, North-Holland, 1968.

Б. А. Ефимов, Т. С. Фофанова 撰

【补注】 在上面的定义中，条件 3)(序关系的传递性)事实上是多余的：它从子集 $\{x, y, z\}$ 的最小元素的存在性得到.

有时一个良序集称为全良序集(totally well-ordered set)，以反映次序关系是全序(total ordering)或线性序(linear ordering). 见**全序集**(totally ordered set).

**参考文献**

[A1] Levy, A., Basic set theory, Springer, 1979.

卢景波 译 王世强 校

**适定问题[well-posed problem; корректная-задача]**

由度量空间 $U$(其距离为 $\rho_U(\cdot,\cdot)$)中的初值 $u$ 确定度量空间 $Z$(其距离为 $\rho_Z(\cdot,\cdot)$)中的满足下列条件的解 $z = R(u)$ 的问题：a) 对任一 $u \in U$ 恒有解 $z \in Z$; b) 此解为唯一确定的; c) 此问题对于空间 $(Z, U)$ 是稳定的：即对任一 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta(\varepsilon) > 0$，使得对于 $u_1, u_2 \in U$，由不等式 $\rho_U(u_1, u_2) \leqslant \delta(\varepsilon)$，必可得到 $\rho_Z(z_1, z_2) \leqslant \varepsilon$，这里 $z_1 = R(u_1)$, $z_2 = R(u_2)$.

若一个问题不满足关于适定性的以上三条件之一，就称为**不适定问题**(ill-posed problem).

【补注】 "适定"(英文也用 properly posed 或 correctly set)一词是法国数学家 J. Hadamard 在 20 世纪初给出来的([A1]). 他特别强调解对数据的连续依赖性(continuous dependence of solutions on the data)(即性质 c). 实际问题(例如在流体力学和地震学中)导致**不适定问题**(ill-posed problem)也非罕见.

**参考文献**

[A1] Hadamard, J., Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations, Dover, reprint, 1952.

[A2] Garabedian, P. R., Partial differential equations, Wiley, 1964.

齐民友 译

**Weyl 代数[Weyl algebra; Вейля алгебра]**

【补注】 设 $K$ 是一个交换域，$n$ 是一个正整数，系数在多项式环 $K[x] = K[x_1, \cdots, x_n]$ 内的微分算子环记为 $A_n(K)$，称为 $K$ 上 $n$ 元变量的 Weyl 代数. 将 $K[x]$ 等同于零阶微分算子子环，则 $A_n(K)$ 由 $K[x]$ 和导子算子 $\{\partial_i = \partial/\partial x_i\}_1^n$ 生成. 对每个 $i$，换位子 $[\partial_i, x_i] = 1$. 这样 $A_n(K)$ 是非交换环. 每个元素唯一表示为

$$P(x,\partial) = \sum_{\nu=0}^{m} p_\alpha(x)\partial^\alpha,$$

这里 $\partial^\alpha$ 是导子算子的单项式. 使得多项式系数 $p_\alpha(x)$ 非零的最大整数 $m(|\alpha| = m)$ 是微分算子 $P$ 的次数. 由次数得到一个滤过(见**滤过模**(filtered module))和结合分次环(见**分次模**(graded module))

$$\mathrm{gr}(A_n(K)) = \bigoplus_{m \geqslant 0} \mathrm{gr}_m(A_n(K)),$$

这里 $\mathrm{gr}_m(A_n(K))$ 是 $m$ 次算子集，模去次数不超过 $m-1$ 的部分. 易知，这个结合分次环同构于 $K$ 上 $2n$ 个变元的多项式环，$\{\sigma_0(x.), \sigma_1(\partial.)\}$ 是生成元.

**环论性质**. 这里仅讨论域 $K$ 特征为零的情况. 如果 char $(K) > 0$，以下结果不再有效. 有关 char $(K) > 0$ 的资料见[A30]. 从现在起，char $(K) = 0$，则 $A_n(K)$ 是单环，而由 $\mathrm{gr}(A_n(K))$ 是 Noether 和交换的，推出 $A_n(K)$ 同时是左和右 Noether 的. 据[A42]，$A_n(K)$ 的每个左理想由两个元素生成. $A_n(K)$ 的**整体同调维数**(homological dimension)等于 $n$. 这一结果在[A37]中被证明. $n=1$ 的情形在[A35]中已先建立. 另一个重要结果是特征理想的对合性(involutivity).

为了说明这一点，考虑有限生成左 $A_n(K)$ 模 $M$. $M$ 的好滤过(good filtration)由 $K[x]$ 子模的升链 $\{M_\nu\}$ 组成，对所有 $i, \nu, \partial_i M_\nu \subset M_{\nu+1}$，并且相伴分次模 $\oplus M_\nu / M_{\nu-1}$ 在 $\mathrm{gr}(A_n(K))$ 上有限生成. 一个模可以带有不同的好滤过，但对任何好滤过，存在 $\mathrm{gr}(A_n(K))$ 的唯一的分次理想，作为 $\oplus M_\nu / M_{\nu-1}$ 的零化子理想的根. 记为 $J(M)$，称为 $M$ 的特征理想(characteristic ideal). $\mathrm{gr}(A_n(K))$ 有一个 Poisson 积，使得 $\{\sigma_1(\partial_\nu), \sigma_0(x_i)\} = \Delta_{i\nu}$. 对每个有限生成左 $A_n(K)$ 模，对合性定理(involutivity theorem)断言

$$\{J(M), J(M)\} \subset J(M) \qquad \text{(A1)}$$

在 $K = \mathbf{C}$ 的特殊情形，零点定理(nullstellen satz)(见 **Hilbert 定理**(Hilbert theorem))将 $J(M)$ 等同于辛余切空间 $T^*(\mathbf{C}^n)$ 的一个代数集，记为 Char$(M)$，称为 $M$ 的特征簇(亦见**特征流形**(characteristic manifold)). (A1)意味着 Char$(M)$ 在辛余切空间中是对合的.

当 $M$ 是非零 $A_n(K)$ 模时，对合性蕴涵着 $\mathrm{gr}(A_n(K))/J(M)$ 的维数至少为 $n$. 利用 $A_n(K)$ 是正则 Auslander 环这一事实，可以来证明 gl.dim$(A_n(K)) = n$. 这方面的概况见[A8]. [A40]用微局部分析证明了结论([A1]). 代数证明的给出较

迟，见[A14]．[A26]利用特征理想证明了，若 $W \subset \mathrm{gr}(A_n(K))$ 是由齐次元素形成的乘集．$S$ 是 $A_n(K)$ 的乘集，其主象征属于 $W$，则 $S$ 满足双侧 Ore 条件．这样，泛 $S$ 可逆环是双侧 Ore 分式环 $S^{-1}A_n(K)$．特别当 $S$ 是非零元的集合时，导出的除环 $D_n(K)$ 关联于某个包络代数关于本原理想的除环．

**完全模**．等式 $\mathrm{gl.dim}(A_n(K)) = n$ 蕴涵它的 Krull 维数至多为 $n$．实际上在上述发现之前等式 $\mathrm{Kr.dim}(A_n(K)) = n$ 已在[A15]中被证明．在证明中使用的迹公式表明，每个非零 $A_1(K)$ 模是 $K$ 上无限维向量空间．特别重要的是满足 $\dim(\mathrm{gr}(K)/J(M)) = n$ 的有限生成左或右 $A_n(K)$ 模 $M$ 的集合．这样的模称为完整的（holonomic），具有有限性条件，即每个完全模是 Artin 的，但其逆不真，因为[A43]给出了循环模是单模的例子 $M = A_n(K)/A_n(K)P$．这里 $n$ 是任何正整数，$J(M)$ 是一个主理想．这样，当 $n > 1$ 时，$M$ 是非完全的．

下面给出一类重要的完全模：若 $P(x) \in K[x]$，则有理函数的子环 $K[x, P^{-1}]$ 是完全 $A_n(K)$ 模．这被 И．Н．Бернштейн 在[A3]，[A4]中证明，其中有一个由等式表示的函数方程：

$$b(s)P(x)^s = \sum s^{\nu} Q_{\nu}(x, \partial)(P(x)^{s+1}).\quad (A2)$$

这里 $b(s)$ 是一个多项式，具有尽可能小的次数而最高项的系数为 1，称为 $P$ 的 Бернштейн - 佐藤多项式（Bernstein-Sato polynomial）．$K = \mathbf{C}$ 的情形特别有趣．[A27]证明了 $b(s)$ 的根由严格负有理数组成．亦见[A6]．$b(s)$ 的根与映射 $P: X \to \mathbf{C}^*$ 在 $X = \mathbf{C}^n \setminus P^{-1}(0)$ 中的单值作用有关，这里假定零是 $P$ 仅有的临界值．[A31]证明了并 $\{e^{-2\pi i\alpha}: \alpha \in b^{-1}(0)\}$ 等于 $\mathbf{C}^n \setminus P$ 在每个维数下的单值本征值的并．Бернштейн 函数方程给出了广义函数的亚纯延拓．存在亚纯 $\mathfrak{D}\mathfrak{b}(\mathbf{C}^n)$ 值函数 $\mu_s = \int |P|^{2s}$，其极点含于集合 $\{\bigcup(\alpha - v): \alpha \in b^{-1}(0), v \in \mathbf{N}\}$ 内．$b$ 函数的根给出确定极点集一个有效方法，即对 $b(s)$ 的任何根 $\alpha$，存在某个 $v \in \mathbf{N}$，使得 $\alpha - v$ 是 $\mu_s$ 的极点．这已在[A1]中证明．

**基本解**．设 $P(D)$ 是常系数微分算子．利用 Fourier 变换，并用 $\mathbf{R}^n$ 代替 $\mathbf{C}^n$ 存在，$\mathfrak{D}\mathfrak{b}(\mathbf{R}^n)$ 值函数 $\mu_s$，在检验型 $\varphi(x)$ 上的作用为

$$<\mu_s, \varphi> = \int_{\mathbf{R}^n} P(\xi)^{-1}|P(\xi)|^{2s}\hat{\varphi}\, d\xi,$$

取 $s = 0$，常数项 $\mu_0$ 给出 $P(D)$ 的一个**基本解**（fundamental solution）．利用正则完全模的结果，可以证明当多项式是齐次时，$\mu_0$ 的解析波前集等于它的 $C^{\infty}$ 波前集．关于 Fourier 变换和带多项式系数的 $D$ 模的进一步结果见[A32]（亦见 $D$ 模（$D$-module））．

Weyl 代数是非奇异代数簇上微分算子环的特殊情形．在详细研究 Weyl 代数之前建立的这一结构见[A36]和[A20]．

但 $A_n(K)$ 在代数 $D$ 模理论中是基本的．因为 $\mathbf{C}$ 上任何拟射影流形 $X$ 在 **Zariski 拓扑**（Zariski topology）中被仿射流形 $V$ 给出的图所覆盖，而 $V$ 存在一个到 $\mathbf{C}^n \setminus T$ 上的非分歧覆盖映射，这里 $n = d_X$，$T \subset \mathbf{C}^n$ 是一个代数超曲面．$V$ 上正则函数的仿射代数 $\mathcal{O}(V)$ 上的微分算子环等于 $\mathcal{O}(V) \otimes_{\mathbf{C}[x]} A_n(\mathbf{C})$．关于代数 $D$ 模的理论见[A9]．

**Fuchs 滤过**．如上，考虑 $A_n(K)$ 的由微分算子通常的次数所定义的滤过．Weyl 代数可以被赋予其他滤过，它们不再是肯定的．令 $X = \mathbf{C}^{n+1}$，$x_1, \cdots, x_n$，$t$ 为坐标，取超平面 $\{t = 0\}$ 和 $A_{n+1}(\mathbf{C})$ 的滤过，使得 $\deg(t) = -1$，$\deg(\partial/\partial t) = 1$，而对每个 $v$，$x_v$ 和 $\partial/\partial x_v$ 的次数为零．相伴分次环是 $A_{n+1}(\mathbf{C})$．Fuchs 滤环的相伴 Rees 环是 Noether 的，它的整体同调维数是 $(2n+1)$．这个环本身有意义，并出现在更大量的环类中（[A41]）．Fuchs 滤过被改进用于研究准消没闭链（vanishing cycle）．若 $M$ 是完全 $A_{n+1}(\mathbf{C})$ 模，则关于 Fuchs 滤过存在唯一好滤过 $V(M)$，使得 $\oplus V_k(M)/V_{k-1}(M)$ 上的 Euler 映射的极小多项式在格 $\{0 \leqslant \mathrm{Re}(\lambda) < 1\}$ 中有根．这称为柏原 - Malgrange 滤过（Kashiwara-Malgrange filtration）．每个齐次商 $V_k(M)/V_{k-1}(M)$ 是变量为 $x$ 的 $n$ 维 Weyl 代数上的完全模．当 $M$ 是正则完全的并应用 Riemann-Hilbert 对应，可以证明 $V_0(M)/V_{-1}(M)$ 的 de Rham 复形是由 $M$ 的 de Rham 复形定义的异常层复形沿 $\{t = 0\}$ 的准闭链．进一步详情见[A16]．

还要提及 Weyl 代数的 Бернштейн 滤过（Bernstein filtration），此时 $x_v$ 和 $\partial_v$ 的次数都是 $+1$．对 $n = 1$，[A44]含有对 $K[x, y]$ 中由 $A_1(K)$ 左理想中元素的主象征生成的分次理想一个描述，利用 Бернштейн 滤过将 $K[x, y]$ 等同于 $\mathrm{gr}(A_1(K))$．

存在系数在环上的 Weyl 代数，即对任何环 $R$ 存在环 $A_n(R) = A_n(\mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}} R$．当 $R$ 非交换时可能发生新情况．[A19]的工作表明，如果 $D$ 是由分式域 $D_1(K)$ 给出的除环，则环 $A_1(D)$ 的整体维数为 2．除环上 Weyl 代数的进一步结果见[A18]．如果 $R$ 是交换 Noether 的正则 $\mathbf{Q}$ 代数，则有

$$\mathrm{gl.dim}(A_n(R)) = n + \mathrm{gl.dim}(R).$$

有关这一结果及各种扩张见[A6]和[A17]，其他类型微分算子环的整体维数亦可计算．如果 $S$ 是一个非交换 $\mathbf{Q}$ 代数，带有一个 Zariski 滤过，使得 $\mathrm{gr}(S)$ 是交换正则 Noether 环，则可构造 $A_1(S) = A_1(\mathbf{Q}) \otimes_{\mathbf{Q}} S$．$\mathrm{gl.dim}(A_1(S)) = \mathrm{gl.dim}(S) + 1$ 是否成立，

尚未解决．[A13]的工作包含一个结果，预示 $A_1(S)$ 上分次模的分次数，这里 $A_1(S)$ 上的分次环结构由 $A_1(\mathbf{Q})$ 的 Fuchs 分次结构导出．

出现 Weyl 代数的另一领域是不变量理论．[A29]证明了若 $G$ 是 $\mathbf{C}[x_1,\cdots,x_n]$ 上的有限自同构群，不含任何不同于恒等映射的伪反射，则 $\mathbf{C}[x]$ 中 $G$ 不变子环上的微分算子环等于 $G$ 不变子环 $\mathrm{pf}A_n(\mathbf{C})$．此外，$A_n(\mathbf{C})^G$ 是内射维数为 $n$ 的 Auslander-Gorenstein 环．这意味着同时作为左和右模，由环 $A_n(\mathbf{C})^G$ 给出的双模有长为 $n$ 的内射分解，并且 Auslander 条件（Auslander condition）：

$$\mathrm{Ext}_A^v(N,\mathrm{Ext}_A^k(M,A))$$

$$\text{对所有 } v<k \text{ 和 } N\subset\mathrm{Ext}_A^k(M,A) \text{ 成立，}$$

这里 $A=A_n(\mathbf{C})^G$，$M$ 是任意有限生成 $A$ 模．这一条件起先对广泛的滤环类，包括 Weyl 代数得到验证[A39]．微分算子环的与不变量理论有关的更多事实见[A30]．

**Noether 算子**．在交换代数中 Weyl 代数用来借助素根的方程描述准素理想．设 $\mathfrak{q}\subset\mathbf{C}[x_1,\cdots,x_n]$ 是准素理想（primary ideal），令 $\sqrt{\mathfrak{q}}=\mathfrak{p}$，则存在 $A_n(\mathbf{C})$ 中的有限集 $Q_1,\cdots,Q_s$，使得对每个 $v$，$Q_v(\mathfrak{q})\subset\mathfrak{p}$．反之，设 $P\in\mathbf{C}[x]$，使得对每个 $v$，$Q_v(P)\in\mathfrak{p}$，则 $P\in\mathfrak{q}$．这样 $\mathbf{C}[x]/\mathfrak{q}$ 成为 $\mathbf{C}[x]/\mathfrak{p}$ 的直和的一个子模．这一事实由 Ehrenpreis 用于由指数解上的绝对收敛积分表示齐次偏微分方程组的解的基本原理．见[A23]，其中包含 Noether 算子的结构．

**包络代数**．如果 $\mathfrak{g}$ 是一个 Heisenberg 代数（Heisenberg algebra），即带有 1 维中心 $\mathfrak{c}$ 的有限维幂零 Lie 代数，且 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=\mathfrak{c}$，则 $A_n(K)$ 是 $\mathfrak{g}$ 上包络代数的商环．因而 $A_n(K)$ 模给出 $\mathfrak{g}$ 的表示，当 $K$ 的特征为零时，表示是无限维的．这方面见[A11]．半单 Lie 代数的包络代数对本原理想的商环导致更为复杂的结果．Weyl 代数 $A_1(K)$ 出现在 $U(\mathfrak{g})/(Q-\lambda)$ 的研究中，这里 $\mathfrak{g}=(2,\ \mathbf{C})$，$Q$ 是 Casimir 算子，$\lambda\in\mathbf{C}$．这个环是 $A_1(\mathbf{C})$ 的子环．见[A38]，[A39]．[A12]提出涉及[A11]的半单元素的几个问题．在某些情况下的肯定答案及与多变量 Weyl 代数有关的问题见[A24]．最后要提到[A2]的基本结果，这对于应用代数 $D$ 模理论到 Lie 代数的表示理论是关键性的．亦见[A25]．这就引起了对 Weyl 代数和相关的环如[A10]中确定的射影空间 $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ 上的微分算子环的特殊的兴趣．对于与 Lie 代数的表示理论有关的 $D$ 模理论，亦见[A21]．

**参考文献**


[A1] Barlet, D., Monodromie et pôtes de $\int|f|^{2\lambda}$, *Bull. Soc. Math. France*, **114** (1986), 247 – 269.

[A2] Beilinson, A. A. and Bernstein, J., Localisation des $\mathfrak{g}$-modules, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **292** (1981), 15 – 18.

[A3] Bernstein, I. N., Modules over a ring of differential operators. Study of the fundamental solutions to equations with constant coefficients, *Funct. Anal. Appl.*, **5** (1971), 2, 89 – 101. (*Funkts. Anal. i Prilozh.*, **5** (1971), 2, 1 – 16)

[A4] Bernstein, I. N., The analytic continuation of generalized functions with respect to a parameter, *Funct. Anal. Appl.*, **6** (1972), 4, 273 – 285. (*Funkts. Anal. i Prilozh.*, **6** (1972), 4, 3 – 25).

[A5] Bien, F., $D$-modules and spherical representations of symmetric spaces, Princeton Univ. Press, 1986.

[A6] Björk, J.-E., Rings of differential operators, North-Holland, 1979.

[A7] Björk, J.-E., The global homological dimension of some algebras of differential operators, *Invent. Math.*, **17** (1972), 67 – 78.

[A8] Björk, J.-E., Non-commutative Noetherian rings and their use in homological algebra, *J. Pure Appl. Algebra*, **38** (1985), 111 – 119.

[A9] Borel, A., et al., Algebraic $D$-modules, Acad. Press, 1987.

[A10A] Borho, W. and Brylinski, J.-L., Differential operators on homogeneous spaces, I, *Invent. Math.*, **69** (1982), 437 – 476.

[A10B] Borho, W. and Brylinski, J.-L., Differential operators on homogeneous spaces II, *Invent. Math.*, **80** (1985), 1 – 68.

[A11] Dixmier, J., Algèbres enveloppantes, Gauthier-Villars, 1974.

[A12] Dixmier, J., Sur les algèbres de Weyl II, *Bull. Sci. Math.*, **94** (1970), 289 – 301.

[A13] Ekström, E. K., Homological properties of some Weyl algebra extensions, *Compositio Math.*, **75** (1989), 231 – 246.

[A14] Gabber, O., The integrability of the characteristic variety, *Amer. J. Math.*, **103** (1981), 445 – 468.

[A15] Gabriel, P. and Rentschler, R., Sur la dimension des anneaux et ensembles ordonnes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **265** (1967), A712 – A715.

[A16] Ginsburg, V., Characteristic varieties and vanishing cycles, *Inv. Math.*, **84** (1986), 327 – 403.

[A17] Goodearl, K. R. and Warfield, R. B., Jr., Krull dimension of differential operator rings, *Proc. London Math. Soc.*, **45** (1982), 49 – 70.

[A18] Goodearl, K. R., Hodges, T. J. and Lenagan, T. H., Krull and global dimensions of Weyl algebras over division rings, *J. Algebra*, **91** (1984), 334 – 359.

[A19] Hart, R., A note on tensor products of algebras,

*J. Algebra*, **21** (1972), 422 – 427.

[A20] Hochschild, G., Kostant, B. and Rosenber, B., Differential forms on regular affine algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **102** (1962), 383 – 408.

[A21] Hotta, R. and Kashiwara, M., The invariant system on a semi-simple Lie algebra, *Inv. Math.*, **75** (1984), 327 – 358.

[A22] Hörmander, L., The analysis of linear partial differential operators, 1, Springer, 1983.

[A23] Hörmander, L., An introduction to complex analysis in several variables, North-Holland, 1990.

[A24] Joseph, A., The Weyl algebra-semisimple and nilpotent elements, *Amer. J. Math.*, **97** (1975), 597 – 615.

[A25] Joseph, A., Primitive ideals in enveloping algebras, in Proc. Internat. Congress Mathem. (Warsaw, 1983), Vol. 1, PWN & North-Holland, 1984, 403 – 414.

[A26] Kashiwara, M., A study of over-determined systems, Kyoto University, 1970. Thesis.

[A27] Kashiwara, M., $b$-functions and holonomic systems, *Inv. Math.*, **38** (1975), 121 – 135.

[A28] Kashiwara, M., Regular holonomic $D$-modules and distributions on complex manifolds, in T. Suwa and P. Wagreich (eds), Complex Analytic singularities, Adv. Studies in Math., Vol. 8, Kinokuriya & North-Holland, 1987, 199 – 206.

[A29] Levasseur, T., Anneaux d'operateurs differentiels, in M. P. Malliavin (ed.), Sem. P. Dubreil et M. P. Malliavin, Licture notes in math., Vol. 867, Springer, 157 – 173.

[A30] Levasseur, T. and Stafford, J. T., Rings of differential operators on classical rings of invariants, *Memoirs Amer. Math. Soc.*, **41** (1989).

[A31] Malgrange, B., Polynome de Bernstein-Sato et cohomologie evanescente, *Asterisque*, 101 – 102 (1983), 243 – 267.

[A32] Malgrange, B., Equations différentiels à coefficients polynomiaux, Birkhäuser, 1991.

[A33] McConnel, J. C. and Robson, J. C., Noncommutative Noetherian rings, Wiley, 1987.

[A34] Revoy, P., Algèbres de Weyl en caracteristique $p$, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **276** (1973), 225 – 228.

[A35] Rinehart, G. S., Note on the global dimension of a certain ring, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **13** (1963), 195 – 222.

[A36] Rinehart, G. S., Differential forms on general commutative algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **103** (1963), 195 – 222.

[A37] Roos, J.-E., Determination de la dimension homologique globale des algèbres de Weyl, C. R. Acad. Sci. Paris 274 (1972), A23 – A26.

[A38] Roos, J.-E., Properties homologiques des quotients primitifs des algèbres enveloppantes des algèbres de Lie semisimples, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **276** (1973), 351 – 354.

[A39] Roos, J.-E., Complements, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **276** (1973), 447 – 450.

[A40] Sato, M., Kashiwara, M. and Kawai, T., Hyperfunctions and pseudo-differential equations, in H. Komatsu (ed), Hyperfunctions and Pseudo-Differential Equations, Lecture notes in math., Vol. 287, Springer, 1973, 265 – 529.

[A41] Smith, S. P., Differential operators in commutative algebras, in Lecture notes in math., Vol. 1197, Springer, 1986, 165 – 177.

[A42] Stafford, J. L., Non-holonomic modules over Weyl algebras and enveloping algebras, *Inv. Math.*, **79** (1985), 619 – 638.

[A43] Stafford, J. L., Module structure over Weyl algebras, Leeds Univ. preprint (1977).

[A44] Strömbeck, P., On left ideals in $A_1$ and their associated graded ideals, *J. Algebra*, **55** (1978), 116 – 144.

[A45] Björk, J.-E., Analytic $D$-modules, Kluwer, 1993.

J.-E. Björk 撰 蔡传仁 译

**Weyl 殆周期函数 [Weyl almost-periodic functions; Вейля почти периодические функции]**

复值函数类 $W^p$，其中的函数 $f(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ 在实轴的任意有限区间上 $p$ 次幂可积，而且对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $l=l(\varepsilon,f)$ 使得 $f$ 有一个相对稠密的 $\varepsilon$ **殆周期** (almost-period) 集 $S_f^p$. 这一函数类是由 H. Weyl 定义的. Weyl 殆周期函数类 $W^p$ 是 **Степанов 殆周期函数** (Stepanov almost-periodic functions) 类的推广.

与 Weyl 殆周期函数联系在一起的度量是

$$D_{W^p}(f,g)=$$

$$=\left\{\lim_{l\to\infty}\sup_{-\infty<x<\infty}\frac{1}{2l}\int_{x-l}^{x+l}|f(t)-g(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

如果 $\varphi$ 是一个关于度量 $D_{W^p}$ 的零函数，即

$$\lim_{l\to\infty}\sup_x\frac{1}{2l}\int_{x-l}^{x+l}|\varphi(t)|^p dt=0,$$

$f$ 是一个 Степанов 殆周期函数，则

$$f+\varphi \qquad (*)$$

是 Weyl 殆周期函数. 但存在 Weyl 殆周期函数不能表成形式 (*)；参见 [3].

**参考文献**

[1] Weyl, H., Integralgleichungen und fastperiodische Funktionen, *Math. Ann.*, **97** (1927), 338 – 356.

[2] Левитан, Б. М., Почти периодические функции, М., 1953 (中译本: Б. М. 列维坦, 概周期函数, 高等教育出版社, 1956).
[3] Левитан, Б. М., Степанов, В. В., 《Докл. АН СССР》, 22(1939), 229 – 232.

Е. А. Бредихина 撰 朱学贤 译

**Weyl 联络 [Weyl connection; Вейля связность]**

**Riemann 空间** (Riemannian space) $M$ 上的一个无挠**仿射联络** (affine connection), 它是 **Levi-Civita 联络** (Levi-Civita connection) 的推广, 空间 $M$ 的度量张量 $g_{ij}$ 的**共变微分** (covariant differential) 不再为 0, 而是与 $g_{ij}$ 成比例. 若 $M$ 上的仿射联络由局部联络形式方阵给出:

$$\begin{cases}\omega^i = \Gamma^i_k(x)dx^k, \det|\Gamma^i_k| \neq 0 \\ \omega^i_j = \Gamma^i_{jk}(x)\omega^k,\end{cases} \qquad (1)$$

且 $ds^2 = g_{ij}\omega^i\omega^j$, 则它是 Weyl 联络的必要和充分条件为

$$dg_{ij} = g_{kj}\omega^k_i + g_{ik}\omega^k_j + \theta g_{ij}. \qquad (2)$$

等价地, 此条件的另一种形式是

$$Z\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle + $$
$$+\theta(Z)\langle X, Y\rangle,$$

其中 $\nabla_Z X$ 表示 $X$ 关于 $Z$ 的**共变导数** (covariant derivative), 其定义如下:

$$\omega^i(\nabla_Z X) = Z\omega^i(X) + \omega^i_k(Z)\omega^k(X).$$

关于局部正交标架场, 有 $g_{ij} = \delta_{ij}$, 下列方程成立:

$$\omega^j_i + \omega^i_j + \delta^i_j\theta = 0,$$

即任何和乐群 (holomony group) 为相似群或其子群的无挠仿射联络, 都是 $M$ 上某个 Riemann 度量的 Weyl 联络.

若在 (1) 中, $\omega^i = dx^i$, 则对 Weyl 联络, 有

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}g^{il}\left[\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}\right] +$$

$$-\frac{1}{2}g^{il}g_{jk}\theta_l + \frac{1}{2}(\delta^i_j\varphi_k + \delta^i_k\varphi_j),$$

其中 $\theta = \theta_k dx^k$. 因为

$$g_{kj}\Omega^k_i + g_{ik}\Omega^k_j + g_{ij}d\theta = 0,$$

所以下列被 H. Weyl 称为方向曲率张量 (directional cuvature tensor) 的张量

$$F_{ij,kl} = g_{im}R^m_{jkl} + \frac{1}{2}g_{ij}(\nabla_k\theta_l - \nabla_l\theta_k)$$

关于其两对指标是反对称的:

$$F_{ij,kl} + F_{ji,kl} = 0.$$

Weyl 联络是由 H. Weyl ([1]) 引入的.

**参考文献**

[1] Weyl, H., Reine Infinitesimalgeometrie, *Math. Z.*, 2 (1918), 384 – 411.
[2] Норден, А. П., Пространства аффинной связности, М.-Л., 1950.
[3] Folland, G. B., Weyl manifolds, *J. Differential Geom.*, 4 (1970), 145 – 153.

Ю. Г. Лумисте 撰 沈纯理 译

**Weyl 准则 [Weyl criterion; Вейля критерий]**

用来解决任何实数 $x_n$ 模 1 的无穷序列 $(x_n)$ 的**一致分布** (uniform distribution) 问题的基本判别法则, 亦即要确立极限

$$\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{\substack{n\leq N \\ \alpha\leq\{x_n\}<\beta}}\frac{1}{N}\right) = \beta - \alpha$$

的存在性, 此处 $0\leq\alpha<\beta\leq 1$, 且 $\{x_n\}$ 是 $x_n$ 的**分数部分** (见**分数部分** (fractional part)). 依据 Weyl 准则, 当且仅当对所有的整数 $m\neq 0$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\exp(2\pi i m x_n) = 0$$

时, 序列 $(x_n)$ 一致分布. 它是 H. Weyl 在 1916 年证明的 (见 **Weyl 法** (Weyl method)).

**参考文献**

[1] Cassels, J. W. S., An introduction to diophantine approximation, Cambridge Univ. Press, 1957.

Б. М. Бредихин 撰 朱尧辰 译 戚鸣皋 校

**Weyl 群 [Weyl group; Вейля группа]**

1) 根系 (root system) 的对称的 Weyl 群 (Weyl group of symmetries). 根据根系的实际实现, 考虑不同的 Weyl 群: 半单可分裂 Lie 代数的 Weyl 群, 对称空间的 Weyl 群, 代数群的 Weyl 群等等.

设 $G$ 是定义在代数闭域 $k$ 上的连通仿射**代数群** (algebraic group). 作为 $T$ 的用 $N_G(T)$ 的元素作共轭所诱导的 $T$ 的自同构群, $G$ 关于环面 $T\subset G$ 的 Weyl 群是商群

$$W(T, G) = N_G(T)/Z_G(T),$$

其中 $N_G(T)$ 是正规化子 (见**子集的正规化子** (norma-

lizer of a subset))，$Z_G(T)$ 是 $T$ 在 $G$ 内的**中心化子**(centralizer). 群 $W(T, G)$ 是有限的. 如果 $T_0$ 是极大环面，$W(T_0, G)$ 就称为代数群 $G$ 的 Weyl 群(Weyl group of the algebraic group). (除了相差一个同构外)这个定义不依赖于极大环面 $T_0$ 的选取. 通过 $N_G(T_0)$ 在 $G$ 的含 $T_0$ 的 **Borel 子群**(Borel subgroup)的集合 $B^{T_0}$ 上的共轭作用，诱导了 $W(T_0, G)$ 在 $B^{T_0}$ 上的单传递作用. 通过 $T$ 在 $G$ 上的共轭作用，诱导了 $T$ 在 $G$ 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 上的伴随作用. 设 $\Phi(T, G)$ 是 $\mathfrak{g}$ 关于这个作用的权分解的非零权集，这说明 $\Phi(T, G)$ 是 $\mathfrak{g}$ 关于 $T$ 的根系，见 **Lie 代数表示的权**(weight of a representation of a Lie algebra). $\Phi(T, G)$ 是环面 $T$ 的有理特征标的群 $X(T)$ 的子集，且它关于 $W(T, G)$ 在 $X(T)$ 上的作用是不变的.

设 $G$ 是**约化群**(reductive group)，$Z(G)^0$ 是它的中心的恒等元的连通分支，$T_0$ 是 $G$ 的极大环面. 向量空间

$$X(T_0/Z(G)^0)_{\mathbf{Q}} = X(T_0/Z(G)^0)\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q}$$

典范地等同于向量空间

$$X(T_0)_{\mathbf{Q}} = X(T_0)\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q}$$

的子空间. 作为 $X(T_0)_{\mathbf{Q}}$ 的子集，集合 $\Phi(T_0, G)$ 是 $X(T_0/Z(G)^0)_{\mathbf{Q}}$ 中的约化根系，且 $W(T_0, G)$ 在 $X(T_0)_{\mathbf{Q}}$ 上的自然作用定义了 $W(T_0, G)$ 与根系 $\Phi(T_0, G)$ 的 Weyl 群之间的一个同构. 于是 $W(T_0, G)$ 展示了约化根系的 Weyl 群的全部性质，例如它是由**反射**(reflection)生成的.

Tits 系的 Weyl 群是这种情形的推广(关于它的确切定义见 **Tits 系**(Tits system)).

特征零的代数闭域上有限维约化 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的 Weyl 群(Weyl group of a finite-dimensional reductive Lie algebra) $W$ 定义为它的伴随群的 Weyl 群. $W$ 在 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数 $\mathfrak{p}$ 上的伴随作用是 $W$ 的一个忠实表示. 看作 $\mathfrak{p}$ 中由反射生成的对应的线性群，群 $W$ 通常等同于这个表示的象. "Weyl 群"的概念首先由 H. Weyl 应用在复数域上的有限维半单 Lie 代数这个特殊情形([1]). 对任意的有限维可分裂半单 Lie 代数，也可以把 Weyl 群定义为它的根系的 Weyl 群. 对定义在非代数闭的域上的仿射代数群 $G$，可以定义它的相对 Weyl 群：如果 $T$ 是 $G$ 的极大 $k$ 分裂环面，看作 $T$ 的用 $N_G(T)$ 的元素作共轭所诱导的 $T$ 的自同构的群. 商群 $N_G(T)/Z_G(T)$ ($T$ 的正规化子模它在 $G$ 中的中心化子)就称为 $G$ 的相对 Weyl 群(relative Weyl group).

对称空间的 Weyl 群，见**对称空间**(symmetric space). 非紧的实连通半单代数群的 Weyl 群等同于对应的对称空间的 Weyl 群. 关于仿射 Weyl 群见**根系**(root system).

**参考文献**


[1A] Weyl, H., Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch linearen Transformationen I, *Math. Z*, **23** (1925), 271 – 309.

[1B] Weyl, H., Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch linearen Transformationen II, *Math. Z.*, **24** (1925), 328 – 395.

[2] Borel, A., Linear algebraic groups, Benjamin, 1969 (第二版: Springer, 1991).

[3] Jacobson, N., Lie algebras, Interscience, 1962

[4] Bourbaki, N., Lie groups and Lie algebras, Elements of mathematics, Hermann, 1975 (译自法文).

[5A] Borel, A. and Tits, J., Groupes réductifs, *Publ. Math. I. H. E. S.*, **27** (1965), 55 – 150.

[5B] Borel, A. and Tits, J., Complément à l'article 'Groupes réductifs', *Publ. Math. I.H.E.S.*, **41** (1972), 253 – 276.

[6] Bruhat, F. and Tits, J., Groupes algébriques simples sur un corps local, in T. A. Springer et al. (ed.): Proc. Conf. on Local Fields (Driebergen, 1966), Springer, 1966, 23 – 36.

[7] Helgason, S., Differential geometry and symmetric spaces, Acad. Press, 1962.


В. Л. Попов 撰

【补注】 仿射 Weyl 群(affine Weyl group)是仿射 **Kac-Moody 代数**(Kac-Moody algebra)的 Weyl 群. 可以对任意的 Kac-Moody 代数定义一个 Weyl 群.

作为抽象群，Weyl 群是 **Coxeter 群**(Coxeter group).

Weyl 群在表示论中起重要的作用，见**特征标公式**(character formula).

**参考文献**


[A1] Tits, J., Reductive groups over local fields, in A. Borel and W. Casselman (eds.) Automorphic Forms, Representations and L-Functions, Proc. Symp. Pure Math., Vol. 33: 1, Amer. Math. Soc., 1979, 26 – 69.

[A2] Humphreys, J. E., Reflection groups and Coxeter groups, Cambridge Univ. Press, 1991.


2) 连通紧 Lie 群 $G$ 的 Weyl 群(Weyl group of a connected compact Lie group)是商群 $W = N/T$，其中 $N$ 是 $G$ 的极大环面 $T$ 在 $G$ 中的正规化子. 这个 Weyl 群同构于 $T$ 的 Lie 代数 $\mathfrak{t}$ 的线性变换的有限群(这个同构是通过 $N$ 在 $\mathfrak{t}$ 中的伴随表示来实现的)，并且可以借助于 $G$ 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的(关于 $\mathfrak{t}$)的根系 $\Delta$ 来刻画如下：如果 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 是这个代数的单根系，它们是实向量空间 $\mathfrak{t}$ 上的线性型，该 Weyl 群是由关于超平面 $\alpha_i(x) = 0$ 的反射生成的. 于是 $W$ 是根系

$\Delta$(作为 t 中的线性群) 的 Weyl 群，$W$ 是传递地作用在 $\Delta$ 的所有房 (chamber) 的集合上 (这时它们被称为 Weyl 房 (Weyl chamber))．值得注意的是在已经研究过的所有情形，$N$ 一般说来不是 $W$ 和 $T$ 的半直积．$G$ 的 Weyl 群同构于对应的复半单代数群 $G_C$ 的 Weyl 群．见 **Lie 群的复化** (complexification of a Lie group)．

叶家琛 译

**Weyl 法 [Weyl method; Вейля метод]**，数论中的求得形如

$$S(f)=\sum_{1\leqslant x\leqslant P}e^{2\pi i f(x)}$$

的**三角和** (trigonometric sum) 的非平凡估计的一种方法，其中

$$f(x)=\alpha_n x^n+\cdots+\alpha_1 x,$$

而 $\alpha_n,\cdots,\alpha_1$ 为任意实数．它是 H．Weyl (见 [1]) 为建立**一致分布** (uniform distribution) 的准则而加以研究的，见 **Weyl 准则** (Weyl criterion)．

这一方法可表述如下．用连续取平方来把和式 (1) 取 $\rho_0=2^{n-1}$ 次幂，以此来降低多项式 $f(x)$ 的次数．于是第一步有

$$S^2(f)=\sum_{\lambda_1\neq 0}\sum_{x}e^{2\pi i(f(x+\lambda_1)-f(x))}+O(P),$$

其中求和取长度 $\ll P$ 的区间；现在

$$f(x+\lambda_1)-f(x)=n\alpha_n\lambda_1x^{n-1}+\cdots$$

是一个关于 $x$ 的 $n-1$ 次多项式 (记号 $O(P)$ 及 $\ll P$ 表示 $P$ 的阶之大小)．在第 $n-1$ 步可得内层的和为

$$S(\alpha)=\sum_{x=a+1}^{a+P_1}e^{2\pi i\alpha x},\tag{2}$$

其中 $P_1\leqslant P$，$\alpha=n!\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}\alpha_n$，$\lambda_i\neq 0$．形如 (2) 的和可用不等式

$$|S(\alpha)|\leqslant\min\left(P_1,\ \frac{1}{|\sin\pi\alpha|}\right)$$

进行估计，所得之估计为

$$|S(f)|^{\rho_0}\leqslant$$
$$\leqslant P^{\rho_0-1}+P^{\rho_0-n+\varepsilon}\sum_{0<y\leqslant P^{n-1}}\min\left(P_1,\ \frac{1}{|\sin\pi y\alpha_n|}\right).\tag{3}$$

当 $1/|\sin\pi y\alpha_n|$ 与 $P$ 相比很小时，不等式 (3) 给出和式 (1) 的不同的估计．这些估计式依赖于多项式 $f(x)$ 的系数 $\alpha_n$ 用有理分数逼近的精确程度．

例．设

$$\left|\alpha_n-\frac{p}{q}\right|\leqslant\frac{1}{q^2},\ (a,q)=1,$$

那么就有

$$|S(f)|\ll P^{1+\varepsilon}q^{\varepsilon}\left(\frac{1}{P}+\frac{1}{q}+\frac{q}{P^n}\right)^{\rho_0}.$$

特别地，如果

$$P\leqslant q\leqslant P^{n-1},$$

那么

$$|S(f)|\ll P^{1-\rho_0+\varepsilon}.$$

Weyl 方法对数论中若干重要的问题给出了初步近似的解．估计式 (3) 及其推论被用来研究多项式 $f(x)$ 的**模 1 分布** (distribution modulo one)．1919年 G．H．Hardy 与 J．E．Littlewood 给出了 **Waring 问题** (Waring problem) 的解，这个解就是以 Weyl 方法对和式 (1) 的估计为基础的．由此他们估计出使方程

$$N=x_1^k+\cdots+x_r^k$$

($N>0$ 为整数，诸 $x_i$ 也为整数) 可解的 $r=r(k)$ 的值，甚至还给出解数之渐近公式．把估计式 (3) 推广到并非是多项式而是在某种意义上接近多项式的函数 $f(x)$ 的情形，就得到**素数分布** (distribution of prime numbers) 论中某些定理的改进 (相邻素数差的估计和不超过 $N$ 的素数个数 $\pi(N)$ 的渐近公式中的余项之估计)．

由 Weyl 方法所得估计之威力不足是由于对于和 $S(f)$ 取了很高的幂 $\rho_0$．J．van der Corput 提出改进的方法来估计和式 (1)．对于积分

$$\int_0^1\cdots\int_0^1|S(f)|^{2b}\,d\alpha_n\cdots d\alpha_1,$$

当 $b\geqslant cn^2$ 时 ($c>0$ 为常数，$n\geqslant 2$)，**Виноградов 法** (Vinogradov method) 得到了非常精确的上界．这个估计 (见 **Виноградов 均值定理** (Vinogradov theorem about the average)) 可以用来得出 Weyl 和 (1) 的本质上全新的估计 (带有简化因子 $P^{-\rho}$，$\rho=c_1n^2\ln n$；$c_1>0$ 为常数)，这一估计不能用 Weyl 方法得到．

**参考文献**


[1] Weyl, H., Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins, *Math. Ann.*, 77 (1916), 313－352.

[2] Виноградов, И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М., 1971 (中译本：伊·马·维诺格拉多夫，数论中的三角和方法，越民义译，数学进展，1 (1955)，3－106)．


В．М．Бредихин 撰

**【译注】**

**参考文献**


[B1] 潘承洞、潘承彪，解析数论基础，科学出版社，1990年，第二十一、二十二章．


张明尧 译　戚鸣皋 校

**Weyl 问题 [Weyl problem; Вейля проблема]**

在球面上给定的具有正曲率的正则度量在三维 Euclid 空间中实现的问题，即给定度量的正则卵形面的存在问题．该问题是由 H．Weyl ([1]) 在 1915 年提出的．1937 年，H．Lewy ([2]) 在解析度量情形下解决了 Weyl 问题：定义在球面上的具有正曲率的解析度量总可以由三维 Euclid 空间中某个解析曲面来实现．А．Д．Александров ([3]) 关于用凸曲面实现正曲率度量的定理和 А．В．Погорелов 关于具有正则度量的凸曲面的正则性定理给出了 Weyl 问题的完全解．其结论是：定义在一个同胚于球面的流形上具有正 Gauss 曲率的 $C^n(n\geqslant 2)$ 类正则度量能用一个至少 $C^{n-1+\alpha}(0\leqslant\alpha\leqslant 1)$ 类正则的闭凸曲面来实现．如果度量是解析的，则实现曲面也是解析的．Погорелов ([3]，第六章) 在三维 Riemann 曲面的一般情形下提出并解决了 Weyl 问题．

**参考文献**


[1] Weyl, H., Über die Bestimmung einer geschlossenen konvexen Fläche durch ihr Linienelement, *Vierteljahrs-chrift Naturforsch. Gesell. Zurich*, 3 (1916), 2, 40－72.

[2A] Lewy, H., A priori limitations for solutions of Monge-Ampère equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 37 (1935), 417－434.

[2B] Lewy, H., On the non-vanishing of the Jacobian in certain one-to-one mappings, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 42 (1936), 689－692.

[3] Погорелов, А. В., Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, М., 1969.


Е. В. Шикин 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Schneider, R., Boundary structure and curvature of convex bodies, in J. Tolke and J. M. Wills (eds.): Contributions to Geometry, Birkhäuser, 1979, 13－59.

[A2] Nirenberg, L., The Weyl and Minkowski problems in differential geometry in the large, *Comm. Pure Appl. Math.*, 6 (1953), 337－394.


沈纯理 译

**Weyl 和 [Weyl sum; Вейля сумма]**

形如

$$S(f)=\sum_{1\leqslant x\leqslant P}e^{2\pi i f(x)} \qquad (*)$$

的三角和 (trigonometric sum)，其中

$$f(x)=\alpha_n x^n+\cdots+\alpha_1 x,$$

而 $\alpha_n,\cdots,\alpha_1$ 为任意实数．Weyl 和被用来解决许多熟知的数论问题．获得和式 (*) 的非平凡估计的第一个方法是由 H．Weyl 于 1916 年创立的，见 Weyl 法 (Weyl method)．Weyl 和的本质上更好的估计是由 И．М．Виноградов 于 1934 年得到的，他用到他自己关于估计三角和的新方法，见 **Виноградов 法** (Vinogradov method)．

Б．М．Бредихин 撰　张明尧 译　戚鸣皋 校

**白噪声 [white noise; белый шум]**

有常值谱密度 (spectral density) 的广义**平稳随机过程** (stationary stochastic process) $X(t)$．白噪声的广义相关函数形如 $B(t)=\sigma^2\delta(t)$，其中 $\sigma^2$ 是正常数而 $\delta(t)$ 是 $\delta$ 函数．白噪声过程被广泛应用于描述有很小相关周期的随机扰动 (例如"热噪声"——导体中由电子的热运动产生的电流强度的脉动)．在白噪声的谱分解

$$X(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda t}dz(\lambda)$$

中，其"基本振动"$e^{i\lambda t}dz(\lambda)$ 在所有频率 $\lambda$ 处都有同样的平均强度；更确切些说，它们的平均平方振幅是

$$\mathsf{E}|dz(\lambda)|^2=\frac{\sigma^2}{2\pi}d\lambda,\ -\infty<\lambda<\infty.$$

这个谱分解意味着，对每一平方可积函数 $\varphi(t)$，

$$\langle X,\varphi\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)X(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\varphi}(\lambda)dz(\lambda),$$

其中 $\tilde{\varphi}(\lambda)$ 是 $\varphi(t)$ 的 **Fourier 变换** (Fourier transform)；广义过程 $X=\langle X,\varphi\rangle$ 对函数 $\varphi(t)$ 的更明显的依赖性可以由一个与 $dz(\lambda)$ 同类型的对应**随机测度** $d\eta(t)$ 来描述 ($d\eta(t)$ 是随机测度 $dz(\lambda)$ 的 Fourier 变换)，即

$$\langle X,\varphi\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)d\eta(t).$$

Gauss 白噪声 (Gaussian white noise) $X(t)$ 作为 **Brown 运动** (Brownian motion) $\eta(t)$ 的广义导数 ($X(t)=\eta'(t)$)，是构造"受控"于一随机微分方程的**随机扩散过程** (diffusion process) $Y(t)$ 的基础：

$$Y'(t)=a(t,Y(t))+\sigma(t,Y(t))\eta'(t).$$

这方程常常写成微分形式：

$$dY(t)=a(t,Y(t))dt+\sigma(t,Y(t))d\eta(t).$$

涉及白噪声应用的另一类重要模型是描述有平稳随机扰动 $X(t)$ 作用于其上的稳定振动系统行为的随机过程 $Y(t)$，这时，$Y(s)$ $(s<t)$ 不依赖于 $X(u)$ $(u>t)$．这种系统的一个很简单的例子是

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)Y(t)=X(t),$$

其中 $P(z)$ 是全部根都在左半平面的多项式；在阻尼掉"瞬时过程"之后，过程 $Y(t)$ 即由下式给出：

$$Y(t)=\int\frac{1}{P(i\lambda)}dz(\lambda).$$

实际应用中，在所谓**散粒效应**（shot effect）过程的描述中，如下形式的白噪声

$$X(t)=\sum_k\delta(t-\tau_k)$$

起着重要的作用（$k$ 在 $-\infty$ 与 $\infty$ 之间变动，而 $\cdots,\tau_{-1},\tau_0,\tau_1,\cdots$ 构成一 Poisson 过程）；更确切地说，$X(t)$ 是 Poisson 过程 $\eta(t)$ 的广义导数. 散弹效应过程本身有如下形式：

$$Y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}c(t,s)X(s)ds=\int_{-\infty}^{\infty}c(t,s)d\eta(s)$$

$$=\sum_k c(t,\tau_k)$$

其中 $c(t,s)$ 是满足条件

$$\int_{-\infty}^{\infty}|c(t,s)|^2ds<\infty$$

的权函数；此外，广义过程 $X=\langle X,\varphi\rangle$ 的均值是

$$a(\varphi)=a\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)dt,$$

其中 $a$ 是 Poisson 律的参数（见上），而该过程的谱表示

$$X(t)=a+\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda t}dz(\lambda)$$

中的随机测度 $dz(\lambda)$ 满足

$$\mathsf{E}|dz(\lambda)|^2=\frac{a}{2\pi}d\lambda.$$

**参考文献**


[1] Прохоров, Ю. В., Розанов, Ю. А., Теория вероятностей, М., 1967 (英译本：Prokhorov, Yu. V., Rozanov, Yu. A., Probability theory, Springer, 1969).


Ю. А. Розанов 撰

【补注】 关于白噪声作为"宽带"噪声（'wide bandwidth' noise）的根限在物理系统中的应用可见 [A1]，关于有白噪声输入的微分方程与伊藤微积分的随机微分方程之间的关系见 [A2]（亦见**伊藤公式**（Itô formula）；**随机微分方程**（stochastic differential equation））. 关于此问题的进一步的信息，还可见 **Стратонович 积分**（Stratonovich integral）. 其他重要论题还有，作为广义随机函数的白噪声分析（[A3]），即 $[0,\infty)$ 上缓广义函数空间 $\mathscr{S}'$ 上的概率（见**白噪声分析**（white noise analysis）），以及白噪声理论在非线性滤波中的应用（[A4]），这里的"白噪声"是用可分 Hilbert 空间的柱集上的有限加性 Gauss 测度来解释的.

**参考文献**


[A1] Kushner., H. J., Approximation and weak convergence methods for random processes, with applications to stochastic systems theory, MIT, 1984.

[A2] Ikeda, N. and Watanabe, S., Stochastic differential equations and diffusion processes, North-Holland/Kodansha, 1988.

[A3] Hida, T., Brownian motion, Springer, 1980.

[A4] Kallianpur, G. and Karandikar, R. L., White noise theory of prediction, filtering and smoothing, Gordon & Breach, 1988.

[A5] Gel'fand, I. M. and Vilenkin, N. Ya., Generalized functions, 4, Acad Press, 1964, Chapt Ⅲ（译自俄文）.

[A6] Hida, T., Kuo, H. H., Potthoff, J., Streit, L. (eds.), White noise analysis-mathematics and applications, World Scientific, 1990.


潘一民 译

**白噪声分析** [**white noise analysis**; **белого шума анализ**]

【补注】 从本世纪 70 年代初（[A1]－[A3]），白噪声分析已发展成为随机与无穷维分析的一个可行的框架（[A4]－[A6]），并在许多学科中有着日益增多的应用，最值得注意的或许是在量子物理学中. 非正式地说，（Gauss，连续参数）**白噪声**（white noise），作为一个在每个点都有独立值的**广义随机过程**（stochastic process, generalized）（[A7]），其作用是作为无穷维分析基础的无穷坐标系统. 更确切地说，其出发点是白噪声测度的 $L_2$ 空间，然后被嵌入具有适当性质的检验函数以及广义函数空间之间成为 Гельфанд 三元组. 特别是，检验函数要选得充分光滑，容许进行无穷维微分运算，然后由对偶性转移到广义函数. 随着这些的建立，很多概念自然地推广到无穷维结构. 例如梯度，Laplace 算子（[A4]，第 6 章），旋转群（[A8]），Fourier 分析以及 Dirichlet 型. 下面略述其中的某些内容，一个完整的介绍可以在 [A4] 中找到.

（**Gauss**）**白噪声**. 这是一个广义随机过程 $\omega$（[A1]，[A7]）；对于任一 Schwartz 检验函数 $f\in\mathscr{S}(\mathbf{R})$，"被光滑了的"过程 $\langle\omega,f\rangle$ 为一 Gauss **随机变量**（random variable）$X_f$，其均值为 0，协方差为

$$\mathsf{E}(X_fX_g)=\int f(t)g(t)dt=(f,g).$$

依据白噪声测度 $\mu$ 和它的特征函数 $C$，有

$$C(f)=\mathsf{E}(e^{i\langle\omega,f\rangle})=\int d\mu[\omega]e^{i\langle\omega,f\rangle}=$$

$$=e^{-(1/2)\int f^2(t)dt},\ f\in\mathscr{S}(\mathbf{R}).$$

将检验函数扩充到 $L_2(\mathbf{R})$，并注意到由白噪声表示

Wiener 过程

$$B(t) = X(1I_{[0,t]}) = \int_0^t \omega(\tau)d\tau,$$

可以得到 Wiener 的 **Brown 运动**（Brownian motion）过程 $B(\cdot)$ 的一种形式（[A1]，[A2]）. 在此意义下，Brown 泛函可以看作白噪声的泛函. 后者的一大类是有有限方差的，它们构成 Hilbert 空间

$$(L_2) \equiv L_2(\mathscr{S}^*(\mathbf{R}), d\mu).$$

$X_f$ ($f \in \mathscr{S}(\mathbf{R})$) 的多项式形成 $(L_2)$ 的稠子空间，因此 $X_f$ 的单项式组成一全集；为了将它们正交化，引进"正规编序"积，"Wick 编序"积或"Hermite"积

$$:X_{f_1}\cdots X_{f_n}: = (1-P_{n-1})X_{f_1}\cdots X_{f_n},$$

其中 $P_n$ 是到次数最多为 $n$ 的多项式的子空间上的投影. 它们通过下式

$$:X_f^n: = \int f(t_1)\cdots f(t_n)dB(t_1)\cdots dB(t_n),$$

与多重 **Wiener 积分**（Wiener integral））相联系（[A9]）. 由线性与连续性，这些表达式可以从乘积核函数 $F^{(n)} = \prod f_i$ 扩张到对称 $L_2$ 核函数 $F^{(n)}(t_1, \cdots, t_n) \in \mathrm{Sy}\,L_2(\mathbf{R}^n)$；因而可以得到白噪声 Hilbert 空间 $(L_2)$ 与一个 Boson -Фок 空间之间的同构：

$$(L_2) \simeq \bigoplus_n \mathrm{Sy}\,L_2(\mathbf{R}^n, n!dt).$$

$(L_2)$ 的另一刻画是经由"$S$ 变换"或"$T$ 变换"：

$$T: \Phi \mapsto E(\Phi e^{iX_f}) = (T\Phi)(f),$$

$$S: \Phi \mapsto E(\Phi[\cdot + f]) = (S\Phi)(f).$$

它们通过下式联系起来：

$$(S\Phi)(f) = C(f)\cdot(T\Phi)(-if)$$
$$= E(\Phi: e^{X_f}:).$$

**广义函数**. 上述构造的主要好处在于超越它们去考虑诸如 Brown 运动的"作用积分"$\int :\omega^2(t): dt$，或"Donsker $\delta$ 函数"$\delta(B(t)-a)$ 等这样的泛函.

验证一下它们的核函数是否在 Фок 空间中，可以发现第一个例子的核函数 $F^{(n)}$ 由 $F^{(n)}(t_1, \cdots, t_n) = \delta_{n,2}\delta(t_1 - t_2)$ 给出，它显然不是平方可积的. 第二个例子的 $F^{(n)}$ 虽是平方可积的，但它们的范数并非平方可和. 因此，$(L_2)$ 的一个好的扩张，应是放宽核函数的 $L_2$ 性质及其范数的平方可和性.

扩展 Hilbert 空间的一个标准程序是通过构造 Гельфанд 三元组，例如像

$$\mathscr{S}(\mathbf{R}) \subset L_2(\mathbf{R}) \subset \mathscr{S}^*(\mathbf{R}),$$

其中 $\mathscr{S}$ 定义为 Hilbert 空间的一个可数交：

$$\mathscr{S} = \bigcap_{p=1}^{\infty} \mathscr{S}_p, \quad \mathscr{S}_p = D(A^p),$$

$A = -d^2/dt^2 + t^2 + 1$ 是 $L_2(\mathbf{R}, dt)$ 中的自伴算子. 这里借助于像 $A$ 这种算子的二次量子化（second quantization）$\Gamma$（[A10]）. 它定义为 $(L_2)$ 中的一个线性算子，作用在正规编序单项式上为：

$$\Gamma(A): X_{f_1}\cdots X_{f_n}: = :X_{Af_1}\cdots X_{Af_n}:.$$

现又构造检验泛函空间为算子定义域之交：

$$(\mathscr{S}) = \lim_{p}(\mathscr{S})_p, \quad (\mathscr{S})_p = D(\Gamma(A^p)),$$

从而得到 Гельфанд 三元组

$$(\mathscr{S}) \subset (L_2) \subset (\mathscr{S})^*.$$

空间 $(\mathscr{S})$ 与 $(\mathscr{S})^*$ 的元素分别称为飛田检验函数（或泛函）（Hida test functions (or functionals)）与飛田广义函数（Hida distribution）.

$(\mathscr{S})$ 的性质. $(\mathscr{S})$ 是核型的（见**核型空间**（nuclear space）），且在逐点乘法下为一代数；对于任一广义函数值方向 $h \in \mathscr{S}^*$，$(\mathscr{S})$ 的元素有 $(\mathscr{S})$ 中的 **Gâteaux 导数**（Gâteaux derivative）

$$D_h\varphi(\omega) = \lim_{\varepsilon \to 0}\frac{1}{\varepsilon}(\varphi(\omega + \varepsilon h) - \varphi(\omega)).$$

它们在 Фок 空间中的象是**湮没算子**（annihilation operators）. 特别地，取 $h$ 为 Dirac 广义函数 $\delta_t$，其相应导数算子通常表为 $\partial_t$（飛田导数（Hida derivative））. 它服从 Bose 子正则对易关系（Boson $CCR$）$[\partial_t, \partial_s^*] = \delta(t-s)$ 以及 $\omega(t) = \partial_t + \partial_t^*$. 后一关系乃是白噪声分析框架中随机积分的出发点（[A4] 第 8 章）. 考虑**随机积分**（stochastic integral）$\int dB(t)F$. 利用 $\dot{B}(t) = \omega(t) = \partial_t + \partial_t^*$，形式上得到

$$\int dB(t)F = \int dt\,\omega(t)F = \int dt(\partial_t + \partial_t^*)F.$$

在伊藤积分中，所作的是向前时间的微分，因此以 $\partial_{t+0}$ 作用在一适应的被积函数 $F$ 上得到 0：$\int dB(t)F = \int dt\,\partial_t^* F$. 这不仅对伊藤积分提供了可行的途径，更重要的是把它自然地推广到非适应的被积函数（[A11]）. 此外，$(\mathscr{S})$ 是 Fréchet 可微的（见 **Fréchet 导数**（Fréchet derivative）），$\nabla: (\mathscr{S}) \to \mathscr{S}(\mathbf{R}) \otimes (\mathscr{S})$ 由 $(\nabla\varphi)(t, \omega) = \partial_t\varphi(\omega)$ 给出. 对于所有的飛田检验函数 $\varphi$，有 $D_h\varphi = \langle h, \nabla\varphi\rangle$ 及 $\|\nabla\varphi\|_{L_2}^2 \in (\mathscr{S})$. 每个飛田检验函数 $\varphi$ 都有一个有光滑核 $F^{(n)} \in \mathrm{Sy}\,\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ 的修正型

$$\widetilde{\varphi}(\omega) = \sum_n^{\infty}\langle :\omega^{\otimes n}:, F^{(n)}\rangle,$$

并连续地扩张到所有 $\omega \in \mathscr{S}^*(\mathbf{R})$（[A12]）.

飛田广义函数的对偶空间 $(\mathscr{S})^*$ 有以下性质：所

有飛田广义函数都是有限阶的 ($(\mathscr{S})^* = \bigcup_{p=1}^{\infty}(\mathscr{S})_{-p}$); $T$ 和 $S$ 变换可扩张到 $(\mathscr{S})^*$, 定义为广义函数 $\Phi$ 对 $(\mathscr{S})$ 中的指数函数的作用: $(T\Phi)(f) = \langle \Phi, e^{\langle X_f \rangle} \rangle$; 任何正的飛田广义函数 $\Phi$ 都是一个正测度 $v_\Phi$ (Кондратьев, Самойленко 与横井的一个定理 ([A13], [A14])).

飛田广义函数的例子. 1) 局部 Wick 幂 (local Wick power):

$$\Phi(\omega) = :\omega^n(t):, (S\Phi)(f) = f^n(t).$$

2) Donsker $\delta$ 函数 (Donsker $\delta$-function):

$$\Phi = \delta(B(t) - a),$$

$$(S\Phi)(f) = (2\pi t)^{1/2} e^{(F(t)-a)^2/(2t)},$$

其中 $F(t) = \int_0^t f(s)ds$.

3) 白噪声 $\delta$ 函数 (white noise $\delta$-function) $\Phi = \delta_\omega$, 由下式给出:

$$\langle \Phi, \varphi \rangle = \widetilde{\varphi}(\omega), (S\Phi)(f) = e^{\langle \omega, f \rangle} C(f).$$

4) 正规化 Gauss 函数 (normalized Gaussians):

$$\Phi(\omega) = \frac{e^{\langle \omega, K\omega \rangle}}{\mathrm{E}(e^{\langle \omega, K\omega \rangle})},$$

$$(S\Phi)(f) = e^{\langle f, (K/(1-2K))f \rangle}.$$

注意例 4) 的正规化指数 $\Phi(\omega) = N\exp(\langle \omega, K\omega \rangle)$ 对于一大类算子 $K$ 有完全确定的 $S$ 变换, 比单独用来定义 Gauss 型与分母的正规化常数的算子类要大得多. 对于这样的 $K$, 可以由它的 $S$ 变换来定义 $N\exp(\langle \omega, K\omega \rangle)$. 以其 $S$ 或 $T$ 变换来描述飛田广义函数是十分有用的. 这之所以可能, 是由于下面的表征定理 (characterization theorem) ([A15]). 如下三个命题是等价的:

a) 设 $F$ 是 Schwartz 空间上的复值泛函, 使得对任何 $f \in \mathscr{S}$: i) $g(\lambda, f_1, f_2) \equiv F(\lambda f_1 + f_2)$ 有一个 $\lambda$ 的整解析开拓; ii) 对于某正数 $C_i$ 和 $p$ 和所有复数 $z$ 有如下的上界估计:

$$|F(z, f)| \leqslant C_1 \exp(C_2 |z|^2 \| A^p f \|_2^2).$$

b) $F$ 是一个飛田广义函数 $\Phi \in (\mathscr{S})^*$ 的 $S$ 变换.

c) $F$ 是一个飛田广义函数 $\Phi \in (\mathscr{S})^*$ 的 $T$ 变换.

具有上述性质 a) 的泛函已被称为 $U$ 泛函 ($U$-functionals). 作为这个定理的一个推论是, 如果其对应的 $U$ 泛函序列是一致收敛的, 那么飛田广义函数的序列必定收敛. 类似的定理已被证明对于更一般的 Gauss 系统也成立, 特别涵盖了多参数白噪声或向量值 Brown 运动的广义函数这种有意义的情形 ([A16]). 其他变种则处理放宽关于 $U$ 泛函的增长条件 a) ii) 的空间 ([A17], [A18]).

显然, 扩充 $(L_2)$ 的广义函数空间的构造远非唯一. 其他的例子有由 P. A. Meyer ([A19])、杉田 ([A21])、渡辺 ([A20]) 研究过的三元组, 它有较大的检验函数空间, 从而有较少的广义函数. 还需指出, [A5] 中 P. Krée 的文章有他的原始工作的一个概述与参考文献. 相反地, 由 Meyer 和严加安 ([A18]) 提出的三元组由于去掉了 $U$ 泛函的增长条件而达到了一个更大的广义函数空间. 在**量子概率** (quantum probability) 文献中讨论的检验泛函空间的例子是 [A22] 的空间 $K = \bigcap_{a>0} D(\Gamma(a\mathrm{I}))$.

表征定理有许多的应用和推论, 例如 $\alpha$) 在上面给出的 $S$ 变换的诸例中, 易简洁验证其 $U$ 泛函性质; 从而这个定理直接保证了这些表示式的确是飛田广义函数的 $S$ 变换. $\beta$) $U$ 泛函在逐点加法与乘法下显然组成一个代数; 这导致 $(\mathscr{S})^*$ 上的两个代数结构, 其相应的广义函数之乘积分别是卷积 (用 $T^{-1}$) 和正规编序积 (用 $(S^{-1})$). $\gamma$) 在一对飛田变换之间存在如下的线性关系

$$S\Phi = F = T\hat{\Phi}.$$

如果用一个**正态分布** (normal distribution) 代替白噪声测度, 可以发现 $\hat{\Phi}$ 不是别的, 而是 $\Phi$ 的 **Fourier 变换** (Fourier transform).

**无穷维 Fourier 变换**. 见 [A23] ~ [A25], [A4] 第 9 章. 上面的评注建议如下的定义: 对于 $\Phi \in (\mathscr{S})^*$, 称 $\hat{\Phi} = T^{-1}S\Phi$ 为 $\Phi$ 的 Fourier 变换 (Fourier transform).

若干例子与性质如下. 1 的 Fourier 变换是零点处的白噪声 $\delta$ 函数: $\hat{1} = \delta_0$, $\hat{\delta}_0 = 1$. Fourier 变换把导数与坐标乘法相互关联.

$$(\partial \Phi)^\wedge = i\omega\hat{\Phi}, (\omega\Phi)^\wedge = i\partial\hat{\Phi}.$$

这就是为什么单挑出 $\Phi \to \hat{\Phi}$ 作为 Fourier 变换对无穷维的自然推广的原因: 这是唯一的 (当然除相差一常值乘子外) 从 $(\mathscr{S})^*$ 到其自身的具有这个关联性质的连续线性变换 ([A26]).

**Dirichlet 型**. 见 [A27], [A28], [A4] 第 10 章. 回忆一下正的飛田广义函数必是测度, 对于任何严格正 (即 $v_\Phi$ 在所有开集上为正) 且使 $\varepsilon$ 在 $L_2(dv_\Phi)$ 为可闭的飛田广义函数 $\Phi$, 从

$$\varepsilon(\varphi) = \langle \Phi, |\nabla \varphi|^2 \rangle,$$

得到 Dirichlet 型 $\varepsilon$ ([A29] ~ [A31]). 然后对于这样的 $\Phi$, 在 $L_2(dv_\Phi)$ 中有

$$\overline{\varepsilon}(\varphi) = \| H^{1/2} \varphi \|^2,$$

其中 $H$ 是与一状态空间为 $\mathscr{S}^{*}(\mathbf{R})$ 的扩散过程相联系的 Марков 半群的自伴生成元.

若干应用，上面是[A32]中有限维局部 Dirichlet 型的一个直接推广，用量子力学基态的语言，它产生了 Schrödinger Hamilton 算子 $H$ 及解非线性随机微分方程的扩散过程. 在现在的构架中，人们自然会提出这样的问题：用对白噪声测度 $\mu$ 的(广义)密度函数，即经由正的 $\Phi\in(\mathscr{S})^{*}$，是否可以描述相对论的或 Euclid 的量子场论的基态？以及这些是否满足上述产生 Dirichlet 型的条件？第一个问题已经用关于 $n$ 点函数的 Fröhlich 界以及所谓 $\varphi$ 界的存在性回答了([A33])，第二个问题则在[A34]中就构造性量子场论(constructive quantum field theory)的各种模型作出了回答.

白噪声分析在量子物理中另一富于成果的应用是由 Feynman 路径积分提供的. 熟知 Feynman "积分"并不是对测度的积分. 因此不可能希望把它解释为沿轨道的加权平均，除非允许广义函数值的权. 在[A35]中开始试图这样做了，但仍稍有不严格处. 近来，给出了若干例子以及判断 Feynman 积分确实是空间 $(\mathscr{S})^{*}$ 中广义函数的作用的一般准则([A36]). 这一方法的好处本质上是双重的：探测这一方法的适用范围(即可以用这种方式来解决的 Schrödinger 问题的类别)，以及巧妙地运用 Feynman 积分与诸如分部积分这样的白噪声分析的工具，来求得有用的量子力学的关系([A37],[A4]第 12 章).

关于用白噪声来处理量子概率，见[A38]. 随机介质中的流体动力学流在[A39]中进行了研究. 白噪声分析技巧应用于解随机偏微分方程的例子见[A40]，[A41].

**参考文献**


[A1] Hida, T., Stationary stochastic processes, Princeton Univ. Press, 1970.

[A2] Hida, T., Brownian motion, Springer, 1980.

[A3A] Kubo, I., Takenaka, S., Calculus on Gaussian white noise Ⅰ-Ⅱ, *Proc. Japan Acad.*, **56** (1980), 376 − 380; 411 − 416.

[A3B] Kubo, I., Takenaka, S., Calculus on Gaussian white noise Ⅲ, *Proc. Japan Acad.*, **57** (1981), 433 − 437.

[A3C] Kubo, I., Takenaka, S., Calculus on Gaussian white noise Ⅳ, *Proc. Japan Acad.*, **58** (1982), 186 − 189.

[A4] Hida, T., Kuo, H.-H., Potthoff, J., Streit, L., White noise-an infinite dimensional calculus, To appear.

[A5] Hida, T., Kuo, H.-H., Potthoff, J., Streid, L. (eds.): White noise analysis-mathematics and applications, World Scientific, 1990.

[A6] Kuo, H.-H., Lectures on white noise analysis, *Soochow Math. J.*, (1992).

[A7] Gel'fand, I. M. and Vilenkin, N. Ya., Generalized functions, 4, Acad Press, 1968(译自俄文).

[A8] Hida, T., Infinite-dimensional rotation group and unitary group, in H. Heyer (ed.): Probab. Measures on Groups Ⅸ Proc. Oberwolfach 17 − 23 Jan. 1988, Lecture notes in math., Vol. 1379, Springer, 1989, 125 − 134.

[A9] Ito, K., Multiple Wiener integral, *J. Math. Soc. Japan*, 3 (1951), 157 − 169.

[A10] Simon, B., the $P(\varphi)_2$ Euclidean (quantum) field theory, Princeton Univ. Press, 1974.

[A11] Asch, J., Potthoff, J., Itô's lemma without non-anticipatory conditions, *Probab. Th. Rel. Fields*, **88** (1991), 17 − 46.

[A12] Kubo, I., Yokoi, Y., A remark on the space of testing random variables in the white noise calculus, *Nagoya Math. J.*, 115 (1989), 139 − 149.

[A13] Kondratiev, Yu. G. [Yu. G. Kondrat'ev], Samoĭlenko, Yu. S., Integral representation of generalized positive definite kernels of an infinite number of variables, *Soviet Math. Dokl.*, **17** (1976), 517 − 521(*Dokl. Acad. Nauk SSSR*, **227** (1976), 4, 800 − 803).

[A14] Yokoi, Y., Positive generalized white noise functionals, *Hiroshima Math. J.*, **20** (1990), 137 − 157.

[A15] Potthoff, J., Streit, L., A characterization of Hida distributions, *J. Funkt. Anal.*, **101** (1991), 212 − 229.

[A16] Streit, L., Westerkamp, W., A generalization of the characterization theorem for generalized functionals of white noise, BiBos Preprint, no. 480 (1991).

[A17] Kondratiev, Yu. G. [Yu. G. Kondrat'ev], Streit, L., Spaces of white noise distributions. Constructions, descriptions, applications Ⅰ, BiBos Preprint, no. 510(To appear in *Rep. Math. Phys.*).

[A18] Meyer, P. A., Yan, J.-A., Les 'fonctions caractéristiques' des distributions sur l'espace de Wiener, Univ. Strasbourg Preprint (1991).

[A19] Meyer, P. A., Quelques résultats analytiques sur le semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck en dimension infinie, in Theory and Application of Random Fields, Springer, 1983, 201 − 214.

[A20] Watanabe, S., Stochastic differential equations and Malliavin calculus, Tata Institute, 1984.

[A21] Sugita, H., Sobolev spaces of Wiener functionals and Malliavin's calculus, *J. Math. Kyoto Univ.*, **25** (1985), 31 − 48.

[A22] Lindsay, J. M., Maassen, H., An integral kernal approach to noise, in L. Accardi, W. von Wald-

enfels (eds.): Quantum Probability and Applications Ⅲ, Lecture notes in math., Vol. 1303, Springer, 1988, 192 – 208.

[A23] Kuo, H.-H., The Fourier transform in white noise calculus, *J. Multivariate Anal.*, **31** (1989), 311 – 327.

[A24] Yan, J.-A., An elementary proof of a theorem of Lee, *Acta Math. Sci.*, **11** (1991), 3, 356 – 360.

[A25] Lee, Y.-J., Analytic version of test functionals, Fourier transform and a characterization of measures in white noise calculus, *J. Funct. Anal.*, **100** (1991), 359 – 380.

[A26] Hida, T., Kuo, H.-H., Obata, N., Transformations for white noise functionals, *J. Funct. Anal.* (to appear).

[A27] Hida, T., Potthoff, J., Streit, L., Dirichlet forms and white noise analysis, *Comm. Math. Phy.*, **116** (1988), 235 – 245.

[A28] Potthoff, J., Röckner, M., On the contraction property of energy forms on infinite-dimensional spaces, *J. Funct. Anal.*, **92** (1990), 155 – 165.

[A29] Fukushima, M., Dirichlet forms and Markov processes, Kodansha & North-Holland, 1980.

[A30] Kusuoka, S., Dirichlet forms and diffusion processes on Banach spaces, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, Sect. IA, **29** (1982), 79 – 95.

[A31] Albeverio, S., Röckner, M., New developments in the theory and application of Dirichlet forms, in S. Albeverio, et al. (ed.): Stochastic Processes, Physics and Geometry, World Scientific, 1990, 27 – 76.

[A32] Albeverio, S., Hoegh-Krohn, R., Striet, L., Energy forms, Hamiltonians and distorted Brownian paths, *J. Math. Phys.*, **18** (1977), 909 – 917.

[A33] Potthoff, J., Streit, L., Invariant states on random and quantum field: $\varphi$-bounds and white noise analysis, *J. Funct. Anal.* (To appear).

[A34] Albeverio, S., Hida, T., Potthoff, J., Röckner, M., Streit, L., Dirichlet forms in terms of white noise analysis: Ⅰ, Ⅱ, *Rev. Math. Phys.*, **1** (1990), 291 – 312; 313 – 323.

[A35] Hida, T., Streit, L., Generalized Brownian functionals and the Feynman integral, *Stoch. Proc. Appl.*, **16** (1983), 55 – 69.

[A36] de Faria, M., Potthoff, J., Streit, L., The Feynman integrand as a Hida distribution, *J. Math. Phys.*, **32** (1991), 2123 – 2127.

[A37] Khandekar, D. C., Streit, L., Constructing the Feynman integrand, *Ann. Physik*, **1** (1992), 49.

[A38] Huang, Zh., Quantum white noises-white noise approach to quantum stochastic calculus, Preprint Wuhan University.

[A39] Lindstrom, T., Oksendal, B., et al., Dynamical systems in random media: a white noise functional approach, Preprint, Oslo (1990).

[A40] Chow, P. L., Generalized solution of some parabolic equations with a random drift, *J. Appl. Math. Optimization*, **20** (1989), 81 – 96.

[A41] Cochran, C., Potthoff, J., Fixed point principles for stochastic partial differential equations, LSU preprint (1992).

L. Streit 撰

【译注】

参考文献

[B1] 黄志远，严加安，无穷维随机分析引论，科学出版社，1997.

潘一民 译

**Whitehead 群 [Whitehead group; Уайтхеда группа]**

用下列方式与一个结合环相联系的 Abel 群．它是由 J. H. C. Whitehead ([1]) 引进的．设 $A$ 为一个有单位元的结合环，并令 $\mathrm{GL}(n,A)$ 为 $A$ 上可逆 $(n\times n)$ 矩阵的群．则有自然嵌人

$$\mathrm{GL}(1,A)\subset\cdots\subset\mathrm{GL}(n,A)\subset\cdots;$$

这里 $g\in\mathrm{GL}(n,A)$ 变成

$$\left\|\begin{matrix} g & 0\\ 0 & 1\end{matrix}\right\|\in\mathrm{GL}(n+1,A);$$

并令 $\mathrm{GL}(A)=\bigcup_{i=1}^{\infty}\mathrm{GL}(i,A)$. 与单位矩阵只在非对角线上某一位置处有不同元素的矩阵叫做初等矩阵 (elementary matrix). 由所有初等矩阵生成的子群 $E(A)\subset\mathrm{GL}(A)$ 与 $\mathrm{GL}(A)$ 的换位子群重合．换位子商群 $K_1A=\mathrm{GL}(A)/E(A)$ 叫做环 $A$ 的 Whitehead 群 (Whitehead group of the ring). 设 $[-1]\in K_1A$ 为与矩阵

$$\left\|\begin{matrix} -1 & & & 0\\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1\end{matrix}\right\|$$

相对应的元素，它的次数为 2. 商群 $\bar{K}_1(A)=K_1A/\{0,[-1]\}$ 称为环 $A$ 的约化 Whitehead 群 (reduced Whitehead group of the ring).

设 $\Pi$ 为一个乘法群，而 $\mathbf{Z}[\Pi]$ 为它在 $\mathbf{Z}$ 上的群环．由包含关系 $\Pi\subset\mathrm{GL}(1,\mathbf{Z}[\Pi])$ 得到自然同态 $j:\Pi\to\bar{K}_1\mathbf{Z}[\Pi]$. 商群 $\mathrm{Wh}(\Pi)=\bar{K}_1(\Pi)/j(\Pi)$ 叫作群 $\Pi$ 的 Whitehead 群 (Whitehead group of the group).

对于群同态 $f:\Pi_1\to\Pi_2$，有一个自然的诱导同态 $\mathrm{Wh}(f):\mathrm{Wh}(\Pi_1)\to\mathrm{Wh}(\Pi_2)$，使对 $g:\Pi_2\to\Pi_3$ 有 $\mathrm{Wh}(g\circ f)=\mathrm{Wh}(g)\circ\mathrm{Wh}(f)$. 于是 Wh 就是一个由群范畴到 Abel 群范畴的共变函子．如果 $f:\Pi\to\Pi$ 是一个内自同构，则 $\mathrm{Wh}(f)=\mathrm{id}_{\mathrm{Wh}(\Pi)}$.

一个空间的基本群的 Whitehead 群与基点的选取

无关、它对于定义映射的一个重要不变量．——**Whitehead 挠率**（Whitehead torsion）是本质的．

**参考文献**


[1] Whitehead，J．H．C．，Simple homotopy types，*Amer．J．Math*．，72（1950），1－57．

[2] Milnor，J．W．，Whitehead torsion，*Bull．Amer．Math．Soc*．，72（1966），358－426．

[3] Milnor，J．W．，Introduction to algebraic K-theory，Princeton Univ．Press，1971．


【补注】 如果 $A$ 是可交换的，则其行列式，因而，特殊的线性群 $SL(n,A)$ 都是可定义的．用它们来代替 $GL(n,A)$，就得到特殊 Whitehead 群（special Whitehead group）$SK_1(A)$．有 $K_1(A)=U(A)\oplus SK_1(A)$，这里 $U(A)$ 是 $A$ 中的单位构成的群． 周伯埙 译

**Whitehead 同态［Whitehead homomorphism；Уайтхеда гомоморфизм］**，$J$ 同态（$J$-homomorphism）

以一种特殊方式定义的，从 SO 的谱的**稳定同伦群**（stable homotopy group）到球 $S^0$ 的谱的稳定同伦群的同态．Whitehead 同态一种定义方法是用 Hopf 构造：映射 $\varphi: S^m\to SO(q)$ 决定了一个映射 $(J\varphi): S^m\times S^{q-1}\to S^{q-1}$，后者可扩充为映射 $J\varphi: S^m\times E^q\to E^q_+$，$E^q_+$ 为 $S^q$ 的上半球面．还有另一个扩充 $J\varphi: E^{m+1}\times S^{q-1}\to E^q_-$，$E^q_-$ 是 $S^q$ 的下半球面．这两个扩充决定了一个映射 $J\varphi: S^{m+q}\to S^q$，因而得到一个同伦类．这样就有一个同态 $J:\pi^S_m(SO)\to\pi^S_m(S^0)$，称为 Whitehead 同态（Whitehead homomorphism）．

这个同态是由 G．W．Whitehead（［1］）首先构造出来的，在［1］中他还证明：对下面的（有无穷多个）$n$ 和 $r$，球面"同伦群"$\pi_n(S^r)\neq 0$．

| $n$ | 14 | 14 | $8k$ | $16k+2$ | $8k+1$ | $16k+3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $r$ | 7 | 4 | $4k$ | $8k$ | $4k+1$ | $8k+1$ |

稳定同伦群 $\pi^S_m(SO)$ 由 **Bott 周期性定理**（Bott periodicity theorem）（［2］）描述：

| $m$ mod 8 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\pi^S_m(SO)$ | $\mathbf{Z}_2$ | $\mathbf{Z}_2$ | 0 | $\mathbf{Z}$ | 0 | 0 | 0 | $\mathbf{Z}$ |

Whitehead 同态的象已经全计算出来了（见［4］，［5］）：当 $m>0$ 且 $m\equiv 0\pmod 8$ 时，Whitehead 同态是单态射，它的象是群 $\pi^S_m(S^0)$ 中的一个直和因子；当 $m>1$ 且 $m\equiv 1\pmod 8$ 时，Whitehead 同态是到 $\pi^S_m(S^0)$ 的一个直和因子的单态射；当 $m=4s-1$ 时，Whitehead 同态的象是阶为 $\tau(2s)$ 的循环群，它也是 $\pi^S_m(S^0)$ 的直和因子，其中 $\tau(2s)$ 是不可约分数 $B_S/(4s)$ 的分母，$B_S$ 是第 $s$ 个 **Bernouli 数**（Bernouli numbers）．

**参考文献**


［1A］Whitehead，G．W．，On the homotopy groups of spheres and rotation groups，*Ann．of Math*．，**43**（1942），634－640．

［1B］Whitehead，G．W．，A generalization of the Hopf invariant，*Ann．of Math*．，**51**（1950），192－237．

［2］Bott，R．，The stable homotopy of the classical groups，*Ann．of Math*．，70（1959），313－337．

［3A］Adams，J．F．，On the groups $J(X)$－Ⅰ，*Topology*，**2**（1963），181－195．

［3B］Adams，J．F．，On the groups $J(X)$－Ⅱ，*Topology*，**3**（1965），137－171．

［3C］Adams，J．F．，On the groups $J(X)$－Ⅲ，*Topology*，3（1965），193－222

［3D］Adams，J．F．，On the groups $J(X)$－Ⅳ，*Topology*，**5**（1966），21－71．

［4］Becker，J．C．and Gottlieb，D．H．，The transfer map and fiber bundles，*Topology*，**14**（1975），1－12．

［5］Adams，J．F．，Infinite loop spaces，Princeton Univ．Press，1978


A．B．Шокуров 撰

【补注】 给定拓扑空间之间的映射 $f: X\times Y\to Z$，一般地有一个 Hopf 构造（Hopf construction），它给出映射

$$\Gamma f: X*Y\to SZ,$$

其中 $X*Y$ 是 $X$ 和 $Y$ 的**联接**，$SZ$ 是 $Z$ 的**纬垂**（suspension）．考虑

$$f\times\mathrm{id}: X\times Y\times I\to Z\times I$$
$$(x,y,t)\mapsto(f(x,y),t).$$

联接 $X*Y$ 是 $X\times Y\times I$ 的某种商空间，$SZ$ 是 $Z\times I$ 的商空间．很容易验证 $f\times\mathrm{id}$ 把等价的点映为等价的点，因而得到所要的 $\Gamma f$．注意 $S^m*S^n\cong S^{m+n}$，见**联接**（join）．

令 $\varphi: S^m\to SO(q)$ 为一个映射，$SO(q)$ 的每个元素诱导出一个映射 $S^{q-1}\to S^{q-1}$，因此 $\varphi$ 诱导出映射

$$\tilde\varphi: S^m\times S^{q-1}\to S^{q-1}.$$

对 $\tilde\varphi$ 应用 Hopf 构造得到映射 $J_\varphi$：

$$S^{m+q}\cong S^m*S^q\xrightarrow{\Gamma\tilde\varphi}S(S^{q-1})\cong S^q.$$

**参考文献**


［A1］Gray，B．，Homotopy theory，Acad．Press，1975，p．334．

［A2］Switzer，R．M．，Algebraic topology-homotopy and homology，Springer，1975，p．480 ff．


潘建中 译 沈信耀 校

**Whitehead 乘法［Whitehead multiplication；Уайтхеда**

умножение]

J. H. C. Whitehead ([1]) 在同伦群上定义的乘法 $\pi_m(X)\times\pi_n(X)\to\pi_{m+n-1}(X)$. 首先将 $S^k$ 剖分成两个胞腔 $e^0$ 和 $e^k$, 则球面的乘积 $S^m\times S^n$ 的胞腔剖分有四个胞腔 $e^0$, $e^m$, $e^n$ 和 $e^{m+n}$. 因此特征映射

$$\varphi_{m,n}:\partial e^{m+n}=S^{m+n-1}\to S^m\times S^n$$

可分解为

$$S^{m+n-1}\xrightarrow{W(m,n)}S^m\vee S^n\to S^m\times S^n,$$

其中 $S^m\vee S^n$ 是两个球面在基点处的一点并. 如果映射 $f$ 和 $g$ 分别是同伦类 $\alpha\in\pi_m(X)$ 和 $\beta\in\pi_n(X)$ 的代表元, 则 Whitehead 积 (Whitehead product) $[\alpha,\beta]\in\pi_{m+n-1}(X)$ 由下面的复合映射给出

$$S^{m+n-1}\xrightarrow{W(m,n)}S^m\vee S^n\xrightarrow{f\vee g}X.$$

Whitehead 积有以下性质:

1) $[\alpha,\beta]=(-1)^{\deg\alpha\deg\beta}[\beta,\alpha]$;

2) 若 $\alpha,\beta\in\pi_1(x)$, 则 $[\alpha,\beta]=\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$;

3) 若 $x$ 是 $n$ 单的, 则对 $\alpha\in\pi_1(x)$, $\beta\in\pi_n(x)$, $[\alpha,\beta]=0$;

4) 若对所有的 $\alpha\in\pi_1(x)$, $\beta\in\pi_n(x)$, $[\alpha,\beta]=0$, 则 $x$ 是 $n$ 单的;

5) 若 $\alpha\in\pi_n(x)$, $\beta\in\pi_m(x)$, $\gamma\in\pi_k(x)$, $n,m,k>1$, 则

$$(-1)^{nk}[[\alpha,\beta],\gamma]+(-1)^{mn}[[\beta,\gamma],\alpha]+$$
$$+(-1)^{mk}[[\gamma,\alpha],\beta]=0;$$

6) 元素 $[i,i]\in\pi_3(S^2)$ 是 $\pi_3(S^2)$ 的生成元的两倍, 其中 $i\in\pi_2(S^2)=\mathbf{Z}$ 是生成元;

7) 满态射 $\Sigma:\pi_{4n-1}(S^{2n})\to\pi_{4n}(S^{2n+1})$ 的核由一个元素, $[i_{2n},i_{2n}]\in\pi_{4n-1}(S^{2n})$, 生成, 其中 $i_{2n}\in\pi_{2n}(S^{2n})$ 是典则生成元.

**参考文献**


[1A] Whitehead, G. W., On products in homotopy theory, *Ann. of Math.*, **47** (1946), 460 – 475.

[1B] Whitehead, G. W., A generalization of the Hopf invariant, *Ann. of Math.*, **51** (1950), 192 – 237.


A. B. Шохуров 撰

**【补注】**

**参考文献**


[A1] Whitehead, G. W., Elements of homotopy theory, Springer, 1978.

[A2] Spanier, E. H., Algebraic topology, McGraw-Hill, 1966, 419 – 420 (中译本: E. H. 斯潘尼尔, 代数拓扑学, 上海科学技术出版社, 1987).

[A3] Hu, S.-T., Homotopy theory, Acad. Press, 1959, 138 – 139.


【校注】 参考文献 [1A] 应改为:


[1] Whitehead, J. H. C., On adding relations to homotopy groups, *Ann. of Math.*, **42** (1941), 409 – 428.


潘建中 译 沈信耀 校

**Whitehead 积** [**Whitehead product**; **Уайтхеда произведение**], 带参考点的拓扑空间的同伦群的元素的

见 **Whitehead 乘法** (Whitehead multiplication).

潘建中 译 沈信耀 校

**Whitehead 挠率** [**Whitehead torsion**; **Уайтхеда кручение**]

从一个 $A$ 模之复形所构造的约化 **Whitehead 群** (Whitehead group) $\widetilde{K}_1A$ 的一个元素. 特别地, 有映射复形的 Whitehead 挠率. 设 $A$ 为一个环, $F$ 为一个有限生成的自由 $A$ 模. 给定 $F$ 的两个基 $b=(b_1,\cdots,b_k)$ 与 $c=(c_1,\cdots,c_k)$, 如果 $c_i=\sum_{j=1}^k a_{ij}b_j$, 则矩阵 $\|a_{ij}\|$ 是可逆的, 因此就定义了群 $\widetilde{K}_1A$ 的一个元素, 表以 $[c/b]$. 如果 $[c/b]=0$, 基 $b$ 与 $c$ 就称为等价的 (equivalent). 当然

$$[e/c]+[c/b]=[e/b],\ [b/b]=0.$$

对自由 $A$ 模的任何正合列 $0\to E\to F\to G\to 0$ 与 $E$ 的基 $e$, $G$ 的基 $g$, 都能定出 $F$ 的一基 $eg=(e,f)$, 这里 $f$ 的象形成基 $g$. 这个基的等价类仅依赖于 $e$ 与 $g$ 的等价类. 现在设

$$C: C_n\xrightarrow{\partial}C_{n-1}\xrightarrow{\partial}\cdots\xrightarrow{\partial}C_0$$

为一复形, $C_i$ 都是选定了基 $c_i$ 的自由 $A$ 模, 其同调复形是自由的, 且取定了基 $h_i$. 设同态 $\partial:C_{i+1}\to C_i$ 的象仍是自由的, 基为 $b_i$. 组合 $b_ih_ib_{i-1}$ 就定义 $C_i$ 中的一个新基. 于是复形 $C$ 的挠率就由公式

$$\tau(C)=-\sum_{i=0}^n(-1)^i[c_i/b_ih_ib_{i-1}]\in\widetilde{K}_1A$$

来给出. 这个挠率并不依赖于边缘群的基 $b_i$ 的选取, 仅依赖于 $c_i$ 与 $h_i$.

给定一对 $(K,L)$, 它是由一个有限连通的复形 $K$, 与其一个子复形 $L$ 且为 $K$ 的一个**形变收缩核** (deformation retract) 所组成的, 令 $\Pi\simeq\pi_1(K)\simeq\pi_1(L)$. 如果 $\widetilde{K}$ 与 $\widetilde{L}$ 为 $K$ 与 $L$ 的泛覆叠复形, 则 $\sigma\in\Pi$ 就定义一个链映射 $\sigma:(\widetilde{K},\widetilde{L})\to(\widetilde{K},\widetilde{L})$, 因此有一个链群的映射 $\sigma_*:C(\widetilde{K},\widetilde{L})\to C(\widetilde{K},\widetilde{L})$, 即, $C_p(\widetilde{K},\widetilde{L})$ 是一个 $\mathbf{Z}[\Pi]$ 模. 这样就得到 $\mathbf{Z}[\Pi]$ 上的一个自由链复形

$$C_n(\widetilde{K},\widetilde{L})\to C_{n-1}(\widetilde{K},\widetilde{L})\to\cdots\to C_0(\widetilde{K},\widetilde{L})$$

这个复形的同调是平凡的, 即, $\widetilde{L}$ 是 $\widetilde{K}$ 的一个形变收

缩.

设 $e_1,\cdots,e_a$ 为 $K\setminus L$ 中的 $p$ 链. 对每一个链 $e_i$, 在 $\widetilde{K}$ 中选一个处于 $e_i$ 之上的代表 $\widetilde{e}_i$, 并固定其方向. 于是 $c_p=(\widetilde{e}_1,\cdots,\widetilde{e}_a)$ 是 $C_p(\widetilde{K},\widetilde{L})$ 中的一个基; 因此就定义了 $\widetilde{K}_1 Z[\Pi]$ 的一个子集 $\tau C(\widetilde{K},\widetilde{L})$, 叫作挠率. 一般地, 它依赖于基 $c_p$ 的选取. 可是, 这个集合在 Whitehead 群 Wh$(\Pi)$ 中的象只由一个元素 $\tau(K,L)$ 所组成, 它叫作对 $(K,L)$ 的 Whitehead 挠率 (Whitehead torsion of the pair).

Whitehead 挠率的一个重要的性质是其组合不变性. 至于 $\tau(K,L)$ 是否为拓扑不变的, 还不知道.

设 $f:X\to Y$ 是一个同伦等价 ($X,Y$ 是链复形). 那么, 映射 $f$ 的挠率就定义为 $\tau(f)=f_*\tau(M_f,X)\in \mathrm{Wh}(\pi_1 Y)$, 这里 $M_f$ 是 $f$ 的映射柱. 如果 $\tau(f)=0$, 则 $f$ 就叫作一个单同伦等价 (simple homotopy equivalence). 挠率 $\tau(f)$ 的性质是: 1) 若 $i:L\to K$ 是一个包含, 则 $\tau(i)=\tau(K,L)$; 2) $\tau(g\circ f)=\tau(g)+g_*\tau(f)$; 3) 若 $f$ 同伦于 $f'$, 则 $\tau(f)=\tau(f')$; 4) 如果 $I$ 是具有 Euler 示性数 $\chi$ 的单连通复形之恒等映射, 则 $\tau(I\times f)=\chi\cdot\tau(f)$.

**参考文献**


[1] Whitehead, J. H. C., Simple homotopy types, *Amer. Math. J.*, 72 (1950), 1 - 57.

[2] Milnor, J. W., Whitehead torsion, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 72 (1966), 358 - 426. А. В. Шокуров 撰


【补注】 $\tau(K,L)$ 的拓扑不变性在 [A1] - [A3] 中已被论述.

**参考文献**


[A1] Chapman, T. A., Topological invariance of Whitehead torsion, *Amer. J. Math.*, 96 (1974), 488 - 497.

[A2] Ferry, S., The homeomorphism group of a compact Hilbert cube manifold is an ANR, *Ann. of Math.*, 106 (1977), 101 - 119.

[A3] West, J. E., Mapping Hilbert cube manifolds to ANR's: a solution to a conjecture of Borsuk, *Ann. of Math.*, 106 (1977), 1 - 18. 周伯埙 译


## Whitney 类 [Whitney class; Уитни класс]

见 **Stiefel - Whitney 类** (Stiefel - Whitney class).

## Whitney 扩张定理 [Whitney extension theorem; Уитни теорема о продолжений]

【补注】 令 $\mathscr{E}^m$ (相应地, $\mathscr{E}=\mathscr{E}^\infty$) 是 $\mathbf{R}^n$ 上的 $m$ 次可微 (相应地, 光滑) 实值函数的空间. 令 $K\subset\mathbf{R}^n$ 为紧的. 对于重指标 $k=(k_1,\cdots,k_n)$, $k_i\in\{0,1,\cdots\}$, 令 $|k|=k_1+\cdots+k_n$, $k!=k_1!\cdots k_n!$, $\partial^{|k|}/\partial x^k=(\partial^{k_1}/\partial x_1^{k_1})\cdots(\partial^{k_n}/\partial x_n^{k_n})$, $(x-a)^k=(x_1-a_1)^{k_1}\cdots(x_n-a_n)^{k_n}$, $x,a\in\mathbf{R}^n$. $K$ 上的连续函数之多元组 $F=(f^k)_{|k|\leqslant m}$ 组成向量空间 $J^m(K)$, 它以适合 $|k|\leqslant m$ 的重指标 $k$ 为指标. 例如, 设 $K$ 是一个点, 则 $J^m(pt)$ 由 $r_m$ 个实数所成的序列组成, 这里 $r_m=(n+1)\cdots(n+m)/m!$, 而可以视为与总次数 $\leqslant m$ 的所有 $n$ 元多项式之空间相同, $J^\infty(pt)$ 则可以看成是所有 $n$ 元幂级数的空间.

令 $J^m:\mathscr{E}^m\to J^m(K)$ 对每个 $g\in\mathscr{E}^m$ 赋以其 $m$ 节, 即连续函数 $(\partial^{|k|}g/\partial x^k)_{|k|\leqslant m}$ 之 $r_m$ 元组在 $K$ 上的限制; 亦见节 (jet). 对每一个 $F\in J^m(K)$ 及 $a\in K$, 令 $T_a^m F$ 为多项式

$$T_a^m F(x)=\sum_{|k|\leqslant m}\frac{(x-a)^k}{k!}f^k(a),$$

$R_a^m F$ 为 $J^m(K)$ 中元素

$$R_a^m F=F-J^m(T_a^m F),$$

其分量为 $(R_a^m F)^k$. 在 $K$ 上 Whitney 意义下可微的 (differentiable in the sense of Whitney) 函数的空间 $\mathscr{E}^m(K)$ 就是由适合下式的 $F\in J^m(K)$ 组成的:

$$(R_x^m F)^k(y)=o(\|x-y\|^{m-k})\qquad(*)$$

对 $x,y\in K$ 且 $|k|\leqslant m$ 成立.

当然, $\mathscr{E}^m(K)$ 中之元并不真正是函数, 但这没有关系. 若 $K$ 是一点, $\mathscr{E}^m(\mathrm{pt})=J^m(\mathrm{pt})$. Whitney 扩张定理 (Whitney extension theorem) 就是说, 存在一个线性映射 $W:\mathscr{E}^m(K)\to\mathscr{E}^m$ 使对每一个 $F\in\mathscr{E}^m(K)$ 及每一点 $x\in K$,

$$\left[\frac{\partial^{|k|}}{\partial x^k}WF\right](x)=f^k(x),$$

而且 $WF$ 在 $\mathbf{R}^n\setminus K$ 上为光滑的.

对于 $K=\{pt\}$, 由此即知对于每个在 $a\in\mathbf{R}^n$ 处的幂级数 $\sum_k C_k(x-a)^k$ (以 $(x_1-a_1),\cdots,(x_n-a_n)$ 为变元) 均有一个 $\mathbf{R}^n$ 上的光滑函数, 使其在 $a$ 处的 Taylor 级数正是这个幂级数.

这也可以从 Borel 扩张引理 (Borel extension lemma) (对变量个数用归纳法) 得出. 令 $f_0(x)$, $f_1(x),\cdots$ 是定义在 $0\in\mathbf{R}^n$ 的某个邻域上的光滑函数序列. 则必有一光滑函数 $F(t,x)$ 定义在 $0\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$ 的一个邻域上使得 $(\partial^r F/\partial t^r)(x,0)=f_r(x)$ 对一切 $r$ 成立.

**参考文献**


[A1] Whitney, H., Analytic extensions of differentiable functions. defined in closed sets, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 36 (1934), 63 - 89.

[A2] Malgrange, B., Ideals of differentiable functions, Oxford Univ. Press, 1966, Chapt. 1.

[A3] Tougeron, J. C., Ideaux de fonctions différentiables, Springer, 1972, Chapt. Ⅳ.

[A4] Golubitshy, M. and Guillemin, V., Stable mappings

and their singularities, Springer, 1973 齐民友 译

**Whittaker 方程 [Whittaker equation; Уиттекера уравнение]**

二阶线性齐次常微分方程

$$w'' + \left( \frac{1/4 - \mu^2}{z^2} + \frac{\lambda}{z} - \frac{1}{4} \right) w = 0, \quad (*)$$

其中变量 $z$, $w$ 和参数 $\lambda$, $\mu$ 可取任意复值. 方程 (*) 是退化超几何方程 (hypergeometric equation) 的简约形式, 由 E. T. Whittaker 首次研究 ([1]). 当 $\lambda = 0$ 时, Whittaker 方程等价于 **Bessel 方程** (Bessel equation). 如果 $2\mu$ 不是整数, 则 Whittaker 方程的一个基本解组由函数 $M_{\lambda,\mu}(z)$ 和 $M_{\lambda,-\mu}(z)$ 组成, 其中 $M_{\lambda,\mu}(z)$ 是 **Whittaker 函数** (Whittaker functions). 对任何参数值, Whittaker 方程的通解可写为线性组合形式

$$w = C_1 W_{\lambda,\mu}(z) + C_2 W_{-\lambda,\mu}(-z),$$

其中 $W_{\lambda,\mu}(z)$ 是 Whittaker 函数.

**参考文献**


[1] Whittaker, E. T., An expression of certain known functions as generalized hypergeometric functions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 10 (1903), 125 – 134.

[2] Whittaker, E. T. and Watson, G. N., A course of modern analysis, Cambridge Univ. Press, 1952.

[3] Bateman, H. and Erdélyi, A., Higher transcendental functions, 1, The gamma function. The hypergeometric functions. Legendre functions. McGraw-Hill, 1953 (中译本: A. 爱尔台里, 高级超越函数, 上海科学技术出版社, 1957 – 1958).

[4] Kratzer, A., Franz, W., Transzendente Funktionen, Geest & Portig, 1960.

[5] Kamke, E., Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen, 1. Gewöhnliche Differentialgleichungen, Akad. Verlagsgesellschaft., 1942 (中译本: E. 卡姆克, 常微分方程手册, 科学出版社, 1980).


Н. Х. Розов 撰 沈永欢 译

**Whittaker 函数 [Whittaker functions; Уиттекера функции]**

函数 $M_{\lambda,\mu}(z)$ 和 $W_{\lambda,\mu}(z)$, 它们是 **Whittaker 方程** (Whittaker equation)

$$w'' + \left[ \frac{1/4 - \mu^2}{z^2} + \frac{\lambda}{z} - \frac{1}{4} \right] w = 0 \quad (*)$$

的解. 函数 $W_{\lambda,\mu}$ 满足等式

$$W_{\lambda,\mu}(z) = \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma\left[\frac{1}{2} - \lambda - \mu\right]} M_{\lambda,\mu}(z) + \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left[\frac{1}{2} - \lambda + \mu\right]} M_{\lambda,-\mu}(z).$$

函数对 $M_{\lambda,\mu}(z)$, $M_{\lambda,-\mu}(z)$ 以及 $W_{\lambda,\mu}(z)$, $W_{-\lambda,\mu}(z)$ 是方程 (*) 的线性无关的解. 点 $z=0$ 是 $M_{\lambda,\mu}(z)$ 和 $W_{\lambda,\mu}(z)$ 的分支点, 而 $z=\infty$ 是本质奇点.

Whittaker 函数与其他一些函数之间的关系如下所述.

与**退化超几何函数** (degenerate hypergeometric function) 的关系:

$$M_{\lambda,\mu}(z) = z^{\mu+1/2} e^{-z/2} \Phi\left[ \mu - \lambda + \frac{1}{2};\, 2\mu + 1;\, z \right];$$

与变形 **Bessel 函数** (Bessel function) 和 **Macdonald 函数** (Macdonald function) 的关系:

$$M_{0,\mu}(z) = 2^{2\mu} \Gamma(\mu+1) \sqrt{z}\, I_\mu\left[ \frac{z}{2} \right];$$

$$W_{0,\mu}(z) = \sqrt{\frac{z}{\pi}}\, K_\mu\left[ \frac{z}{2} \right];$$

与**概率积分** (probability integral) 的关系:

$$W_{-1/4,1/4}(z) = 2 z^{1/4} e^{z/2} \operatorname{Erfc}(\sqrt{z});$$

与 **Laguerre 多项式** (Laguerre polynomials) 的关系:

$$W_{n+\mu+1/2,\mu}(z) = n!(-1)^n z^{\mu+1/2} e^{-z/2} L_n^{2\mu}(z).$$

**参考文献**


[1] Bateman, H. and Erdélyi, A., Higher transcendental functions, 2. Bessel functions, McGraw-Hill, 1953 (中译本: A. 爱尔台里, 高级超越函数, 上海科学技术出版社, 1957 – 1958).

[2] Whittaker, E. T. and Watson, G. N., A course of modern analysis, Cambridge Univ. Press, 1952.


Ю. А. Брычков, А. П. Прудников 撰

【补注】 Whittaker 函数 $W_{\lambda,\mu}$ 可以通过在**汇合型超几何函数** (confluent hypergeometric function) 中引入的 $\Psi$ 函数来表示:

$$W_{\lambda,\mu}(z) = \\ = e^{-z/2} z^{\mu+1/2} \Psi(\mu - \lambda + 1/2;\, 2\mu + 1;\, z).$$

因此, 在**汇合型超几何函数** (confluent hypergeometric function) 中讨论的一些特殊情况可以写成关于 Whittaker 函数的一些特殊情况. 亦见该条目的参考文献.

杜小杨 译

**Whittaker 变换 [Whittaker transform; Уиттекера преобразование]**

积分变换

$$F(x)=\int_0^\infty (2xt)^{-1/4}W_{\lambda,\mu}(2xt)f(t)dt,$$

这里 $W_{\lambda,\mu}(z)$ 是 **Whittaker 函数**(Whittaker function). 当 $\lambda=1/4$ 和 $\mu=\pm 1/4$ 时 Whittaker 变换转变为 **Laplace 变换**(Laplace transform).


**参考文献**

[1] Meijer, C. S., Eine neue Erweiterung der Laplace-Transformation. *Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wet.*, **44**(1941), 727 – 737.


Ю. А. Брычков, А. П. Прудников 撰

【补注】


**参考文献**

[A1] Doetsch, G., Handbuch der Laplace-Transformation, Ⅲ, Birkhaüser, 1973.

[A2] Whittaker, E. T. and Watson, G. N., A course of modern analysis, Cambridge Univ. Press, 1927.


葛显良 译 吴绍平 校

**Wick 积** [**Wick product**], Wick 单项式 (Wick monomial), Wick 幂 (Wick power)

【补注】 随机变量的 Wick 积是通过一个正交化程序产生的.

设 $f_1,\cdots,f_n$ 是某概率空间 $(\Omega,\mathscr{B},\mu)$ 上的(实值)随机变量. Wick 积

$$:f_1^{k_1}\cdots f_n^{k_n}:$$

被递归地定义为总次数为 $k_1+\cdots+k_n$ 的 $f_1,\cdots,f_n$ 的一个多项式, 满足

$$\langle :f_1^{k_1}\cdots f_n^{k_n}:\rangle=0,$$

且对于 $k_j\geqslant 1$,

$$\frac{\partial}{\partial f_j}(:f_1^{k_1}\cdots f_n^{k_n}:)=k_j:f_1^{k_1}\cdots f_j^{k_j-1}\cdots f_n^{k_n}:,$$

其中 $\langle\ \rangle$ 表示求期望, 符号 $:\ :$ 则是物理学中的传统记法.

例如

$$:f:=f-\langle f\rangle,$$

$$:f^2:=f^2-2\langle f\rangle f-\langle f^2\rangle+2\langle f\rangle^2.$$

有二项式定理:

$$:(af+bg)^n:$$

$$=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}a^m b^{n-m}:f^m::g^{n-m}:,$$

以及相应的多项式定理. Wick 指数 (Wick exponential) 被定义为

$$:\exp(\alpha f):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}:f^n:,$$

因此有

$$:\exp(\alpha f):=\langle\exp(\alpha f)\rangle^{-1}\exp(\alpha f). \qquad (A1)$$

Wick 积、乘幂和指数, 既依赖于其变元, 也依赖于其基础测度.

设 $f,g$ 是均值为 0 的 Gauss 随机变量, 那么

$$:\exp\alpha f:=\exp\left\{\alpha f-\frac{1}{2}\alpha^2\langle f^2\rangle\right\}, \qquad (A2)$$

$$:f^n:=\sum_m(-1)^m\frac{n!}{m!(n-2m)!2^m}f^{n-2m}\|f\|^{2m}$$

$$=\|f\|^n h_n(\|f\|^{-1}f), \qquad (A3)$$

其中

$$h_n(x)=\sum_m(-1)^m\frac{n!}{m!(n-2m)!2^m}x^{n-2m}$$

是首项系数为 1 的第 $n$ 个 **Hermite 多项式**(Hermite polynomial), 而 $\|f\|^2=\langle f^2\rangle$. 此外,

$$\langle :f^n::g^m:\rangle=\delta_{nm}n!\langle fg\rangle^n.$$

它是由如下的公式推出的:

$$:\exp\alpha f::\exp\beta g:$$

$$=\exp(\alpha f+\beta g)\exp\left\{-\frac{1}{2}(\alpha^2\langle f^2\rangle+\beta^2\langle g^2\rangle)\right\},$$

这是一个包含 Wick 单项式的许多组合的公式.

如果存在两个测度 $\mu$ 与 $\nu$, 使 $f$ 对它们都有均值为 0 的 Gauss 分布, 那么

$$:\exp\alpha f:_\mu=$$

$$=:\exp\alpha f:_\nu\exp\left\{\frac{\alpha^2}{2}(\langle f^2\rangle_\nu-\langle f^2\rangle_\mu)\right\}. \qquad (A4)$$

设 $f_1,\cdots,f_n$ 是均值为 0 的联合 Gauss 变量(不必不同). 那么关于 Wick 单项式 $:f_1\cdots f_n:$ 有下述明显的公式:

$$:f_1\cdots f_n:=$$

$$=\sum_G\prod_{e\in G}(-\langle f_{e_1}f_{e_2}\rangle)\prod_{j\notin[G]}f_j, \qquad (A5)$$

其中, $G$ 遍历 $\{1,\cdots,n\}$ 的所有配对(有时称为图), 即 $\{1,\cdots,n\}$ 的不交无序对的所有集合. $[G]$ 是组成 $G$ 的无序对的并, 而若 $e$ 为一无序对, 则 $\{e_1,e_2\}$ 为组成该对的顶点集.

例如:

$$:fg^2:=fg^2-2\langle fg\rangle g-\langle g^2\rangle f,$$

$$:f^2g^2:=f^2g^2-\langle f^2\rangle g^2-\langle g^2\rangle f^2-4\langle fg\rangle fg+$$
$$+2\langle fg\rangle^2+\langle f^2\rangle\langle g^2\rangle.$$

设$\{I_\nu\}$ $(\nu=1,\cdots,n)$是一族不交的有限集. 按照定义, $\{I_\nu\}$上的一条线是取自不同的$I_\nu$的一对元素. $\{I_\nu\}$上的一个图则是$\{I_\nu\}$上不交线的一个集. 如果把每个$I_\nu$看成是一个有$|I_\nu|$条"腿"从中伸出的顶点, 那么图$G$就可想像成联结不同顶点的腿的线之集. 使得所有的腿都被联结的图, 是一个(某种特殊类型的)全收缩图(fully contracted graph), 真空图(vacuum graph)或 Feynman 图(Feynman graph; Feynman diagram).

上面出现的"配对"情形对应于每个顶点只有一条腿的$\{I_\nu\}$上的图. 利用这些 Feynman 图, Wick 单项式的积可以表成如下的 Wick 单项式的线性组合.

设$I_\nu(\nu=1,\cdots,n)$是一族不交的有限集, $I=\bigcup_\nu I_\nu$, 而$f_j$是一族以$I$为指标集的联合 Gauss 随机变量. 那么

$$\prod_\nu:\prod_{j\in I_\nu}f_j:=\sum_G\prod_{e\in G}\langle f_{e_1}f_{e_2}\rangle:\prod_{j\notin[G]}f_j:,\quad (A6)$$

其中$G$遍历$\{I_\nu\}$上所有的图, 而$[G]$是组成$G$的所有不交无序对的并. 更一般的 Feynman 图, 如还带有自交线的图, 出现在涉及某些不同协方差的情形, 见[A4].

关于 Wick 单项式之积的期望, 有

$$\langle\prod_\nu:\prod_{j\in I_\nu}f_j:\rangle=\sum_{G\in\Gamma_0(\{I_\nu\})}\prod_{e\in G}\langle f_{e_1}f_{e_2}\rangle,\quad (A7)$$

特别有

$$\langle f_1\cdots f_n\rangle=\begin{cases}0, & n\text{ 为奇数},\\ \sum_{G\in\Gamma_0(n)}\prod_{e\in G}\langle f_{e_1}f_{e_2}\rangle, & n=2k,\end{cases}\quad (A8)$$

其中$\Gamma_0(2k)$遍历把$\{1,\cdots,2k\}$分裂成$k$个无序对的所有$(2k)!\,2^{-k}(k!)^{-1}$种分法. 所有这些公式(A1)~(A4), (A7), (A8), 特别是(A8), 通常被命名为 Wick 公式(Wick formula)或 Wick 定理(Wick theorem).

在(Euclid)量子场论的建立中, 设$\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$是急减光滑函数的 Schwartz 空间, $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$是实值缓广义函数空间. 对于$f\in\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$, 令$\varphi(f)$是由$\varphi(f)(u)=u(f)$定义的$\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$上的线性函数. 那么对于$\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)\times\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$上的任一连续正纯量积$C$, $(f,g)\mapsto\langle f,Cg\rangle$, 在$\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$上存在唯一的可数可加 Gauss 测度$dq_C$, 使

$$\int e^{i\varphi(f)}dq_C=\exp\left\{-\frac{1}{2}\langle f,Cf\rangle\right\},\ f\in\mathscr{S}(\mathbf{R}^n).$$

于是对于所有$p\in[1,\infty)$, $\varphi(f)\in L_p(\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n),dq_C)$, 且

$$\int\varphi(f)dq_C=0,$$

$$\int\varphi(f_1)\varphi(f_2)dq_C=\langle f_1,Cf_2\rangle.$$

所以$\langle\varphi(f_1)\varphi(f_2)\rangle=\langle f_1,Cf_2\rangle$, 而某些 Wick 单项式的公式现在取如下形式:

$$:\varphi(f)^n:=$$

$$=\sum_j\frac{n!}{(n-2j)!j!2^j}(-1)^j\langle f,Cf\rangle^j\varphi(f)^{n-2j}=$$

$$=\langle f,Cf\rangle^{n/2}h_n(\varphi(f)/\langle f,Cf\rangle^{1/2}),\quad (A3')$$

$$:\sum_{\nu=1}^n\varphi(f_\nu):=\sum_G\prod_{e\in G}\langle f_{e_1},\ -Cf_{e_2}\rangle\prod_{j\notin[G]}\varphi(f_j).\quad (A5')$$

Wick 单项式在很多情形下都是经由伊藤-Wick-Segal 同构(Ito-Wick-Segal isomorphism)与 **Фок 空间**(Fock space)联系起作用的. 这是基于如下两个紧密关联的唯一性定理: 标准 Gauss 函数的唯一性(uniqueness of standard Gaussian functions)或 Фок 表示的唯一性(uniqueness of Fock representation).

设$\mathscr{S}$为一准 Hilbert 空间. $\mathscr{S}$上的一个正则对易关系表示(representation of the canonical commutation relations), 是一对线性映射

$$f\mapsto a(f),\ g\mapsto a^*(g),$$

它们是从$\mathscr{S}$映到定义在一复 Hilbert 空间$H$的稠域$D$上的算子$a(f)$, $a^*(g)$, 使得对所有$x, x_1, x_2\in D$, $f, g\in\mathscr{S}$,

$$a(f)D\subset D,\ a^*(g)D\subset D,$$

$$\langle x_1,a(f)x_2\rangle=\langle a^*(f)x_1,x_2\rangle,$$

$$[a(f),a(g)]=[a^*(f),a^*(g)]=0,$$

$$[a(f),a^*(g)]x=\langle f,g\rangle x.$$

这个表示称为 Фок 表示(Fock representation), 如果此外还存在一个$\Omega\in D$, 称为真空向量(vacuum vector), 使得

$$a(f)\Omega=0,\ f\in\mathscr{S},$$

且使$D$为向量$a^*(g_1)\cdots a^*(g_k)\Omega$, $g_j\in\mathscr{S}$, $k=0,1,$

…，张成的线性空间．有一个存在性定理（见 **Фок 空间**（Fock space）与**对易和反对易关系的表示**（commutation and anti-commutation relationships, representation of））及唯一性定理：如果 $(a_i, a_i^*)$ $(i=1, 2)$ 是 $\mathscr{V}$ 上的两个 Фок 表示，且有真空向量 $\Omega_i$，那么它们是酉等价的，且其酉等价 $U$ 由 $U\Omega_1=\Omega_2$ 唯一确定．

一个实 Hilbert 空间 $V$ 上的标准 Gauss 函数（standard Gaussian function）（[A3] 中称为以 $V$ 为指标集的 Gauss 随机过程（Gaussian random process indexed by $V$））是从 $V$ 到概率空间 $(X, \mathscr{B}, \mu)$ 上的随机变量的一个映射 $\varphi$，使得（几乎处处）成立

$$\varphi(v+w)=\varphi(v)+\varphi(w),\ v,\ w\in V,$$

$$\varphi(\alpha v)=\alpha\varphi(v),\ \alpha\in\mathbf{R},\ v\in V,$$

还使 $\varphi(v)$ $(v\in V)$ 生成的 $\sigma$ 域就是 $\mathscr{B}$（除相差零测集外），且使 $\varphi(v)$ 为均值 0 的 Gauss 随机变量，并有

$$\langle\varphi(v)\varphi(w)\rangle=\langle v, w\rangle.$$

以此为目标，有一个存在性定理，还有唯一性定理指出，概率空间 $(X, \mathscr{B}, \mu)$ 与 $(X', \mathscr{B}', \mu')$ 上的两个标准 Gauss 函数在下述意义上是等价的：存在两个概率空间之间的同构，使 $\varphi(v)$ 与 $\varphi'(v)$ 对一切 $v\in V$ 彼此对应（见 [A1]，§4，[A3] 第 1 章）．这个唯一性定理是 Колмогоров 定理的一个特殊情形，后者指出，测度空间由相容的联合概率分布完全确定．

把对称 Фок 空间 $F(V)$ 与实现 $H$ 上的标准 Gauss 函数的空间 $L_2(X, \mathscr{B}, \mu)$ 等同起来，$\varphi(v)$ 的 Wick 积即可由取通常的积然后应用 $F(V)$ 在其 $n$ 粒子子空间上的正交投影而得到．

在概率测度为 $(2\pi)^{-1/2}e^{-x^2/2}dx$ 的一个 Gauss 变量 $x$ 的情形，上述问题解决如下：

$$:x^n:=h_n(x).$$

$L_2(\mathbf{R}, (2\pi)^{-1/2}e^{-x^2/2}dx)$ 的 Фок 表示是

$$\Omega=1,\ a=\frac{d}{dx},\ a^*=x-\frac{d}{dx},$$

而事实上，$h_n(x)=(x-d/dx)^n(1)$，它是合适的，因为 $F(\mathbf{R})$ 上的产生算子是 $a^*(e^{\otimes n})=e^{\otimes(n+1)}$．利用变量 $y=x/\sqrt{2}$，

$$\Omega=1,\ a=\frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{d}{dy},\ a^*=\sqrt{2}\ y-\frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{d}{dy},$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{2}}(a+a^*),$$

而

$$:y^n:=(\sqrt{2})^{-n}h_n(\sqrt{2}\ y)=$$

$$=(\sqrt{2})^{-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{*k}a^{n-k},$$

其中在右边（$((a+a^*)/\sqrt{2})^n$ 的"二项式展开"中，湮没算子 $a$ 全部排在产生算子 $a^*$ 的前面（Wick 序（Wick ordering））．加以适当的解释，同样的公式一般也成立，见 [A3]，第 24 页．

**参考文献**


[A1] Dobrushin, R. L., Minlos, R. A., Polynomials in linear random functions, *Russian Math. Surveys*, **32** (1977), 71–127 (*Uspekhi Mat. Nauk*, **32** (1977), 67–122).

[A2] Dimock, J., Glimm, J., Measures on Schwartz distribution space and applications to $P(\varphi)_2$ fields theories, *Adv. in Math.*, **12** (1974), 58–83.

[A3] Simon, B., The $P(\varphi)_2$ Euclidean (quantum) field theory, Princeton Univ. Press, 1974.

[A4] Glimm, J., Jaffe, A., Quantum physics, Springer, 1981.


**【译注】**

**参考文献**


[B1] 黄志远，严加安，无穷维随机分析引论，科学出版社，1997．


潘一民 译

**宽度** [**width**; **поперечник**]，集合的

刻画在一定的逼近方法下度量空间中一个集合与一组（照例是有限维的）对象之间的偏离程度的值．宽度也估量在一定的编码技巧下从已知集合中取出某个元素的准确度．得到广泛研究的宽度有 Александров 宽度（用有限维紧统逼近一个集合的可能性估计）及 Колмогоров 宽度（用有限维线性流形逼近一个集合的可能性估计）．

设 $X$ 是赋范空间，单位球为 $B$，$C\subset X$ 是待逼近的子集，$\mathfrak{A}=\{A: A\subset X\}$ 是一族逼近子集，$F(C, A)$ 是映射 $f: C\to A$ 的集合，最后，$\mathfrak{F}=\mathfrak{F}(C, \mathfrak{A})=\bigcup_{A\in\mathfrak{A}}F(C, A)$．数

$$p_{\mathfrak{F}}(C, X)=\inf_{f\in\mathfrak{F}}\sup_{x\in C}\|x-f(x)\| \qquad (1)$$

是在逼近方法 $\mathfrak{F}$ 下集合 $C$ 偏离逼近集族 $\mathfrak{A}$ 的一个估计．

作为在各式各样的逼近方法下对逼近性质的估计，大多数宽度都是由 (1) 给出的．

若 $\mathfrak{A}=\mathfrak{M}_N$ 是维数 $\leqslant N$ 的所有线性流形（即线性子空间的平移）的集合 $\{M_N\}$，$F(C, M_N)$ 是从 $C$ 到 $M_N$ 的所有映射的集合，则表达式 (1) 称为集合 $C$ 的 Колмогоров $N$ 宽度（$N$-width according to Kolmogorov），通常记为 $d_N(C, X)$，是已知集合 $C$ 偏离 $N$

维线性流形的最小偏离估计．

下面是 $d_N$ 的另一个等价而一般可以接受的定义（见[1]）：

$$d_N(C,X)=\inf_{\{M_N\}}\sup_{x\in C}\inf_{y\in M_N}\|x-y\|$$

$$=\inf_{\{M_N\}}\inf_{\varepsilon}\{\varepsilon>0:C\subset M_N+\varepsilon B\}. \qquad (1')$$

若 $\mathfrak{A}=\mathfrak{M}_N$（或 $\mathfrak{L}_N$，维数 $\leqslant N$ 的所有子空间的集合 $\{L_N\}$），$F(C,M_N)[F(C,L_N)]$ 是把 $C$ 映入 $M_N(L_N)$ 的所有仿射（线性）连续映射的集合，则量（1）记为 $\alpha_N(C,X)[\lambda_N(C,X)]$，称为仿射（线性）$N$ 宽度（affine（linear）$N$-width），估计了在仿射（线性）$N$ 维映射下的逼近性质．

若 $\mathfrak{A}=\mathfrak{K}_n$ 是所有 $N$ 维紧统（等价地，所有 $N$ 维多面体）的集合（$K_N$），$F(C,K_N)$ 是从 $C$ 到 $K_N$ 的所有连续映射的集合，则量（1）称为 Александров $N$ 宽度（$N$-width according to Alexandrov），记为 $a_N(C,X)$，它估计了 $N$ 维紧统逼近集合 $C$ 的程度．

若 $\mathfrak{A}=\Sigma_N$ 是 $X$ 的所有 $N$ 点集 $\xi_N=\{x_1,\cdots,x_N\}$ 的集合 $\{\xi_N\}$，$F(C,\xi_N)$ 是从 $C$ 到 $\xi_N$ 的所有映射的集合，则宽度（1）记为 $\varepsilon_N(C,N)$，是集 $C$ 偏离 $N$ 点集的最小程度．

上述所有近似宽度均依赖于环绕空间 $X$，当 $C$ 连同其度量一起嵌入另一个赋范空间时是可以改变的．

另一类宽度涉及对集合 $C$ 的元素用另一种元素加以编码的问题．这个过程经常称为取出问题．让 $C$ 是度量空间，$Z=\{\zeta\}$ 是一族"编码"集，$\varphi(C,\zeta)$ 是一族映射 $f:C\to\zeta$．最后，$\Phi=\Phi(C,Z)=\bigcup_{\zeta\in Z}\varphi(C,\zeta)$ 是已知的编码方法集．量

$$p^{\Phi}(C)=\inf_{f\in\Phi}\sup_{z\in f(C)}D(f^{-1}(z)) \qquad (2)$$

估计了利用由 $Z$ 中集合 $\zeta$ 的元素在 $\Phi$ 中的映射下"编码"而得的信息取出集 $C$ 的元素的可能性，其中 $D(E)$ 表示集合 $E$ 的直径．涉及取出过程的大多数宽度均由类似于（2）的公式给出．

若 $\Phi$ 是从 $C$ 到 $Z$ 的一切可能的映射的集合，这里 $Z$ 由唯一的集合 $\{1,2,\cdots,N\}$ 组成，则宽度（2）记为 $\varepsilon^N(C)$，估计了利用 $N$ 个元素组成的一张表取出某个元素的准确度．若 $C$ 位于线性赋范空间 $X$ 中，$\Phi$ 是映入 $\mathbf{R}^N$ 的所有仿射连续映射的集合，则量 $p^{\Phi}(C)/2$ 称为 Гельфанд $N$ 宽度（$N$-width according to Gel'fand），记为 $d^N(C)$．它估计了利用元素在映入 $\mathbf{R}^N$ 的仿射映射下的象来取出该元素的准确度，其中 $p^{\Phi}(C)$ 由（2）定义．就关于原点成对称的集合而言，宽度 $d^N$ 有另一个等价的定义：

$$d^N(C)=\inf_{\{N\}}\sup_{x\in C\cap L^N}\|x\|=$$

$$=\inf_N\sup_{\varepsilon}\{\varepsilon<0:\ C\cap L^N\subset\varepsilon B\}, \qquad (2')$$

其中 $L^N$ 是余维数为 $N$ 的闭子空间．让 $Z$ 由所有 $N$ 维紧统 $\{K_N\}$ 组成，$\varphi(C,K_N)$ 是把 $C$ 映入 $K_N$ 的所有连续映射的集合，$\Phi=\bigcup\varphi(C,K_N)$．这时（2）称为 Урысон $N$ 宽度（$N$-width according to Urysohn），记为 $u_N(C)$．Урысон 宽度的另一个等价而广泛使用的定义如下：$u_N(C)$ 是集合 $C$ 的阶数 $\leqslant N+1$ 的覆盖集的所有直径的下确界．Урысон 宽度估计了集合 $C$ 的 $N$ 维性程度（按 Brouwer 维数的观点）．

后来称为宽度的第一个量是 1923 年 П．С．Урысон 定义 $u_N$ 时引进的（见[2]）．1933 年 П．С．Александров（[3]）建立了关于维数论的逼近理论，结果定义了 $a_N$．1933 年 А．Н．Колмогоров（[1]）定义了 $d_N$，这个宽度在逼近论中得到深入研究．1931 年 Л．С．Понтрягин 和 Л．Г．Шнирельман（[4]）把维数（一个拓扑示性数）表为一个渐近的度量示性数 $N_\varepsilon(C)$（$\varepsilon^N(C)$ 的逆），就度量空间 $C$ 而言，等于 $C$ 的 $2\varepsilon$ 覆盖元素的最少个数．在 50 年代，对这种示性数的兴趣增大了．那时，Колмогоров（[5]）基于信息论的论断引进了 $N_\varepsilon(C,X)$（$\varepsilon_N(C,X)$ 的逆），并且提出了一个研究诸如 $N_\varepsilon(C)$ 及 $N_\varepsilon(C,X)$ 这些变量的规划，作为逼近论中与函数最优列表法问题有关的一个特定部分．$N_\varepsilon(C,X)$ 的以 2 为底的对数称为集合 $C$ 的 $\varepsilon$ 熵（$\varepsilon$-entropy），而 $\log_2 N_\varepsilon(C)$ 称为 $C$ 的绝对 $\varepsilon$ 熵（absolute $\varepsilon$-entropy）．

现在已经得到一系列具体结果，对若干形形色色的函数和几何对象算出了某些宽度，这些计算可以分成两组：渐近的和精确的．

涉及 Соболев 类宽度的渐近计算的某些结果如下．让 $W_p^r$ 是某个有限区间（例如 $[0,1]$）上的函数 $x(\cdot)$ 的集合，其中 $x(\cdot)$ 具有绝对连续的 $r-1$ 阶导数和 $r$ 阶导数，使得

$$\|x^r(\cdot)\|_p=\left[\int_0^1|x^{(r)}(t)|^p dt\right]^{1/2}<1,\ p\geqslant 1.$$

下述渐近公式成立：

$$d_N(W_p^r,L_q)\sim\begin{cases}N^{-[r-(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})]},\ 1\leqslant q\leqslant p\leqslant\infty \text{ 或 } 1\leqslant p\leqslant q\leqslant 2,\\ N^{-[r-(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})]},\ 1\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty,\ q\geqslant 2.\end{cases} \qquad (3)$$

就（3）中上一行的某些特殊情形而言，渐近最优逼近空间是三角多项式空间或结点一致分布的样条空间．

人们曾经猜测，这样的渐近性态总是出现的，即阶数一定的三角多项式子空间总是渐近极端子空间．结果，这个猜测不成立（见[10]，[13]）．由 $\{\cos nt, \sin nt: 0 \leq n \leq N\}$ 张成的三角多项式集合就是渐近非极端集．不过，就若干情形而言，"重排"调和多项式，即取"不规则"序的 $\sim N$ 调和多项式，仍然是极端集．

Соболев 类宽度问题的解基于 $\mathbf{R}^n$ 中 $n$ 维八面体

$$O_p^n = \{x \in \mathbf{R}^n: \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \leq 1\}$$

的直径问题．就 $p > q$ 而言，量 $d_N(O_p^n, l_q^n)$ 已经精确确定；此外，$d_N(O_1^n, l_2^n)$ 已经精确算出，结果是 $(1 - N/n)^{1/2}$．下述估计（见[13]）对计算 Соболев 类的 Колмогоров 宽度非常重要：

A) $d_N(O_1^n, l_\infty^n) \leq 2N^{-1/2}(\ln n)^{1/2}$;

B) $d_N(O_2^n, l_\infty^n) \leq AN^{-1/2}(1 + \ln n/N)^{3/2}$，其中 $A$ 是常数；

C) 若 $\lambda \in (0,1)$，则在 $n^\lambda \leq N \leq n$ 时下述不等式成立：

$$d_N(O_1^n, l_\infty^n) \leq C_\lambda N^{-1/2}.$$

Соболев 类的 Александров 宽度的渐近性态也得到考虑．已经证明

$$a_N(W_p^r, L_q) \sim \frac{1}{N^r}, \quad 1 < p, q < \infty, \ r \in \mathbf{N}.$$

宽度的精确计算等价于对已知类求极端逼近．第一个这样的结果是 Колмогоров（[1]）得到的，他解决了计算 $d_N(W_2^r, L_2[0,1])$ 的问题，以及在 $L_2([-\pi,\pi])$ 的度量下周期类 $W_2^r$ 的类似问题．

为了计算宽度 $d_N(\widetilde{W}_\infty^r, L_\infty[-\pi,\pi])$ 的精确值，首先使用了（见[7]）某些拓扑方法（化为 Borsuk 对径点的球面宽度定理）．这个定理得到推广（见[12]），并且用来得到另一些精确解．后来建立了与变分学及最优控制论的某些有趣联系（见[9]）．

关于 $\varepsilon_N$, $\varepsilon^N$ 及逆值 $N_\varepsilon(C)$ 及 $N_\varepsilon(C,X)$ 的信息见 ε 熵（ε-entropy）．

与宽度有关的某些问题与几何中的形形色色的问题密切相关．例如，$N_\varepsilon(C, \mathbf{R}^n)$ 的渐近性态问题与空间 $\mathbf{R}^n$ 的最优球面包装问题密切相关．由于宽度的渐近性态依赖于环绕空间，从而引进了绝对宽度

$$p_F^A(C) = \inf p_F(C, X),$$

其中下确界是对 $C$ 的所有嵌入来取的，$C$ 的度量即是环绕空间 $X$ 中的度量．此外，例如（见[9]）还有

$$\varepsilon_N^A(C) = \frac{1}{2}\varepsilon^N(C),$$

$$a_N^A(C) = \frac{1}{2}u_N(C).$$

**参考文献**


[1] Kolmogorov, A. N., Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse, *Ann of Math.*, 37(1936), 107–110.

[2] Урысон, П. С., Труды по топологии и другим областям математики, М.-Л., 1(1951), 483.

[3] Aleksandrov, P. S., Über die Urysohnschen Konstanten, *Fund. Math.*, 20(1933), 140–150.

[4] Hurewicz, W. and Wallman, H., Dimension theory, Princeton Univ. Press, 1941 (Appendix by L. S. Pontryagin, L. G. Shnirel'man in Russian edition).

[5] Колмогоров, А. Н., 《Докл. АН СССР》, **108** (1956), 3, 385–388.

[6] Брудный Ю. А., Тиман А. Ю., 《Докл. АН СССР》, **126**(1959), 5, 927–930.

[7] Тихомиров В. М., 《Успехи Матем. наук.》, **15** (1960), 3, 81–120; **20**(1965), 1, 227–230.

[8] Тихомиров В. М., Некоторые вопросы теории приближений, М. 1976

[9] Тихомиров В. М., Теория приближения функций, Тр. Межд. конф. по Теории приближения функций, Калуга, 1975, М, 1977, 359–365.

[10] Исмагилов Р. С., в кн., Геометрия линейных пространств и теория операторов, Ярославль, 1977, 75–113.

[11] Исмагилов Р. С., 《Успехи матем. наук.》, **29** (1974), 3, 161–178.

[12] Маковоз, Ю. И., 《Матем. сб.》, **87** (1972), 1, 138–142.

[13] Кашин, Б. С., 《Изв. АН СССР, Сер. матем.》, **41**(1977), 2, 334–351.

[14] Корнейчук Н. П., Экстремальные задачи теории приближения, М., 1976.


В. М. Тихомиров 撰

【补注】 关于逼近论中的宽度理论，西方文献中的最好来源可能是[A3]，其中有一份详尽的文献目录，含有许多俄文的参考资料．

Александров $N$ 宽度及 Урысон $N$ 宽度可以用来刻画覆盖维数（convering dimension）（见维数（dimension））：若 $X$ 是某个 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 的紧子空间，则 $\dim X \leq N$ 的充要条件是 $a_N(X) = 0$，即存在任意小的映射，把 $X$ 映入 $N$ 维多面体．同样，若 $X$ 是紧度量子空间，则 $\dim X \leq N$ 的充要条件是 $u_N(X) = 0$．

**参考文献**


[A1] Engelking, R., Dimension theory, PWN & North Holland, 1978.

[A2] Michelli, Ch. A. and Rivlin, Th. J., A Survey in optimal recovery, in Ch. A. Michelli and Th. J. Rivlin (eds.): Optimal Estimation in Approximation Theory, Plenum, 1977, 1–54.

[A3] Pinkus, A., *n*-widths in approximation theory, Springer, 1985.


胡师度，白苏华 译

**Wiener 浑沌分解 [Wiener chaos decomposition]**

【补注】 设 $U$ 为一可分 Hilbert 空间 $H$ 的稠子空间. 由单射 $i: U \to H$ 给定的三重组 $U \subset H \subset U^*$, 是由等同 $H$ 与其对偶, 取 $i$ 的对偶, 再赋予 $U$ 的代数对偶 $U^*$ 以弱拓扑而得到的. 对于任意实数 $\lambda$, 令 $\lambda H$ 为以 $\lambda$ 乘 $H$ 的范数而从 $H$ 得到的 Hilbert 空间.

对称 $k$ 重张量积 $S_k(U)$ 的对偶, 是 $U$ 上所有 $k$ 次齐次多项式的空间 $\mathrm{Pol}_k(U)$. $F_k \in \mathrm{Pol}_k(U)$ 在 $u \in U$ 处的值是 $F_k(u) = \langle F_k, u^{\otimes k} \rangle_{k!}$. 因此, 对每个 $k$, 存在一三重组

$$S_k(U) \subset \sqrt{k!}\ S_k(H) \subset \mathrm{Pol}_k(U). \qquad (A1)$$

取内空间 $S_k(U)$ 的直和及中心空间的 Hilbert 和, 得到一三重组

$$S(U) \subset \mathrm{Fock}(H) \subset \hat{\mathrm{Pol}}(U), \qquad (A2)$$

称为包装 Фок 空间 (dressed Fock space). 其中项是通常的 **Фок 空间** (Fock space),

$$\mathrm{Fock}(H) = \bigoplus \sqrt{k!}\ S_k(H). \qquad (A3)$$

外空间是 $U$ 上所有形式幂级数的空间 $\prod_k \mathrm{Pol}_k(U)$. $F \in \hat{\mathrm{Pol}}(U)$ 在 $u \in U$ 处的值 $F(u)$ 定义为 $\lim_{N} \sum_{k=1}^{N} F_k(u)$, 若此极限存在. 例如, 对任意 $F = \sum F_k \in \mathrm{Fock}(H)$, 有

$$F(u) = \langle F, e^u \rangle, \qquad (A4)$$

其中 $e^u = \sum (k!)^{-1} u^{\otimes k}$.

一个概率化向量空间 (probabilized vector space) 是一个构造

$$(U \cdots X \supset \Omega, \mathsf{P}), \qquad (A5)$$

其中 $U$ 和 $X$ 是两个对偶的空间, 而 $X = \mathrm{span}(\Omega)$ 是由 $X$ 的子集 $\Omega$ 线性生成的. 这个子集被赋予一 Polish (或 Суслин) 拓扑, 使任一 $u \in U$ 定义一 $\Omega$ 上的 Borel 函数 $u(\omega) = \langle u, \omega \rangle$. 空间 $U$ 包含一个分离 $\Omega$ 的点的可数子集 (因此其 Borel $\sigma$ 域由 $U$ 生成). 最后, $\mathsf{P}$ 是这个 $\sigma$ 域上的概率测度.

此外, 假定柱面多项式的空间 $P(\Omega) = \mathrm{span}(u(\omega)^k$: $u \in U$, $k = 0, 1, 2, \cdots)$ 在 $L_2(\Omega)$ 中是稠密的. 还设如下 $U$ 上的双线性型为一纯量积:

$$b(u, v) =$$

$$= \mathsf{E}([u(\omega) - \mathsf{E}(u(\omega))][v(\omega) - \mathsf{E}(v(\omega))]), \qquad (A6)$$

且令 $H$ 是 $U$ 的完全化. 对于任意 $k > 0$, 令 $\pi_k$ 表示 $L_2(\Omega)$ 在 $\mathrm{span}(u(\omega)^j$: $u \in U$, $j < k)$ 的闭包 $\overline{P_{<k}(\Omega)}$ 上的正交投影. 令 $KO_k$ 为 $\overline{P_{<k}(\Omega)}$ 在 $\overline{P_{\leqslant k}(\Omega)}$ 中的正交补, 这个空间即称为 $k$ 次齐次浑沌 (homogeneous chaos). 空间 $L_2(\Omega)$ 是 $KO_k$ 的 Hilbert 直和. 此处 $L_2(\Omega)$ 允许一个浑沌分解 (decomposition in chaos), 如果对于任何 $k$, 如下的映射是等距映射:

$$\sqrt{k!}\ S_k(H) \supset S_k(U) \ni$$

$$\ni Q \stackrel{I_k}{\mapsto} Q - \pi_k(Q) \in KO_k \subset L_2(\Omega).$$

这些等距映射 $I_k (k = 0, 1, \cdots)$ 的集合是一个等距映射 $I$, 它的逆映射

$$L_2(\Omega) \stackrel{I^{-1}}{\to} \mathrm{Fock}(H),\ f \mapsto \hat{f} \qquad (A7)$$

扩张到 $\Omega$ 上的广义函数, 乃是 $\Omega$ 上广义函数演算的出发点. 由于 (A4), $\hat{f}$ 显然由下式给出:

$$\hat{f}(u) = \langle \hat{f}, e^u \rangle = \mathsf{E}[f \varepsilon^u], \qquad (A8)$$

其中 $\varepsilon^u = I^{-1}(e^u)$.

浑沌分解是由 N. Wiener 发现的 (对 $\Omega$ 为 Wiener 空间的情形) ([A1]). 进一步的贡献则应归于 Th. A. Dwyer 与 I. Segal([A2], [A3]), 它们在构造性量子场论中是很重要的. K. 伊藤获得了 Poisson 概率空间的浑沌分解, 并把 $I_k(f)$ 解释为重随机积分. 关于公式 (A8) 扩张到 Gauss 概率空间的广义函数, 见 [A5], [A6], [A7], [A9], [A10]. 与 Malliavin 演算的联系, 见 [A8].

更多的材料亦见 [A11], [A12]; **Wick 积** (Wick product), **白噪声分析** (White noise analysis), 及其中的参考文献.

**参考文献**


[A1] Wiener, N., The homogeneous chaos, Amer. J. Math., **60** (1938), 897 – 936.

[A2] Dwyer, Th. A., III: Partial differential equations in Fischer-Fock spaces for the Hilbert-Schmidt holomorphy type, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 77 (1971), 725 – 730.

[A3] Segal, I., Tensor algebras over Hilbert space, I, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **81** (1956), 106 – 134.

[A4] Itô, K., Multiple Wiener integral, J. Math. Soc. Japan, (1951), 157 – 169.

[A5] Krée, P., Solutions faibles d'equations aux dérivées fonctionelles II, in Sém. P. Lelong 1973/1974, Lecture notes in math., Vol. 474, Springer, 1974, 16 – 47.

[A6] Krée, P., Raczka, R., Kernels and symbols of operators in quantum field theory, Ann. Inst. H. Poincaré (1978).

[A7] Lascar, B., Propriétés locales des espaces de type

Sobolev en dimension infinie, *Comm. Partial Diff. Eq.*, 1 (1976), 6, 561 – 584.

[A8] Ocone, D., Malliavin calculus and stochastic integral representation of functionals of diffusion processes. *Stochastics*, 12 (1984), 161 – 185.

[A9] Krée, M., Propriété de trace en dimension infinie d'espaces du type Sobolev, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 279 (1974), 157 – 160.

[A10] Krée, M., Propriété de trace en dimension infinie d'espaces de type Sobolev, *Bull Soc. Math. de France*. 105 (1977), 141 – 163.

[A11] Kallianpur, G., The role of reproducing kernel Hilbert spaces in the study of Gaussian processes, in P. Ney (ed.): Adv. in Probability and Related Topics, Vol. 2, M. Dekker, 1970, 49 – 84.

[A12] Neveu, J., Processus aléatoires Gaussiens, Presses Univ. de Montréal, 1968.

P. Krée 撰 潘一民 译

**Wiener-Hopf 方程 [Wiener-Hopf equation; Винера-Хопфа уравнение]**

在半直线上带有依赖于自变量之差的核的一种积分方程

$$u(x)-\int_0^{\infty}k(x-s)u(s)ds=f(x),\ 0\leqslant x<\infty. \tag{1}$$

这种类型的方程常常出现于数学物理问题中，例如在辐射转移理论（Milne 问题）中；在绕射理论中（在半平面上的绕射，边界折射问题）.

方程（1）的最早研究应归功于 N. Wiener 和 E. Hopf（[1] 和 [2]），且用一种因子分解方法来处理（见 **Wiener-Hopf 方法**（Wiener-Hopf method））. 正是因子分解的思想证明是如（1）一类积分方程理论构作中的决定性因素. В. А. Фок（[3]）在核 $k(x)$ 是偶的且按指数递减的假设下研究了 Wiener-Hopf 方程.

解 Wiener-Hopf 方程的形式方案如下. 设

$$v(x)=\begin{cases}u(x) & \text{当 } x>0,\\ 0 & \text{当 } x<0,\end{cases}$$

$$n(x)=\begin{cases}0 & \text{当 } x<0,\\ -\int_0^{\infty}k(x-s)u(s)ds & \text{当 } x<0.\end{cases}$$

则方程（1）能在整个直线上写成

$$v(x)-\int_{-\infty}^{\infty}k(x-s)v(x)ds=f(x)+n(x),\quad -\infty<x<\infty. \tag{2}$$

如果构成方程（2）的组成部分的所有函数的 Fourier 变换的存在性条件满足，即

$$V(\lambda)=\int_0^{\infty}u(x)e^{i\lambda x}dx,\ K(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}k(x)e^{i\lambda x}dx,$$

$$F(\lambda)=\int_0^{\infty}f(x)e^{i\lambda x}dx,\ N(\lambda)=\int_{-\infty}^{0}n(x)e^{i\lambda x}dx$$

存在，则用 **Fourier 变换**（Fourier transform），方程（2）化成函数方程

$$[1-K(\lambda)]V(\lambda)=F(\lambda)+N(\lambda), \tag{3}$$

其中 $V(\lambda)$ 和 $N(\lambda)$ 是未知函数. Wiener-Hopf 方法使得对某一类函数解方程（3）是可能的. 在这方面，条件 $1-K(\lambda)\neq 0$ 必须满足. 该方程的指标

$$\nu=-\operatorname{ind}[1-K(\lambda)]=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d_{\lambda}[1-K(\lambda)], \tag{4}$$

在具有非对称核的方程（1）的理论中起着特别的作用. 设 $k\in L_1(-\infty,\infty)$ 且 $1-K(\lambda)\neq 0$，则有：如果 $\nu=0$，那么非齐次方程（1）有唯一解；如果 $\nu>0$，那么齐次方程（1）有 $\nu$ 个线性无关的解；如果 $\nu<0$，那么非齐次方程（1）或者无解，或者当以下条件：

$$\int_0^{\infty}f(x)\psi_k(x)dx=0,\ k=0,\cdots,|\nu|-1$$

满足时有唯一解，这里 $\psi_k(x)$ 是（1）的转置齐次方程

$$\psi(x)-\int_0^{\infty}k(x-s)\psi(s)ds$$

的线性无关解.

**参考文献**

[1] Wiener, N. and Hopf, E., Ueber eine Klasse singulärer Integralgleichungen, *Sitzungber. Akad. Wiss. Berlin*, (1931), 696 – 706.

[2] Hopf, E., Mathematical problems of radiative equilibrium, Cambridge Univ. Press, 1934.

[3] Фок, В. А., 《Матем. сб.》, 14 (1944), 1 – 2, 3 – 50.

[4] Noble, B., Methods based on the Wiener-Hopf technique for the solution of partial differential equations, Pergamon, 1958.

В. И. Дмитриев 撰

【补注】 关于上面提到的 Wiener-Hopf 积分方程解的一些定理发表于[A1]中，该文在许多不同的 Banach 或 Hilbert 型函数空间中讨论方程（1）. 该理论的矩阵值的说法属于[A2]. 当 $K(\lambda)$ 是一个有理矩阵函数的情况下的显式解可在[A3]中找到. 关于 Wiener-Hopf 积分方程理论的最近阐述，包括 Fredholm 理论和对有理的 $K(\lambda)$ 情况的状态空间方法，见[A4].

参考文献

[A1] Kreĭn, M. G., Integral equations on a half-line with kernel depending upon the difference of the arguments, *Transl. Amer Math Soc.* (2), **22** (1962), 162 – 288 (*Uspekhi Mat. Nauk* 13 (1958), 5, 3 – 120).

[A2] Gohberg, I. and Kreĭn, M. G., Systems of integral equations on a half line with kernels depending on the difference of arguments, *Transl. Amer. Math. Soc.* (2), **14** (1960), 217 – 287 (*Uspekhi Mat. Nauk*, **13** (1958), 2(80), 3 – 72).

[A3] Bart, H., Gohberg, I. and Kaashoek, M. A., Minimal factorizations of matrix and operator functions, Birkhäuser, 1979.

[A4] Gohberg, I., Goldberg, S. and Kaashoek, M. A., Classes of linear operators, 1, Birkhäuser, 1990, Chapts, Ⅺ – Ⅻ.

[A5] Hochstatt, H, Integral equations, Wiley, 1973.

葛显良 译 吴绍平 校

**Wiener-Hopf 法 [Wiener-Hopf method; Винера-Хопфа метод]**

解以下类型：

$$A(\lambda)\Phi_+(\lambda)+B(\lambda)\Phi_-(\lambda)+C(\lambda)=0 \quad (1)$$

的函数方程的一种方法，其中 $A(\lambda)$、$B(\lambda)$、$C(\lambda)$ 是一个复变量 $\lambda$ 的给定函数，在带形 $\tau_- < \operatorname{Im}\lambda < \tau_+$ 内解析，且 $A(\lambda)$ 和 $B(\lambda)$ 在此带形中是非零的．函数 $\Phi_+(\lambda)$ 和 $\Phi_-(\lambda)$ 是复变量 $\lambda$ 的未知函数，当 $|\lambda| \to \infty$ 时趋于零且是待定的，$\Phi_+(\lambda)$ 对 $\operatorname{Im}\lambda > \tau_-$ 解析而 $\Phi_-(\lambda)$ 对 $\operatorname{Im}\lambda < \tau_+$ 解析．方程 (1) 必须在整个的解析带形 $\tau_- < \operatorname{Im}\lambda < \tau_+$ 满足．

Wiener-Hopf 方法以下面两个定理为基础．

1) 在带形 $\tau_- < \operatorname{Im}\lambda < \tau_+$ 内解析且当 $|z| \to \infty$ 时一致趋向于零的函数 $F(\lambda)$ 在此带形内能够表成和式：

$$F(\lambda)=F_+(\lambda)-F_-(\lambda),$$

其中 $F_+(\lambda)$ 在半平面 $\operatorname{Im}\lambda > \tau_-$ 内解析，而 $F_-(\lambda)$ 在半平面 $\operatorname{Im}\lambda < \tau_+$ 内解析．

2) 在带形 $\tau_- < \operatorname{Im}\lambda < \tau_+$ 内解析且不为零而又在此带形内当 $|\lambda| \to \infty$ 时一致趋于 1 的函数 $F(\lambda)$ 在该给定带形内可表成乘积：

$$F(\lambda)=F_+(\lambda)\cdot F_-(\lambda), \qquad (2)$$

其中 $F_+(\lambda)$ 和 $F_-(\lambda)$ 分别在半平面 $\operatorname{Im}\lambda > \tau_-$ 和 $\operatorname{Im}\lambda < \tau_+$ 内解析且不为零．表示式 (2) 通常称为函数 $F(\lambda)$ 的一个因子分解 (factorization)．

Wiener-Hopf 法的基本思想在于将函数 $L(\lambda)=A(\lambda)/B(\lambda)$ 作因子分解是可能的；换言之，该方法基于表示式

$$\frac{A(\lambda)}{B(\lambda)}=\frac{L_+(\lambda)}{L_-(\lambda)} \qquad (3)$$

是可能的这一假定．利用 (3)，方程 (1) 可写成：

$$L_+(\lambda)\Phi_+(\lambda)+L_-(\lambda)\Phi_-(\lambda)+L_-(\lambda)\frac{C(\lambda)}{B(\lambda)}=0.$$

由于 $L_-(\lambda)C(\lambda)/B(\lambda)$ 在该带形内部解析，有

$$L_-(\lambda)\frac{C(\lambda)}{B(\lambda)}=D_+(\lambda)+D_-(\lambda). \qquad (4)$$

利用 (4)，最后得到方程 (1) 变为形式

$$L_+\Phi_++D_+=-D_--L_-\Phi_-. \qquad (5)$$

(5) 式左边表示一个在 $\operatorname{Im}\lambda > \tau_-$ 中是解析的函数，而右边是一个在 $\operatorname{Im}\lambda < \tau_+$ 中是解析的函数．由于它们有一个公共的解析性带形，在其中条件 (5) 满足，因而存在唯一的整函数 $P(\lambda)$ 分别地与 (5) 的左边和右边在它们的解析区域中恒等．因而

$$\Phi_+(\lambda)=\frac{P(\lambda)-D_+(\lambda)}{L_+(\lambda)},$$

$$\Phi_-(\lambda)=\frac{-P(\lambda)-D_-(\lambda)}{L_-(\lambda)},$$

即 (1) 的解是唯一确定到相差一个整函数．如果 $L(\lambda)$ 和 $D(\lambda)$ 的增长阶数在无穷处是有界的，$P(\lambda)$ 必是一个多项式．所求诸函数则唯一地确定到相差常数，它们由所加的附加条件计算出．

Wiener-Hopf 法在 [1] 中形成用于解特殊类型的积分方程 (见 **Wiener-Hopf 方程** (Wiener-Hopf equation))．它随后在数学物理的各种问题中找到了广泛的应用 ([2])．

参考文献

[1] Wiener, N. and Hopf, E., Ueber eine Klasse singulärer Integralgleichungen, *Sitzungber. Akad. Wiss. Berlin*, (1931), 696 – 706.

[2] Noble, B., Methods based on the Wiener-Hopf technique for the solution of partial differential equations, Pergamon, 1958.

В. И. Дмитриев 撰

【补注】 上面叙述的定理 2 是错误的；它需要一个附加条件，即由 $\lambda \mapsto F(\lambda)$ 参数化的曲线的卷绕数等于零，这里 $\lambda$ 跑遍给定带形中直线 $\operatorname{Im}\lambda=\tau$．所以上面描述的 Wiener-Hopf 法仅在对 $A(\lambda)/B(\lambda)$ 卷绕数条件满足这附加要求下才可行．对各种函数类 (不必在一带形上解析) 的 Wiener-Hopf 法的详细分析可在 [A1] 中找到．这个理论的矩阵值的表述，应归于 [A2] (亦见 [A3])，是更加复杂且显式解仅在特殊情况才能得到．当出现于方程 (1) 的函数 $A(\lambda)$ 和 $B(\lambda)$ 是有理矩阵的情形是特别有兴趣的且能应用一种与数学系统理论有联系的状态空间方法显式地求解 (见

[A4]、[A5] 和**卷积型积分方程** (integral equation of convolution type)).

**参考文献**

[A1] Kreĭn, M. G., Integral equations on a half-line with kernel depending upon the difference of the arguments, *Transl. Amer. Soc* (2), **22** (1962), 163 – 288 (Uspekhi Mat. Nauk, **13** (1958), 5, 3 – 120).

[A2] Gokhberg, I. Ts. and Kreĭn, M. G., Systems of integral equations on a half line with kernels depending on the difference of arguments, *Transl. Amer. Math. Soc.* (2), **14** (1960), 217 – 287 (Uspekhi Mat. Nauk, **13** (1958), 2 (80)).

[A3] Gohberg, I. C. and Feldman, I. A., Convolution equations and projection methods for their solution, Amer. Math. Soc., 1974 (译自俄文).

[A4] Bart, H., Gohberg, I. and Kaashoek, M. A., Minimal factorizations of matrix and operator functions, Birkhaüser, 1979.

[A5] Gohberg, I. and Kaashoek, M. A., The state space method for solving singular integral equations, in A. C. Antoulas (ed.): Mathematical System Theory. The influence of Kalman, Springer, 1991, 509 – 523.

[A6] Hochstatt, H., Integral equations, Wiley, 1973.

葛显良 译 吴绍平 校

**Wiener 积分 [Wiener integral; Винера интеграл]**

一种 Lebesgue 型的抽象积分，是定义在无穷维函数空间中集族上泛函的积分，由 N. Wiener 在 19 世纪研究 **Brown 运动** (Brownian mation) 时引进的 ([1], [2]).

设 $C_0$ 是由定义在 $[0, 1]$ 上的实值连续函数 $x$ 组成的向量空间，其中 $x(0)=0$，其范数为

$$\|x\| = \max_{t\in[0,1]} |x(t)|.$$

集合

$$Q = \{x\in C_0:\ a_i \leqslant x(t_i) \leqslant b_i,\ 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1\}$$

称为该空间的拟区间 (quasi-interval). 这里 $a_i$ 和 $b_i$ 可以是 $-\infty$ 和 $+\infty$，但此时符号 $\leqslant$ 必须换成符号 $<$. 全空间 $C_0 = \{x(t):\ -\infty < x(1) < +\infty\}$ 就是拟区间一例.

拟区间 $Q$ 的 Wiener 测度 (Wiener measure) 是指数值

$$\mu_W(Q) = \frac{1}{\sqrt{\pi^n \prod_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})}} \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} e^{-L_n} dx_n \cdots dx_1,$$

其中

$$L_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{(x_j - x_{j-1})^2}{t_j - t_{j-1}},$$

且 $x_j = x(t_j)$. 这一测度扩展于由拟区间生成的集族 Borel 域上的 $\sigma$ 加性测度也就是著名的 Wiener 测度.

设 $F$ 是 $C_0$ 上的一个泛函，关于测度 $\mu_w$ 是可测的. 此时，其 Lebesgue 型积分

$$\int_{C_0} F(x) d\mu_W(x)$$

就是知名的泛函 $F$ 的 Wiener 积分 (Wiener integral)，或泛函 $F$ 关于 Wiener 测度的积分 (integral with respect to the Wiener measure). 如果 $E \subset C_0$ 是可测的，那么

$$\int_E F(x) d\mu_W(x) = \int_{C_0} F(x)\chi_E(x) d\mu_W(x),$$

其中 $\chi_E$ 是集合 $E$ 的特征函数.

Wiener 的积分具有通常 Lebesgue 积分的多种性质. 特别是，在集合 $E$ 上的一个有界可测泛函在此集合上关于 Wiener 测度是可积的，且此外如果 $F$ 是连续和非负的，那么

$$\int_{C_0} F(x) d\mu_W(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi^n \prod_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})}} \times$$

$$\times \int_{R^n} \frac{F_n(x_1, \cdots, x_n)}{e^{L_n}} dx_1, \cdots, dx_n,$$

其中 $F_n(x_1, \cdots, x_n)$ 是关于点列 $(t_i, x_i \equiv x(t_i))$ 间 $x(t)$ 的线性内插上 $F$ 的值.

Wiener 积分的计算呈现出相当大的困难，甚至对最简单的泛函也如此. 有时，这项工作可转化为解一个简单微分方程 ([1]).

有一种方法，可借助高重数 Stieltjes 积分 (Stieltjes integrals) 的逼近来近似计算 Wiener 积分.

**参考文献**

[1] Ковальчик, И. М., 《Успехи матем. наук》, **18** (1963), 1, 97 – 134.

[2] Шилов, Г. Е., 《Успехи матем. наук》, **18** (1963), 2, 99 – 120.

В. И. Соболев 撰

【补注】 关于上述意义下的 Wiener 积分还可参见 [A1] 和 [A2]. 在西方的文献中，"Wiener 积分"的正式称呼是指一个确定性函数 $f\in L_2[0, t]$ (对每个 $t\in\mathbf{R}_+$) 关于概率空间 $(\Omega, \mathscr{S}, P)$ 上的 **Wiener 过程** (Wiener process) $X(t)$ 的**随机积分** (stochastic integral). 记为

$$I_t(f) = \int_0^t f(s) dX(s),$$

且定义如下：如果 $f$ 是一个简单函数 (simple function)，

即对 $s\in(t_{i-1}, t_i)$ 有 $f(s)=a_i$，其中 $a_i\in\mathbf{R}$ 且 $0=t_0<t_1<\cdots<t_n=t$，那么

$$I_t(f)=\sum_{i=1}^{n}a_i(X(t_i)-X(t_{i-1})).$$

记简单函数全体为 $S$. 对 $f, g\in S$，经计算可得 $\mathsf{E}\,I_t(f)=0$, $\mathsf{E}(I_t(f)I_t(g))=\int_0^t f(s)g(s)ds$，即 $f\mapsto I_t(f)$ 是从 $L_2[0, t]$ 到 $L_2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ 的保内积映射. 对任一 $f\in L_2[0, t]$，存在一列 $f_n\in S$，使得 $f_n\to f$，从而 $\{I_t(f_n)\}$ 是 $L_2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ 中的 Cauchy 列，而定义

$$\int_0^t f(s)dX(s)=\lim_{n\to\infty}I_t(f_n).$$

这一构作中值得注意的特性如下：

能对一切 $t\geqslant 0$ 同时定义 $I_t(f)$，且可得到一种界说，它是具有连续样本道路

$$\mathrm{sp}\{X(s): 0\leqslant s\leqslant t\}=\{I_t(f): f\in L_2[0, t]\}$$

的 Gauss 鞅 (Gaussion martingale)，其中“sp”表示在 $L_2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ 中的闭线性张成. 关于在此意义下的 Wiener 积分见 [A3]，[A4].

参考文献

[A1] Chorin, A. J., Accurate evaluation of Wiener integrals, *Math. Comp.*, **27** (1973), 1 – 15.

[A2] Blankenschip, G. L. and Baras, J. S., Accurate evaluation of stochastic Wiener integrals with applications to scattering in random media and to nonlinear filtering, *SIAM J. Appi. Math.*, **41** (1981), 518 – 552.

[A3] Davis, M. H. A., Linear estimation and stochastic control, Chapman & Hall, 1977.

[A4] Lipster, R. S. and Shiryaev, A. N., Statistics of random processes, I, Springer, 1977 (译自俄文).

[A5] Yeh, J., Stochastic processes and the Wiener integral, M. Dekker, 1973.

[A6] Simon, B., Functional integration and quantum physics, Acad. Press, 1979.

[A7] Rogers, L. C. G. and Williams, D., Diffusions, Markov processes, and martingales, 2, Itô calculus, Wiley, 1987.

[A8] Bauer, H., Probability theory and elements of measure theory, Holt, Rinehart & Winston, 1972.

周民强 译

## Wiener 测度 [Wiener measure; Винера мера]

区间 [0, 1] 上的实值连续函数 $x$ 组成的空间 $C[0, 1]$ 上的**概率测度** (probability measure) $\mu_W$，定义如下：设 $0<t_1<t_2<\cdots<t_n\leqslant 1$ 是 [0, 1] 的任一组样本点，$A_1, \cdots, A_n$ 是实轴上的 Borel 集. 记 $C(t_1, \cdots, t_n; A_1, \cdots, A_n)$ 是一族函数 $x\in C[0, 1]$，其中 $x(t_k)\in A_k$, $k=1, 2, \cdots, n$. 那么

$$\mu_W(C(t_1, \cdots, t_n; A_1, \cdots, A_n))= \qquad (*)$$
$$=\int_{A_1}p(t_1, x_1)dx_1\int_{A_2}p(t_2-t_1, x_2-x_1)dx_2\cdots$$
$$\cdots\int_{A_n}p(t_n-t_{n-1}, x_n-x_{n-1})dx_n,$$

这里

$$p(t, x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-x^2/2t}.$$

借助于测度扩张定理，根据等式 (*)，可以在所有 $C[0, 1]$ 的 Borel 集上定义测度 $\mu_W$ 的值.

А. В. Скороход 撰

【补注】 Wiener 测度是 N. Wiener 在 1923 年导入的 ([A1])；这是积分论在超越有限维背景下首次较大的拓广. 上面概述的构作容易扩展到定义在 $C[0, \infty)$ 上的 Wiener 测度 $\mu_W$. 坐标过程 $x(t)$ 就是著名的 **Brown 运动** (Brownian motion) 或 **Wiener 过程** (Wiener process). 它的形式导数“$dx(t)/dt$”称为 Gauss **白噪声** (white noise).

参考文献

[A1] Wiener, N., Differential space, *J. Math & Phys.*, **2** (1923), 132 – 174.

[A2] Hida, T., Brownian motion, Springer, 1980.

[A3] Karatzas, I. and Shreve, S. E., Brownian motion and stochastic calculus, Springer, 1988.

[A4] Partzsch, L., Vorlesungen zum eindimensionalen Wienerschen Prozess, Teubner, 1984.

[A5] Yeh, J., Stochastic processes and the Wiener integral, M. Dekker, 1973.

[A6] Albeverio, S., Fenstad, J. E., Høegh-Krohn, R. and Lindstrøm, T., Nonstandard methods in stochastic analysis and mathematical physics, Acad. Press., 1986.

周民强 译

## Wiener 过程 [Wiener process; Винеровский процесс]

一种具有独立增量的齐次 **Gauss 过程** (Gaussian process) $X(t)$. Wiener 过程作为 **Brown 运动** (Brownian motion) 的模型之一. 经简单的变换把 Wiener 过程作为“标准”Wiener 过程 $X(t)$, $t\geqslant 0$，它满足

$$X(0)=0, \ \mathsf{E}(X(t)-X(s))=0,$$
$$\mathsf{D}[X(t)-X(s)]=t-s, \ s\leqslant t.$$

对于这样的平均值和增量方差，这是具独立增量的，几乎必然连续的仅有过程. 以下 Wiener 过程就理解为这种过程.

Wiener 过程 $X(t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$，也可以定义作具有零期望和协方差函数

$$B(s,t)=\min(s,t)$$

的 Gauss 过程. Wiener 过程 $X=X(t),\ t\geqslant 0$, 也可以定义作具有转移函数

$$P(t,x,\Gamma)=\int_{\Gamma} p(t,x,y)\,dy$$

的齐次 **Марков** 过程 (Markov process), 其中**转移密度** (transition density) $p(t,x,y)$ 是偏微分方程

$$\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

的基本解, 用公式

$$p(t,x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-(y-x)^2/2t}$$

给定. 其转移函数 $P(t,x,\Gamma)$ 在相空间中是平移不变的:

$$P(t,x+y,\Gamma)=P(t,x,\Gamma-y),$$

其中 $\Gamma-y$ 表示集合 $\{z:z+y\in\Gamma\}$.

Wiener 过程是离散时间质点的**随机游动** (random walk) 的连续类比. 质点在离散时刻 $t=k\Delta t$ ($\Delta t$ 的倍数) 随机地位移一个与过去独立的量 $\Delta X(t)$ ($\mathsf{E}\Delta X(t)=0$, $\mathsf{D}\Delta X(t)=\Delta t$); 更确切地, 如果

$$X(t)=\sum_{k=0}^{m-1}\Delta X\left[\frac{k}{n}\right]+(nt-m)\Delta X\left[\frac{m}{n}\right],$$

$$0\leqslant t\leqslant 1,$$

是这一质点在区间 $[0,1]$ 上运动的随机轨道 (其中 $m=[nt]$ 是 $nt$ 的整数部分, $X(t)=nt\Delta X(0)$, 如果 $0\leqslant t<1/n$, $\mathsf{P}_n$ 是在连续函数 $x=x(t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, 空间上相应的概率分布), 则 Wiener 过程 $X(t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, 轨道的概率分布是分布 $\mathsf{P}_n$ 当 $n\to\infty$ 时 (在弱收敛意义上) 的极限.

作为一个取值在 Hilbert 空间 $L_2(\Omega)$ (一切具有 $\mathsf{E}X^2<\infty$ 的随机变量构成的空间, 其内积由公式

$$<X_1,X_2>=\mathsf{E}X_1X_2$$

定义) 上的函数, Wiener 过程 $X=X(t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, 可以规范地表示为

$$X(t)=\sum_{k=0}^{\infty}z_k\varphi_k(t),$$

其中 $z_k$ 是独立 Gauss 变量,

$$\mathsf{E}z_k=0,\ \mathsf{D}z_k=\frac{1}{\left[\frac{\pi}{2}(2k+1)\right]^2},$$

且

$$\varphi_k(t)=\sin\left[\frac{\pi}{2}(2k+1)t\right],\ k=0,1,\cdots$$

是用下述公式在一切 $[0,1]$ 上平方可积 (关于 Lebesgue 测度) 函数的 Hilbert 空间 $L_2[0,1]$ 上定义的算子 $B$ 的本征函数.

$$B\varphi(t)=\int_0^1 B(s,t)\varphi(s)\,ds.$$

Wiener 过程的几乎所有的轨道具有下述性质:

$$\limsup_{h\to 0}\frac{X(h)}{\sqrt{2h\ln\ln\frac{1}{h}}}=1,\ X(0)=0,$$

这是**重对数律** (law of the iterated logarithm);

$$\limsup_{h\to 0+,\,0\leqslant t\leqslant\delta-h}\frac{|X(t+h)-X(t)|}{\sqrt{2h\ln\frac{\delta}{h}}}=1,$$

表征在 $[0,h]$ 上连续性的模数; 以及

$$\lim_{h\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}|\Delta X(kh)|^2=\delta,$$

$$h=\frac{\delta}{n},\ \Delta X(t)=X(t+h)-X(t).$$

当应用于 Wiener 过程 $X_1(t)=tX(1/t)$, $0\leqslant t<\infty$, 时, 重对数律写作

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{X_1(t)}{\sqrt{2t\ln\ln t}}=1.$$

最大值 $\max_{0\leqslant s\leqslant t}X(s)$, Brown 质点首达一固定点 $x>0$ 的首达时 $\tau_x$, 以及在 Brown 质点的运动中首次见到值 $\max_{0\leqslant s\leqslant t}X(s)$ 的时刻 $\tau$ 的分布深刻地刻画了 Brown 质点运动的性质, 这些分布用下列公式给出:

$$\mathsf{P}\{\max_{0\leqslant s\leqslant t}X(s)>x\}=\frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\int_x^{\infty}e^{-u^2/2t}\,du,$$

$$P\{\tau_x\geqslant t\}=P\{\max_{0\leqslant s\leqslant t}X(s)\leqslant x\}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{x/\sqrt{t}}e^{-u^2/2}\,du,$$

$$0<t<\infty,\ 0\leqslant x<\infty,$$

(对相空间的变换 $x\to -x$, Wiener 过程的分布律保持不变). 最大值点 $\tau$, $0\leqslant\tau\leqslant t$, 和最大值 $\max_{0\leqslant s\leqslant t}X(s)$ 本身的联合分布具有概率密度

$$p(s,x)=\frac{1}{\pi\sqrt{s(t-s)}}\frac{x}{s}e^{-x^2/2s},$$

$$0<s<t,\ 0\leqslant x<\infty,$$

而点 $\tau$ 本身 (以概率 1 在区间 $0\leqslant s\leqslant t$ 上仅有一个最大值) 按**反正弦律** (arcsine law):

$$\mathsf{P}(\tau\leqslant s)=\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{s}{t}},\quad 0\leqslant s\leqslant t,$$

分布, 具有概率密度

$$p(s)=\frac{1}{\pi\sqrt{s(t-s)}},\ 0<s<t.$$

Wiener 过程的下列性质很容易由上述公式得到．Brown 轨道是无处可微的；从任意点 $x$ 开始以概率 1，轨道穿过"水平"$x$（回到它的起始点）无穷多次，即便在短时间 $\delta$ 内；Brown 轨道以概率 1 通过所有的点 $x$（更严格的说，$\tau_x<\infty$）对于大的 $x$，$\tau_x$ 的最可能值与 $x^2$ 同阶．如果考虑固定区间 $[0,t]$，轨道往往在接近于端点 $s=0$ 和 $s=t$ 处达到其极值．

因为 Wiener 过程是齐次 Марков 过程，存在它的不变测度 $Q(dx)$，即

$$Q(A)=\int Q(dx)P(t,x,A),$$

因为已经看到转移函数 $P(t,x,A)$ 是不变的，它与实直线上的 Lebesgue 测度相合：$Q(dx)=dx$．Brown 运动在时间 0 和 $T$ 之间处于集合 $A$ 上的时间 $T(A)$ 满足，当 $T\to\infty$ 时，

$$\frac{T(A_1)}{T(A_2)}\to\frac{Q(A_1)}{Q(A_2)}$$

以概率 1 对任何有界 Borel 集 $A_1$ 和 $A_2$ 成立．

由 Lévy（[3]）导出的 Wiener 随机场类似于向量参数 $t=(t_1,\cdots,t_n)$ 的 Wiener 过程 $X(t)$．

**参考文献**


[1] Itô, K. and MacKean, H. P., Diffusion processes and their sample paths, Springer, 1974.

[2] Прохоров, Ю. В., Розанов, Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд, М., 1973（英译本：Prokhorov, Yu. V. and Rozanov, Yu. A., Probability theory, Springer, 1969）.

[3] Lévy, P., Processus stochastiques et mouvement Brownien, Gauthier-Villars, 1965.

[4] Павлов, В. П., Броуновское движение, в кн.: БСЭ, 3 изд, т. 4, М.,


Ю. А. Розанов 撰

【补注】 西方文献中更普遍地是把 Wiener 过程看作 **Brown 运动**（Brownian motion）．它是随机分析中最重要的结构．对迄今为止有关它的性质的阐述见[A1]－[A3]．特别重要的是局部时（local time）理论．在区间$[0,t]$上 Borel 集 $B$ 的**占据时间**（occupation time）是

$$\Gamma_t(B)=\int_0^t I_B(X(s))ds.$$

存在一个几乎必然联合连续的**随机场**（random field）$L(t,x)$，$(t,x)\in\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}$，使得

$$\Gamma_t(B)=2\int_B L(t,x)dx.$$

$L(t,x)$ 是在 $x$ 处的局部时．对固定的 $x\in\mathbf{R}$，过程 $t\mapsto L(t,x)$ 的样本轨道是增的、连续的，但对 Lebesgue 测度是奇异的．

亦见 **Марков 过程**（Markov process）；**随机微分方程**（stochastic differential equation）．

**参考文献**


[A1] Durrett, R., Brownian motion and martingales in analysis, Wadworth, 1984.

[A2] Karatzas, I. and Shreve, S. E., Brownian motion and stochastic calculus, Springer, 1988.

[A3] Revuz, D. and Yor, M., Continuous martingales and Brownian motion, Springer, 1990.

[A4] Dynkin, E. B., Markov processes, I, Springer, 1965（译自俄文）.

[A5] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, 1－2, Wiley, 1957－1971（中译本：W. 费勒，概率论及其应用，第一卷，上、下册，科学出版社，1964，1979；第二卷，科学出版社，1994）.

[A6] Gihman, I. I. and Skorohod, A. V., The theory of stochastic processes, Ⅲ, Springer, 1975（译自俄文）.

[A7] Hida, T., Brownian motion, Sprigner, 1980.

[A8] Spitzer, F., Principles of random walk, v. Nostrand, 1964.

[A9] Yeh, J., Stochastic processes and the Wiener integral, M. Dekker, 1973.

[A10] Doob, J. L., Classical potential theory and its probabilistic counterpart, Springer, 1984.


刘秀芳 译 陈培德 校

**Wiener Tauber 定理**［**Wiener Tauberian theorem**；**Винера Тауберова теорема**］

若 $x\in L_1(-\infty,\infty)$ 有处处不为零的 **Fourier 变换**（Fourier transform），$y$ 是 $L_\infty(-\infty,\infty)$ 中的函数，使得 $t\to\infty$ 时卷积 $(x*y)$ 趋于零，则对任意 $z\in L_1(-\infty,\infty)$，卷积 $(z*y)$ 当 $t\to\infty$ 时趋于零．它是 N. Wiener 建立的（[1]）．这个定理可以推广到包含任何可换局部紧非紧群 $G$ 上：若 $x$ 是 $G$ 上的函数，关于 **Haar 测度**（Haar measure）可和，其 Fourier 变换在 $G$ 的特征群 $\hat{G}$ 上不为零，$y$ 是 $L_\infty(G)$ 内函数，使得卷积 $(x*y)$ 在 $G$ 的无穷远处趋于零，则对 $G$ 中所有可和函数 $z$，卷积 $(z*y)$ 在 $G$ 的无穷远处趋于零．

这个定理基于可换局部紧群的**群代数**（group algebra）的正则性，及属于仅有限个正则极大理想的闭理想的群代数中**谱综合**（spectral synthesis）的可能性（[3]）．

**参考文献**


[1] Wiener, N., Tauberian theorems, *Ann. of Math.* (2), 33 (1932), 1, 1－100.

[2] Наймарк, М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968（英译本：Naimark, M. A., Normed rings, Reidel, 1984）.

[3] Bourbaki, N., Théories spectrales, Eléments de mathématique. Hermann, 1967. А. И. Штерн 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hewitt, E. and Ross, K. A., Abstract harmonic analysis, 2, Springer, 1970.

[A2] Rudin, W., Fourier analysis on groups, Interscience, 1962.

[A3] Reiter, H., Classical harmonic analysis and locally compact spaces, Clarendon Press, 1968.

罗嵩龄 译

**Wilcoxon 检验 [Wilcoxon test; Вилкоксона критерий]**

两个样本 $X_1,\cdots,X_n$ 和 $Y_1,\cdots,Y_m$ 齐一性的**非参数检验**(non-parametric test). 假设两样本的元素相互独立, 其分布函数是连续型的, 分别为 $F(x)$ 和 $G(x)$. 拟检验的假设为 $F(x)=G(x)$. Wilcoxon 检验基于**秩统计量**(rank statistic)

$$W=s(r_1)+\cdots+s(r_m), \qquad (*)$$

其中 $r_j$ 是随机变量 $Y_j$ 在 $X_i$ 和 $Y_j$ 的联合顺序统计量序列中的秩, 而函数 $s(r)(r=1,\cdots,n+m)$ 由事先给定的置换决定,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n+m \\ s(1) & s(2) & \cdots & s(n+m) \end{pmatrix},$$

其中 $s(1),\cdots,s(n+m)$ 是数 $1,\cdots,n+m$ 可能的排列之一. 对于给定的备选假设, 选择置换使 Wilcoxon 检验的功效最大. 统计量 $W$ 的分布只依赖于样本容量, 而不依赖于置换的选择(只要齐一性假设成立). 当 $n\to\infty, m\to\infty$ 时, 随机变量 $W$ 有渐近正态分布. Wilcoxon 检验的这种形式, 是 F. Wilcoxon 针对两等容量样本于 1945 首先提出的, 并且是于 $s(r)\equiv r$ 的特殊情形(见**秩和检验**(rank sum test); **Mann-Whitney 检验**(Mann-Whitney test)). 亦见 **van der Waerden 检验**(van der Waerden test); **秩检验**(rank test).

参考文献

[1] Wilcoxon, F., Individual comparison by ranking methods, *Biometrics*, 1(1945), 6, 80-83.

[2] Большев, Л. Н., Смирнов, Н. В., Таблицы математической статистики, М., 1983.

[3] Waerden, B. L. van der, Mathematische statistik, Springer, 1957. А. В. Прохоров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Lehmann, E. L., Testing statistical hypotheses, Wiley, 1988. 周概容 译

**非驯嵌入 [wild imbedding; дикое вложение]**. 拓扑空间 $X$ 在拓扑空间(topological space) $Y$ 中的

一个嵌入, 它不拓扑等价于从被称为驯顺的(tame)或佳嵌入(nice imbeddings)中选出来的某类的嵌入. 下面所列的情形是最有用的; $n$ 维 Euclid 空间取作 $Y$.

1) 设 $M$ 是一个 $k$ 维拓扑流形(见**流形的拓扑学**(topology of manifolds)), 拓扑嵌入 $g:M\to\mathbf{R}^n$(见**嵌入的拓扑学**(topology of imbeddings)) 称为非驯的(wild), 如果不存在 $\mathbf{R}^n$ 到它自身的一个同胚, 它将 $g(M)$ 变到 $\mathbf{R}^n$ 中的一个局部平坦的子流形中.

2) 设 $P$ 是一个 $k$ 维**多面体**(polyhedron). 拓扑嵌入 $g:P\to\mathbf{R}^n$ 称为非驯的(wild), 如果不存在 $\mathbf{R}^n$ 到它自身的一个同胚, 它将 $g(P)$ 变到 $\mathbf{R}^n$ 中的多面体中(即变到一个有某个三角剖分的体中).

3) 设 $K$ 是 $k$ 维**局部紧空间**(locally compact space). 拓扑嵌入 $g:K\to\mathbf{R}^n$ 称为非驯的, 如果不存在 $\mathbf{R}^n$ 到它自身的一个同胚, 它将 $g(K)$ 变到 $k$ 维 Menger 紧统 $M_n^k$ 的一个子集中.

如果维数 $k\leqslant n-3$ 和如果 $n\geqslant 5$, 那么, 在所有三种情形中导出的性质是由下面的局部同伦性质来刻画: 一个嵌入是非驯的, 当且仅当 $g(X)$ 不满足性质 $1-ULC$(见**嵌入的拓扑学**(topology of imbedding)). 对余维数 $n-k=1$ 和 2 的状况更加复杂: 对 $n\geqslant 6$, 余维数为 1 的流形, 问题已被解决, 但余维数为 2 的嵌入流形和多面体, 两者都没有完全解决. 如果 $Y$ 是 $n$ 维流形——拓扑的或者分片线性的, 所有叙述的也都是有意义的.

М. А. Штанько 撰 徐森林 译

**非驯纽结 [wild knot; дикий узел]**

Euclid 空间 $E^3$ 中的一个纽结 $L$(见**纽结理论**(knot theory)), 使得不存在 $E^3$ 到它自身的同胚, 在此同胚下, $L$ 变成由有限条线段组成的闭折线.

这样, 包含所谓的 Fox-Artin 弧(Fox-Artin arcs)——由 $E^3$ 中的**非驯嵌入**(wild imbedding)得到的一些简单弧——的纽结为非驯的. 例如, 对弧 $L_1$(图 1), 基本群 $\pi_1(E^3\setminus L)$ 是非平凡的; 对弧 $L_2$(图 2), 该群是平凡的, 但是 $E^3\setminus L_2$ 自身不同胚于一个点在 $E^3$ 中的补集.

关于参考文献, 见**非驯球面**(wild sphere).



图 1



图 2

М. И. Войцеховский 撰　徐森林 译

**非驯球面** [**wild sphere**; **дикая сфера**]

三维 Euclid 空间中的一个闭流形，它由**球面** $S^2$ 在 $E^3$ 中的**非驯嵌入** (wild imbedding) 得到．因此，非驯球面是两个具有公共边界的圆盘的并，它是一个**非驯纽结** (wild knot)．非驯球面的第一个例子是所谓的"有角球面"或 Alexander 球面 (Alexander sphere) (图 1)；它界住一个不同胚于 $E^3$ 的区域（在图中，这是没有任何将环柄和形成它们边界的点相连接的圆柱的内部）．图 2 表示了一个非驯球面，在它里面单个的外部区域不同胚于 $E^3$．

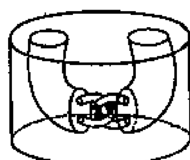


图 1

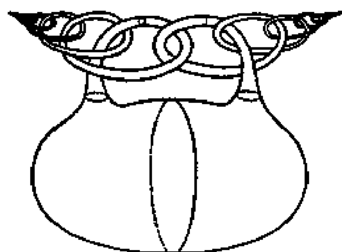


图 2

**参考文献**

[1] Келдыш, Л. В., Топологические вложения в евклидово пространство, ТР. Матем. ин-та АН СССР, **81** (1966).

М. И. Войцеховский 撰

**【补注】**

**参考文献**

[A1] Bing, R. H., The geometric topology of 3-manifolds, Amer. Math. Soc., 1983.

[A2] Moise, E. E., Geometric topology in dimensions 2 and 3, Springer, 1977

徐森林 译

**Wilson 多项式** [**Wilson polynomials**; **Вилсона многочлены**]

**【补注】** 由广义**超几何级数** (hypergeometric series) 通过

$$\frac{W_n(x^2;\, a,\, b,\, c,\, d)}{(a+b)_n(a+c)_n(a+d)_n} =$$

$$= {}_4F_3\left(\begin{matrix} -n,\, n+a+b+c+d,\, a+ix,\, a-ix \\ a+b,\, a+c,\, a+d \end{matrix};1\right)$$

定义的**正交多项式** (orthogonal polynomials)，其中 $(a)_n = \Gamma(a+n)/\Gamma(a) = a(a+1)\cdots(a+n-1)$ 是 Pochhammer 符号 (Pochhammer symbol)．它们满足正交性关系

$$\int_0^\infty W_n(x^2)W_m(x^2)w(x)dx = 0,\ n \neq m,$$

其中

$$w(x) =$$

$$= \left|\frac{\Gamma(a+ix)\Gamma(b+ix)\Gamma(c+ix)\Gamma(d+ix)}{\Gamma(2ix)}\right|^2,$$

且出现于共轭对中的复参数满足 $\mathrm{Re}(a,\, b,\, c,\, d) > 0$．对于当一个参数为负以及出现有限多个离散质点时更一般的正交性，见 J. A. Wilson [A6]．

Wilson 多项式与**经典正交多项式** (classical orthogonal polynomials) 有紧密联系，因为它们是二阶差分算子

$$A(x)W_n((x-i)^2) + B(x)W_n(x^2) +$$

$$+ C(x)W_n((x+i)^2) = \lambda_n W_n(x^2)$$

($A$, $B$, $C$ 是不依赖于 $n$ 的某些函数) 关于本征值 $\lambda_n$ 的本征函数．存在类似于 Wilson 多项式的多项式 (见 [A2])，称为 Askey-Wilson 多项式 (Askey-Wilson polynomials)，它作为极限情形包含 Wilson 多项式．Askey-Wilson 多项式也是一个二阶差分算子的正交多项式本征函数；而且人们相信在下述意义下它们是具有这一性质的最一般的正交多项式：所有具有这一性质的其他的类能通过指定参数或取极限从 Askey-Wilson 多项式得到．

Wilson 多项式有一重要变种，称为 Racah 多项式 (Racah polynomials)，它们由

$$R_n(\lambda(x);\, \alpha,\, \beta,\, \gamma,\, \delta) =$$

$$= {}_4F_3\left(\begin{matrix} -n, n+\alpha+\beta+1, -x, x+\gamma+\delta+1 \\ \alpha+1, \beta+\delta+1, \gamma+1 \end{matrix}; 1\right)$$

定义，其中 $\lambda(x)=x(x+\gamma+\delta+1)$，$\beta+\delta+1=-N$，$n=0,\cdots,N$. 它们对某些可显式表示的权 $w(x)$ 满足形如

$$\sum_{x=0}^{N} R_n(\lambda(x))R_m(\lambda(x))w(x)=0,\ n\neq m$$

的正交性关系. 它们可解释为对于群 SU(2) 的不可约表示的张量积的 Racah 系数 (Racah coefficients).

Wilson 多项式和 Racah 多项式的极限情形的完全集常写成有向图，称为 Askey 表 (Askey tableau)，见[A2] 的附录及所列的参考文献. 在该表中 Wilson 多项式和 Racah 多项式的 4 参数族处于最高的级别，同时还有依赖于 3，2，1 或 0 个参数的处于较低级别的族. 一般地说，每当进行一次极限转移，就会有一个参数消失. 3 参数级别包含连续 Hahn 多项式 (continuous Hahn polynomials) (见[A1])，连续对偶 Hahn 多项式 (continuous dual Hahn polynomials) (连续权函数)，Hahn 多项式 (Hahn polynomials) 和对偶 Hahn 多项式 (dual Hahn polynomials) (离散权). 2 参数级别包含 Meixner-Pollaczek 多项式 (Meixner-Pollaczek polynomials)，**Jaccobi 多项式** (Jaccobi polynomials) (连续权函数)，(离散) Кравчук 多项式 (Krawtchouk polynomials) 和 Meixner 多项式 (Meixner polynomials). 单参数级别包含 (连续) **Laguerre 多项式** (Laguerre polynomials) 和 (离散) Charlier 多项式 (Charlier polynomials). 最低级别的 0 参数族只包含 **Hermite 多项式** (Hermite polynomials)，它是所有其他的类的极限情形.

**参考文献**


[A1] Askey, R., Continuous Hahn polynomials, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **18** (1985), L 1017 – L 1019.

[A2] Askey, R. and Wilson, J., Some basic hypergeometric orthogonal polynomials that generalize Jacobi polynomials, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **319** (1985).

[A3] Atakishiyev, N. M. and Suslov, S. K., On the Askey Wilson polynomials, *Constr. Approx.*, **8** (1992), 363 – 369.

[A4] Koornwinder, T. H., Group theoretic interpretations of Askey's scheme of hypergeometric orthogonal polynomials, in M. Alfaro, J. S. Dehesa, F. J. Marcellna and J. L. Rubio de Francia (eds.): Orthogonal Polynomials and Their Applications, Lecture notes in math., Vol. 1329, Springer, 1988, 46 – 72.

[A5] Nikiforov, A. F., Suslov, S. K. and Uvarov, V. B., Classical orthogonal polynomials of a discrete variable, Springer, 1991 (译自俄文).

[A6] Wilson, J. A., Some hypergeometric orthogonal polynomials, *SIAM J. Math. Anal.*, **11** (1980), 690 – 701.


T. H. Koornwinder 撰　沈永欢 译

**Wilson 定理 [Wilson theorem; Вильсона теорема]**

设 $p$ 是素数，则数 $(p-1)!+1$ 被 $p$ 整除. 首先由 E. Waring (1770) 陈述的这一定理，按他的说法，是属于 J. Wilson 的. 由 J. L. Lagrange 于 1771 年予以证明. 由 Wilson 定理得到关于整数的素性检验：自然数 $n>1$ 是素数，当且仅当

$$(n-1)!+1\equiv 0\ (\mathrm{mod}\, n).$$

这一检验法并不实用，因为包含的阶乘很快会变得极大.

**参考文献**


[1] Бухштаб, А. А., Теория чисел, 2 изд., М., 1966.

[2] Trost, E., Primzahlen, Birkhäuser, 1953.

[3] Виноградов, И. М., Основы теория чисел, 8 изд., М., 1972 (中译本: И. М. 维诺格拉陀夫，数论基础，高等教育出版社，1952).


Н. И. Климов 撰

【补注】事实上，其反问题也是正确的 (通常也称 Wilson 定理)：设 $N=(p-1)!+1$，$p\in\mathbf{N}$. 则当且仅当 $p$ 是素数时，$N$ 被 $p$ 整除.

**参考文献**


[A1] Shanks, D., Solved and unsolved problems in number theory, Chelsea, reprint, 1978.

[A2] Schroeder, M. R., Number theory in science and communication, Springer, 1984, 103

[A3] Hardy, G. H. and Wright, E. M., The theory of numbers, Clarendon Press, 1960, 68.


戚鸣皋 译　潘承彪 校

**卷绕数 [winding number]**

【补注】设 $\Gamma=\{z(\tau):\alpha\leqslant\tau\leqslant\beta\}$ 是复平面内一条弧线，$C$ 是不在 $\Gamma$ 上的一点. 在 $\Gamma$ 上 $z-c$ 的连续辐角 (continuous argument) 是 $[\alpha,\beta]$ 上的一个实值连续函数 $\varphi$，使得对于每个 $\tau\in[\alpha,\beta]$，它是 $z(\tau)-c$ 的一个辐角 (argument)，即对某个 $r$ 有 $z(\tau)-c=r\exp(i\varphi(\tau))$. 这样的函数可以求得，且若 $\varphi(\tau)$，$\psi(\tau)$ 是两个连续辐角，则它们相差 $2\pi$ 的常数整数倍. 这推出辐角增量 (increase of the argument) $\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)$ 不依赖于连续辐角的选取，被表示为 $[\arg(z(\tau)-c)]_\Gamma$. 若 $\Gamma$ 是一条逐段正则弧，则有

$$[\arg(z(\tau)-c)]_\Gamma=\mathrm{Im}\int_\Gamma \frac{1}{z-c}\,dz.$$

在 $\Gamma$ 是闭曲线即 $z(\alpha)=z(\beta)$ 的特殊情形，$[\arg(z(\tau)-c)]_\Gamma$ 必定是 $2\pi$ 的整数倍，并且称整数

$$n(\Gamma, c) = \frac{1}{2\pi}[\arg(z(\tau)-c)]_\Gamma$$

为 $\Gamma$ 关于 $c$ 的**卷绕数**．对于分段正则闭曲线 $\Gamma$ 及不在 $\Gamma$ 上的 $c$ 有

$$n(\Gamma, c) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{z-c}\,dz.$$

**参考文献**

[A1] Henrici, P., Applied and computational complex analysis, 1. Wiley-Interscience, 1974, § 4.6.

杨维奇 译

**机翼理论 [wing theory; крыла теория]**

涉及物体与液体或气体流动之间相互作用的空气动力学分支．机翼理论的基本问题是决定作用在物体上的空气动力和求出作为时间 $t$ 和 Descates 坐标 $\mathbf{x}=(x_1, \cdots, x_n)$ 函数的速度场 $\mathbf{u}$ 和压力 $p$，这里 $n=2$（二维流动）或 $n=3$（三维流动）．

在无旋正压流动情况下，当没有粘性和质量力时气体的密度 $\rho$ 是压力的已知函数 $\rho=\rho(p)$，速度分量 $u_i$ 是势 $\varphi$ 的偏导数：$u_i=\partial\varphi/\partial x_i$．在充满气体的区域里 $\varphi$ 满足拟线性方程：

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\frac{2}{c^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial t}=$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}\left[\delta_{ij}-\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right]\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}, \qquad (1)$$

其中 $c=(d\rho/dp)^{-1/2}$ 是声速，$\delta_{ij}$ 是 Kronecker 符号．压力 $p$ 藉助 Cauchy-Lagrange 积分（Cauchy-Lagrange integral）由势决定：

$$\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{d\rho}=-\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2.$$

流动区域的边界由块块光滑的翼面 $S$ 和有限数目的接触间断面 $\Sigma_j(j=1, \cdots, m)$ 组成，后者或沿翼梢的尖缘与 $S$ 相交或与 $S$ 相切．在二维流动中 $S$ 和 $\Sigma_j$ 是块块光滑的曲线，而翼梢是 $S$ 的一些角点．在 $S$ 上势满足不穿透性条件，而在 $\Sigma_j$ 上它满足接触间断条件：

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\nabla F\cdot\nabla\varphi=0 \quad 在\ S\ 上, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial F_j}{\partial t}+\nabla F_j\cdot\nabla\varphi^{\pm}=0,\ p^+=p^- \ 在\ \Sigma_j\ 上, \quad (3)$$

其中 $F(\mathbf{x}, t)=0$，$F_j(\mathbf{x}, t)=0$ 是面 $S$，$\Sigma_j$ 的方程，$\varphi^\pm$ 是从不同两面趋近 $\Sigma_j$ 时 $\varphi$ 的极限值．沿 $S$ 与 $\Sigma_j$ 的交线有 Жуковский-Kutta-Чаплыгин 条件（Zhukovskiǐ-Kutta-Chaplygin condition），根据该条件在翼梢上压力是有限的：

$$\varlimsup_{x\to x_0}|p(x)|<\infty,\quad 若\ \mathbf{x}_0\in S\cap\Sigma_j. \qquad (4)$$

在定常流动中条件（4）等价于条件：$S\cap\Sigma_j$ 的点上的速度是有限的．在求解过程中面 $\Sigma_j$ 的形状是未知的，而是要随解一起确定．

面 $\Sigma_j$ 模拟实际流动中被绕流物体后边产生的涡迹（见**空气动力学的数学问题**（aerodynamics, mathematical problems of））．这与如下事实相一致，即若假设运动是无旋的，则对在尖缘上为有限压力的翼的绕流问题不存在一般的连续解．在特殊情况下，例如在翼剖面四周有不变环流的定常二维流动情况下，间断面可能不存在．

方程（1）－（4）与初始数据一起构成决定 $\varphi$，$\Sigma_j$ 的边值问题．问题的类型取决于流动的类型和 Mach 数（Mach number）$M=|\nabla\varphi|c^{-1}$．对于可压缩流体的非定常运动和定常（$\partial\varphi/\partial t=0$）超声速（$M>1$）流动，方程（1）是双曲型；对不可压缩（$\rho=$ 常数，$c=\infty$）和定常亚声速（$M<1$）流动，它是椭圆型．在后一种情况下，若假设 $S$ 是具有一个有着角度 $\alpha\pi$（$\alpha\in[0, 1]$）的角点 $\mathbf{x}_0$ 的块块光滑曲线，则以下结论是正确的：对任何向量 $\mathbf{k}$，$|\mathbf{k}|=1$，存在这样的 $\lambda>0$，当 $q\in[0, \lambda)$ 时问题（1）－（2）有在 $\mathbf{x}_0$ 点满足 Жуковский-Kutta-Чаплыгин 条件和在无穷远处满足下列条件的唯一的解：

$$\varlimsup_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}|\nabla\varphi|<\infty, \qquad \lim_{|\mathbf{x}|\to\infty}\nabla\varphi(\mathbf{x})=q\mathbf{k};$$

并且当 $q\to 0$ 时 $M(q)\to 0$ 和当 $q\to\lambda$ 时 $M(q)\to 1$，这里 $M(q)=\sup_{\mathbf{x}}M(\mathbf{x})$ 是流动的 Mach 数．

对于定常亚声速二维流动有 Жуковский **基本定理**（fundamental theorem of Zhukovskii）（见［1］－［3］）：在对剖面的绕流中由流体方面作用在剖面上的总力垂直于 $\mathbf{k}$，其量值 $R$ 等于

$$R=q\rho_\infty\oint_S\frac{\partial\varphi}{\partial s}\,ds,\ \rho_\infty=\lim_{|\mathbf{x}|\to\infty}\rho(\mathbf{x}).$$

对这样的流动已证明下列更一般的问题在数学上是可适的：同时绕几个剖面的流动；有气流分离和形成滞止区（射流）的绕翼流动；反问题——按给定的压力曲线决定翼的形状及其局部（［4］）．

由于按严格提法求解机翼理论的问题是困难的，所以一些近似模型有很大意义：薄翼理论、小展弦比翼理论，等等．应用最广的模型是微弯薄翼的线性理论（见［1］，［5］－［11］），该模型建立在以下假设上：流的势由 $\varphi=qx_1+\Phi$ 给出、翼的厚度及 $\nabla\Phi$ 与翼弦及未扰流的速度 $q>0$ 相比是小量．在薄翼理论中面 $S$ 是由它在平面 $x_n=0$ 上的投影 $S_0$ 来模拟，间断面 $\Sigma$ 由半平面 $\Sigma_0=\Omega\setminus S_0$ 模拟，这里 $\Omega$

是所有由 $S_0$ 的点上在 $x_i$ 正方向发出的平行于 $0x_1$ 轴的射线之组合，函数 $\Phi(\mathbf{x},t)$ 满足线性化的方程和边界条件：

$$\frac{1}{c_\infty^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+2\frac{M_\infty}{c_\infty}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial t}=$$

$$=(1-M_\infty^2)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2}+\sum_{i=2}^{n}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i^2},\qquad 在\ \Omega\ 外面；$$

$$\lim_{x_n\to\pm 0}\frac{\partial\Phi}{\partial x_n}=v^{\pm},\qquad 在\ S_0\ 上；$$

$$\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x_n}\right]=\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}+q\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\right]=0,\qquad 在\ \Sigma_0\ 上；$$

$$\overline{\lim_{x\to x_0}}\left|\frac{\partial\Phi}{\partial t}+q\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\right|<\infty,\quad 对于\ x_0\in S_0\cap\Sigma_0,$$

其中 $c_\infty$，$M_\infty$ 是对应具有速度 $q$ 的均匀流的常声速和 Mach 数，符号 $[f]$ 代表穿过 $\Sigma_0$ 时 $f$ 值的跃变，$v^{\pm}$ 是由翼的形状和运动条件决定的给定函数．

还要给这些方程增加决定无穷远处解行为的关系式：在定常亚声速流（$M_\infty<1$）中条件是当 $|\mathbf{x}|\to\infty$ 时扰动衰减；在翼的亚声速小振动情况下有 Sommerfeld 辐射条件（见辐射条件（radiation conditions））；在超声速流（$M_\infty>1$）中附加关系式是在扰动的前波（中心在 $S_0$ 上的特征锥的包络）上 $\Phi=0$．

求解薄翼理论问题的基本方法是将 $S_0$ 和 $\Sigma_0$ 表示为涡面的形式和把边值问题化为涡密度的奇异积分方程．当这样做时在不属于 $\Sigma_0$ 的 $S_0$ 的点上 $\Phi$ 的导数通常变为无穷．线性理论适于描述的只是前尖缘外部一定邻域中的实际流动．

在薄翼线性理论中，在诸如翼剖面小简谐振动的二维问题和 $S$ 是椭圆时的三维定常流动问题的情况下，解可以表示为含特殊函数的无穷级数（见[1]，[5]－[9]）．为任意形状翼的计算已发展了数值方法（见[10]，[11]）．

**参考文献**


[1] Седов, Л. И., Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, 2 изд., М., 1966（英译本：Sedov, L. I., Two-dimensional problems in hydrodynamics and aerodynamics, Acad. Press, 1965）.

[2] Кочин, Н. Е., Кибель, И. А., Розе, Н. В., Теоретическая гидромеханика, 6 изд., г. 1, М., 1963.

[3] Bers, L., Mathematical aspects of subsonic and transonic gas dynamics, Wiley, 1958.

[4] Монахов, В. Н., Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений, Новосиб., 1977（英译本：Monakhov, V. N., Boundary value problems with free boundaries for elliptic systems of equations, Amer. Math. Soc., 1983）.

[5] Некрасов, А. И., Теория крыла в нестационарном потоке, М.-Л., 1947.

[6] Горелов, Д. Н., Теория крыла в нестационарном потоке, Новосиб., 1975

[7] Miles, J., The potential theory of unsteady supersonic flow, Cambridge Univ. Press, 1959.

[8] Голубев, В. В., Труды по аэродинамике, М.-Л., 1957.

[9] Кочин, Н. Е., 《Прикл. матем. и механ.》, 9 (1945), 1, 13－66.

[10] Красильщикова, Е. А., Крыло конечного размаха в сжимаемом потоке, М.-Л., 1952.

[11] Белоцерковский, О. М., Ништ, М. И., Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью, М., 1978.


В. Н. Монахов, П. И. Плотников 撰

【补注】 上述的一部分机翼理论主要限于非定常流中可压缩性的影响．有理论的较容易部分，它处理定常不可压缩流动，这里基本方程是 Laplace 方程，所以所有势理论的工具都能使用．特别是，薄翼剖面的理论（二维的）适合于完全解析处理，它的主要实际结果归结为升力系数（lift coefficient）

$$C_L=\frac{2L}{\rho V_\infty^2 A}=2\pi(\alpha-\alpha_0),$$

其中 $L$ 是升力，$\rho$ 是流体密度，$V_\infty$ 是远离机翼处的流体速度，$A$ 是翼的面积，$\alpha$ 是攻角，$\alpha_0$ 是依翼剖面平均轮廓的形状而定的常数．对俯仰矩系数（pitching moment coefficient）得到类似的公式．理论的另一重要结果是沿机翼的压力分布．如由 T. Theodorsen 首先证明的，当且只当攻角有某一定值时（"理想的"或"设定的攻角"）前缘处的压力原来是有限的．这些结果就像能用相似变换证明的那样也适用于亚声速可压缩流（$M_\infty<1$）的线性化理论．

还要说明，Жуковский-Kutta-Чаплыгин 条件通常称为 Kutta 条件（Kutta condition），在西方文献中 Жуковский 定理通常称为 Kutta-Жуковский 定理（Kutta-Zhukovskii theorem）．最后，Жуковский 常被译为 Joukowski．

**参考文献**


[A1] Liepmann, H. W. and Roshko, A., Elements of gas dynamics, Wiley, 1957.

[A2] Ландау, Л. Д. и Лифшиц, Е. М., Гидродинамика, Физматгиз, 1958（中译本：Л. Д. 朗道，Е. М. 栗弗席兹，连续介质力学，人民教育出版社，1958）.

[A3] Schlichting, H., Boundary layer theory, McGraw-Hill, 1955.

[A4] Birkhoff, G., Hydrodynamics, Princeton Univ. Press, 1960.

[A5] Lamb, H., Hydrodynamics, Cambridge Univ. Press,

1932.
[A6] Milne-Thompson, L. M., Theoretical hydrodynamics, McMillan, 1957.
[A7] Prandtl, L. and Tietjens, O. G., Applied hydro-& aeromechanics, Dover, reprint, 1934.
[A8] Prandtl, L. and Tietjens, O. G., Fundamentals of hydro-& aeromechanics, Dover, reprint, 1934.
[A9] Goldstein, S. (ed.), Modern developments in fluid mechanics, 1-2, Dover, reprint, 1965.
[A10] Mises, R. von, Theory of flight, Dover, reprint, 1959.
[A11] Lighthill, J., An informal introduction to theoretical fluid mechanics, Clarendon Press, 1986.

李维新 译

**Wishart 分布 [Wishart distribution; Уишарта распределение]**

来自多元**正态分布** (normal distribution) 观测值样本协方差矩阵的元素的联合分布．设观测结果服从 $p$ 维正态分布 $N(\mu,\Sigma)$，其中 $\mu$ 是均值向量，$\Sigma$ 是协方差矩阵．那么，记矩阵

$$A=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})(X_i-\bar{X})'$$

的元素的联合密度为 $w(A;n,\Sigma)$：若矩阵 $A$ 正定，则

$$w(A;n,\Sigma)=$$

$$=\frac{|A|^{(n-p)/2}e^{-\operatorname{tr}(A\Sigma^{-1})/2}}{2^{(n-1)p/2}\pi^{p(p-1)/4}|\Sigma|^{(n-1)/2}\prod_{i=1}^{p}\Gamma\left(\frac{n-i}{2}\right)},$$

否则 $w(A;n,\Sigma)=0$，其中 $\operatorname{tr}M$ 表示矩阵 $M$ 的迹．以 $w(A;n,\Sigma)$ 为密度的 $p(n+1)/2$ 维分布 $W(n,\Sigma)$，称为自由度为 $n$ 和协方差矩阵为 $\Sigma$ 的 Wishart 分布 (Wishart distribution)．作为矩阵 $\Sigma$ 的估计量的样本协方差矩阵 $S=A/(n-1)$ 服从 Wishart 分布．

Wishart 分布是多元统计分析中的基本分布；它是一维 $\chi^2$ **分布** ('chi-squared' distribution) (在上述意义下的) $p$ 维推广．

如果独立随机向量 $X$ 和 $Y$ 分别服从 Wishart 分布 $W(n_1,\Sigma)$ 和 $W(n_2,\Sigma)$，则 $X+Y$ 服从 Wishart 分布 $W(n_1+n_2,\Sigma)$．

Wishart 分布是 J. Wishart ([1]) 首先引进的．

**参考文献**

[1] Wishart, J., *Biometrika A*, 20 (1928), 32-52.
[2] Anderson, T., An introduction to multivariate statistical analysis, Wiley, 1958.

A. B. Прохоров 撰

**【补注】**

**参考文献**

[A1] Khirsagar, A. M., Multivariate analysis, M. Dekker, 1972.
[A2] Muirhead, R. J., Aspects of multivariate statistical theory, Wiley, 1982.

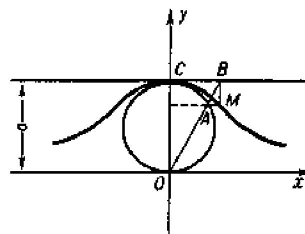
周概容 译

**Agnesi 箕舌线 [witch of Agnesi 或 versiera; Аньези локон]**

一条平面曲线，在 Descartes 直角坐标系中由方程

$$y(a^2+x^2)=a^3,\ a>0$$

给出．




如果 $a$ 是圆心在点 $(0,a/2)$ 的一个圆的直径，$OA$ 是一条割线，$CB$ 和 $AM$ 平行于 $x$ 轴，$BM$ 平行于 $y$ 轴 (见图)，则 Agnesi 箕舌线是点 $M$ 的轨迹．如果把生成圆的中心和切线 $CB$ 沿 $y$ 轴移位，那么这样得到的曲线称为 Newton 类箕舌线 (Newton aguinea)，它是 Agnesi 箕舌线的一个推广．M. Agnesi 研究过这一曲线 (1748)，因而得名．

**参考文献**

[1] Савелов, А. А., Плоские кривые, М., 1960.

А. Б. Иванов 撰

**【补注】**

**参考文献**

[A1] Lawrence, J. D., A catalog of special plane curves, Dover, reprint, 1972.

杜小杨 译

**Witt 代数 [Witt algebra; Витта алгебра]**

【补注】 设 $k$ 是特征为 $p\neq 0$ 的域．考虑 $k$ 代数

$$A_n=k[X_1,\cdots,X_n]/(X_1^p,\cdots,X_n^p).$$

设 $V_n$ 是 $A_n$ 的 $k$ 导子代数．代数 $V_1$ 通常称为 Witt 代数 (Witt algebra)．$V_n(n\geqslant 2)$ 通常称为分裂 Jacobson-Witt 代数 (split Jacobson-Witt algebra)．代数 $V_n$ 是单的 **Lie 代数** (Lie algebra)，除非它是 2 维的．$V_n$ 的维数是 $np^n$．

更一般地，考虑 $k$ 代数

$$A_n(\xi)=k[X_1,\cdots,X_n]/(X_1^p-\xi_1,\cdots,X_n^p-\xi_n)$$

及它们的导子代数 $V_n(\xi)$，Jacobson-Witt 代数 (Jacobson-Witt algebra)．$A_n(\xi)$ 和 $V_n(\xi)$ (显然) 是 $A_n$ 和 $V_n$ 的 $k'/k$ 型，这里 $k'=k(\xi_1^{1/p},\cdots,\xi_n^{1/p})$ (见

**代数结构的形式** (form of an (algebraic) structure)). 许多特征为 $p$ 的单 Lie 代数归结为 $V_n$ 的子代数.

设 $G$ 是 $\{1,\cdots,m\}$ 到 $k$ 的函数的加群, $G$ 中对所有 $g\in G$, 满足 $\sum f(i)g(i)=0$ 的元素 $f$ 仅有零元 $f=0$. 例如 $G$ 可以是 $\{1,\cdots,m\}$ 到 $k$ 的某个加法子群的所有函数的集合. 如果 $G$ 有限, 则有某个 $n$, 使 $G$ 的阶是 $p^n$. 现在, 设 $V$ 是 $k$ 上的**向量空间** (vector space), 带有基元 $e_g^i(i=1,\cdots,m,\ g\in G)$, 并定义 $V$ 上的双线性积为

$$[e_g^i,e_h^j]=h(i)e_{g+h}^j-g(j)e_{g+h}^i,$$

结果得到一个 Lie 代数, 称为广义 Witt 代数 (generalized Witt algebra). 如果 $G$ 是有限阶的, 阶为 $p^n$, 则 $V$ 的维数是 $mp^n$, 而当 $m>1$ 或 $p>2$ 时 $V$ 是单 Lie 代数.

如果 $k$ 的特征为零, $m=1$, $G$ 是加法子群 $\mathbf{Z}\subset k$, 则相同的构造在 **Virasoro 代数** (Virasoro algebra) 中导致 $[e_g,e_h]=(h-g)e_{g+h}$.

如果 $k$ 的特征为 $p$, $G$ 是 $\{1,\cdots,n\}$ 上在 $\mathbf{Z}/(p)\subset k$ 中取值的所有函数作成的群, 则又回到 Jacobson-Witt 代数 $V_n$.

当 $\mathrm{char}(k)\neq 2,3$ 时, 在 Jacobson-Witt 代数 $V_n$ 和正特征的经典 Lie 代数之间没有同构. 不同于经典 Lie 代数及 $V_n$ 的好几类单 Lie 代数已被发现 ([A1]).

这里所描述的 Witt 代数当然不能同域上二次型的 **Witt 环** (Witt ring) 相混淆, 也不能同 **Witt 向量** (Witt vector) 的各种环相混淆.

**参考文献**

[A1] Seligman, G. B., Modular Lie algebras, Springer, 1967.

[A2] Jacobson, N., Classes of restricted Lie algebras of characteristic $p$, II, *Duke Math. J.*, 10 (1943), 107–201.

[A3] Ree, R., On generalised Witt algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 83 (1956), 510–546.

蔡传仁 译

**Witt 分解** [**Witt decomposition**; **Витта разложение**], 向量空间的

向量空间分解为三个具有特定性质的子空间的直和. 更精确地说, 令 $V$ 是特征不等于 2 的域 $k$ 上向**量空间** (vector space), 借助于一个对称的或斜对称的**双线性型** (bilinear form) $f$ 装备了一个度量结构. 直和分解

$$V=N_1+N_2+D$$

称为 $V$ 的 Witt 分解, 如果 $N_1$ 与 $N_2$ 均为全迷向的, 而 $D$ 是各向异性的, 并且关于 $f$ 与 $N_1+N_2$ 正交. Witt 分解对于双线性型 $f$ 的结构的研究, 以及双线性型的分类问题方面起着重要作用.

设 $f$ 是一个非退化的双线性型, 且设 $V$ 是有限维的. 则 $V$ 的任一个极大全迷向子空间可以作为 $N_1$ 或 $N_2$ 被包含在 $V$ 的一个 Witt 分解中. 对于任一个 Witt 分解 $\dim N_1=\dim N_2$, 且对于 $N_1$ 的任意基 $v_1^{(1)},\cdots,v_n^{(1)}$, 存在 $N_2$ 的一个基 $v_1^{(2)},\cdots,v_n^{(2)}$, 使得 $f(v_i^{(1)},v_j^{(2)})=\delta_{ij}$ ($\delta_{ij}$ 是 Kronecker 符号). 对于任意两个 Witt 分解

$$V=N_1+N_2+D=N_1'+N_2'+D',$$

存在 $V$ 的一个度量自同构 $\varphi$, 使得

$$\varphi(N_1)=N_1',\ \varphi(N_2)=N_2',\ \varphi(D)=D'$$

的充分必要条件是 $\dim N_i=\dim N_i'$, $i=1,2$.

$V$ 上一个非退化的对称或斜对称双线性型 $f$ 称为中性的 (neutral), 如果 $V$ 是有限维的, 且有一个 Witt 分解, 其中 $D=0$. 在此情况下, 这个对称双线性型称为一个双曲型 (hyperbolic form), 而 $V$ 称为一个双曲空间 (hyperbolic space). 中性型的正交直和是中性的. 中性型的矩阵 (关于上面所描述的空间 $V=N_1+N_2$ 的基 $v_1^{(1)},\cdots,v_n^{(1)},v_1^{(2)},\cdots,v_n^{(2)}$), 形如

$$\left\|\begin{array}{c|c}0 & E_n\\ \hline \varepsilon E_n & 0\end{array}\right\|,$$

其中 $E_n$ 是 $n$ 阶单位矩阵, 对于对称型 $\varepsilon=1$, 而对于斜对称型 $\varepsilon=-1$. 两个中性型等距同构, 当且仅当它们有相同的秩. 中性对称双线性型的类是域 $k$ 的 **Witt 环** (Witt ring) 的零元 (即关于加法的中性元素). 中性型且只有这种型具有 Witt 指数 $(\dim V)/2$. 有限维空间上的斜对称型是中性的.

设 $f$ 是有限维空间 $V$ 上一个非退化对称双线性型, $V=N_1+N_2+D$ 是一个 Witt 分解, 其中 $\dim N_1=\dim N_2$ 且等于 $f$ 的 Witt 指数, 则 $f$ 在 $D$ 上的限制是一个定双线性型 (definite bilinear form) 或非迷向双线性型 (anisotropic bilinear form), 即对所有非零的 $v\in D$ 都有 $f(v,v)\neq 0$. 这个双线性型与 $V$ 的 Witt 分解的选择无关 (不考虑等距同构). 在定双线性型的集合里可以引进一个加法, 使之成为一个 Abel 群——$k$ 的 Witt 群 (Witt group) (见 **Witt 环** (Witt ring)).

令 $v_1^{(i)},\cdots,v_n^{(i)}$ 是 $N_i$ 的基, $i=1,2$, 使得 $f(v_i^{(1)},v_j^{(2)})=\delta_{ij}$; 这两个基的并集再连同 $D$ 的任一基就得到 $V$ 的一个基, 关于这个基, $f$ 的矩阵形如

$$\left\|\begin{array}{ccc}0 & E_n & 0\\ E_n & 0 & 0\\ 0 & 0 & P\end{array}\right\|.$$

对于对称双线性型，在 $V$ 中存在一个正交基（orthogonal basis），即一个基使得这个双线性型关于它的矩阵是对角形．如果域 $k$ 是代数闭的，$V$ 中甚至存在一个规范正交基（orthonormal basis）（一个基使得这个双线性型关于它的矩阵是单位矩阵），据此理由，$k$ 上两个非退化有限秩的对称双线性型等距同构，当且仅当它们有相同的**秩**（rank）．在一般情况下，这种双线性型的分类实质上依赖于域 $k$ 的算术性质．

退化的对称型与斜对称型的分类和研究可以简化为对于非退化型的研究（将该双线性型限制于它的核的补子空间）．

以上所述均允许推广到除环上具有性质（$T$）的 $\varepsilon$-Hermite 型（见 **Witt 定理**（Witt theorem））的情形，也可以推广到伴随有二次型的对称双线性型的情形，不必限制域的特征．

**参考文献**


[1] Bourbaki, N., Algebra, Elements of mathematics, 1974. Chapts. 1－2（译自法文）.

[2] Lang, S., Algebra, Addison-Wesley, 1974.

[3] Artin, E., Geometric algebra, Interscience, 1957.

[4] Dieudonné, J. A., La géométrie des groupes classiques, Springer, 1955.


В. Л. Попов 撰

【补注】 具有一个中性的非退化双线性型的向量空间称为分裂的（split）或代谢的（metabolic）．

Witt 分解定理的一个不同形式给出了二次空间（quadratic space）（$V$, $q$）（即向量空间 $V$ 上有一个二次型 $q$）分解为正交和

$$(V,\ q)=(V_t,\ q_t)\oplus(V_h,\ q_h)\oplus(V_a,\ q_a),\tag{$*$}$$

其中（$V_t$, $q_t$）是全迷向的，（$V_h$, $q_h$）是双曲的，和（$V_a$, $q_a$）是各向异性的．并且（$V_t$, $q_t$），（$V_h$, $q_h$）和（$V_a$, $q_a$）的等距同构类是由（$V$, $q$）的等距同构类唯一确定的．

在这个分解中，（$V_t$, $q_t$）是 $V$ 的根（radical），$V_t=\mathrm{rad}(V)=\{v\in V:\ B(v,\ w)=0,\ 对所有\ w\in V\}$，其中 $B$ 是 $V$ 上相关于 $q$ 的对称双线性型；

$$B(v,\ w)=\frac{1}{2}\{q(v+w)-q(v)-q(w)\}.$$

根据 Witt 消去定理（Witt cancellation theorem）可得 Witt 分解（$*$）中其因子的唯一性，该定理叙述为：如果 $q\oplus q_1$ 与 $q\oplus q_2$ 是等距同构的，那么 $q_1$ 与 $q_2$ 是等距同构的．

**参考文献**


[A1] Milnor, J. and Husemoller, D., Symmetric bilinear forms, Springer, 1973.

[A2] Lam, T. Y., The algebraic theory of quadratic forms, Benjamin, 1973.


蒋滋梅 译

**Witt 环**［Witt ring；Витта кольцо］，二次型的类型环（ring of types of quadratic forms），域 $k$ 上的

域 $k$ 上的有限维向量空间上的非退化二次型关于下述等价关系的类构成的环 $W(k)$：型 $f_1$ 等价于型 $f_2$（$f_1\sim f_2$），当且仅当对于某两个中性二次型 $g_1, g_2$，$f_1$ 与 $g_1$ 的正交直和等距于 $f_2$ 和 $g_2$ 的正交直和（亦见 **Witt 分解**（Witt decomposition）；**二次型**（quadratic form））．$W(k)$ 中的加法及乘法由取型的正交直和及张量积所诱导．

设 $k$ 的特征不是 2，则型的等价性的定义等价于：$f_1\sim f_2$ 当且仅当对应于 $f_1$ 和 $f_2$ 的非迷向型 $f_1^a$ 和 $f_2^a$ 是等距的（见 **Witt 分解**（Witt decomposition））．型 $f$ 的等价类称作它的类型（type），记为 $[f]$．Witt 环，或二次型的类型环是结合的、交换的有幺元的环．$W(k)$ 的幺元是型（1）的类型（这里（$a_1,\cdots,a_n$）表示二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=\sum a_ix_i^2$）．零秩的零型的类型包含着全体中性型，作为零元．类型 $[-f]$ 是类型 $[f]$ 的负元．

环 $W(k)$ 的加法群称作域 $k$ 的 Witt 群（Witt group）或 $k$ 上的二次型的类型群（group of types of quadratic forms）．形如（$a$）的二次型的类型生成环 $W(k)$，其中 $a$ 是 $k$ 的乘法群 $k^\times$ 的元素．$W(k)$ 被生成元的下述关系完全确定：

$$(a)(b)=(ab),$$

$$(a)+(b)=(a+b)+((a+b)ab),$$

$$(a)^2=1,$$

$$(a)+(-a)=0.$$

Witt 环可以被描述为与群 $k^\times/(k^\times)^2$ 的整数群环

$$\mathbf{Z}[k^\times/(k^\times)^2]$$

关于元素

$$\overline{1}+(-\overline{1})\ 和\ \overline{1}+\overline{a}-\overline{1-a}-\overline{(1+a)a}\quad(a\in k^\times)$$

生成的理想的商环同构的环，此处 $\overline{x}$ 是 $x$ 关于子群 $(k^\times)^2$ 的剩余类．

Witt 环常常可以被精确地计算出．例如，如果 $k$ 是二次（特别地，代数）封闭域，则有 $W(k)\simeq\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$；如果 $k$ 是实闭的，则 $W(k)\simeq\mathbf{Z}$（此同构实现为：将 $[f]$ 映成型 $f$ 的符号差）；如果 $k$ 是 Pythagoras 域（Pythagorean field）（即 $k$ 中两个平方的和仍是平方）且 $k$ 不是实的，则 $W(k)\simeq\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$；如果 $k$ 是有限域，则相应于 $q\equiv 3$ 或 $1\bmod 4$，其中 $q$ 是 $k$ 的元素个数，$W(k)$ 分别同构于剩余环 $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ 或 $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})[t]/(t^2-1)$；如果 $k$ 是完全局部环并且它的类域 $\overline{k}$ 的特征不是 2，则

$$W(k) \simeq W(\bar{k})[t]/(t^2-1).$$

$k$ 的一个扩张 $k'/k$ 定义 Witt 环的一个同态 $\varphi$: $W(k) \to W(k')$, 在此同态下, $[(a_1,\cdots,a_n)] \mapsto [(a_1,\cdots,a_n)]$. 如果此扩张是有限的且是奇数次的, 则 $\varphi$ 是单同态; 若进一步它还是群为 $G$ 的 **Galois 扩张** (Galois extension), 则 $G$ 的作用可以扩充到 $W(k')$ 上, 且有

$$\varphi(W(k)) = W(k')^G.$$

Pfister 定理 (Pfister theorem) 描述了 Witt 环的一般性质:

1) 对于任一域 $k$, $W(k)$ 的扭子群 $W_t(k)$ 是 2 准素的;

2) 如果 $k$ 是实域, $k_p$ 是它的 Pythagoras 闭包 (Pythagorean closure) (即包含 $k$ 的最小的 Pythagoras 域), 则序列

$$0 \to W_t(k) \to W(k) \to W(k_p)$$

正合 (于是, $W_t(k)=0$, 则 $k$ 是 Pythagoras 域);

3) 若 $\{k_\alpha\}$ 是 $k$ 的实闭包的族, 则下面的序列正合:

$$0 \to W_t(k) \to W(k) \to \prod W(k_\alpha);$$

特别地,

4) 若 $k$ 不是实域, 则群 $W(k)$ 是扭的.

若干其他结果与型的乘性理论有关. 特别地, 设 $m$ 是偶维空间上的二次型的类型的集合, 则 $m$ 是 $W(k)$ 中的双边理想, 且 $W(k)/m \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$; $m$ 包含 $W(k)$ 的全部零因子; $W(k)$ 的幂零元的集合与 $m$ 中的有限阶元素的集合相重合, 此即 $W(k)$ 的 Jacobson 根, 也是 $W(k)$ 的准素根. 环 $W(k)$ 是有限的, 当且仅当 $k$ 不是实的且群 $k^\times/(k^\times)^2$ 是有限的; 环 $W(k)$ 是 Noether 环, 当且仅当 $k^\times/(k^\times)^2$ 是有限的. 如果 $k$ 不是实域, 则 $m$ 是 $W(k)$ 的唯一的素理想. 反之, 若 $k$ 是实域, 则 $W(k)$ 的素理想的集合是理想 $m$ 与对应于 $k$ 的序 $p$ 的素理想族:

$$P = \{[(a_1,\cdots,a_n)]: \sum \mathrm{sgn}_p a_i = 0\},$$

$$P_l = \{[(a_1,\cdots,a_n)]: \sum \mathrm{sgn}_p a_i \equiv 0 \bmod l\}$$

的析取并, 其中 $l$ 取遍素数集合, $\mathrm{sgn}_p a_i$ 表示 $a_i$ 在序 $p$ 下的符号.

如果 $k$ 是具有对合的环, 则与 Witt 环类似的构造导致具有对合的 Witt 环的群 (group of Witt ring with involution) 的概念.

从更广泛的观点出发, Witt 环 (群) 是 $K$ 函子 (参见**代数 $K$ 理论** (algebraic $K$-theory)) 的最初的例子之一, 它在酉代数 $K$ 理论中起着重要的作用.

**参考文献**

[1] Witt, E., Theorie der quadratischen Formen in beliebigen Körpern, *J. Reine Angew. Math*, **176** (1937), 31 – 44.

[2] Bourbaki, N., Algebra, Elements of mathematics, Addison-Wesley, 1974, Chapts. 1 – 2 (译自法文).

[3] Lang, S., Algebra, Addison-Wesley, 1974.

[4] Lorenz, F., Quadratische Formen über Körpern, Springer, 1970.

[5] O'Meara, O. T., Introduction to quadratic forms, Springer, 1973.

[6] Lam, T. Y., The algebraic theory of quadratic forms, Benjamin, 1973.

[7] Milnor, J. and Husemoller, D., Symmetric bilinear forms, Springer, 1973.

А. В. Михалев, А. И. Немитов, В. Л. Попов 撰

【补注】 给定两个具有双线性型 $B_i$ 的向量空间 $V_i(i=1,2)$, 其张量积 (tensor product) 是指具有如下定义的双线性型的张量积 $V_1 \otimes V_2$:

$$B(v_1 \otimes v_2, w_1 \otimes w_2) = B_1(v_1,w_1)B_2(v_2,w_2).$$

赵春来 译 冯绪宁 校

## Witt 定理 [Witt theorem; Витта теорема]

特征不等于 2 的域 $k$ 上有限维**向量空间** (vector space) $V$, 通过一个非退化的对称或斜对称**双线性型** (bilinear form) $f$, 装备了一个度量结构, $V$ 的两个子空间 $F_1$ 与 $F_2$ 之间的任意等距同构可以扩张为整个空间 $V$ 的度量自同构. 这个定理首先由 E. Witt 获得 ([1]).

Witt 定理还可以在对 $k$ 和 $f$ 更一般的假设下予以证明 ([2], [3]). 事实上, 如果 $k$ 是一个除环, $V$ 是有限维左 $k$ 模, $f$ 是非退化 $\varepsilon$-Hermite 型 (关于 $k$ 的某个固定的对合反自同构 $\sigma$, 见 **Hermite 型** (Hermitian form)) 满足下列条件: 对任意 $v \in V$, 存在元素 $\alpha \in k$, 使得

$$f(v,v) = \alpha + \varepsilon\alpha^\sigma$$

(性质 ($T$) (property ($T$))), 那么这个定理仍然成立. 性质 ($T$) 成立的例子是: 若 $f$ 是 Hermite 型且 $k$ 的特征不等于 2, 或者若 $f$ 是交错型. 假设 $k$ 是一个域, $f$ 是对称双线性型伴随有 $V$ 上一个非退化**二次型** (quadratic form) $Q$, 则 Witt 定理同样成立. 根据 Witt 定理可得到, $V$ 的度量自同构群可迁地置换维数相同的全迷向子空间, 并且 $V$ 的所有极大全迷向子空间有相同的维数 ($f$ 的 Witt 指数 (Witt index)). 由 Witt 定理得到的又一个结论可陈述如下: $k$ 上有限秩的非退化对称双线性型的所有等距同构类, 对于正交直和构成一个具有消去律的幺半群; 这个幺半群到

它的 **Grothendieck 群** (Grothendieck group)的典范映射是单射. 群 WG($k$) 称为 $k$ 的 Witt-Grothendieck 群 (Witt-Grothendieck group) WG($k$); 而双线性型的张量积在其上诱导了环的结构, 它称为 $k$ 的 Witt-Grothendieck 环 (Witt-Grothendieck ring) ([7]).

Witt 定理的其他应用见 **Witt 分解** (Witt decomposition); **Witt 环** (Witt ring).

**参考文献**


[1] Witt, E., Theorie der quadratischen formen in beliebigen Körpern, *J. Reme Angew. Math.*, **176** (1937), 31 – 44.

[2] Bourbaki, N., Elements of mathematics, Algebra: Algebraic structures. Linear algebra, Elements of mathematics, 1, Addison-Wesley, 1974, Chapts. 1 – 2 (译自法文).

[3] Dieudonné, J. A., La géométrie des groups classiques, Springer, 1955.

[4] Lang, S., Algebra, Addison-Wesley, 1974.

[5] Artin, E., Geometric algebra, Interscience, 1957.

[6] Serre, J.-P., A course in arithmetic, Springer, 1973 (译自法文).

[7] Milnor, J., Algebraic $K$-theory and quadratic forms, *Invent. Math.*, **9** (1969/1970), 318 – 344.


В. Л. Попов 撰 蒋滋梅 译

**Witt 向量** [**Witt vector**; **Витта вектор**]

一种代数结构的元素, 1936 年 E. Witt([1]) 在描述 $p$ 进数域的非分歧扩张时首先提出. 其后, Witt 向量被用来研究正特征的域上的代数簇 ([3]), 交换代数群理论 ([4], [5]), 以及形式群理论. 设 $A$ 是一个有单位元的结合交换环. 分量在 $A$ 中的无限序列 $a=(a_0,a_1,\cdots)$, $a_i\in A$ 称为 Witt 向量 (Witt vectors), 其加法和乘法规则如下:

$$(a_0,a_1,\cdots)\dot{+}(b_0,b_1,\cdots)$$
$$=(S_0(a_0,b_0),\ S_1(a_0,a_1;\ b_0,b_1),\ \cdots),$$
$$(a_0,a_1,\cdots)\dot{\times}(b_0,b_1,\cdots)$$
$$=(M_0(a_0,b_0),\ M_1(a_0,a_1;\ b_0,b_1),\cdots),$$

这里 $S_n,M_n$ 是以 $X_0,\cdots,X_n$, $Y_0,\cdots,Y_n$ 为变量的整系数多项式, 由下述条件唯一决定:

$$\Phi_n(S_0,\cdots,S_n)=\Phi_n(X_0,\cdots,X_n)+\Phi_n(Y_0,\cdots,Y_n),$$
$$\Phi_n(M_0,\cdots,M_n)=\Phi_n(X_0,\cdots,X_n)\cdot\Phi_n(Y_0,\cdots,Y_n),$$

其中

$$\Phi_n=Z_0^{p^n}+pZ_1^{p^{n-1}}+\cdots+p^nZ_n$$

是多项式, $n\in\mathbf{N}$, $p$ 是一个素数. 特别地

$$S_0=X_0+Y_0,\ S_1=X_1+Y_1-\sum_{i=1}^{p-1}\frac{1}{p}\binom{p}{i}X_0^iY_0^{p-i};$$

$$M_0=X_0Y_0,\ M_1=X_0^pY_1+X_1Y_0^p+pX_1Y_1.$$

Witt 向量关于上述运算形成一个环, 称为 Witt 向量环 (ring of Witt vectors), 记成 $W(A)$. 对任一自然数 $n$, 都有一个长度为 $n$ 的截尾 Witt 向量环 (truncated Witt vectors) $W_n(A)$. 这个环的元素是有限元组 $a=(a_0,\cdots,a_{n-1})$, $a_i\in A$, 其加法和乘法运算如上所述. 典范映射

$$R:\ W_{n+1}(A)\to W_n(A),$$
$$R((a_0,\cdots,a_n))=(a_0,\cdots,a_{n-1}),$$
$$T:\ W_n(A)\to W_{n+1}(A),$$
$$T((a_0,\cdots,a_{n-1}))=(0,a_0,\cdots,a_{n-1})$$

是同态. 规则 $A\mapsto W(A)$ (或 $A\mapsto W_n(A)$) 定义从具有单位元的交换环范畴到环范畴的共变函子. 这个函子可以用多项式环 $\mathbf{Z}[X_0,\cdots,X_n,\cdots]$ (或 $\mathbf{Z}[X_0,\cdots,X_{n-1}]$) 表示, 其上定义了一个环对象的结构. 谱 Spec $\mathbf{Z}[X_0,\cdots,X_n,\cdots]$ (或 Spec $\mathbf{Z}[X_0,\cdots,X_{n-1}]$) 称为 Witt 概形 (Witt scheme) (或截尾 Witt 概形 (truncated Witt scheme)), 是一个环概形 ([3]).

$A$ 中每一个元 $a$ 定义了一个 Witt 向量

$$a^\tau=(a,0,0,\cdots)\in W(A),$$

称为元素 $a$ 的 Teichmüller 代表 (Teichmüller representative). 如果 $A=k$ 是一个特征 $p>0$ 的完全域, 则 $W(k)$ 是一个特征 0 的完满离散赋值环, 其剩余域为 $k$, 极大理想为 $pW(k)$. $W(k)$ 中任一元 $\omega$ 可以唯一地表成

$$\omega=\omega_0^\tau+p\omega_1^\tau+p^2\omega_2^\tau+\cdots.$$

这里 $\omega_i\in k$. 反过来, 每一个具有剩余域 $k=A/p$ 的这样的环 $A$ 都典范同构于环 $W(k)$. 利用 Teichmüller 代表可以构造一个从 $k$ 到 $W(k)$ 的典范乘法同态 $k\to W(k)$, 使得映射

$$W(k)\to W(k)/p\cong k$$

分裂. 如果 $k=\mathbf{F}_p$ 是 $p$ 元域, 则 $W(\mathbf{F}_p)$ 就是 $p$ 进整数环 $\mathbf{Z}_p$.

**参考文献**


[1] Witt, E., Zyklische Körper und Algebren der characteristik $p$ vom Grad $p^n$. Struktur diskret bewerteter perfekter Körper mit vollkommenem Restklassen-Korper der characteristik $p$, *J. Reine Angew. Math.*, **176** (1936), 126 – 140.

[2] Lang, S., Algebra. Addison-Wesley, 1974.
[3] Mumford, D., Lectures on curves on an algebraic surface, Princeton Univ. Press, 1966.
[4] Serre, J.-P., Groupes algebrique et corps des classes, Hermann, 1959.
[5] Demazure, M. and Gabriel, P., Groupes algébriques, 1. Masson, 1970.
[6] Dieudonné, J., Groupes de Lie et hyperalgèbres de Lie sur un corps de charactéristique $p>0$ Ⅶ, *Math. Ann.*, **134** (1957), 114–133.

И. В. Долгачев 撰

【补注】 上述构造有一个对所有素数 $p$ 都同时适用的推广([A3]): 函子 $W$: 环 → 环称为大 Witt 向量(big Witt vector), 此处, 环是指有单位元的交换、结合环范畴. 上述所描述的相应于素数 $p$ 的无限长 Witt 向量(Witt vectors of infinite length)的函子是 $W$ 的一个商, 通常记成 $W_{p^\infty}$.

对每个 $n\in\{1,2,\cdots\}$, 令 $w_n(X)$ 是多项式

$$w_n(X)=\sum_{d\mid n} dX_d^{n/d}.$$

那么有下述的 Witt 向量表征定理(characterization theorem for the Witt vectors): 存在唯一的函子 $W$: 环 → 环(ring → ring)具有下列性质: 1) 作为函子 $W$: 环 → 集合 $W(A)=\{(a_1,a_2,\cdots): a_i\in A\}$, 且对任一环同态 $\varphi: A\to B$, $W(\varphi)(a_1,a_2,\cdots)=(\varphi(a_1),\varphi(a_2),\cdots)$; 2) 对每个 $A$ 和 $n\in\{1,2,\cdots\}$, $w_{n,A}$: $W(A)\to A$, $(a_1,a_2,\cdots)\mapsto w_n(a_1,a_2,\cdots)$ 是环的函子同态.

对任一 $n\in\{1,2,\cdots\}$, 函子 $W$ 有一组函子环自同态 $\mathbf{f}_n$: $W\to W$, 它由下式唯一确定: 对任意 $n$, $m\in\{1,2,\cdots\}$, $w_n\mathbf{f}_m=w_{nm}$. 最后, 从 $W(-)$ 到 $W(W(-))$ 有一个函子同态 $\Delta$, 它由下列性质唯一决定: 对所有的 $n$, $A$, $w_{n,W(A)}\Delta_A=\mathbf{f}_{n,A}$.

为构造 $W(A)$, 按下式定义多项式 $\Sigma_1,\cdots,\Sigma_n,\cdots;\Pi_1,\cdots,\Pi_n,\cdots;r_1,\cdots,r_n,\cdots$:

$$w_n(\Sigma_1,\cdots,\Sigma_n)=w_n(X)+w_n(Y),$$

$$w_n(\Pi_1,\cdots,\Pi_n)=w_n(X)w_n(Y),$$

$$w_n(r_1,\cdots,r_n)=-w_n(X).$$

$\Sigma_n$ 和 $\Pi_n$ 是 $X_1,\cdots,X_n$; $Y_1,\cdots,Y_n$ 的多项式, $r_n$ 是 $X_1,\cdots,X_n$ 的多项式, 它们都是整系数的. 现在, $W(A)$ 可以定义为集合 $W(A)=\{\mathbf{a}=(a_1,a_2,\cdots): a_i\in A\}$, 有加法, 乘法和负:

$$(a_1,a_2,\cdots)+(b_1,b_2,\cdots)=$$
$$=(\Sigma_1(\mathbf{a},\mathbf{b}),\Sigma_2(\mathbf{a},\mathbf{b}),\cdots),$$
$$(a_1,a_2,\cdots)\cdot(b_1,b_2,\cdots)=$$
$$=(\Pi_1(\mathbf{a},\mathbf{b}),\Pi_2(\mathbf{a},\mathbf{b}),\cdots),$$
$$-(a_1,a_2,\cdots)=(r_1(\mathbf{a}),r_2(\mathbf{a}),\cdots).$$

$W(A)$ 的零元为 $(0,0,\cdots)$, 单位元是 $(1,0,0,\cdots)$. Frobenius 自同态(Frobenius endomorphisms) $\mathbf{f}_n$ 和 Artin-Hasse 指数(Artin-Hasse exponential) $\Delta$ 可以用类似的方法构造, 即它们也可以用某些通用多项式给出. 另外有 Verschiebung 态射(Verschiebung morphisms) $\mathbf{V}_n: W(-)\to W(-)$, 它由下式刻画:

$$w_m\mathbf{V}_n=\begin{cases}0, & \text{如 } n \text{ 不能整除 } m,\\ nw_{m/n}, & \text{如 } n \text{ 整除 } m.\end{cases}$$

$\mathbf{V}_m$ 是 $W(-)$ 的群自同态, 但不是环自同态.

理想 $I_n=\{(0,\cdots,0;a_{n+1},a_{n+2},\cdots)\}\subset W(A)$ 在 $W(A)$ 上定义了一个拓扑, 使 $W(A)$ 成为一个可分的完全拓扑环.

对每个 $A\in$ 环, 令 $\Lambda(A)$ 是在幂级数乘法下的 Abelian 群 $1+tA[[t]]$, 则

$$\bar{E}: W(A)\to\Lambda(A),$$

$$(a_1,a_2,\cdots)\to\prod_{i=1}^{\infty}(1-a_it^i),$$

定义一个 Abelian 群的函数同构, 利用同构 $\bar{E}$ 在 $\Lambda(A)$ 上可定义一个交换环结构. 利用 $\bar{E}$, Artin-Hasse 指数(Artin-Hasse exponential) $\Delta$ 定义了环的函子同态:

$$W(A)\to\Lambda(W(A)),$$

使得 $W(A)$ 成为一个函子特殊 $\lambda$ 环($\lambda$-ring). Artin-Hasse 指数 $\Delta: W\to W\cdot W$ 在 $W$ 上定义了一个余三元组, 且这个余三元组的余代数恰好就是这个特殊 $\lambda$ 环(见**范畴**(category)和**三元组**(triple)).

在 $\Lambda(A)$ 上, Frobenius 和 Verschiebung 自同态满足

$$\mathbf{f}_n(1-at)=(1-a^nt),$$

$$\mathbf{V}_n\mathbf{f}(t)=\mathbf{f}(t^n),$$

且完全由上式决定(在 $\mathbf{f}_n$ 情形下要加上函子性和加性).

对每个超自然数(supernatural number) $\mathbf{n}=\prod_p p^{\alpha_p}$, $\alpha_p\in\{0,1,2,\cdots\}\cup\{\infty\}$, 定义 $N(\mathbf{n})=\{n\in\{1,2,\cdots\}: v_p(n)\leqslant\alpha_p$ 对所有素数 $p\}$, 这里 $v_p$ 是 $n$ 的 $p$ 进赋值($p$-adic valuation), 即 $n$ 中素因子 $p$ 的个数. 令

$$\mathfrak{a}_{\mathbf{n}}(A)=\{(a_1,a_2,\cdots): a_d=0,\ \text{对所有的 } d\in N(\mathbf{n})\},$$

则 $\mathfrak{a}_{\mathbf{n}}(A)$ 是 $W(A)$ 的一个理想, 对每个超自然数 $\mathbf{n}$, 一个相应的 Witt 向量环定义为

$$W_{\mathbf{n}}(A)=W(A)/\mathfrak{a}_{\mathbf{n}}(A).$$

特别地，在上文讨论的关于素数 $p$ 的无限长 Witt 向量环 $W_{p^\infty}(A)$ 是大 Witt 向量环 $W(A)$ 的商．

在某种意义上，Artin - Hasse 指数 $\Delta: W \to W \circ W$ 与这些商的形成是相容的．同样，利用同构 $\bar{E}$ 可以得到映射：

$$\mathbf{Z}_p = W_{p^\infty}(F_p) \to \Lambda(W_{p^\infty}(\mathbf{F}_p)) = \Lambda(\mathbf{Z}_p),$$

这里 $\mathbf{Z}_p$ 表示 $p$ - adic 整数，$\mathbf{F}_p$ 为 $p$ 元素域．这个映射可以与 Artin 和 Hasse（[A1]，[A2]，[A3]）定义的经典态射等同起来．

作为 Abel 群，$W(A)$ 与一维乘法形式群（formal group）$G_m$ 的曲线组成的曲线群 $\mathscr{C}(G_m; A)$ 同构．这样，对每一个一维形式群，都存在一个类似于 Witt 向量的取值于 Abel 群的函子．在特殊情况下，如 Lubin - Tate 形式群，它给出取值于环的函子，称为分歧 Witt 向量（[A3]，[A4]）．

设 $r_n(X, Y)$ 是如下所定义的系数在 $\mathbf{Z}$ 中的多项式序列：

$$X^n + Y^n = \sum_{d|n} d\, r_d(X, Y)^{n/d}.$$

Cartier 环（Cartier ring）Cart$(A)$ 是所有形式表达式

$$\sum_{i,j \in \{1,2,\cdots\}} \mathbf{V}_i < a_{ij} > \mathbf{f}_j \qquad (*)$$

形成的环，其运算规则是

$$\langle a \rangle \ \langle b \rangle = \langle ab \rangle,$$

$$\langle 1 \rangle = \mathbf{f}_1 = \mathbf{V}_1 = \text{单位元 } 1,$$

$$\mathbf{V}_n \mathbf{V}_m = \mathbf{V}_{nm}, \ \mathbf{f}_n \mathbf{f}_m = \mathbf{f}_{nm},$$

$$\langle a \rangle \mathbf{V}_m = \mathbf{V}_m \langle a^m \rangle, \ \mathbf{f}_m \langle a \rangle = \langle a^m \rangle \mathbf{f}_m,$$

$$\mathbf{V}_m \mathbf{f}_n = \mathbf{f}_n \mathbf{V}_m, \ \text{如果 } (n, m) = 1,$$

$$\mathbf{f}_n \mathbf{V}_n = 1 + \cdots + 1 \ (n \text{ 项}),$$

$$\langle a + b \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{V}_n < r_n(a, b) > \mathbf{f}_n.$$

$A$ 上的交换形式群是利用 Cart$(A)$ 上的某些模进行分类的．当 $A$ 是一个 $\mathbf{Z}_{(p)}$ 代数时，为此目的可以利用一个更简单的环 Cart$_p(A)$．它由所有表达式（$*$）构成，这时下标 $i, j$ 仅取素数 $p$ 的幂 $p^0, p^1, p^2, \cdots$．运算规则类似．当 $k$ 是一个特征 $p > 0$ 的完全域，表示 $W(k)$ 的 Frobenius 自同态（此时由 $\sigma(a_1, a_2, \cdots) = (a_1^p, a_2^p, \cdots)$ 给出），那么 Cart$_p(k)$ 可以表示成由系数在 $W_{p^\infty}(k)$ 中关于符号 $\mathbf{f}$ 和 $\mathbf{V}$ 的所有表达式

$$x_0 + \sum_{i=1}^{\infty} x_i \mathbf{V}^i + \sum_{j=1}^{\infty} y_j \mathbf{f}^j$$

所成的环，且满足附加条件 $\lim_{i \to \infty} y_i = 0$，其运算规则为：

$$\mathbf{f} x = \sigma(x) \mathbf{f}, \ \mathbf{V} x = \sigma^{-1}(x) \mathbf{V},$$

$$\mathbf{f} \mathbf{V} = \mathbf{V} \mathbf{f} = p.$$

这个环，及由表达式

$$x_0 + \sum_{i=1}^{\infty} x_i \mathbf{V}^i + \sum_{j=1}^{<\infty} y_j \mathbf{f}^j$$

所成的子环称为 Dieudonné 环（Dieudonné ring）$D(k)$，其上的某些模（称作 Dieudonné 模（Dieudonné modules））将 $k$ 上的幂幺交换仿射群概型分类，见 [A5]．

**参考文献**


[A1] Artin, E. and Hasse, H., Die beide Ergänzungssätze zum Reciprozitätsgesetz der $l^n$ - ten Potenzreste im Körper der $l^n$ - ten Einheitswurzeln, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 6 (1928), 146 – 162.

[A2] Whaples, G., Generalized local class field theory Ⅲ: Second form of the existence theorem, structure of analytic groups, *Duke Math. J.*, **21** (1954), 575 – 581.

[A3] Hazewinkel, M., Twisted Lubin - Tate formal group laws, ramified Witt vectors and (ramified) Artin - Hasse exponentials, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **259** (1980), 47 – 63.

[A4] Hazewinkel, M., Formal group laws and applications, Acad. Press, 1978.

[A5] Demazure, M. and Gabriel, P., Groupes algébriques, Ⅰ, North - Holland, 1971.


裴定一 译　赵春来 校

## WKB 方法 [WKB method; ВКБ - метод]

G. Wentzel, H. Kramers, L. Brillouin 和 H. Jeffreys 用来求解以下形式的常微分方程的一种渐近方法：

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 x}{dt^2} - q(t) x = 0, \qquad (1)$$

其中在最高阶导数前有一小参数 $\varepsilon > 0$．他们在 1926 年为求 Schrödinger 量子力学波动方程的近似解引入这个方法（关于其历史的详细叙述和有关文献，见 [5]，[6]）．这个方法还有另一些名字：Liouville - Green 近似（Liouville - Green approximation）；相位积分方法（method of the phase integral）；半经典近似（semi-classical approximation），有时 $W$，$K$，$B$（还有 $J$）这几个字母的排列次序也会不同．

令 $I = [a, b]$，$q(t) \in C^\infty(I)$ 而当 $t \in I$ 时 Re $\sqrt{q(t)} \geqslant 0$ 或当 $t \in I$ 时 $q(t) < 0$．于是方程（1）有一解，使得当 $\varepsilon \to +0$ 时，对于 $t \in I$ 一致地有，

$$x_j(t, \varepsilon) \approx w_j(t, \varepsilon) \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k a_{kj}(t) \right], \ j = 1, 2,$$

其中

$$w_{1,2}(t, \varepsilon) = q^{-1/4}(t) \exp\left[ \pm \varepsilon^{-1} \int_a^t \sqrt{q(\tau)}\, d\tau \right]. \ (2)$$

渐近展开式的主项（2）通常称为 WKB 近似（WKB approximation）．

令 $I=[0, +\infty)$，且上述关于 $q(t)$ 的条件都满足，再令

$$\int_0^\infty (|q'(t)|^2|q(t)|^{-5/2}+|q''(t)||q(t)|^{-3/2})dt<\infty.$$

这时方程 (1) 有解 $x_j(t, \varepsilon)=w_j(t, \varepsilon)(1+\varepsilon\varphi_j(t, \varepsilon))(j=1, 2)$，其中 $|\varphi_j(t, \varepsilon)|\leqslant C(t\in I, 0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0)$，这里 $\varepsilon_0>0$ 充分小，而当 $t\to+\infty$, $\varepsilon>0$ 时，$\varphi_j(t, \varepsilon)\to 0$.

如果 $q(t_0)=0$，点 $t_0$ 称为方程 (1) 的转向点 (turning point). WKB 近似在转向点不适用. 而适用于转向点邻域中的渐近公式已经找到了 ([1], [4]). 渐近展开式的主项可以用 Bessel 函数表示.

在许多问题 (如本征值问题，散射问题) 中，只需知道方程 (1) 的解在区间端点的渐近状况，即不必去找转向点处的渐近展开. 如果 $q(t)$ 是一解析函数，一般地可以经由复平面 C 将 WKB 公式由区间 $I$ 的一端拓展到另一端 (严格证明见 [2]). 当 $q(t)$ 为整函数时，已知 WKB 近似 (2) 在复平面 C 上由 Stokes 线 (Stokes lines) (即经过转向点的水平线 Re $\int^t\sqrt{q(t)}\,dt=$ 常数) 所包围的区域中适用. 也得到了方程 (1) 的基本解组除在转向点的邻域外，整个复平面上都适用的渐近公式.

关于偏微分方程的 WKB 近似可见 [5], [6], [8], [9], [10].

**参考文献**


[1] Wazov, W., Asymptotic expansions for ordinary differential equations, Interscience, 1965.

[2] Евграфов, М. А., Федорюк, М. В., 《Успехи матем. наук》, 21 (1966), 1, 3 – 50.

[3] Федорюк, М. В., Добавление к книге В. Вазова [1]. 406 – 433.

[4] Дородницын, А. А., 《Успехи матем. наук》, 7 (1952), 6, 3 – 96.

[5] Heading, J., An introduction to phase-integral methods, Methuen, 1962.

[6] Fröman, N. and Fröman, P. O., JWBK approximation, North-Holland, 1965.

[7] Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М., Квантовая механика, 2 изд., М., 1963 (英译本: Landau, L. D. and Lifshitz, E. M., Quantum Mechanics, Pergamon, 1965).

[8] Маслов, В. П., Теория возмущений и асимптотические методы, М., 1965.

[9] Маслов, В. П., Операторные методы, М., 1973.

[10] Маслов, В. П., Федорюк, М. В., Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики, М., 1976. (英译本: Maslov, V. P. and Fedoryuk, M. V., Semi-classical approximation in quantum mechanics, Reidel, 1981).


М. В. Федорюк 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Olver, F. W. J., Asymptotics and special functions, Acad. Press, 1974.


齐民友 译

## Wolfowitz 不等式 [Wolfowitz inequality; Вольфовица неравенство]

一个关于参数的统计估计与其真值的偏差平方的数学期望的不等式，是用**序贯分析** (sequential analysis) 方法得到的. Wolfowitz 不等式类似于固定样本大小的 **Rao-Cramèr 不等式** (Rao-Cramèr inequality)，它由 J. Wolfowitz 求得.

И. В. Романовский 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Wolfowitz, J., The efficiency of sequential estimates and Wald's equation for sequential processes, *Ann. Math. Statist.*, **18** (1947), 215 – 230.


潘一民 译

## 字 [word; слово]

某一**字母表** (alphabet) 中的**字母** (letter) 的 (线性) 序列. 例如，符号序列 "wordinanalphabet" 就是任意含字母 i, w, o, r, d, n, a, l, p, h, b, e, t 的字母表中的一个字. 为了方便起见，也容许空字 (empty word)，即不含字母的字. 它是任意字母表中的字.

更确切地，可以使用字的归纳特征化 (inductive characterization)，按照这个办法，在一个字母表 $A$ 中的字定义为由以下的生成步骤而得到的对象: a) 空字是 $A$ 中一个字; b) 如果对象 $P$ 是 $A$ 中一个字而 $\xi$ 是 $A$ 的一个字母，则 $P\xi$ 也是 $A$ 中一个字. 这种对字的刻画使得证明在一个给定的字母表中关于字的普遍为真的论断时可以应用归纳论证.

字是**构造对象** (constructive object) 的一种很好的一般类型，因此，字的概念在构造性数学中占有重要的地位. 字的概念也被广泛地用于代数、数学语言等各个方面.

**参考文献**


[1] Марков, А. А., Теории алгорифмов, М.-Л., 1954 (《Тр. матем. ин-та АН СССР》, 42 (1954), 12 – 25). (中译本: A. A. 马尔科夫, 算法论 (上, 下), 科学出版社, 1959).

[2] Markov, A. A. and Nagorny, N. M. (N. M. Nagornii): The theory of algorithms, Kluwer 1988 (译自俄文).


Н. М. Нагорный 撰

【补注】 在代数中，字通常由字母和运算符号构成，如 $x+y-z$.

字长 (length of a word) 归纳地定义为: $l$(空字) $=0$, $l(P\xi)=l(P)+1$.

对于(字的)毗连(concatenation)运算

$$(a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_m)\mapsto a_1\cdots a_n b_1\cdots b_m,$$

字母表 $A$ 上的所有字的集 $\Omega(A)$ 构成一个结合幺半群(monoid). 空字是单位元. 这是 $A$ 上的自由幺半群(free monoid). 它具有自由性质(或称泛性质): 对每一个幺半群 $M$ 和集映射 $\varphi: A\to M$, 存在唯一一个幺半群态射 $\widetilde{\varphi}:\Omega(A)\to M$, $\widetilde{\varphi}$ 是 $\varphi$ 的扩充. 这里, $A$ 与 $\Omega(A)$ 中长为 1 的字的集合相同.

**参考文献**


[A1] Lyndon, R. and Schupp, P. Combinatorial group theory, Springer, 1977. 郝钢新 译


**世界函数[world function; мировая функция]**

沿(测地凸的)时空(space-time)中连接两点 $P'(x')$ 和 $P(x)$ 的测地线 $\Gamma$ 所取的积分值

$$\Omega(P',P)=\Omega'(x',x)=$$

$$=\frac{1}{2}(u_1-u_0)\int_{u_0}^{u_1} g_{ij}U^iU^j du.$$

这里 $\Gamma$ 是用参数化 $x^i=\xi^i(u)$ 给出的, $u$ 是典范参数, $U^i=d\xi^i/du$. 世界函数在可相差一个符号的意义下等于连接 $P'$ 和 $P$ 的测地线的平方测度的一半, 而且是两点不变的, 即它的值在 $P'$ 与 $P$ 的邻域中的坐标变换下是不变的.

在平坦时空中, 存在着一个坐标系使得

$$\Omega(x',x)=\frac{1}{2}g^0_{ij}(x^{i'}-x^i)(x^{j'}-x^j),$$

其中

$$g^0_{ij}=\mathrm{diag}(1,1,1,-1).$$

**参考文献**


[1] Synge, J. L., Relativity: the general theory, North-Holland & Interscience, 1960, Chapt. II (译自俄文). М. И. Войцеховский 撰 沈纯理 译


**世界线[world line; мировая линия]**

**时空**(space-time)中的一条线, 它是一个质点的时空轨线. 在时空的某个区域中引入一个局部坐标系 $t, x, y, z$, 并设点 $P(t,x,y,z)$ 位于世界线 $\gamma$ 上, $P$ 称为世界点(world point); 它描述了事件(event), 即在时间 $t$, 质点 $P$ 具有空间坐标 $x, y, z$. 事件的概念以及相关的世界点和世界线的概念, 加上从经典力学中借来的质点的概念都是相对论中的基本概念. 通常考虑光滑(或分段光滑)的世界线. 具有正静止质量的质点的世界线是一条类时曲线. 具有零静止质量的质点(例如光子及其他一些零质量的基本粒子的非量子模型)的世界线是一条迷向曲线. 时空中任一点被看成是一个世界点, 即一个(潜在)事件, 每一条类时或迷向曲线被看成某一质点的(可能的)世界线. 根据**测地线假设**(geodesic hypothesis), 不受非引力场影响的一个质点的世界线是时空测地线. 世界线 $\gamma$ 的单位切向量 $\dot{\gamma}$ 是一个四维速度向量; 在局部坐标系中, 它具有如下形式:

$$\left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}};\ \frac{\frac{\mathbf{v}}{c}}{\sqrt{1-\frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}}\right],$$

其中

$$\mathbf{v}=\left[\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}\right].$$

亦见 **Minkowski 空间**(Minkowski space).

Д. Д. Соколов 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Taylor, E. F. and Wheeler, J. A., Space-time physics, Freeman, 1963.

[A2] Eddington, A. S., The mathematical theory of relativity, Cambridge Univ. Press, 1960.

[A3] Bergmann, P. G., Introduction to the theory of relativity, Dover, reprint, 1976.

[A4] Lawden, D. F., Tensor calculus and relativity, Methuen, 1962. 沈纯理 译


**圈积[wreath product; сплетение]**

1) 两个群 $A$ 和 $B$ 的圈积(wreath product of two groups)是用下述方法构成的. 令 $A^B$ 是 $B$ 上定义的在 $A$ 中取值的所有函数的集合. 对于逐个分量的乘法, 它是群(group), 且是 $A$ 的 $|B|$ 个副本的完全直积($|B|$ 表示 $B$ 中元素的数目); $B$ 按下述方法作为自同构群作用在 $A^B$ 上: 设 $b\in B$, $\varphi\in A^B$, 则对 $x\in B$, $\varphi^b(x)=\varphi(xb^{-1})$. 对于这个运算, 可形成 $B$ 和 $A^B$ 的半直积 $W$, 即所有元素对 $(b,\varphi)$ 的集合, 这里 $b\in B$, $\varphi\in A^B$, 乘法运算是

$$(b,\varphi)(c,\psi)=(bc,\varphi^c\psi).$$

作成的群 $W$ 称为 $A$ 和 $B$ 的 Descartes(或完全的)圈积(Cartesian (complete) wreath product), 且记成 $A\,\mathrm{Wr}\,B$(或用 Ph. Hall 的记号 $A\,\bar{\wr}\,B$). 若用具有有限支撑的所有函数, 即仅在有限点集上取非单位元值的函数组成较小的群 $A^{(B)}$ 代替 $A^B$, 则就得到 $W$ 的一个子群, 称为 $A$ 和 $B$ 的圈积(wreath product)(直接圈积(direct wreath product), 离散圈积(discrete wreath product)); 用 $A\,\mathrm{wr}\,B$(或 $A\wr B$)表示它. 这两种圈积都广泛用于构造群的各种例子.

参考文献

[1] Neumann, H., Varieties of groups, Springer, 1967.

[2A] Krasner, M. and Kaloujnine, L., Produit complet des groupes de permutations et problème d'extension de groupes, I, *Acta Sci. Math. Szeged*, **13** (1950), 208 – 230.

[2B] Krasner, M. and Kaloujnine, L., Produit complet des groupes de permutations et probléme d'extension de groupes, II, *Acta Sci. Math. Szeged*, **14** (1951), 39 – 66; 69 – 82.

А. Л. Шмелькин 撰


【补注】 更一般地，令 $G$ 为群，$H$ 是**置换群**（permutation group），即 $H$ 为作用在集合 $X$ 上的群（不传递或忠实地）. 考虑全部元素对

$$\{(h, f): f: X \to G, h \in H\}$$

的集合. 在该集上定义乘法

$$(h_1, f_1)(h_2, f_2) = (h_1 h_2, f_1^{h_2} f_2),$$

这里 $f_1^{h_2}(x) = f_1(h_2(x))$（以及 $(ff')(x) = f(x) \cdot f'(x)$）. 这样就定义了群结构，所得的群记成 $G \wr H$，且称为 $G$ 和 $H$ 的（完全的（complete））圈积（wreath product）. 若 $X$ 是无限的，则仅取映射 $f: X \to G$，在几乎所有 $x \in X$ 上使 $f(x) = e$，这里 $e$ 是 $G$ 中单位元，得到（限制的（restricted））圈积（wreath product）.

在 $X = H$ 的特殊情形，$H$ 作用于本身，$x^h = h(x) = xh^{-1}$ 是右正则置换表示，就得到前面所述的圈积，这种圈积通常叫做标准圈积（standard wreath product）或正则圈积（regular wreath product）.

若 $G$ 还是作用于集合 $Y$ 的置换群，则 $G \wr H$ 可看成作用在集合 $Y \times X$ 上的置换群，其作用为

$$(h, f)(y, x) = (f(x)(y), h(x)).$$

对称群的许多自然的子群，如元素的中心化子，某些子群的正规化子，Sylow 子群，都是圈积的直积. 例如 **Young 子群**（Young subgroup）$S_m \times \cdots \times S_m \subset S_{nm}$ 的正规化子是圈积 $S_m \wr S_n$. 当 $G$ 是任意群时，圈积 $G \wr S_n$ 曾称为 $G$ 的次数为 $n$ 的完全单项群（complete monomial group of degree $n$），或 $G$ 的 $n$ 次对称（symmetry of degree $n$）. 圈积 $\mathbf{Z}/(m) \wr S_n$ 及 $\mathbf{Z}/(m) \wr A_n$ 有时称为广义对称群（generalized symmetric group）及广义交错群（generalized alternating groups）; $\mathbf{Z}/(2) \wr S_n$ 是超八面体群（hyper-octahedral group）. 更一般的标准积是扭圈积，它结合了 $H$ 的子群 $H_1$ 在 $G$ 上的作用，参见[A4].


参考文献

[A1] Huppert, B., Endliche Gruppen, 1, Springer, 1967, § 15（中译本：贝・胡佩特，有限群，1，上、下册，福建人民出版社，1992）.

[A2] Hall, M., The theory of groups, Macmillan, 1959, p. 81 ff（中译本：M. 赫尔，群论，科学出版社，1982）.

[A3] Kerber, A., Representations of permutation groups, I – II, Springer, 1971 – 1975.

[A4] Suzuki, M., Group theory, 1, Springer, 1982.

石生明 译 王 杰 校


（2）半群的圈积（wreath product of semi-group）是由两个半群用下述方法构造出的第三个半群：$A$ 和 $B$ 的圈积 $W$ 的底集合是 $F(B, A) \times B$，其中 $F(B, A)$ 是从 $B$ 到 $A$ 中的所有映射的半群（semi-group），它的乘法是逐点乘法，$W$ 上的运算由下述公式给定：$(f, b)(g, c) = (f^{b_g}, bc)$，其中映射 $b_g$ 定义为 $b_g(y) = g(yb)$. $A$ 和 $B$ 的圈积写成 $A \operatorname{wr} B$. 这是标准圈积；圈积的其他定义和推广可参见[1]，[2]，[4] – [7].

$A$ 和 $B$ 的圈积包含**直积**（direct product）$A \times B$ 作为子半群. 若 $A$ 有单位元，则 $A$ 被 $B$ 的任何理想扩张可嵌入 $A \operatorname{wr} B$（见[3]）.

对 $A$，$B$ 的各种性质何时能被 $A \operatorname{wr} B$ 继承的问题已进行了研究，主要是对于各种类型的单纯性（参见**单半群**（simple semi-group））. 下面是一些例子. 设 $A$ 和 $B$ 是理想单半群，$B$ 具有右消去律，则 $A \operatorname{wr} B$ 是理想单半群. 若 $A$ 和 $B$ 是完全单半群且 $A$ 是左单的，则 $A \operatorname{wr} B$ 是完全单的（[3]）. 若 $A$ 和 $B$ 是有完全单核（见**半群的核**（kernel of a semi-group））的半群，则 $A \operatorname{wr} B$ 有完全单核（[4]），进而，$A \operatorname{wr} B$ 的核等于核的圈积的平方（[7]）. 若 $A$，$B$ 之一为正则的，另一个为左单的，则 $A \operatorname{wr} B$ 是正则的（[6]）. 令 $|A| > 1$；则 $A \operatorname{wr} B$ 是**逆半群**（inversion semi-group）（或**右群**（right group）），当且仅当 $A$ 是逆半群（或右群，分别地）且 $B$ 是群（[6]）.

圈积可用于给出下述 Evan 定理的紧凑的证明：每个可数半群 $S$ 可嵌入到有二个生成元的半群中（[1]），且当 $S$ 是有限生成的周期半群时可嵌入到有两个生成元的周期半群中.

圈积和它的推广在自动机的代数理论中起重要作用. 例如可用于证明下述定理：每个有限半群自动机可分解成触发器和单群自动机的逐级联接（[2]，亦见[5]），这即所谓 Krohn-Rhodes 定理.


参考文献

[1] Neumann, B. H., Embedding theorems for semi-groups, *J. London Math. Soc.*, **35** (1960), 138, 184 – 192.

[2] Krohn, K. and Rhodes, J., Algebraic theory of machines. I, Prime decomposition theorem for finite semi-groups and machines, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **116** (1965), 450 – 464.

[3] Hunter, R. P., Some results on wreath products of semi-groups, *Bull. Soc. Math. Belgique*, 18 (1966), 1, 3 – 16.

[4] McKnight, J. D., jr. and Sadowski, E., The kernal of the wreath product of semi-groups, *Semigroup Forum*, 4 (1972), 232 – 236.

[5] Arbib, M. (ed.): Algebraic theory of machines, languages and semi-groups, Acad. Press, 1968.

[6] Кошелев, Ю. Г., Сплетение и уравнение на полугруппе, *Semigroup Forum*, 11 (1975), 1, 1 – 13.

[7] Nakajima, S., On the kernal of the wreath product of completely simple semi-groups Ⅱ, in Proc. First Symp. Semi-groups, Shimane Univ. Matsue, 1977, 84 – 88.

Э. А. Голубов, Л. Н. Шеврин 撰
石生明 译 王杰 校

**翻滚数 [writhing number]**

【补注】 设 $C$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中一条闭的嵌入的光滑曲线. 对 $C$ 上的每一个有序点对 $x, y$, 设 $e(x, y)=(y-x)/\|y-x\|$ 为从 $x$ 指向 $y$ 的单位长度向量. 这给出了一个映射 $e: C\times C\to S^2$. 空间曲线 $C$ 的翻滚数为

$$\mathrm{Wr}(C)=\frac{1}{4\pi}\int_{C\times C} e^* d\Sigma,$$

其中 $e^* d\Sigma$ 是单位球面 $S^2$ 上的标准面积元 $d\Sigma$ 沿 $e$ 的拉回. 藉助于在 $x$ 和 $y$ 点处的局部曲线参数 $s_1$ 和 $s_2$, $\mathrm{Wr}(C)$ 可表示成

$$\mathrm{Wr}(C)=\frac{1}{4\pi}\iint\left[\frac{\partial e}{\partial s_1}\times\frac{\partial e}{\partial s_2}\cdot e\right]ds_1 ds_2.$$

现在设 $R$ 是一个以 $C$ 为基础的带 (ribbon), 这样的带可通过取 $C$ 上的一个光滑的单位长度向量场 $v$ 而得到, 使得在 $x\in C$ 处, $v(x)$ 总是垂直于 $C$ 在 $x$ 处的切向量. 将单位长度取得足够小, 使得 $x$ 处的每个单位长度线段 $v(x)$ 与 $C$ 仅交于点 $x$. 带 $R$ 是所有闭的单位长度线段 $v(x)$ $(x\in C)$ 的并集. 设 $C'$ 是由 $v(x)$ 的末端点所构成的光滑曲线. 带 $R$ 的全扭曲 (total twist) 定义为

$$\mathrm{Tw}(R)=\frac{1}{2\pi}\int_C v^{\perp}\cdot dv,$$

其中 $v^{\perp}$ 是在 $x\in C$ 处的单位长度矢量, 使得 $v, v^{\perp}$ 及在 $x$ 处的沿 $C$ 的单位长度切矢量 $t$ 构成了一个右手标准正交 3 维标架. $C$ 的翻滚数, $R$ 的全扭曲以及环绕数 (linking number) $\mathrm{Lk}(C, C')$ (见环绕系数 (linking coefficient)) 之间满足如下的 White 公式 (White formula):

$$\mathrm{Lk}(C, C')=\mathrm{Tw}(R)+\mathrm{Wr}(C),$$

这里环绕数是由 Gauss 公式 (Gauss formula)

$$\mathrm{Lk}(C, C')=\frac{1}{4\pi}\int_{C\times C'} e^* d\Sigma$$

给出的 (其中 $x$ 取遍 $C$, $y$ 取遍 $C'$). White 公式在 DNA 的螺旋和超螺旋中有应用.

**参考文献**

[A1] Pohl, W. F., DNA and differential geometry, *Math. Intelligencer*, 3 (1980), 20 – 27.

[A2] White, J. H., Self-linking and the Gauss integral in higher dimensions, *Amer. J. Math.*, 91 (1969), 693 – 728.

沈纯理 译

**Wronski 行列式 [Wronskian 或 Wronski determinant; Вронскиан]**

$n$ 个 $n$ 维向量函数系

$$\varphi_i(t)=\{\varphi_i^1(t),\cdots,\varphi_i^n(t)\},\ i=1,\cdots,n \qquad (1)$$

的下述行列式 (determinant)

$$W(\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t))=\begin{vmatrix}\varphi_1^1(t)\cdots\varphi_n^1(t)\\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ \varphi_1^n(t)\cdots\varphi_n^n(t)\end{vmatrix}$$

具有直到 (包括) $(n-1)$ 阶导数的 $n$ 个标量函数系

$$f_1(t),\cdots,f_n(t) \qquad (2)$$

的 Wronski 行列式是

$$W(f_1(t),\cdots,f_n(t))=\begin{vmatrix}f_1(t) & \cdots & f_n(t)\\ f_1'(t) & \cdots & f_n'(t)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ f_1^{(n-1)}(t) & \cdots & f_n^{(n-1)}(t)\end{vmatrix}. \qquad (3)$$

这些概念由 J. Wronski([1]) 首先引入.

如果向量函数系 (1) 在集合 $E$ 上线性相关, 那么

$$W(\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t))\equiv 0,\ t\in E.$$

若标量函数 (2) 在集合 $E$ 上线性相关, 则

$$W(f_1(t),\cdots,f_n(t))\equiv 0,\ t\in E.$$

逆定理一般不成立: 一个 Wronski 行列式在某集合上恒为零不是 $n$ 个函数在该集上线性相关 (linear dependence) 的充分条件.

假设向量函数 (1) 是 $n$ 阶线性齐次方程组 $x'=A(t)x$ $(x\in\mathbf{R}^n)$ 的解, $A(t)$ 是 $n\times n$ 维矩阵, 它在某区间 $I$ 上连续. 若这些解构成一基本解系, 那么

$$W(\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t))\neq 0,\ t\in I.$$

若这些解的 Wronski 行列式至少在 $I$ 的某一点上等于零, 那么它就在 $I$ 上恒等于零, 从而函数系 (1) 线性相关. 下述 Liouville 公式 (Liouville formula) 是有用的:

$$W(\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t))=$$

$$= W(\varphi_1(\tau),\cdots,\varphi_n(\tau))\exp\int_\tau^t \mathrm{Tr}\,A(s)ds,\ t,\tau\in I,$$

这里 $\mathrm{Tr}\,A(t)$ 是矩阵 $A(t)$ 的迹．

设函数系（2）是 $n$ 阶线性齐次方程

$$y^{(n)}+p_1(t)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(t)y'+p_n(t)y=0$$

的解，其中 $p_1(t)$, …, $p_n(t)$ 在区间 $I$ 上连续．若这些解构成一个基本解系，那么

$$W(f_1(t),\cdots,f_n(t))\neq 0,\ t\in I.$$

若这些解的 Wronski 行列式至少在 $I$ 的某点上为 0，那么它在 $I$ 上恒等于零．从而函数系（2）线性相关．Liouville 公式（Liouville formula）成立：

$$W(f_1(t),\cdots,f_n(t))=$$

$$= W(f_1(\tau),\cdots,f_n(\tau))\exp\left[-\int_\tau^t p_1(s)ds\right],\ t,\tau\in I.$$

**参考文献**

[1] Hoene-Wronski, J., Réfutation de la théorie des fonctions analytiques de Lagrange, Paris, 1812.

[2] Понтрягин, Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 4 изд., М., 1974（中译本：Л. С. 庞特利雅金，常微分方程，上海科学技术出版社，1962）. И. Х. Розов 撰

【补注】 G. Peano（[A3]）给出了使 Wronski 行列式恒为零但非线性相关的 $n$ 个函数系（2）的例子．

$\Phi=\{f_1,\cdots,f_n\}$ 的一个 $i$ 阶子 Wronski 行列式是从 $\Phi$ 中取 $i$ 个函数所构成的 Wronski 行列式．下面两个定理都是通过 Wronski 行列式给出线性相关的充分条件．1）设 $n>1$, $f_1,\cdots,f_n$ 解析且 $W(\Phi)\equiv 0$，则 $f_1,\cdots,f_n$ 线性相关（[A4]，[A5]）．2）设 $n>1$, $W(\Phi)\equiv 0$，又设在 $f_1,\cdots,f_n$ 的定义区间上不存在点使所有 $n-1$ 阶子 Wronski 行列式同时为零，那么 $\Phi$ 线性相关（[A3]）．

关于多元函数的更多知识与结果，见[A6]，[A7]．

**参考文献**

[A1] Apostel, T. M., Mathematical analysis, Addison-Wesley, 1974.

[A2] Hartman, P., Ordinary differential equations, Birkhäuser, 1982.

[A3] Peano, G., Sur le déterminant Wronskian, *Mathesis*, 9(1989), 75－76.

[A4] Böcher, M., Certain cases in which the vanishing of the Wronskian is a sufficient condition for linear dependence, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2(1901) 139－149.

[A5] Crutis, D. R., The vanishing of the Wronskian and the problem of linear dependence, *Math. Ann.*, 65 (1908), 282－298.

[A6] Wolsson, K., A condition equivalent to linear dependence for functions with vanishing Wronskian, *Linear Alg Appl.*, 116(1989), 1－8.

[A7] Wollsson, K., Linear dependence of a function set of $m$ variables with vanishing generalized Wronskians, *Linear Alg. Appl.*, 117(1989), 73－80.

王斯雷 译

## 点窝 [wurf; вурф]

当 $n>1$ 时，$n$ 维射影空间中 $n+2$ 个点的有序集；当 $n=1$ 时，一维射影空间中 4 个点的有序集．如果 $n>1$，则点窝中的任意 $n+1$ 点都不属于同一个超平面．一条直线或一条圆锥截线上的两个点窝是相等的，如果构成它们的两个点的四元组是射影的．可以对点窝定义加法和乘法运算，为此利用具有三个基点 $P_0$, $P_1$, $P_\infty$ 的点窝——所谓约化点窝（reduced wurf）是合适的．用这种方式，点窝上的运算简化为点的运算．

两个点 $A$ 和 $B$ 的和（sum of two points $A$ and $B$）（$A$, $B\neq P_\infty$）是点 $A+B$，它对应于交换 $A$ 和 $B$ 并保持 $P_\infty$ 不动的双曲对合（involution）$(AB)$ $(P_\infty P_\infty)$ 下的 $P_0$．加法运算是交换和结合的．点 $P_0$ 是零元；每一点 $A$ 对应于一个相反的点 $-A$：$A+(-A)=P_0$．

两个点 $A$ 和 $B$ 的积（product of two points $A$ and $B$）（$A$, $B\neq P_0$, $P_\infty$）是点 $A\times B$，它与点 $P_1$ 一起在交换 $A$ 和 $B$ 及 $P_0$ 和 $P_\infty$ 的椭圆或双曲对合 $(AB)$ $(P_0P_\infty)$ 下构成一个偶．乘法运算是交换和结合的．点 $P_1$ 是单位元；对每一点 $A$，存在一个对应的逆点 $A^{-1}$：$A\times A^{-1}=P_1$．

**参考文献**

[1] Staudt, K. von, Beiträge zur Geometrie der Lage, 2, Korn, Nürnberg, 1959, 166－194.

[2] Coxeter, H. S. M., The real projective plane, Springer, 1992, Chapt. 11. А. Б. Иванов 撰

【补注】 K. von Staudt 用他的"点窝"使射影几何学坐标化．现在他的方法已被认为过时了，尽管这一方法是精巧的．

现代的方法始于[A1]．

如果 $P_0$, $P_1$, $P_\infty$ 分别是射影直线上坐标为（0:1），（1:1），（1:0）的点，$A$ 和 $B$ 是坐标为（$a$:1）和（$b$:1）的两个点，则点窝等价类（$P_0$, $P_1$, $P_\infty$, $A$）和（$P_0$, $P_1$, $P_\infty$, $B$）的和与积是点窝等价类（$P_0$, $P_1$, $P_\infty$, $A+B$）与（$P_0$, $P_1$, $P_\infty$, $A\times B$），$A+B$ 与 $A\times B$ 的坐标为（$a+b$: 1）与（$ab$: 1）．

**参考文献**

[A1] Veblen, O. and Young, J. W., Projective geometry, 1－2, Blaisdell, 1946.

陆珊年 译

# Y

**$Y$ 微分同胚 [$Y$-diffeomorphism; $Y$-диффеоморфизм]** 生成 $Y$ 系统 ($Y$-system) 的微分同胚.

**$Y$ 系统 [$Y$-system; $Y$-система]**, $U$ 系统 ($U$-system), $C$ 系统 ($C$-system)

带有一个紧相流形的光滑动力系统 (流 (连续时间动力系统) (flow (continuous-time dynamical system)) 或者瀑布 (cascade)), 其相流形是一个双曲集 (hyperbolic set). 称生成一个 $Y$ 级联的微分同胚为 $Y$ 微分同胚 ($Y$-diffeomorphism). $Y$ 系统是由 Д. В. Аносов 引入的 (见 [1], [2]), 因此它们也常被称为 Аносов 系统 (Anosov system).

$Y$ 系统是结构稳定的 (见粗系统 (rough system)), 且 $Y$ 系统的一个 (在 $C^1$ 意义下的) 微小扰动仍是一个 $Y$ 系统. 周期至多为 $T$ 的 $Y$ 系统的周期轨道的个数随着 $T$ 指数增长. 关于一大类所谓的 "Gibbs" 不变测度, $Y$ 系统具有强遍历性 (见 [4] - [6]). 特别地, 如果一个 $Y$ 系统具有一个 "相容于光滑性" 的有限不变测度, 即此测度在局部坐标下是由一个正密度所定义的 (在早期的论文中只考虑这类测度, 见 [1] - [3]), 那么它一定是一个 Gibbs 测度. 因此, 如果一个 $Y$ 微分同胚没有游荡点 (wandering point), 那么它度量地同构于一个 Bernoulli 自同构 (Bernoulli automorphism); 在广泛的假设下, 从时间平均值到空间平均值的收敛服从中心极限定理, 且混合率是指数的 ("相关的指数衰变").

在 $Y$ 系统的研究中, 经常利用符号动力学 (symbolic dynamics), 由于文献 [7], [8] 引入了 Марков 分割才使得这成为可能 (其确切的定义在 [5] 中, 亦见符号动力学 (symbolic dynamics)). 已经证明关于 $Y$ 系统的许多结果对于某些其他类型的双曲集也成立. 在稍微减弱的双曲性条件下, 也有很少的直接推广 (见 [6], [14]).

环面的双曲自同构和负曲率闭流形上的测地流 (geodesic flow) 是 $Y$ 系统. 也存在着其他的与代数 - 几何性质有关的例子. 在这些例子中, $Y$ 系统有一个与光滑性相容的不变测度, 通过一个微小扰动, 这样的测度可以不出现, 但从结构稳定性的观点来看, 所有点仍是非游荡的. 带有游荡点的 $Y$ 系统 (见 [9]) 的例子有根本不同的特征.

流形上 $Y$ 系统的存在强烈地限制着流形的拓扑性质. 关于这一点的一般情形, 人们所知甚少 (见 [10], [11]), 但当稳定或非稳定流形 (见双曲集 (hyperbolic set)) 是一维的情形, 已被彻底地研究了 (见 [9], [12], [13], [15]).

**参考文献**


[1A] Аносов, Д. В., 《Докл. АН СССР》, **145** (1962), 4, 707 - 709

[1B] Аносов, Д. В., 《Докл. АН СССР》, **151** (1963), 6, 1250 - 1252.

[2] Аносов, Д. В., Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны, М., 1967.

[3] Аносов, Д. В., Синай, Я. Г., 《Успехи матем. наук》, **22** (1967), 5, 107 - 172.

[4] Синай, Я. Г., 《Успехи матем. наук》, **27** (1972), 4, 21 - 64.

[5] Bowen, R., Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms, Springer, 1975.

[6] Каток, А. Б., Синай, Я. Г and Stepin, A. M., Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 13, М., 1975, 129 - 262.

[7] Adler, R. L. and Weiss, B., Similarity of automorphisms of the torus., *Mem. Amer. Math. Soc.*, **98** (1970).

[8] Синай, Я. Г., 《Функциональный анализ и его приложения》, **2** (1968), 1, 64 − 89.

[9] Franks, J. M. and Williams, B., Anomalous Anosov flows, in Z. Nitecki and C. Robinson (eds.): Global Theory of Dynamical Systems (Proc. Evanston, 1969), Lecture notes in math., Vol. 819, Springer, 1980, 158 − 174.

[10] Hirsch, M. W., Anosov maps, polycyclic groups and homology, *Topology*, **10** (1971), 3, 177 − 183.

[11] Shiraiwa, K., Manifolds which do not admit Anosov diffeomorphisms, *Nagoya Math J.*, **49** (1973), 111 − 115.

[12A] Franks, J., Anosov diffeomorphisms, in Global Analysis, Proc. Sympos. Pure Math., Vol. 14, Amer. Math. Soc., 1970, 61 − 93.

[12B] Newhouse, S. E., On codimension one Anosov diffeomorphisms, *Amer. J. Math.*, **92** (1970), 761 − 770.

[12C] Manning, A., There are no new Anosov diffeomorphisms on tori, *Amer. J. Math.*, **96** (1974), 422 − 429.

[13] Verjovsky, A., Codimension one Anosov flows, *Bolet. Soc. Mat. Mexicana*, **19** (1974), 2, 49 − 77.

[14A] Fahti, A. and Laudenbach, F., Les feuilletages mesurés, *Astérisque*, **66 − 67** (1979), 71 − 126.

[14B] Fahti, A. and Laudenbach, F., Comment Thurston compactifie lespace de Teichmuller, *Astérisque*, **66 − 67** (1979), 139 − 158.

[14C] Fahti, A. and Poénaru, V., Théorème d'unicité des difféomorphismes pseudo-Anosov, *Astérisque*, **66 − 67** (1979), 225 − 242.

[15] Солодов, В. В., 《Успехи матем. наук》, **46** (1991), 91 − 114.

Д. В. Аносов 撰

【补注】 在西方的文献中一直沿用术语 Аносов 系统(流, 微分同胚). Аносов 流是公理 *A* 流 (axiom-*A* flows) 的特殊情形, 即紧流形上满足**非游荡点** (non-wandering point) 的集合为**双曲集** (hyperbolic set), 且**周期点** (periodic point) 是稠密的流. 公理 *A* 流是由 S. Smale 引入的, 关于 Аносов 系统的许多信息可在 [A2] 中找到.

**参考文献**

[A1] Adachi, T., Distribution of closed orbits with a pre-assigned homology class in a negatively curved manifold, *Nagoya Math. J.*, **110** (1988), 1 − 14.

[A2] Bowen, R., On axiom *A* diffeomorphisms, Amer. Math. Soc., 1978.

[A3] Eberlein, P., When is a geodesic flow Anosov type? *J. Differential Geom.*, **8** (1973), 437 − 463.

[A4] Plante, J. F., Homology of closed orbits of Anosov flows, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **37** (1973), 297 − 300.

[A5] Shub, M., Global stability of dynamical systems, Springer, 1986.

[A6] Palis, J. and De Melo, W., Geometric theory of dynamical systems, Springer, 1982.

[A7] Smale, S., Differentiable dynamical systems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73 (1967), 747 − 817.

沈纯理 译

## 杨(振宁)-Baxter 方程 [Yang-Baxter equation]

【补注】 令 $R$ 为一 $(n^2\times n^2)$ 矩阵, 其元为 $r_{kl}^{ij}$. 视 $R$ 为 $\mathbf{C}^n\otimes\mathbf{C}^n$ 的以 $e_i\otimes e_j(i, j=1,\cdots,n)$ 为基的自同态, 使得

$$R(e_i\otimes e_j)=\sum_{a,b}r_{ij}^{ab}e_a\otimes e_b, \qquad (A1)$$

则 $R$ 的定常杨(振宁)-Baxter 方程, 或称**量子杨(振宁)-Baxter 方程** (quantum Yang-Baxter equation) 是

$$R^{12}R^{13}R^{23}=R^{23}R^{13}R^{12}, \qquad (A2)$$

这里 $R^{ij}$ 是 $\mathbf{C}^n\otimes\mathbf{C}^n\otimes\mathbf{C}^n$ 的自同态, 它在第 $i$, $j$ 两因子上的作用与 $R$ 相同, 而令第三个因子不动. 于是, $R^{12}=R\otimes\mathrm{id}$, $R^{23}=\mathrm{id}\otimes R$, 而

$$R^{13}(e_i\otimes e_j\otimes e_k)=\sum_{a,b}r_{ik}^{ab}e_a\otimes e_j\otimes e_b. \quad (A3)$$

杨-Baxter 方程的另一个形式是

$$\tilde{R}^{12}\tilde{R}^{23}\tilde{R}^{12}=\tilde{R}^{23}\tilde{R}^{12}\tilde{R}^{23}. \qquad (A4)$$

$R$ 是 (A2) 之解, 当且仅当 $\tilde{R}=PR$ 为 (A4) 之解, 这里 $P$ 是 $(n^2\times n^2)$ 矩阵 $P=(p_{kl}^{ij})$, $p_{kl}^{ij}=\delta_{il}\delta_{jk}$ 将 $\mathbf{C}^n\otimes\mathbf{C}^n$ 的两个因子调换位置.

杨-Baxter 方程 (A2) 可以解释为关于具有内状态空间 $\mathbf{C}^n$ 的相对论性粒子的相互作用的条件 ([A2]). 令两个快度为 $\lambda$, $\mu$ 的粒子的相互作用是 $R(\lambda,\mu):\mathbf{C}^n\otimes\mathbf{C}^n\to\mathbf{C}^n\otimes\mathbf{C}^n$; 则杨-Baxter 方程

$$R^{12}(\lambda,\mu)R^{13}(\lambda,\nu)R^{23}(\mu,\nu)=$$
$$=R^{23}(\mu,\nu)R^{13}(\lambda,\nu)R^{12}(\lambda,\mu) \qquad (A5)$$

表示这样一个条件: 三个粒子的相互作用是由各对粒子相互作用决定的而与哪一对粒子作用在先没有关系. 就这一方面而言, 杨-Baxter 方程也称为**因子分解方程** (factorization equation). 这首先是在 [A5], [A6] 中被发现的. 在点阵统计力学中, 杨-Baxter 方程有另一种解释 ([A3], [A4]). 在这种情况下, 此方程称为**三角形方程** (triangle equation) 或**星形-三角形方程** (star-triangle equation). 它的起源可追溯到 [A7].

若 $\widetilde{R}$ 满足 (A4), 令 $\widetilde{R}_i = \mathrm{id}\otimes\cdots\otimes\mathrm{id}\otimes\widetilde{R}\otimes\mathrm{id}\otimes\cdots\otimes\mathrm{id}$, 其中有 $i$ 个因子 id 在 $\widetilde{R}$ 之前, $n-i-1$ 个因子 id 在其后. 于是 $\sigma_i \mapsto \widetilde{R}_i$ 定义了辫群 (braid group) $B_n$ 的一种表示, $\sigma_i$ 是第 $i$ 简单辫, 见辫论 (braid theory). 这是纽结和辫的理论与量子场论和统计力学有相互联系的主要理由之一, 例如见[A9].

杨-Baxter 方程的一个推广是基本交换关系 (fundamental commutation relation)

$$R(\lambda,\mu)(T(\lambda)\otimes T(\mu))=$$
$$=(T(\mu)\otimes T(\lambda))R(\lambda,\mu), \qquad (A6)$$

它是由 Л. Д. Фаддеев, Е. К. Склянин 和 Л. А. Тахтаджян 作为他们的量子反散射方法 (quantum inverse scattering method) 的基础引入的 ([A8]). 在 (A6) 中 $R(\lambda,\mu)$ 是一个标量元的 $(n^2\times n^2)$ 矩阵 (和前面一样, 它通常满足杨-Baxter 方程), $T(\lambda)$ 则是算子的 $(n\times n)$ 矩阵. 方程 (A6) 是应用一个 (代数的) Bethe 引理 (Bethe ansatz) 来计算 Hamilton 算子 $t(\lambda)=\mathrm{Tr}(T(\lambda))$ 的本征值与本征向量的起点. (A6) 的解与某些 Hopf 代数的表示族有关, 特别是与拟三角 Hopf 代数 (的对偶) 的表示有关, 见量子群 (quantum groups) 和 [A14], [A15], [A11].

经典的杨-Baxter 方程 (classical Yang-Baxter equation) 是 (A2) 的半经典极限. 它就是

$$[X^{12}(u_1,u_2), X^{13}(u_1,u_3)]+$$
$$+[X^{12}(u_1,u_2), X^{23}(u_2,u_3)]+$$
$$+[X^{13}(u_1,u_3), X^{23}(u_2,u_3)]=0, \qquad (A7)$$

这里 $X(u,v)$ 是在 $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ 中取值的函数, $\mathfrak{g}$ 是一个 Lie 代数. (为了解释 (A7), 把 $\mathfrak{g}$ 嵌入在它的泛包络代数 $U_{\mathfrak{g}}$ 中: $X^{12}$ 等等的意义类似于方程 (A2) 的情况). 经典杨-Baxter 方程与完全可积 **Hamilton** 系统 (Hamiltonian system) 有密切关系 (又见孤立子 (soliton)), 见 [A12], 而 [A13] 的结果多少能解释何以孤立子方程的解典型地主要涉及椭圆函数、三角函数和有理函数.

**参考文献**


[A1] Jimbo, M. (ed.), Yang-Baxter equation in integrable systems, World Scientific, 1990.

[A2] Zamolodchikov, A. B. and Zamolodchikov, Al. B., Factorized $S$-matrices in two dimensions as the exact solutions of certain relativistic quantum field theory models. *Ann. Physics*, **120** (1979), 253 − 291 (重印于[A1]中, 82 − 120).

[A3] Baxter, R. J., Solvable eight-vertex model on an arbitrary planar lattice, *Phil. Trans. Royal Soc. London*, **289** (1978), 315 − 346 (重印于[A1]中, 50 − 81)

[A4] Baxter, R. J., Exactly solved models in statistical mechanics, Acad. Press, 1982.

[A5] McGuire, J. B., Study of exactly solvable one-dimensional $N$-body problems, *J. Math. Physics*, **5** (1964), 622 − 636.

[A6] Yang, C. N., Some exact results for the many-body problem in one dimension with delta-function interaction, *Phys. Rev. Lett.*, **19** (1967), 1312 − 1314.

[A7] Onsager, L., Crystal lattices, I. A two-dimensional model with an order-disorder transition. *Phys. Rev.*, **65** (1944), 117 − 149.

[A8] Faddeev, L. D., Integrable models in (1 + 1)-dimensional quantum field theory, in Les Houches, Vol. Session 39. Elsevier, 1982, 563 − 608.

[A9] Yang, C. N. and Ge, M. L. (eds.), Braid groups, knot theory and statistical mechanics, World Scientific, 1989.

[A10] Jimbo, M., Introduction to the Yang-Baxter equation, in M. Jimbo (ed.), Yang-Baxter equation in integrable systems, World Scientific, 1990, 111 − 134.

[A11] Hazewinkel, M., Introductory recommendations for the study of Hopf algebras in mathematics and physics, *CWI Quarterly*, **4** (1991), 3 − 26.

[A12] Semenov-Tyan-Shanskii, M. A., What is a classical r-matrix, *Funct. Anal. Appl.*, **17** (1984), 259 − 272 (重印于[A1]中, 226 − 242). (《Функц. Анал. и его прилож.》, **17** (1983), 4, 17 − 33).

[A13] Belavin, A. A. and Drinfel'd, V. G., Solutions of the classical Yang-Baxter equation for simple Lie algebras, *Funct. Anal. Appl.*, **16** (1983), 159 − 180 (重印于[A1]中, 200 − 221). (《Функц. Анал. и его Прилож.》, **16** (1982), 3, 1 − 29)

[A14] Любашенко, В. В., Хопф алгебра и векторные симмитри, 《Успехи матем. наук》 **41** (1986), 185 − 186.

[A15] Faddeev, L. D., Reshetikhin, N. Yu. and Takhtadzhyan, L. A., Quantization of Lie groups and Lie algebras, *Algebra and Analysis*, **1** (1989), 178 − 206 (俄文).


齐民友 译

**杨(振宁)-Mills 场 [Yang-Mills field; Янга-Миллса поле]**

(伪) Riemann 流形上主纤维丛 (principal fibre bundle) 中的一个联络 (connection), 其曲率满足调和条件 (杨(振宁)-Mills 方程 (Yang-Mills equation)).

杨(振宁)-Mills 场, 亦称规范场 (gauge field), 它在近代物理中被用来描述起相互作用载体作用的物理场. 因而, 电动力学中的电磁场, 矢量 $W$ 玻色子 (电弱作用的 Weinberg-Salam 理论中弱相互作用的载体) 场, 和最后, 胶子 (强相互作用的载体) 场, 都由杨-Mills 场描述. 引力场也可以解释为杨-Mills 场 (见[4]).

联络作为场的概念是由 H. Weyl(1917) 首先发展的，他还曾试图用联络来描述电磁场. 1954 年，杨振宁(C. N. Yang) 和 R. L. Mills 提出，基本粒子的内禀自由度空间(例如，描述核子的两个自由度的同位旋空间，两个自由度对应于核子的两个纯态，质子和中子)依赖于时空点，而对应于不同时空点的内禀空间不是典范同构的，用几何学术语说，杨振宁和 Mills 的建议是，内禀自由度空间是**时空**(space-time)上的**向量丛**(vector bundle)，它并不具有典范平凡化，而物理场则由此向量丛的截面描述. 为了描述场演化的微分方程，必须定义丛中的某个联络，即，沿底中曲线的丛的平凡化. 这种具有固定和乐群的联络描述一个物理场(通常称为杨-Mills 场). 对于自由杨-Mills 场的方程可从变分原理推导出来；它们是 **Maxwell 方程组**(Maxwell equations)自然的非线性推广.

杨-Mills 场的一个更严格定义包括下面内容. 令 $\pi: P \to M$ 为 Riemann 流形 $M$ 上的一个主 $G$ 丛，并令 $E(M)=P\times_G E\to M$ 为与 $\pi$ 和 $G$ 模 $E$ 相配的向量丛. $\pi$ 的一个联络 $\nabla$ 定义一个算子 $\nabla^E:\Gamma(E)\to\Gamma(T^*(M)\otimes E(M))$，作用于 $E(M)$ 的截面的空间 $\Gamma(E)$. 可以通过公式 $d^\nabla(\omega\otimes e)=d\omega\otimes e+(-1)^p\omega\wedge\nabla^E e$ 扩展至一个算子 $d^\nabla:\Gamma(E_p)\to\Gamma(E_{p+1})$，它作用于取值于 $E(M)$ 的 $p$ 形式的空间 $\Gamma(E_p)$. 形式上与 $d^\nabla$ 共轭的 $p$ 形式上的算子 $\delta^\nabla$，等于 $\delta^\nabla=(-1)^{p+1}*d^\nabla*$，其中 $*$ 表示 Hodge 星算子.

主 $G$ 丛中的一个联络 $\nabla$，若曲率 $R^\nabla$ 满足 $\delta^\nabla R^\nabla=0$，则称为杨-Mills 场；这里认为 $R^\nabla$ 是向量丛 $\mathfrak{g}(M)=P\times_{\mathrm{Ad}G}\mathfrak{g}$ 中取值的 2 形式，其中 $\mathfrak{g}$ 是 Lie 群 $G$ 的 Lie 代数.

对于 Riemann 流形 $(M,g)$ 的 **Riemann 联络**(Riemannian connection) $\nabla^g$，杨-Mills 方程等价于对于 **Ricci 张量**(Ricci tensor) Ric 的共变导数的对称条件

$$(\nabla^g_X\mathrm{Ric})(Y,Z)=(\nabla^g_Y\mathrm{Ric})(X,Z),$$
$$X,Y,Z\in D(M)=\Gamma(TM).$$

因而杨-Mills 场的例子是 Einstein 空间以及这类空间的直积的 Riemann 联络. 特别是，Kähler-Einstein 空间和四元数 Riemann 空间的 Riemann 联络定义具有结构群 $U(n/2)$ 和 $\mathrm{Sp}(1)\cdot\mathrm{Sp}(n/4)$ 的主标架丛中场-Mills 场. 满足杨-Mills 方程的非 Einstein Riemann 联络的例子是具有常数数量曲率和非常数截面曲率的共形平坦度量的 Riemann 联络. 满足杨-Mills 方程的非 Riemann 联络的例子是对称空间全测地于流形法丛中的联络，或者四元数空间四元数子流形法丛中的联络，它们由这些空间的 Riemann 联络所诱导.

杨-Mills 方程是 $\pi$ 的联络的空间上泛函 $L(\nabla)$ 的 Euler-Lagrange 变分方程，泛函 $L(\nabla)$ 由

$$L(\nabla)=\int_M \langle R^\nabla, R^\nabla\rangle$$

予以定义. 假定 Riemann 流形 $(M,g)$ 为紧的和定向的，而 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示矢量丛 $\mathfrak{g}(M)\otimes\Lambda^2$ 的纤维中的标量积，由 $G$ 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 中 $\mathrm{Ad}G$ 不变标量积以及由度量 $g$ 所诱导的、$M$ 上 2 形式从 $\Lambda^2$ 的纤维中的标量积予以定义. 因此，杨-Mills 场是 $L(\nabla)$ 的临界点. 如果 $L$ 在 $\nabla$ 的二阶微分是正定的(因而 $\nabla$ 是 $L$ 的局部极小值)，一个杨-Mills 场称为稳定的(stable)；而如果二阶微分是正半定的，则称为弱稳定的(weakly stable). 众所周知，$n\geqslant 5$ 的标准球 $S^n$ 上的任意非平凡主丛中，没有弱稳定的杨-Mills 场. 另一方面，对于 $n\geqslant 3$，球 $S^n$ 相对于等距同构的自由作用非平凡有限群 $\Gamma$ 的商空间 $S^n/\Gamma$，其标准 Riemann 度量的 Riemann 联络是稳定杨-Mills 场([5]).

对于物理学家，最感兴趣的是四维 Riemann(还有 Lorentz)流形上的杨-Mills 场. 在这个情况，Hodge $*$ 算子将 $M$(具有值在一任意向量丛中)上 2 形式的空间映上自身；而且，它是一个对合($*^2=\mathrm{id}$)，仅依赖于度量 $g$ 的定向和共形类. $M^4$ 上主丛中的一个联络 $\nabla$，如果其曲率 2 形式 $R^\nabla$ 是 Hodge 算子的具有本征值 1(相当地，$-1$)的本征向量，则称为自对偶联络(self-dual connection)或瞬子(instanton)(相当地，反自对偶联络(anti-self-dual connection)或反瞬子(anti-instanton)). 根据 Bianchi 恒等式，瞬子和反瞬子是杨-Mills 场. 而且，它们是使 $L$ 具有绝对极小值的点. 对于在具有结构群为 $SU(2)$，$SU(3)$ 或 $SU(4)$ 的标准球上的一个主丛的情况，$L$ 的局部极小值尽限于瞬子和反瞬子(从而有全局极小值). Riemann 流形 $M^4$ 上的一个 Riemann 联络仅对具有和乐群 $G\subset\mathrm{Sp}(1)$ 的流形才是一个瞬子. 所有这类紧流形尽限于复 $K3$ 曲面(见 **$K3$ 曲面**($K3$-surface)).

从 $\pi: P\to M$ 的自同构群 $G(\pi)=\Gamma(P^*_{\mathrm{AD}}G)$，它们在底空间上为恒等，称为规范群(gauge group). 它自然地作用于具有和乐群 $G$ 的 $\pi$ 的瞬子集合 $C^+(\pi)$ 上. 商空间 $M^+(\pi)=C^+(\pi)/G(\pi)$ 称为 $\pi$ 的不可约瞬子的模空间(moduli space of irreducible instantons). 如果 $\pi$ 的结构群 $G$ 是紧的和半单的，而 $M^4$ 的底是一紧的可定向 Riemann 流形，具有非负非零数量曲率，以及自对偶的 Weyl 共形曲率张量，则模空间 $M^+(\pi)$ 或者是空或者是具有维数为

$$\dim M^+(\pi)=2p_1(\mathfrak{g}(M))+$$

$$-\frac{\dim G}{2}\left(\chi(M^4)-\sigma(M^4)\right)$$

的一个流形，其中 $p_1(\mathfrak{g}(M))$ 是从 $\mathfrak{g}(M)$ 的第一 **Понтрягин** 数（Pontryagin number），而 $\chi(M^4)$ 和 $\sigma(M^4)$ 分别是 $M^4$ 的 Euler-Poincaré 示性数（见 **Euler 示性数**（Euler characteristic））和 $M^4$ 的**符号差**（signature）.

对于物理上重要的情况，具有古典紧结构群 $G$ 的标准球 $S^4$ 上的丛，已经获得最完全的结果．特别是，这类丛中的所有瞬子可以用纯代数术语予以描述（例如，用 Grassmann 代数上的某些模，或者用对某些四元数矩阵方程的解来描述（见[1]））．对于 $G=\mathrm{Sp}(1)$ 的情况，所有瞬子可以显示形式予以描述，例如，对于具有 Понтрягин 数为 1 的一个 Sp(1) 丛 $\pi_1: P_1\to S^4$，模空间是 $M^+(\pi_1)\approx\mathbf{R}^+\times\mathbf{H}$，其中 $\mathbf{R}^+$ 是正数集合而 $\mathbf{H}$ 是四元数集合．对于对 $(\lambda, a)\in\mathbf{R}^+\times\mathbf{H}$ 对应有由取值于 $\mathfrak{g}$ 的 1 形式联络

$$A(x)=\mathrm{Im}\frac{\overline{u(x)}\cdot du(x)}{1+|u(x)|^2}$$

所定义的瞬子，其中 $u(x)=\lambda(\overline{a-x})^{-1}$，$x\in\mathbf{H}$．$\mathbf{H}\approx\mathbf{R}^4$ 中的四元数，通过应用球极平面投影，被证认为与 $S^4$ 的点相同，而 Lie 代数 $\mathfrak{g}=\mathrm{Sp}(1)$ 被认为是纯虚数四元数的 Lie 代数 $\mathrm{Im}\,\mathbf{H}$.

**参考文献**


[1] Манин, Ю. И., в сб.: Итоги науки и техники. Соврем. проблемы матем., т. 17, М., 1981, 3－55.

[2] Шварц, А. С., в сб.: Итоги науки и техники. Соврем. проблемы матем., т. 17, М., 1981, 113－173.

[3] Atiyah, M. F., Hitchin, N. J. and Singer, I. M., Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry, *Proc. Roy. Soc. London*, *A* **362** (1978), 425－461.

[4] Попов, Д. А., Дайхин, Л. И., 《ДАН СССР》, **225** (1975), 790－793.

[5] Bourguignon, J., *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **76** (1979), 4, 1550－1553.

[6] Коноплева, Н. П., Попов, В. Н., Калибровочные поля, 2 изд., М., 1980 (英译本: Konopleva, N. P. and Popov, V. N., Gauge fields, Horwood, 1981).

[7] Yang, C. N. and Mills, R. L., Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance, *Phys. Rev.*, **96** (1954), 1, 191－195.

[8] Geometrical ideas in physics, Moscow, 1983 (俄文, 译自英文).

[9] Freed, D. S. and Uhlenbeck, K. K., Instantons and four manifolds, Springer, 1984.


Д. В. Алексеевский 撰

**【补注】**

**参考文献**


[A1] Manin, Yu. I., Gauge field theory and complex geometry, Springer, 1988.

[A2] Albeverio, S., Paycha, S. and Scarlatti, S., A short overview of mathematical approaches to functional integration. in Z. Haba and J. Sobczyk (eds.), Functional Integration, Geometry and Strings, Birkhäuser, 1989, 230－276.

[A3] DeWitt, B. S., *Dynamical theory of groups and fields*, Gordon & Breach, 1964.

[A4] Cheng T.-P. and Li, L.-F., Gauge theory of elementary particle physics, Clarendon Press, 1984.

[A5] Nélipa, N., Physique des particules élémentaires, Mir.

[A6] Atiyah, M. F., Geometry of Yang-Mills fields, Scuola Norm. Sup. Pisa, 1979.

[A7] Doubrovine, B. [B. Dubrovin]. Novikov, S. and Fomenko, A., Contemporary geometry. Springer, 1990 (译自俄文).

[A8] Lawson, B. and Michelsohn, M.-L., Spin geometry, Princeton Univ. Press, 1989.

[A9] Bleecker, D., Gauge theory and variational principles, Addison-Wesley, 1981.


徐锡申 译

## Yates 校正 [Yates correction; Йетса поправка]

数理统计的某些问题（例如，独立性的统计检验问题）中应用的连续性校正．它可以改进用 $\chi^2$ 分布对 $\chi^2$ 检验统计量的逼近（亦见 **$\chi^2$ 分布**（'chi-squared' distribution）；**$\chi^2$ 检验**（'chi-squared' test））．Yates 校正是 J. Yates（[1]）提出的．

**参考文献**


[1] Yates, J., *Trans. Roy. Stat. Soc.*, **1** (1934), 217.

[2] Cramér, H., Mathematical methods of statistics, Princeton Univ. Press, 1946 (中译本, H. 克拉美, 统计学数学方法, 上海科学技术出版社, 1966).


В. В. Сенатов 撰 周概容 译

## 吉田表示定理 [Yosida representation theorem]

**【补注】** 设 $X$ 是拓扑空间（topological space），$C(X)$ 是 $X$ 上连续实值函数的集合（见**连续函数空间**（continuous functions, space of））．用逐点定义的偏序：$f\geqslant g$，当且仅当对所有的 $x\in X$，$f(x)\geqslant g(x)$，$C(X)$ 成为一个 **Riesz 空间**（Riesz space）．于是产生了下面的问题：是否可能用带有这个序关系的连续函数来表示一个任意的 Riesz 空间，这里也可能用可取值 $+\infty$ 和 $-\infty$ 的更一般的（扩充的）函数．其答案由各种不同的表示定理给出．下面对具有强单位的 Archimedes 的 Riesz 空间情形的吉田表示定理作了描述．对有弱单位 $e$ 的 Riesz 空间 $(L, e)$ 的吉田表示定理，见[A1]，而对更一般的 Johnson-Kist 表示定理（Johnson-Kist representation theorem），见[A2].

Riesz 空间 $L$ 中的强单位（strong unit）是元素 $e\in L^+=\{f\in L: f\geqslant 0\}$，使得对所有的 $f\in L$ 存在 $n\in\mathbf{N}$ 使得 $|f|\leqslant ne$，即由 $e$ 生成的主理想与整个空

间相等. $L$ 中的弱单位(weak unit)是一个 $L^+$ 的元素 $e$ 使得由 $e$ 生成的主带是整个 $L$.

**Riesz 空间** $C(X)$. 设 $X$ 是紧 Hausdorff 空间. 那么 $C(X)$ 是 Archimedes 的 Riesz 空间且函数 $\mathbf{1}$: $X\to\mathbf{R}$, $x\mapsto 1$ 对所有 $x$, 是一个强单位. 设 $Y$ 是第二个紧 Hausdorff 空间. Banach-Stone 定理(Banach-Stone theorem)阐明如果 $C(X)$ 和 $C(Y)$ 作为 Riesz 空间是同构的, 则 $X$ 和 $Y$ 是同胚的. 作为直接的推论可得出: 如果 $C(X)$ 和 $C(Y)$ 作为代数(按逐点乘法)是同构的, 则 $X$ 和 $Y$ 是同胚的; 还有, 如果 $C(X)$ 和 $C(Y)$ 作为 Banach 空间(取上确界范数)是同构的, 则 $X$ 和 $Y$ 是同胚的.

一个拓扑空间 $X$ 是极不连通的(extremely disconnected), 如果每一开子集有开的闭包(即 $\bar{U}$ 是既开又闭的). 中野定理(Nakano theorem)说 $C(X)$ 是 Dedekind 完全的, 当且仅当 $X$ 是极不连通的. 它也独立地被小笠原藤次郎(T. Ogasawara)和 M. H. Stone 得到, 见[A2].

**具有强单位的 Archimedes 的 Riesz 空间的表示**. 设 $L$ 是一个 Archimedes 的 Riesz 空间. 设 $X=$ MSpec $(L)$ 是 $L$ 的极大理想的集合. 对每一个 $f\in L^+$, 令 $X_f=\{M\in X: f\notin M\}$. 在 $X$ 上定义一个拓扑以 $X_f$ 作为子基(见**准基**(pre-base)). $X$ 的闭子集是集合 $C_D=\{M\in X: D\subset M\}$, 这里 $D$ 跑遍 $L^+$ 的所有子集. 这个拓扑称为 $X$ 上包核拓扑(hull-kernel topology). 该结构是相当熟悉的一种且在数学的若干部分遇到. 它原来归功于 M. H. Stone. 视其所用的是哪些理想的集合, 涉及的数学专门学科, 以及作者们的习性, 它也被称为 Zariski 拓扑(Zariski topology), Гельфанд 拓扑(Gel'fand topology), Гельфанд-Колмогоров 拓扑(Gel'fand-Kolmogorov topology), Jacobson 拓扑(Jacobson topology), Grothendick 拓扑(Grothendick topology), 等等.

从现在起, 设 $L$ 有一强单位 $e$. 对每一个 $M\in$ MSpec $(L)$, $L/M\simeq\mathbf{R}$ 且存在唯一的 Riesz 空间的同态 $\varphi_M$: $L\to\mathbf{R}$ 使得 $\varphi_M(e)=1$. 利用这点, 对每一 $f\in L$ 用 $\hat{f}(M)=\varphi_M(f)$ 定义一个函数 $\hat{f}$: $X=$ MSpec $(L)\to\mathbf{R}$. 数 $\hat{f}(M)$ 也可描述为使得 $f-\hat{f}(M)e\in M$ 的唯一的实数. 现在有以下的表示定理(吉田耕作, 角谷静夫, M. Г. Крейн, С. Г. Крейн, 中野秀五郎). 令 $X$, $L$, $e$ 如刚才所述. 则 $\hat{f}(M)=\varphi_M(f)$ 定义 $X$ 上的一个连续函数且映射 $f\mapsto\hat{f}$ 是 $L$ 到 Riesz 子空间 $\hat{L}=C(M)$ 上的一个 Riesz 同构. 有许多补充的结果. 用 **Stone-Weierstrass 定理**(Stone-Weierstrass theorem)可得到 $\hat{L}$ 在 $C(X)$ 中按范数稠密; 然后它也是按序稠密的.

给定 $(L, e)$, 其中 $e$ 是一个弱单位, $\rho(f, g)=\inf\{r\in\mathbf{R}: |f-g|\wedge e\leqslant re\}$ 定义 $L$ 上一个度量, 称为一致度量(uniform metric). 如果 $L$ 关于这个度量是完全的, $L$ 称为一致闭的(uniformly closed). 然后一个进一步添加到表示定理的结果是: $(L, e)$ 同构于 $(C(X), \mathbf{1})$, 当且仅当 $e$ 是强单位且 $L$ 是一致闭的. 最后这个陈述, 连同 $(L, e)$ 同构于 $(C(X), \mathbf{1})$ 的一个子 Riesz 空间这一结果(如果 $e$ 是强单位), 也称为 Крейн-角谷静夫定理(Krein-Kakutani theorem).

对吉田表示定理的一个最后的补充是: 如果 $L$ 有主投影性质(principal projection property), 即对每一主带 $A$ 有 $A+A^d=L$, 则 $X=$ MSpec $(L)$ 是零维的且 $\hat{L}$ 包含 $X$ 上所有的局部常函数. 这也可称为 Freudenthal 谱定理(Freudenthal spectral theorem), ([A3]), 这是由于该谱定理按其传统的表述是上述结果的直接推论, 见 **Riesz 空间**(Riesz space)的补注.

**参考文献**

[A1] Hager, A. W. and Robertson, L. C., Representing and ringifying a Riesz space, in Symp. Math. INDAM, Vol. 21, Acad. Press, 1977, 411 – 432.

[A2] Luxemburg, W. A. J. and Zaanen, A. C., Riesz spaces, 1, North-Holland, 1971.

[A3] Jonge, E. de and Rooy, A. C. M van, Introduction to Riesz spaces, Mathematical Centre, Amsterdam, 1977.

葛显良 译 鲁世杰 校

**Young 准则[Young criterion; Юнга признак]**

**Fourier 级数**(Fourier series)在一点收敛的一个充分性准则. 设函数 $f$ 以 $2\pi$ 为周期且在区间 $[0, 2\pi]$ 上 Lebesgue 可积. 令 $\varphi_x(t)=f(x+t)+f(x-t)-2f(x)$. 如果在 $x_0$ 点满足下述条件: 1) $\varphi_{x_0}(t)\to 0$ $(t\to+0)$; 2) 函数 $\psi(t)-t\varphi_{x_0}(t)$ 在区间 $[0, \delta]$ $(0\leqslant\delta\leqslant\delta_0$, $\delta_0>0$ 是某个固定的数)上具有有界变差 $V(\delta)\equiv\operatorname{Var}\psi(t)$; 3) $V(\delta)=O(\delta)$ $(\delta\to+0)$, 则 $f$ 的 Fourier 级数在 $x_0$ 点收敛到 $f(x_0)$(见[2]). Young 准则比 **Jordan 准则**(Jordan criterion)强. 它是由 W. H. Young 建立的.

**参考文献**

[1] Young, W. H., On the convergence of the derived series of Fourier series, *Proc. London Math. Soc.*, 17 (1916), 195 – 236.

[2] Бари, Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961(英译本: Bary, N. K. [N. K. Bari], A treatise on trigonometric series, Pergamon, 1964).

Б. И. Голубов 撰

**【补注】**

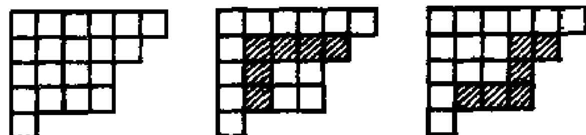
**参考文献**

[A1] Zygmund, A., Trigonometric series, 1 – 2, Cambridge

Univ. Press, 1988. 朱学贤 译

**Young 图 [Young diagram; Юнга таблица]**, $m$ 阶的

自然数 $m$ 的分拆 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_r)$ 的图表示(其中 $\lambda_i\in\mathbf{Z}$, $\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_r>0$, $\sum\lambda_i=m$). 这个 Young 图 $t_\lambda$ 是排成一些行和列的由 $m$ 个方格组成,使第 $i$ 行有 $\lambda_i$ 个方格,其中每一行的第一个方格位于第一列. 如 20 的分拆 (6, 5, 4, 4, 1) 的 Young 图表示为下述左图.



转置 Young 图(transposed Young diagram) $t_\lambda'$ 对应于共轭分拆(conjugate partition) $\lambda'=(\lambda_1',\cdots,\lambda_s')$, 其中 $\lambda_j'$ 是 Young 图中第 $j$ 列的方格数. 所以上述例子的共轭分拆为 (5, 4, 4, 4, 2, 1).

Young 图中每个方格定义了其方格的两个集合,称为钩形(hook)和斜钩形(skew-hook). 设 $c_{ij}$ 是 Young 图中位于第 $i$ 行第 $j$ 列的方格. 对应于 $c_{ij}$ 的钩形 $h_{ij}$ 是由所有方格 $c_{il}(l\geqslant j)$, 以及 $c_{kj}(k\geqslant i)$, 组成的集合;而斜钩形则是包含第 $i$ 行最后一个方格和第 $j$ 列最后一个方格的边缘方格的最小连通集. 如上面左边的 Young 图中方格 $c_{22}$ 所对应的钩形和斜钩形分别如中间图和右图中的阴影部分所示.

一个钩形(或斜钩形)的长度(length of a hook)就是它的方格的个数. 钩形 $h_{ij}$ 的长度为 $\lambda_{ij}=\lambda_i+\lambda_j'-i-j+1$. 从一个 Young 图中去掉一个长度为 $p$ 的斜钩形,则得到一个 $m-p$ 阶的 Young 图. 一个钩形(或斜钩形)的高度(height of a hook)就是这个钩形(或斜钩形)所在的行的个数.

Young 图和 Young 表的术语(见 **Young 表** (Young tableau))被用于对称群的表示(representation of the symmetric groups)和**典型群的表示**(representation of the classical groups), 这是 A. Young 提出来的(见[1]).

**参考文献**

[1A] Young, A., On quantitative substitutional analysis, *Proc. London Math. Soc.*, 33 (1901), 97 – 146.

[1B] Young, A., On quantitative substitutional analysis, *Proc. London Math. Soc.*, 34 (1902), 361 – 397.

Э. Б. Винберг 撰

【补注】 在西方 Young 图也称为 Ferrers 图.

**参考文献**

[A1] Kerber, A. and James, G. D., The representation theory of the symmetric group, Addison-Wesley, 1981.

[A2] Kerber, A., Algebraic combinatorics via finite group actions, B. I. Wissenschaftsverlag, 1991.

[A3] Andrews, G. E., The theory of partitions, Addison-Wesley, 1976.

[A4] Macdonald, I. G, Symmetric functions and Hall polynomials, Clarendon Press, 1979.

刘振宏 译 李 乔 校

**Young 子群 [Young subgroup; Юнга подгруппа]**

【补注】 令 $\bigcup_{i=1}^k\alpha_i=\{1,2,\cdots,n\}$ 是 $\{1,2,\cdots,n\}$ 分成 $k$ 个不相交子集的一个分划. 则 $n$ 个文字的对称群 $S_n$ 的对应的 Young 子群是子群

$$S_{\alpha_1}\times\cdots\times S_{\alpha_k},$$

这里 $S_{\alpha_i}=\{\sigma\in S_n,\ \sigma(j)=j,\ 对所有\ j\notin\alpha_i\}$. 有时

$$S_{\alpha_1}\times\cdots\times S_{\alpha_k}$$

仅表示特殊情况,即 $\alpha_i=\{\lambda_{i-1}+1,\cdots,\lambda_i\}$, 这里 $\lambda_0=0$, 而 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_k)$ 是自然数 $n$ 的一个分划, 即 $\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_k$, $\sum\lambda_i=n$.

**参考文献**

[A1] James, G. D., The representation theory of the symmetric groups, Springer, 1978, p. 13.

[A2] Kerber, A., Representations of permutation groups, I, Springer, 1971, p. 17. 石生明 译 王 杰 校

**Young 对称化子 [Young symmetrizer; Юнга симметризатор]**

由 $m$ 阶 **Young 表**(Young tableau) $d$ 按下述法则定义的**对称群**(symmetric group) $S_m$ 的群环的一个元素 $e_d$. 设 $R_d(C_d)$ 是 $S_m$ 的子群, 它是由对 $d$ 表中每一行(列)里的数 1, …, $m$ 的作置换时的所有置换构成. 再令

$$r_d=\sum_{g\in R_d}g,\ c_d=\sum_{g\in C_d}\varepsilon(g)g,$$

其中 $\varepsilon(g)=\pm1$ 是 $g$ 的奇偶性示数, 那么 $e_d=c_dr_d$ (有时人们定义 $e_d=r_dc_d$).

Young 对称化子的基本性质是, 它正比于群代数 $CS_m$ 的本原幂等元, 其比例系数等于 $d$ 中所有钩形的长度之积.

Э. Б. Винберг 撰

【补注】 理想 $\mathbf{C}[S_m]e_d$ 同构于 Young 表 $d$ 定义的 $S_m$ 的 Specht 模(Specht module). 参考文献和更详细内容亦见 **Young 表**(Young tableau).

刘振宏 译 李 乔 校

**Young 表 [Young tableau; Юнга диаграмма]**, $m$ 阶的

一个 $m$ 阶的 **Young 图**（Young diagram），在它的 $m$ 个方格中按某种顺序填入 $m$ 个数 $1,\cdots,m$（见图）.

| 5 | 7 | 9 | 4 |
|---|---|---|---|
| 8 | 2 | 1 | |
| 3 | | | |
| 6 | | | |

一个 Young 表，如果它的每一行和每一列上的数都是按递增顺序出现的，则称它为标准的（standard）. 对一个给定的 $m$ 阶 Young 图 $t$，其所有 Young 表的个数为 $m!$，而标准 Young 表的个数为

$$\frac{m!}{\prod\lambda_{ij}}$$

其中的积是对 $t$ 的所有方格 $c_{ij}$ 求的，而 $\lambda_{ij}$ 表示相应钩形的长度.

Э. Б. Винберг 撰

【补注】 在西方文献中，Ferrers 图（Ferrers diagram）一词也用于 Young 图. 在俄文文献中，Young 表（Yunga tablitsa）和 Young 图（Yunga diagramma）恰好以相反的方式使用，"表"是指分拆的图表示，而"图"是指填好了的表.

设 $\kappa$ 表示 $m$ 的一个**分拆**（partition）（$\kappa=(\kappa_1,\cdots,\kappa_m)$，$\kappa_i\in\{0,1,\cdots\}$，$\kappa_1+\cdots+\kappa_m=m$）以及它的相应 **Young 图**（Young diagram），即其图表示. 设 $\lambda$ 是 $m$ 的第二个分拆. 一个 $\lambda$ 型的 $\kappa$ 表（$\kappa$-tableau of type $\lambda$）是一个 Young 图 $\kappa$，它的方格填 $\lambda_1$ 个 1，$\lambda_2$ 个 2，等等. $\lambda$ 型的半标准 $\kappa$ 表（semi-standard $\kappa$-tableau of type $\lambda$）是方格中的数满足每一行（自左至右）是非减的，而每一列（自上至下）是严格递增的. 例如，

| 1 | 1 | 1 | 1 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 3 | | |
| 3 | 4 | | | |

是型为 $(4,2,2,2)$ 的半标准的 $(5,3,2)$ 表. 型 $\lambda$ 的半标准 $\kappa$ 表的个数 $K(\kappa,\lambda)$ 称为 Kostka 数（Kostka numbers）.

对 $n$ 的每一个分拆 $\mu$，$n$ 个字母的对称群 $S_n$ 有两种自然的表示：既约表示 $\rho(\mu)$ 和 Specht 模 $[\mu]$. 表示 $\rho(\mu)$ 为

$$\rho(\mu)=\mathrm{Ind}_{G_\mu}^{S_n}1,$$

其中 1 是 $G_\mu$ 的平凡表示，而 $G_\mu$ 是由 $\mu$ 确定的 $S_n$ 的 Young 子群，$G_\mu=S_{\mu_1}\times\cdots\times S_{\mu_m}$. 这里若 $\mu_i=0$，则 $S_{\mu_i}=\{1\}$，否则 $S_{\mu_i}$ 是字母 $\mu_1+\cdots+\mu_{i-1}+1,\cdots,\mu_1+\cdots+\mu_i$ 上置换的子群.

群 $S_n$ 作用在由这些符号的排列形成的所有 $\mu$ 表（$\mu$-tableaux）的集合上. 两个 $\mu$ 表是等价的，如果它们只相差一个符号的置换，而且这个置换保持每一行上指标的集合不变. $\mu$ 表的一个等价类是一个 $\mu$ 简表. $S_n$ 在 $\mu$ 表上的作用导出在 $\mu$ 简表上的作用，并且在基域 $F$ 上的线性扩充给出 $S_n$ 的显然同构于 $\rho(\mu)$ 的表示. $\rho(\mu)$ 的维数为 $\binom{n}{\mu}$. 给定一个 $\mu$ 表 $t$，设 $\kappa_t$ 是 $F[S_n]$ 的下述元素：

$$\kappa_t=\sum_{\pi\in C_t}\mathrm{sign}(\pi)\pi,$$

其中 $C_t$ 是 $t$ 的列稳定子，即 $S_n$ 的保持 $t$ 的列标号集不变的所有置换构成的子群.

$\mu$ 的 Specht 模（Specht module）$[\mu]$ 是由所有元素 $\kappa_t\{t\}$ 张成的 $\rho(\mu)$ 的子模，其中 $\{t\}$ 是 $t$ 的简表且 $t$ 是 $\mu$ 表. 在特征为 0 的域上，Specht 模恰好给出所有 $S_n$ 的不同的绝对不可约表示. 按 Young 法则（Young rule），$Q$ 上 Specht 模 $[\lambda]$（作为合成因子）在 $\rho(\kappa)$ 里出现的次数等于 Kostka 数 $K(\kappa,\lambda)$. 如果 $e_t$ 是 $\mu$ 表 $t$ 的 **Young 对称化子**（Young symmetrizer），那么由基图确定的 Specht 模同构于 $F[S_n]$ 的理想 $F[S_n]e_t$. 这也是（在同构意义上）在**对称群表示**（representation of the symmetric groups）中记为 $T_\mu$ 的表示. 关于涉及到分拆，Young 图和表，以及对称群的表示等的其他结果可参见**优化序**（majorization ordering）.

**参考文献**

[A1] Knuth, D.. The art of computer programming, 3, Addison-Wesley, 1973.

刘振宏 译　李 乔 校

# Z

**z 分布** [*z*-**distribution**; *z*-**распределение**]

见 **Fisher** *z* **分布** (Fisher *z*-distribution).

**Zariski 切空间** [**Zariski tangent space**; **Зарисского касательное пространство**], 代数簇或概形 $X$ 在点 $x$ 的

点 $x$ 的剩余域 $k(x)$ 上的向量空间, 它是空间 $\mathfrak{M}_x/\mathfrak{M}_x^2$ 的对偶, 这里 $\mathfrak{M}$ 是 $x$ 在 $X$ 上**局部环** (local ring) $\mathcal{O}_{X,x}$ 的极大理想. 如果 $X\subset \mathbf{A}_k^n$ 由方程组

$$F_\alpha=0$$

所定义, 这里 $F_\alpha\in k[X_1,\cdots,X_n]$, 则在有理点 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 处的 Zariski 切空间由线性方程组

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_\alpha}{\partial X_i}(x)(X_i-x_i)=0$$

定义. 簇 $X$ 在有理点 $x$ 处非奇异, 当且仅当 $X$ 在 $x$ 的 Zariski 切空间的维数等于 $X$ 的维数. 对于有理点 $x\in X$, Zariski 切空间对偶于空间 $\Omega^1_{X/k}\otimes k(x)$, 即余切层 $\Omega^1_{X/k}$ 在 $x$ 的茎. 完全域 $k$ 上不可约簇 $X$ 是光滑的, 当且仅当层 $\Omega^1_{X/k}$ 是局部自由的. 与 $\Omega^1_{X/k}$ 相伴的向量丛 $T_X=V(\Omega^1_{X/k})$ 称为 $k$ 上 $X$ 的切丛 (tangent bundle), 它是函子地与 $X$ 相关联. 它的截面的层称为 $X$ 的切层 (tangent sheaf). Zariski 切空间是 O. Zariski 引入的 ([1]).

**参考文献**


[1] Zariski, O., The concept of a simple point of an abstract algebraic variety, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **62** (1947), 1 - 52.

[2] Samuel, P., Méthodes d'algèbre abstraite en géométrie algébrique, Springer, 1955.

[3] Шафаревич, И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972, 107 (英译本: Shafarevich, I. R., Basic algebraic geometry, Springer, 1977).


В. И. Данилов 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Hartshorne, R., Algebraic geometry, Springer, 1977.


陈志杰 译

**Zariski 定理** [**Zariski theorem**; **Зарисского теорема**]

关于连通性的, Zariski 连通性定理 (Zariski connectedness theorem)

设 $f: X\to Y$ 是不可约簇的真满态射 (morphism), 有理函数域 $k(Y)$ 在 $k(X)$ 内可分代数闭, 且设 $y\in Y$ 是正规点, 则 $f^{-1}(y)$ 是连通的 (且是几何连通的) (见[2]). 此定理对退化的经典原理提供了基础: 如果闭链的代数系的泛闭链是一个簇 (即几何不可约的), 则这个闭链的任何特殊化是连通的.

Zariski 连通性定理的一个特殊情形是所谓的 Zariski 基本定理 (Zariski fundamental theorem) 或 Zariski 双有理对应定理 (Zariski birational correspondence theorem): 代数簇的双有理态射 $f: X\to Y$ 是到正规点 $y\in Y$ 的邻域里的开嵌入, 如果 $f^{-1}(y)$ 是一个有限集的话 (见[1]). 特别地, 正规簇的双有理态射如果在点上是一对一的, 则必是同构. 这个定理的另一种形式是: 设 $f: X\to Y$ 是概形的拟有限可分态射, $Y$ 是拟紧拟可分概形, 则存在分解 $f=u\circ g$, 这里 $u$ 是有限态射, $g$ 是开嵌入 ([3]).

**参考文献**


[1] Zariski, O., Foundations of a general theory of birational correspondences, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **53** (1943), 3, 490 - 542.

[2] Zariski, O., Theory and applications of holomorphic functions on algebraic varieties over arbitrary ground fields, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **5** (1951), 1 – 90.

[3A] Grothendieck, A., Eléments de géométric algébrique, Ⅲ, Etude cohomologique des faisceaux cohérents Ⅰ, *Publ. Math. IHES*, **11** (1961).

[3B] Grothendieck, A., Eléments de géométrie algébrique, Ⅳ. Etude locale des schémas et des morphismes des schémas Ⅳ, *Publ. Math. IHES*. **32** (1967).

В. И. Данилов 撰

【补注】 当 $f: X \to Y$ 是真双有理态射且 $y \in Y$ 是非奇异点时，$f^{-1}(y)$ 还是线性连通的 (linearly connected)，即 $f^{-1}(y)$ 中任意两个点可用 $f^{-1}(y)$ 内的一系列有理曲线连通（见[A2]－[A4]）.

**参考文献**

[A1] Hartshorne, R., Algebraic geometry, Springer, 1977.

[A2] Zariski, O., The connectedness theorem for birational transformations, in R. H. Fox et al.(ed.) Algebraic Geometry and Topology (Symp. in Honor of S. Lefschetz), Princeton Univ. Press, 1957, 182 – 188.

[A3] Murre, J. P., On a connectedness theorem for a birational transformation at a simple point, *Amer. J. Math.*, **80** (1958), 3 – 15.

[A4] Chow, W.-L., On the connectedness theorem in algebraic geometry, *Amer. J. Math.*, **83** (1959), 1033 – 1074.

陈志杰 译

## Zariski 拓扑 [Zariski topology; Зарискогo топология]

仿射空间 $A^n$ 上的

定义在 $A^n$ 上的拓扑，把 $A^n$ 的代数子簇取为闭集. 如果 $X$ 是 $A^n$ 内的仿射代数簇（见**仿射代数集** (affine algebraic set)），则 $X$ 上的诱导拓扑也称 Zariski 拓扑. 类似地，可定义环 $A$ 的仿射概形 Spec $A$ 的 Zariski 拓扑（有时称为***谱拓扑*** (spectral topology)），其闭集是下列集合：

$$V[I] = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A:\ \mathfrak{p} \subset I\},$$

这里 $I$ 是 $A$ 的理想.

Zariski 拓扑首先是由 O. Zariski 引进的 ([1])，作为代数函数域的赋值集合上的拓扑. 虽然一般说来 Zariski 拓扑不是可分的，代数拓扑中的许多结构仍然可建立在它之上 ([2]). 赋予 Zariski 拓扑的仿射概形是拟紧的.

最自然地定义在任意**概形** (scheme) 上的拓扑也称为 *Zariski* 拓扑，以与**艾达尔拓扑** (étale topology) 相区分，或当簇 $X$ 定义在域 $\mathbf{C}$ 上时，以与 $X(\mathbf{C})$ 的复值点集合的解析空间的拓扑相区别.

**参考文献**

[1] Zariski, O., The compactness of the Riemann manifold of an abstract field of algebraic functions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **50** (1944), 10, 683 – 691.

[2] Серр, Ж. П., в сб. Расслоенные пространства и их приложения, пер. с франц., М., 1958, 372 – 450 (译自法文)

В. И. Данилов 撰

【补注】

**参考文献**

[A1] Hartshorne, R., Algebraic geometry, Springer, 1977.

陈志杰 译

## Zassenhaus 公式 [Zassenhaus formula; Цассенхауза формула]

【补注】 设 $L(X,Y)$ 是 $\mathbf{Z}$ 上两个生成元的（分次）自由 **Lie 代数** (Lie algebra)，$\operatorname{Ass}(X,Y)$ 是 $\mathbf{Z}$ 上两个生成元的分次自由结合代数，$\widehat{\operatorname{Ass}}(X,Y)$ 是它关于增广理想的完全化（这里 $X$ 和 $Y$ 的次数都为 1）. 对每个没有常数项的 $z \in \operatorname{Ass}(X,Y)$，设 $e^z$ 表示 $\widehat{\operatorname{Ass}}(X,Y)$ 的元素

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots,$$

则存在 $n$ 次齐次元素 $c_n(X,Y)$ 和 $X$ 次数为 $m$ 而 $Y$ 次数为 $n$ 的齐次元素 $R_{m,n}(X,Y)$，为 $\operatorname{Ass}(X,Y)$ 中的 Lie 元素，即位于 $L(X,Y) \subset \operatorname{Ass}(X,Y)$ 中，并且使得

$$e^X e^Y = \prod_{n \geq 1} e^{c_n(X,Y)/n!}, \tag{A1}$$

$$e^{-X} e^{-Y} e^X e^Y = \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{m=1}^{\infty} e^{R_{m,n}(X,Y)/m!n!}. \tag{A2}$$

这里右式的因子在 (A1) 中按自然顺序，而在 (A2) 中先对 $m$ 求积，再对 $n$ 求积. $c_n(X,Y)$ 递归定义为

$$c_n(X,Y) =$$

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left[e^{-t^{n-1}c_{n-1}/(n-1)!} \cdots e^{-t^2 c_2/2!} e^{-tc_1} e^{tX} e^{tY}\right]\Big|_{t=0}.$$

这些公式在（组合）群论、代数拓扑、量子论等方面都有应用，例如，见[A2]－[A4]. 有关公式 (A1) 及更一般公式的收敛性的结果（对 Banach 代数的元素 $X$ 和 $Y$），见[A2].

**参考文献**

[A1] Zassenhaus, H., Über Lie'schen Ringe mit Primzahlcharakteristik, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **13** (1940), 1 – 100.

[A2] Suzuki, M., On the convergence of exponential operators the Zassenhaus formula, BCH formula and systematic approximants, *Comm. Math. Phys.*, **57** (1977), 193 – 200.

[A3] Magnus, W., Karrass, A. and Solitar, D., Combina-

torial group theory, Interscience, 1966.
[A4] Baues, H. J., Commutator calculus and groups of homotopy classes, Cambridge Univ. Press, 1981.

蔡传仁 译

**Zassenhaus 群 [Zassenhaus group; Цассенхауза группа]**

有限集 $M$ 上的双重传递**置换群**(permutation group) $G$, 群中仅有恒等置换固定 $M$ 中多于两个元素且对任何元素对 $a, b \in M$, 子群 $H_{a,b}$ 是非平凡的, 其中

$$H_{a,b} = \{h: h \in G, h(a) = a, h(b) = b\};$$

这种群是 H. Zassenhaus 在 [1] 中首先考虑的. Zassenhaus 群类包括两族有限单群: 射影的**特殊线性群**(special linear group) PSL$(2, q)$, $q > 3$ 及**铃木群**(Suzuki group).

参考文献

[1] Zassenhaus, H., Kennzeichnung endlicher linearer Gruppen als Permutationsgruppen, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **11** (1935), 17 – 40.
[2] Gorenstein, D., Finite groups, Harper & Row, 1968.

Н. Н. Вильямс 撰

【补注】

参考文献

[A1] Huppert, B. and Blackburn, N., Finite groups, 3, Springer, 1967.

石生明 译 王 杰 校

**Zeno 悖论 [Zeno paradox; Зенона парадокс]**

一种**悖论**(antinomy).

**Zermelo 公理 [Zermelo axiom; Цермело аксиома]**

关于任意集族(未必不交)的选择公理(axiom of choice), E. Zermelo 于 1904 年以如下形式表述了这一公理: 对每一由非空集合组成的集族 $t$, 可从其中每一项中取出一个代表且所有这些代表组成一个集合. 他称该公理为**选择原则**(principle of choice)([1]). 在其选择原则的基础上, 他成为最早给出良序定理证明的人(见 **Zermelo 定理**(Zermelo theorem)). 1906 年 B. Russell 以乘积形式表述了选择公理: 如果 $t$ 是一集族, 其中元素不空且两两不交, 则直积 $\prod t$ 不空. Zermelo 于 1908 年证明了选择公理的乘积形式与其通常表述的等价性.

参考文献

[1] Zermelo, E., Beweiss, dass jede Menge wohlgeordnet werden Kann, *Math. Ann.*, **59** (1904), 514 – 516.
[2] Fraenkel, A. and Bar-Hillel, Y., Foundations of set theory, North-Holland, 1958.

В. И. Малыхин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Moore, G. H., Zermelo's axiom of choice, Springer, 1982.
[A2] Rubin, J. and Rubin, H., Equivalents of the axiom of choice, 1 – 2, North-Holland, 1963 – 1985.

赵希顺 译

**Zermelo 定理 [Zermelo theorem; Цермело теорема]**

每一集合都可被良序(见**良序集**(well-ordered set)). E. Zermelo 于 1904 年从选择公理(见 **Zermelo 公理**(Zermelo axiom))的等价形式之一选择原则出发, 第一次证明了该定理. 之后, 人们得知, Zermelo 定理与选择公理(在通常的集合论公理系统中)等价. 因此它也和许多其他的集论命题等价(见**选择公理**(axiom of choice)). В. И. Малыхин 撰

【补注】 这一结论通常也称作良序定理(well-ordering theorem)或 Zermelo 良序定理(Zermelo well-ordering theorem).

参考文献见 **Zermelo 公理**(Zermelo axiom).

赵希顺 译

**零, 零元, 零点 [zero; нуль]**

1. 零(zero)是一个(实或复)数, 它有如下性质: 任何一个数加上零之后不变. 零用符号 0 来表示. 任何一个数与零的积为零:

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0.$$

如果两个数的积为零, 那么它们之中的一个为零(即 $ab = 0$ 蕴涵 $a = 0$ 或 $b = 0$). 被零除是没有定义的. 这个概念的直接推广是 Abel 群的零元.

2. 零元(zero 或 null element)

i) Abel 群 $A$(用加号)的零元(zero of an Abelian group)是一个元素, 也用 0 来表示, 对所有 $a \in A$, 满足 $0 + a = a$, 它是唯一确定的.

ii) 环的零元(zero of a ring)(特别地, 除环(skew-field, division ring)的零元, 或域(field)的零元)是它的加群的零元. 环的零元(与数 0 一样)在乘法中有吸收性质: $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$. 然而, 在任意环中, 两个非零元的积可能为零元. 此种元素称为**零因子**(zero divisor). 域, 体和整环没有零因子.

iii) 半群 $A$(用乘号)的左零元(left zero)是一个元素 $0 \in A$ 使得对所有 $a \in A$, $0 \cdot a = 0$. 用对偶性定义右零元(right zero). 如果一个半群有双边零元(two-sided zero)(一个元素是左零元又是右零元), 那么这个元素是唯一的. 一个环的零元也是它的乘法半群的零元.

iv) 格的零元 (zero of a lattice) 是它的极小元，如果它存在．一个完全格总有零元：所有元素的交．

v) 代数系统的零元 (zero of an algebraic system) 是由零元运算选定的元素 (见**代数运算** (algebraic operation)；**代数系统** (algebraic system))．上面考虑的多数例子，在给定的系统中零是唯一的，甚至形成一个一元子系统．

3．零点 (zero)．在 Abel 群 (环，域，体) $A$ 中取值的函数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 的零点 (zero of a function) 的集合是函数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 的变元 $(x_1, \cdots, x_n)$，使得 $f(x_1, \cdots, x_n)=0$ 的值组 $(x_1, \cdots, x_n)$ 的全体．

О．А．Иванова，Л．В．Кузьмин 撰

【补注】 拓扑空间 $X$ 的一个子集称为零点集 (zero set)，如果它是 $X$ 上某个连续实值函数的零点集．零点集是代数几何 (多项式系统的零点集) 和局部解析几何 (全纯函数和映射系统的零点集) 的一种研究对象．

**参考文献**

[A1] Jacobson, N., Basic algebra, I, Freeman, 1974.

卢景波 译

**零维映射** [**zero-dimensional mapping**; **нульмерное отображение**]

一个**连续映射** (continuous mapping) $f: X \to Y$ (其中 $X$ 与 $Y$ 是拓扑空间)，使得对任何 $y \in Y$，$f^{-1}(y)$ 是 (在 ind 意义下) 零维集．零维映射及与之紧密相关映射的应用，把对给定空间的研究化为对另一个更简单空间的研究．因此，许多维数性质及其他基数不变量 (见**基数特征** (cardinal characteristic))，就从 $X$ 转到 $Y$ (或更常见的从 $Y$ 转到 $X$)．

例 1．任何度量空间 $X(\dim X \leqslant n)$，能经过一个完全零维映射 (complete zero-dimensional mapping)，映入具有可数基的空间 $Y(\dim Y \leqslant n)$ (Катетов 定理 (Katetov theorem))．这里，完全零维指的是对任意 $\varepsilon>0$ 及任意 $y \in f(X)$，存在一个邻域 $U_y \subset Y$，它的原象 $f^{-1}(U_y)$ 分裂成为 $X$ 中直径 $<\varepsilon$ 的离散开集系．

例 2．若零维映射 $f: X \to Y$ ($X$ 是正规局部连通空间) 是**完满映射** (perfect mapping)，则 $X$ 的权与 $Y$ 的权相同 (见**拓扑空间的权** (weight of a topological space))．

**参考文献**

[1] Александров, П. С., Пасынков, Б. А., Введение в теорию размерности, М., 1973.

М．И．Войцеховский 撰

【补注】 研究零维映射的起点是紧度量空间中的如下定理：若 $f: X \to Y$ 是零维映射，则 $\dim Y \geqslant \dim X$．对闭连续映射，它可以扩张到可分度量空间，但对开连续映射则不行；见 [A1] 91 页．

**参考文献**

[A1] Hurewicz, W. and Wallman, H., Dimension theory, Princeton Univ. Press, 1948.

[A2] Engelking, R., General topology, Heldermann, 1989 (译自波兰文).

罗嵩龄 译

**零维空间** [**zero-dimensional space**; **нульмерное пространство**]，在 ind 意义下的

一个拓扑空间，以既开且闭的集合为基．任何**离散空间** (discrete space) 都是零维空间，但零维空间未必有孤立点 (有理数空间 $\mathbf{Q}$ 即为一例)．所有零维空间都是完全正则的．零维性可遗传给子空间，并且蕴涵空间的全不连通性 (total disconnectedness)：零维空间中仅有的连通集是单点集和空集．然而，后一性质并不等价于零维性．存在着不是零维，而其任意点都是开闭集族之交的空间，但是这种空间不可能是紧空间．

有时更狭义地理解空间的零维性．空间称为在 dim 意义下零维的 (zero-dimensional in the sense of dim)，如果它的任意有限开覆盖能加细为具有不相交元素的开覆盖．空间称为在 Ind 意义下零维的 (zero-dimensional in the sense of Ind)，如果其任何闭子集的任何邻域都包含该子集的一个开闭邻域．在 $T_1$ 空间类中，ind 意义下的零维由 dim 意义及 Ind 意义下两种零维得出．在有可数基的可度量化空间类 (见**可度量化空间** (metrizable space)) 及 Hausdorff 紧统类中，零维空间的三种定义等价．对所有可度量化空间，dim 意义下的零维性等价于 Ind 意义下的零维性；然而，有一个熟知的可度量化空间的例子，它在 ind 意义下是零维空间，而在 Ind 意义下却不是．不论 dim 意义下还是 Ind 意义下的零维性，都不能遗传给子空间．在 $T_1$ 空间中，在 ind 意义下的零维空间可作为广义 Cantor 不连续统 $D^\tau$ (**两点空间** (colon) 之积) 的子空间刻画，准确到同胚．任何**完全正则空间** (completely-regular space) 可以作为零维空间在好的映射 (例如**完满映射** (perfect mapping)，具有点的紧原象的连续开映射 (open mapping)) 下的象得到．然而，既开又闭的连续映射，在 ind 意义下和 Ind 意义下均保持零维性．现在还不知道是不是任何完全正则空间都包含一个处处稠密的零维子空间．

**参考文献**

[1] Александров, П. С., Пасынков, Б. А., Введение в теорию размерности …, М., 1973.

А．В．Архангельский 撰

【补注】 既开又闭的集合，有时称为闭开集 (clopen set)．

$T_0$ 分离公理（除非特别申明）总是作为零维性定义的一部分：事实上，如果没有这个假定，上述主要条目中的一些断言不成立.

在 Ind 和 dim 意义下，零维性是等价的. 这种类型的零维性一般称为强零维性（strong zero-dimensionality）. 强零维空间显然是正规的. 正规空间 $X$ 强零维的充要条件是，它的 **Stone-Čech 紧化**（Stone-Čech compactification）$\beta X$（在任何意义下）零维. 这个事实促成了将强零维性概念扩张到完全正则空间类：完全正则空间 $X$ 是强零维空间，若它的紧化 $\beta X$ 零维.

任何拓扑空间都是零维仿紧空间的一个开商空间（[A4]）. 完全正则空间甚至是**极不连通空间**（extremally-disconnected space）的完满象.

在可分度量空间中，与三个基本定义一致的第四个维数定义是 Krull 维数 gdim；见 [A5] 及**格**（lattice）（的补注）. 对于一般度量空间 $X$，$\operatorname{ind} X \leq \operatorname{gdim} X \leq \dim X$（[A5]）.

对于完全正则空间，可以定义用多种方式映到其上的零维空间. 这种重要结构之一是**绝对形**（absolute），或 Gleason 覆盖（Gleason cover）. A. M. Glearson 最早对紧 Hausdorff 空间 $Y$ 构造了 $aY$，并证明了它是 $Y$ 在对偶于内射包（injective hull）（见**内射模**（injective module））意义下的投射覆盖（projective covering）（[A3]）. 事实上，应用于零维紧 Hausdorff 空间（也称 **Boole 空间**（Boolean space）或 **Stone 空间**（Stone space）），按照 Stone 对偶性（Stone duality）其结构对偶于 **Boole 代数**（Boolean algebra）的 MacNeille 完全化，它是内射壳的一种代替（见 **MacNeille 完全化**（completion, MacNeille））；配备适当的"相容"序，还证明了对任意分配格的对偶性（Priestly 对偶性（Priestly duality））. Gleason 覆盖有很多推广：推广至 $T_0$ 空间（[A2]），推广至一般型的拓扑代数（[A1]），推广至拓扑斯（[A6]）.

本条目最后的问题已部分地得到解决：在连续统假设（continuum hypothesis）下，可以构造一个空间，使得它没有零维不可数子空间，且没有可数子集是稠密的.

**参考文献**


[A1] Banaschewski, B., Projective covers in categories of topological spaces and topological algebras, in J. Novák, et al.(ed.): General Topol. and its Relations to Modern Anal. and Alg. (Proc. Kanpur, 1968), Vol. 3, Academia, 1971, 63 − 91.

[A2] Błaszczyk, A., Extramally disconnected resolutions of $T_0$ spaces, *Collog. Math.*, **32** (1974), 57 − 68.

[A3] Gleason, A., Projective topological spaces, Ⅲ, *J. Math.*, **2** (1958), 482 − 489.

[A4] Isbell, J., A note on complete closure algebras, *Math. Systems Theory*, **3** (1969), 310 − 312

[A5] Isbell, J., Graduation and dimension in locales, in I. H. James and E. H. Kronheimer (eds.): Aspects of Topology: in Memory of Hugh Dowker. Lecture notes London Math. Soc., Vol. 93, Cambridge Univ. Press, 1985, 195 − 210.

[A6] Johnstone, P. T., The Gleason cover of a topos Ⅰ, *J. Pure Appl. Alg.*, **19** (1980), 171 − 192.

[A7] Johnstone, P. T., The Gleason cover of a topos Ⅱ, *J. Pure Appl. Alg.*, **22** (1981), 229 − 247.

[A8] Ciesielski, K., $L$-space without any uncountable 0-dimensional subspace, *Fundam. Math.*, **125** (1985), 231 − 235.

[A9] Engelking, R., General topology, Heldermann, 1989（译自波兰文）.

[A10] Engelking, R., Dimension theory, North-Holland, 1978（译自波兰文）.

[A11] Hurewicz, W. and Wallman, H., Dimension theory, Princeton Univ. Press, 1941.

[A12] Nyikos, P., A survey of zero-dimensional spaces, in S. P. Fraklin, et al. (ed.): Topology (Proc. 9th Annual Spring Conf. Memphis, 1975), M. Dekker, 1976, 87 − 114.

[A13] Johnstone, P. T., Stone spaces, Cambridge Univ. Press, 1983.


罗嵩龄 译

**零因子**[**zero divisor**; **делитель нуля**]，在环或有零元素的半群中的

一个非零元素，它与某非零元素的乘积为零. 一个元素 $a$ 称为左（右）零因子（left (right) divisor of zero），若至少有一个 $b \neq 0$，使 $ab = 0$ ($ba = 0$).

O. A. Иванова 撰

【补注】 设 $A$ 为环，$M$ 为 $A$ 上左模，则 $A$ 的元素 $a \neq 0$ 称为模 $M$ 中的零因子，如果有 $m \in M$ ($m \neq 0$) 使 $am = 0$.

裴定一 译 赵春来 校

**零一律**[**zero-one law**; **нуль-единица закон**]，亦称 0-1 律

在**概率论**（probability theory）中的陈述：每一尾事件（tail event）具有概率 0 或 1. 所谓尾事件即它的发生决定于一个独立随机事件或随机变量序列的任意远的元素. 这个规律可推广到依赖于连续参数的随机变量系统上（见下面所述）.

对单个的尾事件，它的概率是 0 和 1 这一事实建立于 20 世纪初. 这样，设 $A_1, A_2, \cdots$，是一独立事件序列，设 $A$ 是无穷多个事件 $A_k$ 发生这一尾事件，即

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k,$$

则如 E. Borel([1])所指出,

$$P(A)=0 \text{ 或 } P(A)=1.$$

通过简单的计算他证明了

$$P(A)=0,\ \text{如果}\ \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)<\infty,$$

且

$$P(A)=1,\ \text{如果}\ \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)=\infty$$

(见 **Borel-Cantalli** 引理(Borel-Cantalli lemma).

再者,如果 $X_1, X_2, \cdots$,是一独立随机变量序列,则级数 $\sum_{k=1}^{\infty} X_k$ 收敛的概率只能是 0 或 1. 这一事实(连同区别这两种情形的准则)由 A. H. Колмогоров 在 1928 年建立(见[2],[5]).

对与函数级数(例如随机项幂级数)之和的解析性质相联系的尾事件,也有研究. 1896 年 Borel 含糊地断言:对"任意系数"收敛圆盘的边界是用系数表达的解析函数的自然边界. 由 H. Steinhaus([3])以下面严格的形式表述:设 $X_1, X_2, \cdots$,是在 $(0,1)$ 上均匀分布(uniform distribution)的独立随机变量序列,设 $a_k$ 是给定的数并假定幂级数

$$f(z;X_1,X_2,\cdots)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{2\pi i X_k} z^{k-1}$$

具有收敛半径 $R>0$. 则函数 $f$ 不能扩展到圆盘 $|z|\leqslant R$ 的边界之外的(尾)事件有概率 1. B. Jessen([4])证明了与在 $(0,1)$ 上均匀分布的独立随机变量序列有关的任意尾事件具有概率 0 或 1.

Колмогоров(见[5])如下叙述了一般的零一律:设 $X_1, X_2, \cdots$,是随机变量序列,$f(X_1,X_2,\cdots)$ 是 Borel 可测函数且使得关系式

$$f(X_1,X_2,\cdots)=0$$

的事件在给定开始 $n$ 个变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 之下的条件概率

$$P\{f(X_1,X_2,\cdots)=0|X_1,\cdots,X_n\}$$

等于无条件概率

$$P\{f(X_1,X_2,\cdots)=0\}, \qquad (*)$$

对于任意 $n$ 成立. 在这些条件之下,概率(*)是 0 或 1. 对独立随机变量 $X_1, X_2, \cdots$,本文开始时叙述的零一律可由此推出.

P. Lévy 在 1937 年(见[6])证明了:Колмогоров 定理可由更一般的条件概率的性质推出,即

$$\lim_{n\to\infty} P\{f(X_1,X_2,\cdots)=0|X_1,\cdots,X_n\}$$

几乎必然等于 1 或 0(依赖于 $f(X_1,X_2,\cdots)$ 是否为零). 而这个结论又可从关于鞅的定理推出(见[7]第 Ⅲ 章第 1 节;第 Ⅶ 章第 4,5,7 节及注释. 在第 11 节,对独立增量随机过程有一个类似的零一律;特别,这蕴含着具连续相关函数可分 Gauss 过程的样本分布函数要么以概率 1 在每点连续,要么以概率 1 在每一点有第二类间断性;亦见[8]).

对独立同分布随机变量序列 $X_1, X_2, \cdots$ 的情形,已经证明了(见[9]):不仅任意尾事件的概率是 0 或 1,而且在任意有限多项置换下不变的事件概率也是 0 或 1.

**参考文献**


[1] Borel, E., Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétique, *Rend. Circ Mat. Palermo* (2), **27**(1909); 247 – 271.

[2] Kolmogorov, A. N. Über die Summen durch den Zufall bestimmter unabhängiger Grössen, *Math. Ann.*, **99**(1928), 309 – 319.

[3] Steinhaus, H., Über die Wahrscheinlichkeit dafür dass der Konvergenzkreis einer Potenzreihe ihre natürliche Grenze ist, *Math. Z.*, **31**(1929), 408 – 416.

[4] Jessen, A. B., The theory of integration in a space of an infinite number of dimensions, *Acta Math.*, **63**(1934), 249 – 323.

[5] Колмогоров, А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974(中译本:A. H. 柯尔莫格洛夫,概率论基本概念,商务印书馆,1952).

[6] Lévy, P., Théorie de l'addition des variables aléatoires, Gauthier-Villars, 1937.

[7] Doob, J. L., Stochastic processes, Chapman and Hall, 1953.

[8] Добрушин, Р. Л., 《Теория веровтн. и ее применения, **5**(1960), 1, 132 – 134.

[9] Hewitt, E. and Savage, L. J., Symmetric measures on Cartesian products, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **80**(1955), 470 – 501.


А. В. Прохоров, Ю. В. Прохоров 撰

【补注】

**参考文献**


[A1] Loève, M., Probability theory, 1 – 2, Springer, 1978(中译本:M. 洛易甫,概率论,上册,科学出版社,1965).


刘秀芳 译 陈培德 校

**零系[zero system 或 null system; нуль система]**

$n$ 维射影空间的带有一个反对称算子的对合的对射变换. 设零系有形式

$$'u=Ax,$$

则标量乘积 $'ux$,即

$$(x,Ax)=-(x,Ax)$$

为零.

**参考文献**

[1] Розенфельд, Б. А., Многомерные пространства, М., 1966.

Д. Д. Соколов 撰

【补注】 零系也称为零配极 (null polarity), 辛配极 (symplectic polarity) 或辛对射变换 (symplectic correlation). 由以上显然可见, 它是使得每个点位于它自身的极超平面上的配极 (polarity).

在三维射影空间里, 一个对射变换是一个对偶变换 (见对射变换 (correlation)), 将点、直线和平面分别变为平面、直线和点, 依据对偶原理, 还保持关联性质不变. 如果一直线上任何点列变为通过一新直线的平面束且两者成射影对应关系, 则此对射变换称为射影的 (projective). 存在唯一射影的对射变换将给定的无四点共面的五个点, 变为给定的无四面共点的五个平面.

一个配极是一个周期为 2 的射影对射变换 (见配极 (polarity)) 换言之, 它将每个点 $A$ 变为一平面 $\alpha$, 且 $\alpha$ 上的每个点变为通过 $A$ 的一平面. 有一类配极将二次曲面上每一点变为该点的切平面. 另一类是零配极 (null polarity), 它将空间里的每个点变为通过该点的一平面. 作为唯一的射影对射变换, 可以描述为将五个点 $A,B,C,D,E$ (其中无四点共线) 分别变换到平面 $EAB$, $ABC$, $BCD$, $CDE$, $DEA$. 由于直线 $AB$ 是 $A$ 和 $B$ 的极平面 $EAB$ 与 $ABC$ 的交线, 所以它是自配极的 (self-polar). 事实上, 所有的通过 $A$ 且在它的极平面 $EAB$ 上的直线都是自配极的. 在每个平面上有一个这种直线所构成的平坦线束, 且所有的自配极直线的集合是一个线性线丛 (linear complex).

在射影坐标系下, 一个零配极将每一点 $(x_0,x_1,x_2,x_3)$ 变为平面 $[X_0,X_1,X_2,X_3]$, 这里

$$X_\mu=\sum_{\nu=0}^{3}C_{\mu\nu}x_\nu$$

且 $C_{\mu\nu}+C_{\nu\mu}=0$, $C_{01}C_{23}+C_{02}C_{31}+C_{03}C_{12}\neq 0$. 对于一直线的 **Plücker 坐标** (Plücker coordinates) $\{p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{23}, p_{31}, p_{12}\}$, 这里 $p_{\mu\nu}+p_{\nu\mu}=0$ 与 $p_{01}p_{23}+p_{02}p_{31}+p_{03}p_{12}=0$, 零配极中自配极直线的线性线丛有方程

$$\sum\sum C_{\mu\nu}p_{\mu\nu}=0.$$

**参考文献**

[A1] Staudt, K. G. C. von., Beiträge zur Geometrie der Lage, Korn, Nürnberg, 1847, 60 – 69, 190 – 196.

[A2] Coxeter, H. S. M., Non-Euclidean geometry, Univ. Toronto Press, 1965, 65 – 70.

[A3] Pedoe, D., Geometry: a comprehensive course, Dover, reprint, 1988, § 85.5.

林向岩 译 陆珊年 校

## ζ 函数 [zeta-function 或 ζ-function; дзета-функция]

1) 数论中的 ζ 函数是一类单复变量的解析函数, 由 Riemann ζ 函数, 它的推广及类似函数所组成. ζ 函数及它们的形如 $L$ 函数 (见 **Dirichlet $L$ 函数** (Dirichlet $L$-function)) 的推广构成了近代解析数论的基础. 除 Riemann ζ 函数外, 还有推广的 ζ 函数 $\zeta(s,a)$, Dedekind ζ 函数, 同余 ζ 函数, 等等.

Riemann ζ 函数 (Riemann zeta-function) 是由 Dirichlet 级数

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s},\ s=\sigma+it \tag{1}$$

定义, 它在复 $s$ 平面的任一满足 $\sigma\geqslant 1+\delta\ (\delta>0)$ 的区域中绝对一致收敛. 当 $\sigma>1$ 时, 有 **Euler 积** (Euler product):

$$\zeta(s)=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \tag{2}$$

这里 $p$ 遍历全体素数.

级数 (1) 和积 (2) 之间的恒等式是 $\zeta(s)$ 的基本性质之一. 由此可以得到一系列联系 $\zeta(s)$ 和重要数论函数的关系式. 例如, 当 $\sigma>1$ 时,

$$\ln\zeta(s)=s\int_2^{\infty}\frac{\pi(x)}{x(x^s-1)}\,dx,$$

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s},$$

$$\frac{1}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s},\ \zeta^2(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{n^s},$$

$$\frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{\nu(n)}}{n^s},\ \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(n)}{n^s},$$

这里 $\pi(x)$ 是不超过 $x$ 的素数个数, $\Lambda(n)$ 是 (von) **Mangoldt 函数** (Mangoldt function), $\mu(n)$ 是 **Möbius 函数** (Möbius function), $\tau(n)$ 是 $n$ 的除数个数, $\nu(n)$ 是 $n$ 的不同的素因子个数, 及 $\lambda(n)$ 是 **Liouville 函数** (Liouville function). 这表明了 $\zeta(s)$ 在数论中的重要作用. 作为实变量的函数, $\zeta(s)$ 是 Euler ([1]) 在 1737 年引进的, 他证明了它能表为积 (2). 此后, 这函数被 P. G. L. Dirichlet 和 П. Л. Чебышев ([2]) 所研究, 后者的研究在**素数分布** (distribution of prime numbers) 问题方面取得了杰出的成就. 然而, $\zeta(s)$ 的最深刻的内在性质是后来把它作为一个复变量的函数来研究时发现的. 这首先是由 B. Riemann ([3]) 于 1876 年得到的. 他证明了下面的结论.

a) $\zeta(s)$ 可由以下的形式解析延拓 (analytic continuation) 至整个复 $s$ 平面:

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\frac{1}{s(s-1)}+$$

$$+\int_1^{\infty}(x^{-(1-s/2)}+x^{-(1-(1-s)/2)})\theta(x)dx, \quad (3)$$

其中 $\Gamma(\omega)$ 是 Γ 函数（gamma-function）及

$$\theta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\exp(-\pi n^2 x).$$

b）除了 $s=1$ 外，$\zeta(s)$ 是所有 $s$ 值的解析函数，在 $s=1$ 有一个一级极点，留数为 1，以及它满足函数方程

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\pi^{-(1-s)/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s), \quad (4)$$

这方程称为 Riemann 函数方程．为了研究 $\zeta$ 函数，Riemann 引进了函数

$$\xi(s)=\frac{s(s-1)}{2}\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s),$$

它被称为 Riemann $\xi$ 函数（Riemann $\xi$-function）．对于它方程（4）变为

$$\xi(s)=\xi(1-s).$$

若设

$$\Xi(t)=\xi\left(\frac{1}{2}+it\right),$$

则方程（4）变为

$$\Xi(t)=\Xi(-t).$$

最后这个函数 $\Xi$ 由于以下事实而引人注意：它是一个偶的整函数，对实数 $t$ 它取实值，以及它在实轴上的零点对应于 $\zeta(s)$ 在直线 $\sigma=1/2$ 上的零点．

c）因当 $\sigma>1$ 时 $\zeta(s)\neq 0$，故由（4）知，在半平面 $\sigma<0$ 内，$\zeta(s)$ 仅在点 $s=-2\nu$ $(\nu=1,2,\cdots)$ 处有一级零点．这些零点称为 $\zeta(s)$ 的平凡零点（trivial zeros）．此外，当 $0<s<1$ 时 $\zeta(s)\neq 0$．这样，$\zeta(s)$ 的所有非平凡零点（non-trivial zeros）是复数，它们对于实轴 $t=0$ 及垂直直线 $\sigma=1/2$ 均为对称分布，以及全部位于带域 $0\leqslant\sigma\leqslant 1$ 内，这个带域称为临界带（critical strip）．

Riemann 也提出了下面五个假设．

1．$\zeta(s)$ 在矩形 $0\leqslant\sigma\leqslant 1, 0<t<T$ 中的零点个数 $N(T)$ 有公式

$$N(T)=\frac{1}{2\pi}T\ln T-\frac{1+\ln 2\pi}{2\pi}T+O(\ln T).$$

2．设 $\rho$ 遍历 $\zeta(s)$ 的所有非平凡零点．那么，级数 $\sum|\rho|^{-2}$ 收敛，而级数 $\sum|\rho|^{-1}$ 发散．

3．函数 $\xi(s)$ 可表为无穷积

$$ae^{bs}\prod_{\rho}\left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{s/\rho},$$

这里 $\rho$ 遍历 $\xi(s)$ 的所有零点（即 $\zeta(s)$ 的所有非平凡零点）．

4．设

$$P(x)=\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{\ln n},$$

$$P_0(x)=\frac{1}{2}[P(x+0)+P(x-0)].$$

那么，当 $x\geqslant 1$ 时有

$$P_0(x)=\mathrm{li}\,x-\sum_{\rho}\mathrm{li}\,x^{\rho}+\int_x^{\infty}\frac{du}{(u^2-1)\ln u}-\ln 2, \quad (5)$$

其 $\mathrm{li}\,x$ 是积分对数（integral logarithm）：

$$\mathrm{li}\,e^{w}=\int_{-\infty+iv}^{u+iv}\frac{e^{z}}{z}dz,\ w=u+iv,\ v<0 \text{ 或 } v>0.$$

5．$\zeta(s)$ 的所有非平凡零点均位于直线 $\sigma=1/2$ 上．

随 Riemann 工作之后，$\zeta$ 函数的值分布，特别是，零点分布问题变得广为人知，并有许多数学工作者对此进行研究．Riemann 的假设 2 和 3 被 J. Hadamard 于 1893 年所证明，并证明了在假设 3 中 $a=1/2$ 及 $b=\ln 2+(1/2)\ln\pi-1-C/2$，这里 $C$ 是 **Euler 常数**（Euler constant）；假设 1 和 4 于 1894 年被 H. von Mangodt 所证明，他同时得到了关于素数的公式（5）的下述的重要类似关系式．设

$$\Psi(x)=\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n),$$

$$\Psi_0(x)=\frac{1}{2}[\Psi(x+0)+\Psi(x-0)],$$

则对 $x\geqslant 1$ 有

$$\Psi_0(x)=x-\sum_{\rho}\frac{x^{\rho}}{\rho}-\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}-\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right),$$

这里 $\rho=\beta+i\gamma$ 遍历 $\zeta(s)$ 的所有非平凡零点，而 $\sum_{\rho}x^{\rho}/\rho$ 表示和式 $\sum_{|\gamma|\leqslant T}x^{\rho}/\rho$ 当 $T\to\infty$ 的极限．类似于公式（5），这公式表明，自然数列中的素数分布问题是与函数 $\zeta(s)$ 的非平凡零点的位置有密切关系．

最后一个假设（假设 5）至今（1997）还未被证明或否定．这就是关于 $\zeta$ 函数零点的著名的 Riemann 假设（Riemann hypothesis）．

函数 $\zeta(s)$ 明确地由它的函数方程所定义．更正确地说，任一由常义 Dirichlet 级数所表示并满足方程（4）的函数，在它的解析性满足相当明显的条件下，一定在只相差一个常数因子的意义下与 $\zeta(s)$ 相同（[4]）．

设

$$\chi(s)=\pi^{s-1/2}\frac{\Gamma(1-s/2)}{\Gamma(s/2)}$$

及 $h>0$ 是常数，G. H. Hardy 和 L. E. Littlewood ([4]) 于 1920 年证明了：当 $0<\sigma<1$, $x>h$, $y>h$, $2\pi xy=|t|$ 时，有下述近似函数方程 (approximate functional equation) 成立：

$$\zeta(s)=\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n^{s}}+\chi(s)\sum_{n\leqslant y}\frac{1}{n^{1-s}}+O(x^{-\sigma})+$$
$$+O(|t|^{1/2-\sigma}y^{\sigma-1}). \tag{6}$$

这个方程在近代 $\zeta$ 函数理论及其应用中起着重要作用. 有一些一般方法可以用来不仅对这类 $\zeta$ 函数而且对一般的满足 Riemann 型函数方程 (3) 的 Dirichlet 函数得到这种形式的结果. 在这方面文献 [5] 证明了最完全的结果；在 $\zeta(s)$ 的情形，它导致如下的关系式：对任意的 $\tau$, $|\arg\tau|<\pi/2$，有

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\pi^{-s/2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(s/2,\pi n^{2}\tau)}{n^{s}}+$$
$$+\pi^{-(1-s)/2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma((1-s)/2,\pi n^{2}/\tau)}{n^{1-s}}+$$
$$-\frac{\tau^{(s-1)/2}}{1-s}-\frac{\tau^{s/2}}{s},$$

其中 $\Gamma(z,x)$ 是**不完全 Γ 函数** (incomplete gamma-function). 对

$$\tau=\Delta^{2}\exp\left[i\left[\frac{\pi}{2}-\frac{1}{|t|}\right]\operatorname{sign}t\right],\ \Delta>0,$$

由此就得到渐近方程 (6)；对 $\tau=1$，这关系式就变为原始的公式 (3).

$\zeta$ 函数论的主要问题是它的非平凡零点的位置，及一般的，它在区域 $1/2\leqslant\sigma\leqslant1$ 中的值. $\zeta$ 函数的主要研究方面有：确定离开直线 $\sigma=1$ 的左边尽可能宽的区域，使在其中 $\zeta(s)\neq0$；在临界带中 $\zeta$ 函数的阶及均值问题；估计 $\zeta$ 函数在直线 $\sigma=1/2$ 上及其外的零点个数，等等.

第一个关于 $\zeta$ 函数零点的边界的非显然结果是 Ch. J. de la Vallée-Poussin 于 1896 年得到的，他证明了存在常数 $A_1>0$，使得

$$\zeta(s)\neq0,\ 若\ \sigma\geqslant1-\frac{A_1}{\ln^{\alpha}(|t|+2)},\ \alpha\geqslant1. \tag{7}$$

这方面的进一步的推进是与渐近方程 (6) 及估计三角和的方法的发展相联系.

估计这类三角和的最强有力的方法是由 И. М. Виноградов 创造的 (见 **Виноградов 法** (Vinogradov method)). 关于 $\zeta$ 函数的非零区域的边界的最好结果 (至 1997 年) 是 1958 年 Виноградов ([7]) 得到的：存在常数 $A_2>0$，使得

$$\zeta(s)\neq0,$$

$$若\ \sigma\geqslant1-\frac{A_2}{(\ln(|t|+4))^{2/3}(\ln\ln(|t|+4))^{1/3}}. \tag{7'}$$

关于素数个数可得到相应的公式：存在常数 $A_3>0$，使得

$$\pi(x)=\operatorname{li}x+O(x^{-A_3(\ln x)^{3/5}(\ln\ln x)^{-1/5}}).$$

在直线 $\sigma=1$ 邻近，函数 $\zeta(s)$ 的模的阶与其有无零点之间存在某种联系. 这样，式 (7′) 是下面估计的推论：在式 (7′) 的条件下有
存在正常数 $A_4$, $A_5$，使得

$$\zeta(s)=O(e^{A_4\ln\ln|t|}),$$
$$若\ \sigma\geqslant1-A_5(\ln|t|)^{-2/3}(\ln\ln|t|)^{2/3}. \tag{7''}$$

在另一方面 ([4])，已知有

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{|\zeta(1+it)|}{\ln\ln t}\geqslant e^{C},$$
$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{|\zeta(1+it)|^{-1}}{\ln\ln t}\geqslant\frac{6}{\pi^{2}}e^{C},$$

以及，若 Riemann 假设成立，这两个上极限分别不超过 $2e^{C}$ 及 $(12/\pi^{2})e^{C}$.

$\zeta$ 函数在临界带中的阶是指使得 $\zeta(\sigma+it)=O(|t|^{\nu})$ 成立的数 $\nu$ 的最大下界 $\eta(\sigma)$. 若 $\sigma>1$，则 $\eta(\sigma)=0$；若 $\sigma<0$，则 $\eta(\sigma)=1/2-\sigma$. 函数 $\eta(\sigma)$ 当 $0\leqslant\sigma\leqslant1$ 时的确切值至今仍不知道. 根据最简单的猜测 (**Lindelöf 假设** (Lindelöf hypothesis))，应有

$$\eta(\sigma)=\frac{1}{2}-\sigma,\ 当\ \sigma\leqslant\frac{1}{2},$$
$$及\ \eta(\sigma)=0,\ 当\ \sigma>\frac{1}{2}.$$

这等价于命题：对任意的 $\varepsilon>0$ 有

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)=O(|t|^{\varepsilon}). \tag{8}$$

当 $\sigma>1/2$ 时有估计 $\zeta(\sigma+it)=O(|t|^{(1-\sigma)/2})$ 成立.

$\zeta(s)$ 在直线 $\sigma=1/2$ 上最近已知的估计 ([4]) 是

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)=O(|t|^{\varepsilon+15/32})$$

离所期望的估计 (8) 相差甚远.

$\zeta$ 函数的均值问题是要对给定的 $\sigma$ 及 $k=1,2,\cdots$，确定函数

$$\frac{1}{T}\int_{1}^{T}|\zeta(\sigma+it)|^{2k}dt$$

当 $T\to\infty$ 时的性质. 这样的结果在 $\zeta$ 函数的零点及数论中有直接的应用.

在[4]中证明了:

$$\frac{1}{T}\int_1^T\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2dt=$$

$$=\ln T+2C-1-\ln 2\pi+O\left(\frac{\ln T}{\sqrt{T}}\right),$$

$$\frac{1}{T}\int_1^T\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^4dt=\frac{\ln^4 T}{2\pi^2}+O(\ln^3 T),$$

当 $\sigma>1/2$ 时有

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_1^T|\zeta(\sigma+it)|^2dt=\zeta(2\sigma),$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_1^T|\zeta(\sigma+it)|^4dt=\frac{\zeta^4(2\sigma)}{\zeta(4\sigma)}.$$

对 $k>2$, 仅知道当 $\sigma>1-1/k$ 时有

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_1^T|\zeta(\sigma+it)|^{2k}dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau_k^2(n)}{n^{2\sigma}},$$

其中 $\tau_k(n)$ 是 $n$ 表为 $k$ 个正整数乘积的表法个数, 以及渐近关系式

$$\frac{1}{T}\int_1^T|\zeta(\sigma+it)|^{2k}dt\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau_k^2(n)}{n^{2\sigma}}$$

等价于 $\sigma>1/2$ 时的 Lindelöf 假设.

$\zeta$ 函数论中的一个重要部分是关于函数 $N(\sigma,T)$ 的估计问题, 它表示区域 $\beta\geqslant\sigma$, $0<\gamma\leqslant T$ 中 $\zeta(s)$ 的零点 $\beta+i\gamma$ 的个数. $N(\sigma,T)$ 的新的估计是基于解析函数均值的凸性定理, 把它应用于函数

$$f_X(s)=\zeta(s)\sum_{n\leqslant X}\frac{\mu(n)}{n^s}-1.$$

若对某个 $X=X(\sigma,T)$, $T^{1-l(\sigma)}\leqslant X\leqslant T^A$, 当 $T\to\infty$ 时

$$\int_T^{2T}|f_X(s)|^2dt=O(T^{l(\sigma)}\ln^m T)$$

对 $\sigma\geqslant\alpha$ 一致成立, 其中 $l(\sigma)$ 是有有界导数的正的非增函数和 $m\geqslant 0$ 是一个常数, 那么

$$N(\sigma,T)=O(T^{l(\sigma)}\ln^{m+1}T)$$

对 $\sigma\geqslant\alpha+1/\ln T$ 一致成立.

此外还知道, 若对 $r_1\leqslant 3/2$ 有

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)=O(t^r\ln^{r_1}t)$$

成立, 那么, 当 $1/2\leqslant\sigma\leqslant 1$ 时有

$$N(\sigma,T)=O(T^{2(1+2r)(1-\sigma)}\ln^5 T).$$

由这两个结论可以证明下面的关于 $\zeta$ 函数的零点密度定理 (density theorems on the zeros of the zeta-function): 当 $1/2\leqslant\sigma\leqslant 1$ 时有

$$N(\sigma,T)=O(T^{3(1-\sigma)/(2-\sigma)}\ln^5 T),$$

以及对 $3/4\leqslant\sigma\leqslant 1$ 有

$$N(\sigma,T)=O(T^{3(1-\sigma)/(3\sigma-1)}\ln^{44}T).$$

$\zeta$ 函数在直线 $\sigma=1/2$ 上的零点. 根据 Riemann 假设, $\zeta$ 函数的所有非平凡零点均位于直线 $\sigma=1/2$ 上. 在这条直线上有无穷多个零点这一事实首先是由 Hardy ([4]) 于 1914 年基于下述的 Ramanujan 公式 (Ramanujan formula) 证明的:

$$\int_0^{\infty}\frac{\Xi(t)}{t^2+1/2}\cos xt\,dt=\frac{\pi}{2}\left[e^{x/2}-e^{-x/2}\theta(e^{-2x})\right].$$

一个本质上的新结果属于 A. Selberg (1942) ([4]): 存在正常数 $A$, 使得 $\zeta(s)$ 的形如 $1/2+it(0<t\leqslant T)$ 的零点个数 $N_0(T)$ 满足不等式

$$N_0(T)>AT\ln T.$$

这表明 $\zeta$ 函数在直线 $\sigma=1/2$ 上的零点个数与它的所有非平凡零点的个数

$$N(T)=N(1/2,T)\sim\frac{1}{2\pi}T\ln T$$

有同样的增长阶. 关于 $\zeta$ 函数在这一直线上的零点还知道一些其他的结果. 利用近似函数方程便可计算 (在一定的精度内) 靠近实轴使 $\zeta$ 函数等于零的点的值. 由这一方法使用计算机找到了 $\zeta(s)$ 在矩形 $0\leqslant\sigma\leqslant 1$, $0\leqslant t\leqslant 1.6\cdot 10^6$ 中的全部零点, 它们共有 $3.5\cdot 10^6$ 个且均位于直线 $\sigma=1/2$ 上. 最初的六个零点是 (精确到小数点后两位): 14.13, 21.02, 25.01, 30.42, 32.93 及 37.58.

在一般情形下, $\zeta(s)$ 的相邻零点之间的距离的估计由 Littlewood 定理 (Littlewood theorem) (1924) 给出: 对任意充分大的 $T$, 函数 $\zeta(s)$ 有一个零点 $\beta+i\gamma$, 使得

$$|\gamma-T|<\frac{A}{\ln\ln\ln T}.$$

对 $0<a<1$, 广义 $\zeta$ 函数 (generalized zeta-function) 由如下级数定义:

$$\zeta(s,a)=\sum_{n=1}^{\infty}(n+a)^{-s}.$$

当 $a=1$ 时, 它就是 Riemann $\zeta$ 函数. 公式

$$\zeta(s,a)=\frac{e^{-\pi is}\Gamma(1-s)}{2\pi i}\int_L\frac{z^{s-1}e^{-az}}{1-e^{-z}}dz$$

把 $\zeta(s,a)$ 解析延拓到全平面, 其中积分线路 $L$

是：先沿正实轴的上边由无穷远到某个给定正数 $r$，$0<r<2\pi$；再以反时针方向沿半径为 $r$ 的圆周一圈；最后沿正实轴的下边由 $r$ 到无穷远．$\zeta(s, a)$ 处处解析，除了点 $s=1$，该点是它的一级极点留数为 1．它是 Dirichlet $L$ 函数理论的重要组成部分（[9]，[10]）．

Dedekind $\zeta$ 函数（Dedekind zeta-function）是 Riemann $\zeta$ 函数在代数数域上的类似，由 R．Dedekind（[11]）引进．

设 $k$ 是 $n(>1)$次代数数域，$n=r_1+2r_2$，$r_1$ 是它的共轭实数域的个数，$r_2$ 是它的共轭复数域的对数；再设 $\Delta$，$h$，及 $R$ 分别是域 $k$ 的判别式，除子类数及调整子，以及 $g$ 是 $k$ 中的单位根的个数．

域 $k$ 上的 Dedekind $\zeta$ 函数 $\zeta_k(s)$ 由级数

$$\zeta_k(s)=\sum_{\mathfrak{A}} \frac{1}{N_{\mathfrak{A}}^s}$$

定义，其中 $\mathfrak{A}$ 遍历 $k$ 的所有整的非零除子，及 $N_{\mathfrak{A}}$ 是除子 $\mathfrak{A}$ 的范数．当 $\sigma\geqslant 1+\delta\ (\delta>0)$ 时这级数绝对一致收敛，定义了一个半平面 $\sigma>1$ 上的解析函数．

若 $\sigma>1$，则

$$\zeta_k(s)=\sum_{m=1}^{\infty} \frac{f(m)}{m^s},$$

其中 $f(m)$ 是 $k$ 中范数为 $m$ 的整除子的个数；$f(m)\leqslant \tau_n(m)$，$\tau_n(m)$ 是 $m$ 表为 $n$ 个自然数之积的表法个数．

若 $\sigma>1$，则有 Euler 恒等式

$$\zeta_k(s)=\prod_{\mathfrak{P}}\left(1-\frac{1}{N_{\mathfrak{P}}^s}\right)^{-1}$$

成立，这里 $\mathfrak{P}$ 遍历 $k$ 的全体素除子．

Dedekind $\zeta$ 函数的主要性质．见[11]．

1）$\zeta_k(s)$ 在整个复平面上解析除了 $s=1$，该点是它的一级极点留数为

$$\frac{2^{r_1+r_2}\pi^{r_2}hR}{g\sqrt{|\Delta|}}.$$

2）$\zeta_k(s)$ 满足函数方程

$$\xi_k(s)=\xi_k(1-s),$$

其中

$$\xi_k(s)=\left(\frac{|\Delta|}{4^{r_2}\pi^n}\right)^s\Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma^{r_2}(s)\zeta_k(s).$$

3）当 $r=r_1+r_2-1>0$ 时，函数 $\zeta_k(s)$ 在点 $s=0$ 有一个 $r$ 级零点；当 $r=0$ 时 $\zeta_k(0)\neq 0$；点 $s=-2\nu\ (\nu=1, 2, \cdots)$ 是 Dedekind $\zeta$ 函数 $\zeta_k(s)$ 的 $r+1$ 级零点；当 $r_2>0$ 时点 $s=-2\nu-1$ 是它的 $r_2$ 级零点，当 $r_2=0$ 时它不等于零．这些是 $\zeta_k(s)$ 的平凡零点．

4．$\zeta_k(s)$ 的所有其他的零点均位于临界带 $0\leqslant\sigma\leqslant 1$ 中．

一个基本假设是 $\zeta_k(s)$ 的所有非平凡零点均位于直线 $\sigma=1/2$ 上．已经证明在 $\sigma=1$ 上 $\zeta_k(s)$ 无零点．此外，存在一个绝对正常数 $A$，及一个依赖于 $k$ 的参数的常数 $\lambda$，使得

$$\zeta_k(s)\neq 0,\ \text{当}\ \sigma\geqslant 1-\frac{A}{n\ln|t|},\ |t|>\lambda.$$

一般说来，若已给定 $k$ 的参数，则许多类似于 Riemann $\zeta$ 函数的结果可推广到 $\zeta_k(s)$．然而，在一般情形下，Dedekind $\zeta$ 函数理论更为复杂，因为它也包含了 Dirichlet $L$ 函数理论．至今（1997）还不知道 Dedekind $\zeta$ 函数在 0 与 1 之间是否有实零点．Dedekind $\zeta$ 函数与有理数域上的 $L$ 级数之间的确切关系有如下的形式：设 $k^*$ 是包含 $k$ 的最小的 Galois 域；$Q$ 是 $k^*$ 的 Galois 群，$h$ 是 $Q$ 的共轭类数，及 $\chi_i$ 是 $Q$ 的素特征标．那么，

$$\zeta_k(s)=\zeta(s)\prod_{i=2}^{h} L^{c_i}(s;\chi_i, k^*),$$

其中 $\zeta(s)$ 是 Riemann $\zeta$ 函数，$L$ 是 Artin $L$ 级数，及 $c_i=c_i(k)$ 是正整数，它们由域 $k^*$ 的相对 Galois 群的性质确定．特别地，若 $k$ 是一个分圆扩张，则 $k^*=k$，$h=\varphi(n)$，$c_i=1$，及 Artin $L$ 级数就是通常的 Dirichlet $L$ 级数．

域 $k$ 的除子类 $H_j$ 的 Dedekind $\zeta$ 函数（Dedekind zeta functions of a divison class $H_j$）是同 Dedekind $\zeta$ 函数 $\zeta_k(s)$ 平行地考虑的，记作 $\zeta_k(s;H_j)$．这些函数以与 $\zeta_k(s)$ 同样的级数来定义，但 $\mathfrak{A}$ 仅遍历属于给定类 $H_j$ 的所有整除子而不是 $k$ 的所有整除子．函数 $\zeta_k(s;H_j)$ 的性质与 $\zeta_k(s)$ 类似，并有下面的公式成立：

$$\zeta_k(s)=\sum_{j=1}^{h}\zeta_k(s;H_j).$$

Dedekind $\zeta$ 函数是近代代数数域除子的解析理论的基础，在这里它们与 Riemann $\zeta$ 函数在有理数域上的数论中所起的作用相同．

同余 $\zeta$ 函数（congruence zeta-function）或 Artin-Schmidt $\zeta$ 函数（Artin-Schmidt zeta-function）（见下面代数几何中的 $\zeta$ 函数（zeta-function in algebraic geometry））是 Dedekind $\zeta$ 函数在以有限域为常数域的单变量代数函数域上的类似．

**参考文献**


[1] Euler, L., Einleitung in die Analysis des Unendlichen, Springer, 1983（译自拉丁文）.

[2] Чебышев, П. Л., Избр. математические труды, М.-Л., 1946.

[3] Riemann, B., Collected works, Dover. reprint, 1953.

[4] Titchmarsh. E. C., The theory of the Riemann zeta-function, Clarendon Press, 1986.（Rev. ed）.

[5] Лаврик, А. Ф.,《Изв. АН СССР, сер. ма-

тем.》, **32** (1968), 1, 134－185.
[6] Виноградов, И. М., a) Метод тригонометричес-ких сумм в теории чисел, 2 изд. М.-Н., 1980; b) Особые варианты метода тригонометрических сумм, М.-Н., 1976 (英译本: Vinogradov, I. M., Selected works, Springer-Verlag, 1984, a) The method of trigonometric sums in number theory, 181－295, b) Special variants of the method of trigonometric sums, 299－383).
[7] Виноградов, И. М., 《Изв АН СССР. Сер. ма-тем.》, **22** (1958), 161－164.
[8] Montgomery, H. L., Zeros of $L$-functions, *Invent. Math.*, **8** (1969), 346－354.
[9] Prachar, K., Primzahlverteilung, Springer, 1957.
[10] Чудаков, Н. Г., Введение в теорию $L$-функций дирихл, М.-Л., 1947.
[11] Hecke, E., Mathematische Werke, Vandenhoeck & Ruprecht, 1959.
А. Ф. Лаврик 撰

【补注】 由数值计算结合解析理论，已经证明 $\zeta(s)$ 的前 200 000 000 个非显然零点都确在直线 $\mathrm{Re}(s)=1/2$ 上([A4]).

N. Levinson 证明了 $\zeta(s)$ 的非显然零点至少有 1/3 是位于直线 $\mathrm{Re}(s)=1/2$ 上([A5]).

**参考文献**

[A1] Ivic, A., The Riemann zeta-function, Wiley, 1985.
[A2] Patterson, S. J., An introduction to the theory of the Riemann-zeta-function Cambridge Univ. Press, 1988.
[A3] Edwards, H. M., Riemann's zeta-function, Acad. Press, 1974.
[A4] Brent, R. P., Lune, J. van de, Riele, H. J. J. te and Winter, D. T., The first 200 000 001 zeros of Riemann's zeta-function, in Computational methods in number theory, Math. Centre, Amsterdam, 1982, 389－403.
[A5] Levinson, N., More than one third of the zeros of the Riemann zeta-function are on Re $(s)=1/2$, *Adv. Math.*, **13** (1974), 383－436.
[A6] Apostol, T. M., Introduction to analytic number theory, Springer, 1976.
[A7] Dedekind, R., Gesammelte Math. Werke, 1－3, Vieweg, 1930－1932.
[A8] Hardy, G. H. and Wright, E. M., An introduction to the theory of numbers, Clarendon Press, 1979.
[A9] Haselgrove, C. B. and Miller, J. C. P., Tables of the Riemann zeta-function, Cambridge Univ. Press, 1960.
[A10] Hecke, E., Vorlesungen über die Theorie der algebraischen zahlen, Chelsea, reprint, 1970.
[A11] Ivic, A., Topics in recent zeta-function theory, Publ. Math. Orsay, 1983.
[A12] Landau, E., Handbuch der Lehre von der verteilung der primzahlen, Chelsea, reprint, 1953.
[A13] Lehman, R. S., Separation of zeros of the Riemann zeta-function, *Math. of Comp.*, **20** (1966), 523－541
[A14] Riele, H. J. J. te, Lune, J. van de and Winter, D. T., On the zeros of the Riemann zeta-function in the critical strip VI, *Math. of Comp.*, **46** (1986), 667－682.
[A15] Zagier, D. B., Zetafunktionen und quadratische Körper, Springer, 1981.

【译注】 关于 $\zeta(s)$ 的最好的非零区域是由 Виноградов 方法得到的，但他的论文[7]有缺陷，正文中的结果是经改正的(见[A1],[B1],[B3],[B4]).

**参考文献**

[B1] 华罗庚，指数和的估计及其在数论中的应用，科学出版社，1963(德文版:Ниа, L.-K., Abschätzungen von Exponentialsummen und ihre Anwendung in der Zahlentheorie, Enzyklopaedie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, Vol. 1, 1959, Heft 13, Teil I).
[B2] 闵嗣鹤，数论的方法(上、下)，科学出版社，1981.
[B3] 潘承洞，潘承彪，解析数论基础，科学出版社，1991.
[B4] Воронин, С. М., Карацуба, А. А., Дзета-Функция Римана, М.-Ф., 1994.

潘承彪 译 赵春来 校

2) 代数几何中的 $\zeta$ 函数(zeta function in algebraic geometry)是描述有限域上的代数簇以及 Spec **Z** 上的有限型概型上算术的复变量 $s$ 的解析函数. 如果 $X$ 是一个这样的概型，$\bar{X}$ 是它的闭点的集合，$N(x)$ 是点 $x\in\bar{X}$ 的剩余域 $k(x)$ 的元素个数，则 $\zeta$ 函数 $\zeta_X(s)$ 由 Euler 乘积给出:

$$\zeta_Z(s)=\prod_{x\in\bar{X}}(1-N(x)^{-s})^{-1}.$$

当 $\mathrm{Re}\,s>\dim X$ 时它绝对收敛，并可半纯地开拓到半平面 $\mathrm{Re}\,s>\dim X-1/2$ 上，以点 $s=\dim X$ 为极点([10]). 如果 $X=\mathrm{Spec}\,\mathbf{Z}$，则 $\zeta_X(s)$ 就是 Riemann $\zeta$ 函数(Riemann zeta function)，如果 $X$ 在 Spec **Z** 上是有限的，则 $\zeta_X(s)$ 是相应的数域的 Dedekind $\zeta$ 函数.

被研究得最透彻的是当 $X$ 是有限域 $\mathbf{F}_q$ 上的代数簇的情形. 此时

$$N(x)=q^{\deg x},$$

其中 $\deg x$ 是域 $k(x)$ 在 $\mathbf{F}_q$ 上的次数. 通常人们考察由

$$Z_X(q^s)=\zeta_X(s)$$

所定义的函数 $Z_X(t)$ 用以代替 $\zeta_X(s)$. 如果 $v_n$ 是簇 $X$ 在域 $\mathbf{F}_{q^n}$ 中的有理点的个数，则已证明([14])

$$\ln Z_X(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\nu_n\frac{t^n}{n}.$$

这种 ζ 函数是 E. Artin 在 1924 年对于代数曲线的情形（类似于代数数域）引入的（[1]），他指出这些函数是 $t$ 的有理函数，并且在某些情形下与 Riemann 关于零点的猜想相类似的结论对于这些函数是成立的．这个类似的结论被称为 Artin 假设（Artin hypothesis）．H. Hasse 在 1933 年对于亏格 1 的曲线证明了此假设（亏格 0 的情形是平凡的），进而 A. Weil (1940) 借助于 **Abel 簇**（Abelian variety）理论的结果对于任意亏格的曲线证明了此假设，该理论主要是由他为此目的而创立的（见 [2], [14]）．

Weil ([2]) 考虑了任意代数簇的 ζ 函数并且提出了一个假设，该假设推广了当时已知的关于曲线的结果．他的研究基于以下的考虑：簇 $X$ 在 $\mathbf{F}_{q^n}$ 中的有理点集也就是该簇的 **Frobenius 自同态**（Frobenius endomorphism）的 $n$ 次幂的不动点集．Weil 第一猜想（Weil first conjecture）提出，有限域上的代数簇的范畴中存在一个上同调理论，该理论满足为得到 **Lefschetz 公式**（Lefschetz formula）所需要的全部的形式性质．如果 $\{H^i(X)\}$ 是这样的理论的上同调群，则由 Lefschetz 公式可知

$$Z_X(t)=\frac{P_1(t)\cdots P_{2n-1}(t)}{P_0(t)\cdots P_{2n}(t)},$$

其中 $n=\dim X$，$P_i(t)$ 是由 Frobenius 自同态在 **Weil 上同调**（Weil cohomology）$H^i(X)$ 上诱导出的映射的特征多项式．特别地，$Z_X(t)$ 是有理函数．

Weil 第二猜想（Weil second conjecture）提出，函数 $Z_X(t)$ 应当满足一个函数方程．对于光滑射影簇 $X$，这个方程形如

$$Z_X(q^{-n}t^{-1})=(-1)^{\chi}q^{n\chi/2}t^{\chi}Z_X(t),$$

其中 $\chi$ 是 Euler 示性数，等于 $\sum(-1)^i\dim H^i(X)$（此猜想是上同调存在性的形式上的推论）．B. Dwork ([6]) 采用不涉及上同调的方法对于所有的 $X$ 证明了 ζ 函数是有理函数．Weil 所预想的上同调理论于 1958 年被 A. Grothendieck 所建立（见 **Weil 上同调**（Weil cohomology）；**拓扑化范畴**（topologized category）；**$l$ 进上同调**（$l$-adic cohomology））．Grothendieck 和 M. Artin 一起对于光滑射影簇证明了 Weil 的这两个猜想，并且证明了 $P_i(t)$ 总具有整的 $l$ 进系数，这些系数依赖于作为理论基础的素数 $l$ 的选取，人们预言这些系数事实上是不依赖于 $l$ 的整数，并且，一般而言，不依赖于上同调理论的选取．这个预言通常被称为 Weil 第三猜想（Weil third conjecture）．最后，Weil 第四猜想（Weil fourth conjecture）提出，多项式 $P_i(t)$ 的零点 $\alpha_i$ 作为代数整数有（Riemann 假设（Riemann hypothesis））

$$|\alpha_i|=q^{i/2}.$$

所有这些猜想都已被 P. Deligne 证明（[4]）．

Weil 猜想在数论中的主要应用在于对同余的研究．仅在曲线的情形的 Weil 的定理就可以导致一元有理三角和的最佳估计，这个估计已被推广到包含任意多个变元的和的情形．这套理论的另一个重要应用是估计**模形式**（modular form）的 Fourier 系数（Ramanujan-Peterson 问题（[4], [5]））．

事实上，上述结果仅是与簇 $X$ 的覆盖的 Galois 群表示相关联的，或者更广泛地，与 $X$ 的某个 $l$ 进层相关联的任意 $L$ 函数的更为一般的定理的特殊情形（[5], [10]）．这些函数是代数数论中人们熟知的 $L$ 函数在任意概型上的类比．

现在设 $X$ 是 Spec $\mathbf{Z}$ 上的有限型概形，使得它的一般纤维 $X\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q}$ 是有理数域 $\mathbf{Q}$ 上的非空代数簇．人们猜想 ζ 函数 $\zeta_X(s)$ 可解析开拓为整个 $s$ 平面上的半纯函数并且满足一个函数方程．在 [11] 中提供了此函数方程的假设形式．但是直到撰写此条目的时刻，仅在非常特殊的情形（有理曲面，可被模函数一致化的代数曲线以及具有复乘的 Abel 簇（[15]））证明了此猜想．在这种场合下的 Riemann 假设的类似物甚至还没有形成．

J. Birch, P. Swinnerton-Dyer ([12]) 和 J. Tate ([13]) 提供了研究 ζ 函数的新思想．为确切表述他们的猜想，应当注意函数 $\zeta_X(s)$ 是映射 $X\to\operatorname{Spec}Z$ 的纤维 $X_p$ 的 ζ 函数 $\zeta_{X_p}(s)$ 的乘积．这些纤维是有限域上的簇，根据 Weil 第一猜想，有多项式分解．将这些展开式连乘起来，即得到 ζ 函数的类似的表达式

$$\zeta_X(s)=\prod_i\zeta_X^{(i)}(s)^{(-1)^{i+1}}.$$

依据 Birch 和 Swinnerton-Dyer 猜想，函数 $\zeta_X^{(i)}(s)$ 在点 $s=\dim X-1$ 处的零点的阶等于 **Picard 簇**（Picard variety）Pic$(X)$ 的有理点群的秩（由 Mordell-Weil 定理，此秩是有限的）．于是，这个猜想本身也假定了 ζ 函数的半纯开拓的可能性，正如原来所猜想的那样．

Birch 和 Swinnerton-Dyer 猜想的最原始的形式曾对于域 $\mathbf{Q}$ 上的一类具有复乘的椭圆曲线被证明（[12]），这是对于一个庞大的一览表的研究的结果．随后还提出函数 $\zeta_X^{(1)}(s)$ 在点 $s=\dim X-1$ 的邻域内的展开式中变量 $s$ 的适当方幂的系数的假设值，此值应当等于

$$\frac{[Ш]\,|\det(a_i,a_j)|}{[\operatorname{Pic}X_{\text{tors}}][\operatorname{Pic}'X_{\text{tors}}]},$$

其中 [Ш] 是簇 Pic $X$ 的局部平凡的**主齐性空间**（principal homogeneous space）的 Шафаревич-Tate 群的预

料为有限的阶，$|\det(a_i, a_j)|$ 是由点的高度（见高度，**Diophantus 几何中的**（hight, in Diohantine geometry））得到的簇 Pic $X$ 的有理点群上的双线性型的行列式，$[\mathrm{Pic}\, X_{\mathrm{tors}}]$ 和 $[\mathrm{Pic}'\, X_{\mathrm{tors}}]$ 是 Pic $X$ 和它的对偶 Abel 簇上的有理点群的扭子群的阶. 这个表达式推广了代数数论中熟悉知的 Dedekind $\zeta$ 函数在点 $s=1$ 处的残数的表达式. 证明 Birch - Swinnerton - Dyer 猜想所包含的困难之一在于任一曲线的 Ш 群尚未被完全计算出来（1978）. 此假设的类似物对于定义在函数域上的曲线已被证明，但是，尽管在这种情形也必须假定起着 Ш 群作用的 **Brauer 群**（Brauer group）的有限性.

Tate（[13]）在研究 Galois 群在簇的代数闭链上的作用时对于偶数 $i$ 提出了关于 $\zeta_X^{(i)}(s)$ 的极点的猜想，即函数 $\zeta_X^{(2i)}(s)$ 在点 $s=i+1$ 处有极点，其阶等于余维数为 $i$ 的代数闭链群的秩. 这个论断与 Tate 关于代数闭链的猜想密切相关. 有关导致这些猜想的证明的各种途径以及支持这些猜想的各种论证，见 [5]，[7]，[12]，[13]，[17].

除了刚刚描述过的 $\zeta$ 函数的概念之外，作为模形式的 Mellin 变换的 $\zeta$ 函数在代数群的自守函数的理论中一直被人们所研究. 1967 年 Weil 指出对于 $\mathbf{Q}$ 上的椭圆曲线 $X$，关于 $\zeta_X^{(1)}(s)$ 的普遍猜想的一个推论是 $X$ 被模函数一致化，此时 $\zeta_X^{(1)}(s)$ 是对应于 $X$ 上的第一类微分的模形式的 Mellin 变换. 这个见解导致了任意概型 $X$ 的函数 $\zeta_X^{(i)}(s)$ 都是相应的模形式的 Mellin 变换的设想. 有关这个问题的基本结果是由 E. Jacquet 和 R. Langlands 得到的（[7]，[9]）. 特别地，他们构造了广泛的一类满足一定的函数方程并可以展成 Euler 乘积的 Dirichlet 级数，这些级数可被表为群 GL(2) 上的模形式的 Mellin 变换. 这个定理的条件的被满足直接关系到前面所讨论的有关 $\zeta$ 函数的普遍性质的猜想. 这些条件的验证目前仅对于定义于函数域上的曲线才有可能.

从 1970 年起，在代数数域（[14]）的 $p$ 进 $\zeta$ 函数的影响下，出现了通往概型 —— 主要是椭圆曲线的 $\zeta$ 函数的一条类似的途径. 这里涉及的问题大多与上述所讨论的相似，它们展现在 [9] 中. $\mathbf{Q}$ 上的椭圆曲线的 $\zeta$ 函数与该曲线的一维形式群（formal group）密切相关，二者互相完全决定.

**参考文献**


[1] Artin, E., Quadratische Körper im Gebiet der höheren Kongruenzen I, II, *Math. Z.*, **19** (1924), 153 − 246.

[2] Weil, A., Courbes algébriques et variétés abéliennes. sur les courbes algébriques et les variétes qui s'en deduisent, Hermann, 1948.

[3] Weil, A., Numbers of solutions of equations in finite fields, *Bull Amer. Math. Soc.*, **55** (1949), 5, 497 − 508.

[4] Deligne, P., La conjecture de Weil I, *Publ. Math, IHES*, **43** (1974), 273 − 307.

[5] Grothendieck, A., et al. (eds.), Dix exposés sur la cohomologie des schémas, North - Holland, 1968.

[6] Dwork, B., A deformation theory for the zeta - function of a hypersurface, in Proc. Internat. Congress Math - ematicians (Djursholm, 1963), Almqvist & Weksell, 1963, 247 − 259.

[7] Jacquet, E. and Langlands, R., Automorphic forms on *GL* (2), Springer, 1970.

[8] Манин, Ю. И., 《Успехи матем. наук》, **26** (1971), 6, 7 − 71.

[9] Kuyk, A., et al. (eds), Modular functions on one variable I − IV, Lecture notes in math., 349; 350, Springer, 1973.

[10] Serre, J. - P., Zeta and *L* - functions, in O. F. G. Schilling (ed.), Arithmatical Algebraic Geometry (Proc. Purdue Conf. 1963), Harper & Row, 1965, 82 − 92.

[11] Serre, J. - P., Facteurs locaux des fonctions zêta des variétés algébriques (définitions et conjectures), *Sem. Delange - Pisot - Poitou*, **19** (1969/70).

[12] Swinnerton - Dyer, P., The conjecture of Birch and Swinnerton - Dyer and of Tate, in T. Springer (ed.), Local Fields (Proc. Conf. Driebergen. 1966), Springer, 1967, 132 − 157.

[13] Tate, J., Algebraic cycles and poles of zeta functions, in O. F. G. Schilling (ed.), Arithmatical Algebraic Geometry (Proc. Purdue Conf. 1963), Harper & Row, 1965, 93 − 110.

[14] Шафаревич, И. Р., Дзете - функция, М., 1969.

[15] Shimura, G., Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions, Princeton Univ. Press, 1971.

[16] Honda, T., Formal groups and zeta functions, *Osaka J. Math.*, **5** (1968), 199 − 213.

[17] Паршин, А. Н., Итоги науки Алгебра. топология. Геометрия. 1970, М., 1971, 111 − 151.


А. Н. Паршин 撰

【补注】 Birch 和 Swinnerton - Dyer 猜想已被 S. Bloch 和 P. Beilinson 推广，这些推广的猜想把由代数闭链得到的周炜良群的秩和 $\zeta$ 函数的极点的阶联系起来，见 [A6] − [A8].

代数曲线上的某些椭圆曲线的 Tate - Шафаревич 群的阶最近已被计算（[A3] − [A5]）. 正如所预测的那样，在这些情形下它们是有限群. Weil 猜想和它们的证明已被推广到任意有限型概型的情形（[A1]）.

**参考文献**


[A1] Deligne, P., La conjecture de Weil, II, *Publ. Math. IHES*, **52** (1980), 137 − 252.

[A2] Freitag, E. and Kiehl, R., Etale cohomology and the Weil conjecture, Springer, 1988.

[A3A] Kolyvagin, V., Finiteness of $E(\mathbf{Q})$ and Ш$(E, \mathbf{Q})$ for a subclass of Weil curves, *Math. USSR Izv.*, **33** (1989). (*Izv. Akad. Nauk SSSR*, **52** (1988), 552 −

540).

[A3B] Kolyvagin, V., On the Mordell-Weil group and the shafarevich-Tate group of Weil elliptic curves, *Math. USSR Izv.*, 33 (1989). (*Izv. Akad. Nauk SSSR*, 52 (1988), 1154 – 1180).

[A4] Kolyvagin, V., On the structure of the Shafarevich-Tate groups, in S. Bloch, et al. (ed.), Algebraic Geometry, Lecture notes in Math, Vol. 1479, Springer, 1991, 94 – 121.

[A5] Rubin, K., The Tate-Shafarevich groups and $L$-functions of elliptic curves with complex multiplications, *Invent. Math.*, 89 (1987), 527 – 560.

[A6] Bloch, S., Algebraic cycles and values of $L$-functions I, *J. Reine Angew. Math.*, 350 (1984), 94 – 108.

[A7] Bloch, S., Algebraic cycles and values of $L$-functions II, *Duke Math. J.*, 52 (1985), 379 – 397.

[A8] Beilinson, A., Higher regulators and values of $L$-functions, *J. Soviet Math.*, 30 (1985), 2036 – 2070. (*Itoki Nayk. i Tekhn. Sovr. Probl. Mat.*, 24 (1984), 181 – 238).

【译注】 Birch 和 Swinnerton-Dyer 猜想的最早的突破见[B1]，即证明了定义在 **Q** 上的有复乘的椭圆曲线的 $L$ 函数在点 $s=1$ 处的零点的阶为零蕴含着该曲线上的有理点群的秩为零.

对于某些椭圆曲线已证明了其 Tate-Шафаревич 群的阶（除个别素因子之外）与 Birch-Swinnerton-Dyer 猜想所预料的相吻合，在其中的某些特殊情形下该猜想已被完全证实.

**参考文献**

[B1] Coates, J., Wiles, A., On the conjecture of Birch and Swinnerton-Dyer, *Invent. Math.*, 39 (1977), 223 – 251.

[B2] Rubin, K., The "main conjecture" of Iwasawa theory for imaginary quadratic fields, *Invent. Math.*, 103 (1991), 25 – 68.

赵春来 译

## Жегалкин 代数 [**Zhegalkin algebra**; **Жегалкина алгебра**]

特殊代数 $\mathfrak{A}=\langle A, \Omega\rangle$，其中

$$A=\{0, 1\}, \Omega=\{x\cdot y, x+y(\mathrm{mod}\,2), 0, 1\},$$

$x\cdot y$ 是乘法运算. $\Omega$ 在 $A$ 上作用的**克隆**（clone）$F$ 是有趣的. $F$ 中每一个运算是一个 mod 2 的多项式，称为 Жегалкин 多项式（Zhegalkin polynomial），因为最初研究这种克隆的是 И. И. Жегалкин ([1]). 他证明了 $A$ 上每个有限运算包含在 $F$ 中. 于是对 $F$ 的性质的研究，就包含了对任意 $\Omega'$ 的所有代数 $\mathfrak{A}=\langle A, \Omega'\rangle$ 的研究.

**参考文献**

[1] Жегалкин, И. И., 《Матем. сб.》, 34 (1927), 1, 9 – 28.

[2] Cohn, P. M., Universal algebra, Reidel, 1986.

[3] Яблонский, С. В., Гаврилов, Г. П., Кудрявцев, В. Б., Функции алгебры логики и классы Поста, М., 1966.

В. Б. Кудрявцев 撰

【补注】 换句话说，Жегалкин 代数是二元 **Boole 环**（Boolean ring），域 $\mathbf{Z}/(2)$ 或零个生成元的自由 Boole 代数. 因此在西方文献中一般不另起名字. 例如见，**Boole 代数**（Boolean algebra）；**Boole 方程**（Boolean equation）. 对所有代数 $\mathfrak{A}=\langle A, \Omega'\rangle$ 的研究是 E. Post 论著[A1]的主题.

**参考文献**

[A1] Post, E., The two-valued iterative systems of mathematical logic, Princeton Univ. Press, 1941.

卢景波 译

## Жуковский 函数 [**Zhukovskii function**; **Жуковского функция**]

复变量 $z$ 的有理函数

$$w=\lambda(z)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right).$$

它在流体力学中的应用很重要，这是 Н. Е. Жуковский（见[1]，[2]）基本上为构造和研究 Жуковский 剖面（Zhukovskiĭ profile）（Жуковский 翼（Zhukovskiĭ wing））而发现的. 假设在 $z$ 平面上给定一个通过点 $z=\pm1$ 的圆 $K$（图 1）和一个从 $K$ 外部与之相切于 $z=1$ 的圆心为 $\alpha$ 半径为 $\rho$ 的圆 $K'$. 在变换 $w=\lambda(z)$ 作用下，$K'$ 的图象变为一条于点 $w=1$ 处有一尖点的封闭曲线 $L'$，它与圆弧 $L$（$K$ 的映象）相切于该点，此图象示于图 2，这就是 Жуковский 剖面.

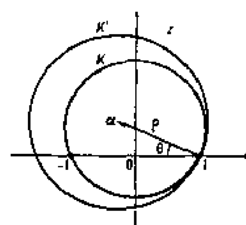



图 1

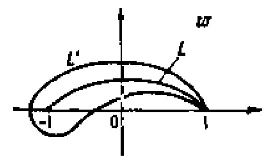



图 2

函数 $w=\lambda(\rho t+\alpha)$ 将 $t$ 平面上单位圆的外表映变为 $L'$ 的外表. 为获得更一般形状和布局的 Жуковский 剖面，使用广义 Жуковский 函数（generalized Zhukovskiĭ function）（见[3]，[4]，[5]）：

$$w=\frac{1}{2}(a-b)z+\frac{1}{2}(a+b)\frac{1}{z}, \quad a>b>0.$$

**参考文献**

[1] Жуковский, Н. Е., Гидродинамика, Собр. соч., М.-Л., т. 2, 1949.

[2] Жуковский, Н. Е., Теоретические основы воздухоплавания, Собр. соч., М.-Л., т. 6, 1950

[3] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1-2, М., 1967-1968 (英译本: Markushevich, A. I., The theory of functions of a complex variable, 1-2, Chelsea).

[4] Седов, Л. И., Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, 2 изд., М., 1966 (英译本: Sedov, L. I., Two-dimensional problems in hydrodynamics and aerodynamics, Acad. Press, 1965).

[5] Кочин, Н. Е., Кибель, И. А., Розе, Н. В., Теоретическая гидромеханика, ч. 1, 6 изд., М., 1963.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 Жуковский 剖面 (或 Жуковский 翼剖面 (Zhukovskii aerofoils)) 具有缺陷, 即如上所指的它们在后缘有一尖点. 这意味着, 如果不得不用这种剖面建造机翼, 就将得到一个非常薄的从而是易损坏的机翼后部. 由于这个理由, 已采用了在后缘有一个带清晰切线的奇点的更普遍的剖面 (von Kármán-Trefftz 剖面 (von Kármán-Trefftz profiles)). Жуковский 剖面的另一种推广在沿着扩充参量数目的方向发展 (von Mises 剖面 (von Mises profiles)).

Жуковский 翼剖面在西方文献中通常称为 Kutta-Жуковский 翼剖面 (Kutta-Zhukovskii aerofoils), 在西方文献中 Жуковский 常被拼写为 "Joukowski".

**参考文献**

[A1] Birhoff, G., Hydrodynamics, Princeton Univ. Press, 1960.

[A2] Lighthill, J., An informal introduction to theoretical fluid mechanics, Clarendon Press, 1986.

[A3] Mises, R. von, Theory of flight, Dover, reprint, 1959.

李维新 译

## Жуковский 定理 [Zhukovskiĭ theorem; Жуковского теорема]

由 Н. Е. Жуковский 于 1906 年应用复变函数理论的方法得到的不可压缩理想流体的流体力学基本定理之一: 在流体 (气体) 的平面平行定常流中机翼的升力 (机翼单位长度的) 垂直于无穷远处流的速度并在数量上等于这速度与速度旋度和流体密度的乘积. 当应用 Жуковский 定理时必须记住, 速度旋度的大小是由关于翼的尖后缘处流体速度的有限性的 Жуковский 条件 (Zhukovskii condition) 唯一确定的 (见 **Жуковский 函数** (Zhukovskii function) 条目中的图 2 和文献).

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 在西方文献中此定理通常称为 Kutta-Жуковский 定理 (Kutta-Zhukovskii theorem), "Zhukovskii" 也拼写为 "Joukowski".

**参考文献**

[A1] Ландау, Л. Д. и Лифшиц, Е. М., Гидродинамика, Физматгиз, 1958 (中译本: Л. Д. 朗道, Е. М. 栗弗席兹, 连续介质力学, 人民教育出版社, 1958).

[A2] Birkhoff, G., Hydrodynamics, Princeton Univ Press, 1960.

[A3] Lamb, H., Hydrodynamics, Cambridge Univ Press, 1932.

[A4] Milne-Thompson, L. M., Theoretical hydrodynamics, McMillan, 1957.

[A5] Prandtl, L. and Tietjens, O. G., Applied hydro-& aeromechanics, Dover, reprint, 1934.

[A6] Prandtl, L. and Tietjens, O. G., Fundamentals of hydro-& aeromechanics, Dover, reprint, 1934.

李维新 译

## 带球面函数 [zonal spherical functions; зональные сферические функции]

见**球面调和函数** (spherical harmonics).

## 正态吸引带 [zone of normal attraction; нормального притяжения зона]

形如 $0 \leqslant x \leqslant \psi(n)$ 的区域, 使得当 $n \to \infty$ 时,

$$\frac{P\{Z_n \geqslant x\}}{P\{Y \geqslant x\}} \to 1 \text{ 或 } \frac{P\{Z_n \leqslant -x\}}{P\{Y \leqslant -x\}} \to 1,$$

其中 $\{\psi(n)\} \uparrow \infty$, $\{Z_n\}$ 是随机变量序列, 而 $Y$ 是有**正态分布** (normal distribution) 的随机变量. 正态吸引带已经就如下情形进行了研究:

$$Z_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} (X_j - a),$$

其中 $\{X_n\}$ 是有数学期望 $a$ 和有限正方差 $\sigma^2$ 的独立同分布的随机变量序列.

**参考文献**

[1] Ибрагимов, И. А., Линник, Ю. В., Независимые и стационарно связанные величины, М., 1965 (英译本: Ibragimov, I. A., Linnik, Yu. V., Independent and stationary sequences of random variables, Wolters-Noordhoff, 1971).

В. В. Петров 撰

【补注】 这个大偏差问题的更加一般的陈述如下 ([A3]): 假设对于一族随机过程 $\xi^a(t)$, 某个大数律型的结果成立 (见**大数律** (law of large numbers)), 当 $a \to \infty$ 时, $\xi^a \to x$. 对于大的 $a$ 值, 过程 $\xi^a(t)$ 与其最可能轨道 $x(t)$ 的大偏差问题, 和 $a \to \infty$ 时可测集 $A$ 的无穷小概率 $p^a(\xi^a \in A)$ 的极限性态有关, 其中 $A$ 与非随机极限函数 $x$ 保持一个正的距离 (在适当的函数空间 (轨道空间) 中). 有关形如 $\mathrm{E}^a[f^a(\xi^a)]$ 的期望当 $a \to \infty$ 时渐近性质的问题, 如果对于大的 $a$ 值这些期望的主部来自 $\xi^a$ 的低概率值, 则也构成大偏差理论的一部分.

参考文献


[A1] Petrov, V. V., Sums of independent random variables, Springer, 1975 (译自俄文).
[A2] Serfling, R. J., Approximation theorems of mathematical statistics, Wiley, 1980.
[A3] Wentzell, A. D., Limit theorems on large deviations for Markov stochastic processes, Kluwer, 1990 (译自俄文).
[A4] Saulis, L., Statulevičius, V. A., Limit theorems for large deviations, Kluwer, 1991 (译自俄文).


潘一民 译

## 全对称多面体 [zonohedron; зоноэдры]

一个可以表示为有限多条线段的向量和的**多面体**(polyhedron). $n$ 维空间中的全对称多面体有时称为全对称多胞形(zonotopes). 全对称多面体是凸多面体; 全对称多面体自身和它的(所有维数的)所有面都有对称中心. 一个凸多面体成为全对称多面体的充分条件是它的所有二维面有对称中心. 任一全对称多面体是一个充分高维的立方体的射影. 全对称多面体的极限情形——广环(zonoids)在中心对称凸体类中具有特殊的作用; 它们允许有支撑函数的一种特殊积分表示, 并且是 Banach 空间 $L_1$ 中球面的有限维截面.

参考文献


[1] Bolker, E., A class of convex bodies, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **145** (1969), 323 – 345.
[2] Weil, W., Kontinuierliche Linearkombination von Strecken, *Math. Z.*, **148** (1976), 1, 71 – 84.


В. А. Залгаллер 撰

【补注】 全对称多面体或全对称多胞形在凸性(射影体, 铺砌)、分析(Radon 变换, 向量值测度, $L_1$ 的子空间)和随机几何学(点过程)中具有重要作用. 现代的综合评述有[A1]和[A2].

参考文献


[A1] Schneider, R. and Weil, W., Zonoids and related topics, in P. M. Gruber and J. M. Wills (eds.): Convexity and Its Applications, North-Holland, 1983, 296 – 317.
[A2] Goodey, P. and Weil, W., Zonoids and generalisations, in P. M. Gruber and J. M. Wills (eds.), Handbook of Convex Geometry, North-Holland, 1992.


陆珊年 译

## Zorn 引理 [Zorn lemma; Цорна лемма], 极大原理(maximal principle)

如果非空**偏序集**(partially ordered set) $X$ 的每一全序子集(见**全序集**(totally ordered set))都具有上界, 则 $X$ 含有极大元. 称元素 $x_0$ 是子集 $A \subset X$ 的上界(upper bound), 如果对任意 $x \in A$ 有 $x \leqslant x_0$. 如果集合 $A$ 的上界存在, 则称 $A$ 是上有界的(bounded above). 称元素 $x_0 \in X$ 在 $X$ 中是极大的(maximal), 如果没有 $x \in X$, $x \neq x_0$, 使得 $x_0 \leqslant x$.

该引理是 M. Zorn 在[1]中表述和证明的. 它与**选择公理**(axiom of choice)等价.

参考文献


[1] Zorn, M., A remark on a method in transfinite algebra, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **41** (1935), 667 – 670.
[2] Kelley, J. L., General topology, Springer, 1975.


Б. А. Ефимов 撰

【补注】 一些数学家曾独立地引入了极大原理的早期形式, 最早的是 F. Hausdorff 于 1909 年引入的. 这些早期形式与上述的极大原理虽在细节上有差异, 但在逻辑上是等价的. 关于极大原理的历史, 见[A1] – [A3].

参考文献


[A1] Campbell, P. J., The origin of Zorn's lemma, *Historia Math.*, **5** (1978), 77 – 89.
[A2] Moore, G. H., Zermelo's axiom of choice, Springer, 1982.
[A3] Rubin, J. and Rubin, H., Equivalents of the axiom of choice, 1 – 2, North-Holland, 1963 – 1985.


赵希顺 译

## Zygmund 函数类 [Zygmund class of functions; Зигмунда класс функций]

令 $M$ 是一正实数. Zygmund 函数类 $Z_M$ 是由周期为 $2\pi$ 的连续函数 $f$ 组成的类, 具有性质: 对所有 $x$ 和 $h > 0$, 不等式

$$|f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)| \leqslant Mh$$

成立. 类 $Z_M$ 是由 A. Zygmund 引进的([1]). 利用类 $Z_M$, 可以获得函数逼近论中有关正、逆定理的 Jackson-Бернштейн 问题的确定解(见 **Бернштейн 定理**(Bernstein theorem); **Jackson 定理**(Jackson theorem)). 例如, 对某个 $M > 0$, 一个周期为 $2\pi$ 的连续函数 $f$ 属于 Zygmund 类 $Z_M$, 当且仅当次数不高于 $n$ 的三角多项式对该函数的最佳一致逼近误差 $E_n(f)$ 满足不等式

$$E_n(f) \leqslant \frac{A}{n},$$

其中 $A > 0$ 是某个常数. 对任何函数 $f \in Z_M$ 的连续模 $\omega(\delta, f)$, 估计

$$\omega(\delta, f) \leqslant \frac{M}{2\ln\sqrt{2}+1}\,\delta \ln\frac{\pi}{\delta} + O(\delta)$$

均成立, 而且常数 $M/2\ln(\sqrt{2}+1)$ 在整个类 $Z_M$ 中不可能再改善([3]).

**参考文献**


[1] Zygmund, A., Smooth functions, *Duke Math. J.*, **12** (1945), 47 − 76. (Also: Selected papers of Antoni Zygmund, Vol. 2, Kluwer, 1989, 184 − 213).

[2] Никольский, С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М., 1969 (英译本: Nikol'skii, S. M., Approximation of functions of several variables and imbedding theorems, Springer, 1975).

[3] Ефимов, А. В., 《Изв. АН СССР, Сер. матем.》, 21 (1957), 2, 283 − 288.


А. В. Ефимов 撰

【补注】 对周期为 $2\pi$ 的函数 $f$ 而言，量

$$\omega_f^*(h) = \sup_x \sup_{|\delta| \leq h} |f(x+\delta) - 2f(x) + f(x-\delta)|$$

是 $f$ 的 Zygmund 模 (Zygmund modulus). 利用这种模，上述 Zygmund 定理 (Zygmund theorem) 也可以叙述为：对某个 $A$，一个周期为 $2\pi$ 的函数 $f$ 满足 $E_n(f) \leq n^{-1}A$，当且仅当对某个 $B$，$\omega_f^*(h) \leq Bh (h > 0)$ 成立.

**参考文献**


[A1] Cheney, E. W., Introduction to approximation theory, Chelsea, reprint, 1982, p. 203 ff.


王仁宏、檀结庆 译

# 索　　引

中文索引

英文索引

俄文索引

# 使用说明

## 一、中文索引

1. 本索引收录了正文中的全部条目、给出定义的名词术语以及其他一些比较重要的词语。
2. 本索引中用黑体字排的是本书条目，其中加＊号的，是一些条目的逆排。
3. 本索引排列的次序是：
   (1) 首先是以汉字起首的单词和复合词，依汉语拼音字母顺序排列；
   (2) 其次是以西文字母起首的复合词，依拉丁字母顺序排列；
   (3) 再次是以俄文字母起首的复合词，依俄文字母顺序排列；
   (4) 最后是以数字和符号起首的复合词。

## 二、英文索引

1. 本索引收录了正文中全部条目的英文名称。
2. 本索引依英文字母顺序排列。

## 三、俄文索引

1. 本索引收录了正文中全部条目的俄文名称。
2. 本索引依俄文字母顺序排列。

# 中 文 索 引

## 以汉字起首的单词和复合词

### A



### B

## C

## D

## E

## H

## J

## K

## M

## O



## P

## Q

## R

## S

# T

## W

## X

# Y

## Z

## 以西文字母起首的复合词

### A

## C

## D

# E

## F

## H

## K

## L

## M

## N

## O



## P

## Q



## R

## S

## T

## W

## X



## Y



## Z

## 以俄文字母起首的复合词

## A

## Б



## В



## Г

## Л

## M

## Н



## О



## П

## Ш



## Щ



## Я



## 以希腊字母起首的复合词

## A



## B



## Γ



## Δ



## E

# 英 文 索 引

## A

# B

# C

# D

# E

# F

# G

# H

# I

## J

# K

# L

# M

# N

# O

# P

# Q

# R

# S

# T

# U

# V

## W

# Y

# Z

# 俄 文 索 引

## A

# Б

# В

# Г

# Д

# Е



# Ж



# З

# И

# К

# Л

# M

# Н

# O

# П

# Р

# C

# Т

# У

# Ф

# X

# Ц

# Ч



# Ш

## Э

# Ю



# Я

# 编 后 记

由原苏联科学院院士、通讯院士和苏联数学各领域的权威学者执笔撰写的《数学百科全书》(Математическая энциклопедия,1977—1986)及其英译增补版(Encyclopaedia of mathematics, 1988—1994)是当今世界上的一部最新、最全面、水平最高的大型数学工具书,对于我国广大科学工作者(特别是数学工作者)、工程技术人员、教师和学生都有重要参考价值。1989 年 7 月 15 日中国数学会第五届常务理事会第六次会议在中国科学院数学所召开,理事长王元院士主持会议,讨论决定支持与指导科学出版社翻译出版这部巨著,并将其列为中国数学会的最重要的工作之一;随后立即成立了编译委员会,负责组织领导工作;科学出版社成立了《数学百科全书》编辑组,承担具体的编辑工作,从此开始了为期十年的艰苦跋涉。至今,全书五卷的编译工作已经全部完成,并已从 1994 年起陆续出版。

本书篇幅巨大,内容广泛深入,涉及到现代数学的几乎一切领域,阐述了各个分支学科的历史背景、发展现状、最新成果,包括其中的具体问题和方法,定义和使用了几万个名词术语(其中有一些是近年来新出现的),编译工作是个分艰巨和繁重的。十年来,在编译委员会的领导和组织下,200 多位学者、专家参加了本书的编译工作,其中既有年长的数学家,也有中青年数学工作者。他们不辞劳苦,勇承重担,不计报酬多寡,克服重重困难,终于使本书中文版得以成功问世。

本书是国家新闻出版署重点图书规划项目之一,并得到国家自然科学基金(数学天元基金)和中国科学院科学出版基金联合资助。这保证了本书的顺利出版。

在这部巨著即将出齐之际,自然会使人想到老一辈数学家对这项工作的亲切关怀和热情鼓励。苏步青教授为本书题写书名。陈省身教授为中文版作序并来社指导工作,他还多次来信予以鼓励。陈省身教授在一次大会上讲:“科学出版社翻译出版的《数学百科全书》,共五大卷,每卷约千页。中国能够出版这样的巨著,即使是翻译,也是一项可喜的成就。这是一部十分完备的百科全书,值得赞扬的。”[①] 程民德教授在生病住院期间还坚持校阅有关学科的译稿。本书尚未出齐,程先生已不幸去世。程民德先生为科学出版社主编的一套优秀的研究生教材——《现代数学基础丛书》,出版了 40 多种,并已重印。对于老一辈数学家对数学出版所给予的大力支持和所寄予的厚望,后人当永志不忘。

本书前几卷出版后,受到许多数学家和读者的好评。武汉大学齐民友教授来信

---

① 陈省身,中国的数学——几件数学新闻和对中国数学的一些看法,自然科学进展,7(1997),2,129—135。

说:“看到第一卷后,大家赞不绝口,都说科学出版社为中国数学界做了一件大好事。”尽管如此,我们清楚地知道,由于本书编译工作难度极大,特别是由于编辑力量不足,编辑人员水平有限,科学出版社又正处于转型时期,本书中文版在科学内容、文字表达、名词术语的规范和统一等等方面,都存在许多差错和不足之处。这是我们对读者深感抱歉的。我们诚恳地欢迎热心的读者能够批评、指正,以期在重印时认真修订。

本书未设数学家条目。编译之初,曾计划增补 600 篇数学家小传,但是由于时间和人力的原因,这一工作未能完成。对此有兴趣的读者可参阅近年国内出版的有关著作。①

数学是中华民族擅长的学科。中国古代数学有过辉煌的成就,长期处于世界领先地位,只是到了明朝以后才逐渐停滞并远远地落后了。近 100 多年以来,经过几代人的不懈努力,我国数学取得了重大进步,在某些领域涌现出了一批世界第一流的数学家。现在,众多的数学工作者正在为振兴我国的数学事业而奋斗,以使中国数学在 21 世纪能够率先赶上世界先进水平,使中国成为一个数学大国。科学出版社在 80 年代编译出版了日本的《岩波数学辞典》(第二版)(《数学百科辞典》,1984),现在又编译出版了苏联的《数学百科全书》;我们热切地企盼着在下一个世纪能够出版我国自己编纂的、具有世界水平的《数学大辞典》或者《数学百科全书》。

科学出版社《数学百科全书》编辑组

张鸿林　杜小杨　夏墨英

1999 年 12 月

① 例如,可参阅:吴文俊主编,世界著名数学家传记(上、下册),科学出版社,1995;梁宗巨主编,数学家传略辞典,山东教育出版社,1989。

[General Information]
[illegible]=[illegible] [illegible]
[illegible]=
[illegible]=967
SS[illegible]=10350810
[illegible]=